Спектр сигнала. Дискретное преобразование Фурье.

Как известно, звуковой сигнал в компьютере может представляться в виде некоторого набора отсчётов его амплитуд, производимых через определённые промежутки времени (период дискретизации) и представляемых некоторым количеством двоичных разрядов (разрядность выборки). Такое представление (во временной области) удобно для хранения звукового сигнала и его преобразования обратно в непрерывный сигнал. Однако, в некоторых случаях при выполнении обработки звукового сигнала (например, фильтрация) целесообразно перейти к спектру сигнала.

Частотный спектр сигнала — это распределение энергии сигнала по частотам. Спектр бывает амплитудный и фазовый.

Доказано, что если некоторая периодическая функция с периодом $2T$ на интервале [-T, T] удовлетворяет условиям Дирихле (непрерывна и имеет конечное число экстремумов и точек разрыва I рода), то она может быть представлена в виде суммы ряда Фурье (разложена в ряд Фурье):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

Для определения коэффициентов ряда Фурье справедливы следующие формулы:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) cos \frac{n\pi x}{T} dx$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) sin \frac{n\pi x}{T} dx$$

Если раскладываемая функция является чётной (*f(-x)* = *f(x)*), то ряд Фурье состоит только из косинусов, т. е. все коэффициенты при синусах равны 0. Если раскладываемая функция является нечётной (*f(-x)* = -*f(x)*), то ряд Фурье состоит только из синусов, т. е. все коэффициенты при косинусах равны 0. В общем случае, коэффициенты при синусах и косинусах не равны 0.

Таким образом, любую периодическую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье, тем самым представляя её в виде суммы синусов и косинусов.

Спектр дискретного периодического сигнала может быть рассчитан при помощи дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Дискретное преобразование Фурье имеет вид:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi ki}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_n [cos\frac{2\pi ki}{N} - jsin\frac{2\pi ki}{N}]$$

Обратите внимание, что косинусоидальные и синусоидальные компоненты в уравнении могут быть выражены в полярных или прямоугольных координатах, связь между которыми определяется формулой Эйлера:

$$e^{-j\varphi} = cos\varphi + jsin\varphi$$

После этого преобразования звуковой сигнал будет представлен в виде коэффициентов, соответствующим амплитудам и фазам частот, составляющих этот сигнал.

$$ReX_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} cos\frac{2\pi ki}{N}$$

$$ImX_k = -\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} sin\frac{2\pi ki}{N}$$

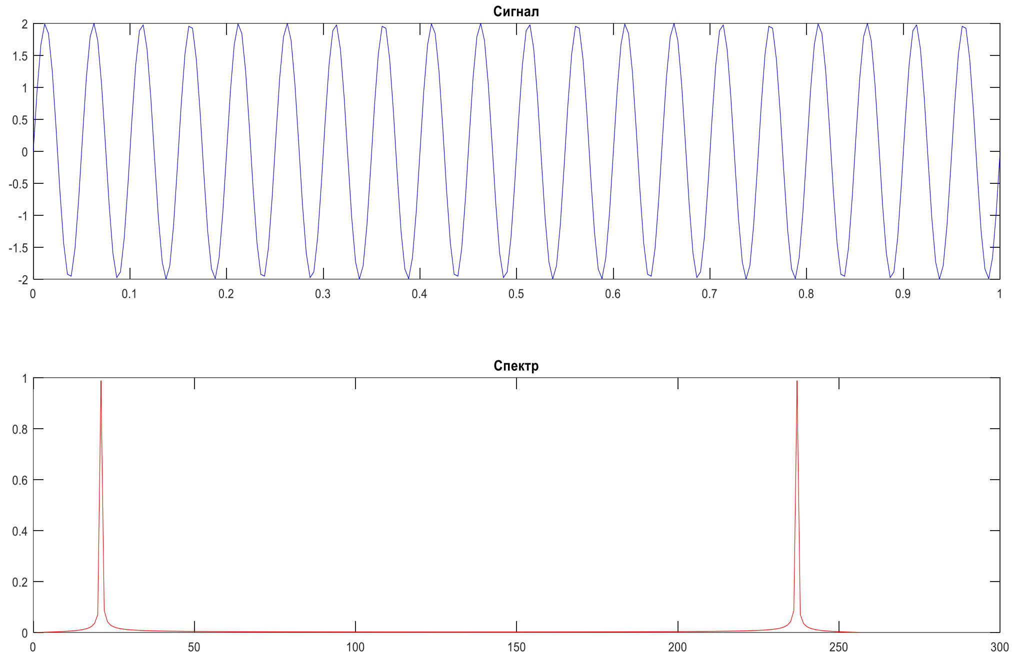
$$Abs[X_k] = \sqrt{ReX_k{}^2 + ImX_k{}^2}$$

$$\varphi[X_k] = \tan^{-1}\frac{ImX_k}{ReX_k}$$

Фактически, дискретное преобразование Фурье позволяет представить дискретную периодическую функцию в виде конечного числа частот с определёнными значениями амплитуды и фазы (раскладывает функцию в её спектр). Для определения амплитуд и фаз частотных составляющих сигнала, в дискретном преобразовании Фурье используется базисные функции синуса и косинуса. Спектр частот в дискретном преобразовании Фурье определяется из амплитуд синусов и косинусов, с частотами повторения в исследуемой выборке от 0 до N/2 раз, где N - количество элементов выборки. Преобразование Фурье раскладывает дискретизированный сигнал из N отсчетов на N/2 + 1 синусных и N/2 + 1 косинусных составляющих.

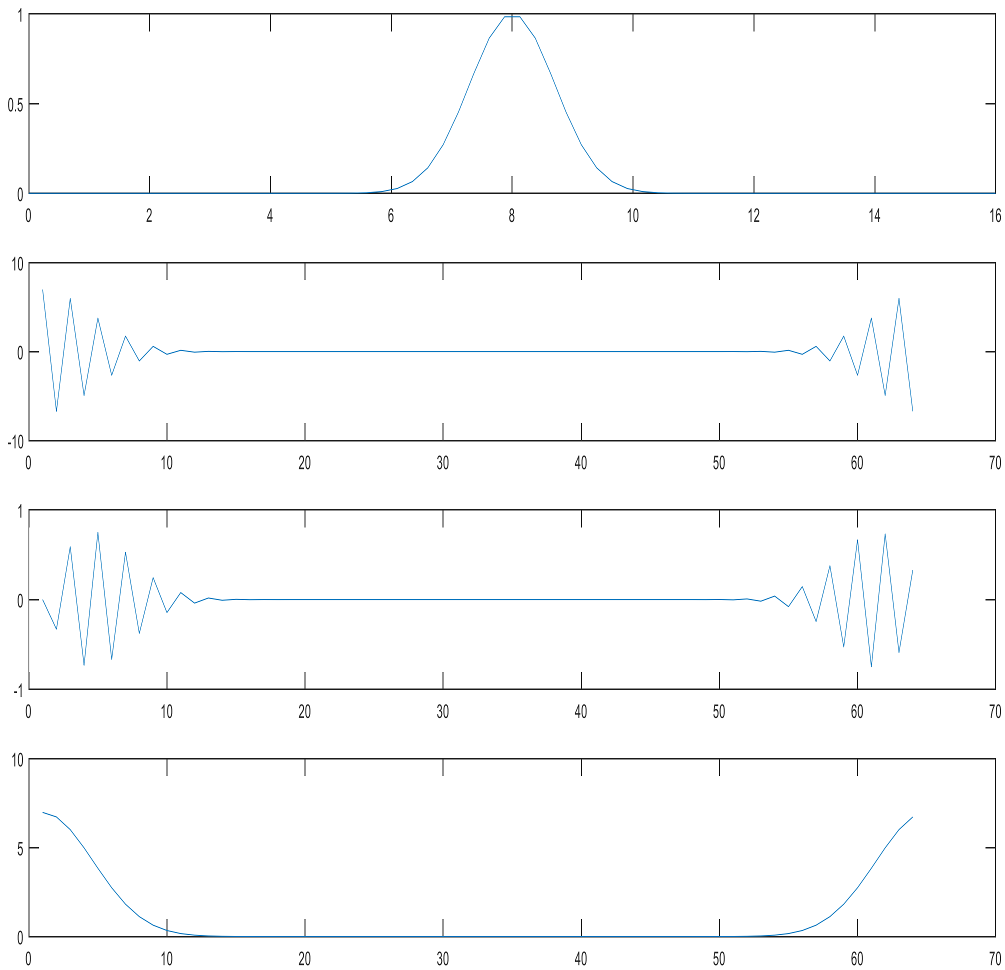
Примеры 1:

```
N=256;%Число точек
T=1;%Интервал времени,с
dt=T/(N);
Nyq=N/(2*T)%Частота Найквиста, Гц
df=1/T;%Шаг частоты
f=20;%Частота сигнала, Гц
w=2*pi*f;
t=linspace(0,T,N);%Задание вектора времени
s=2*sin(w*t./T);%Вычисление дискретной функции
F=fft(s)/N;%Вычисление преобразования Фурье
subplot(211);
plot(t,s,'b-');%Отрисовка исходной функции
subplot(212);
plot(1:N,abs(F(1:N)),'r-')
```



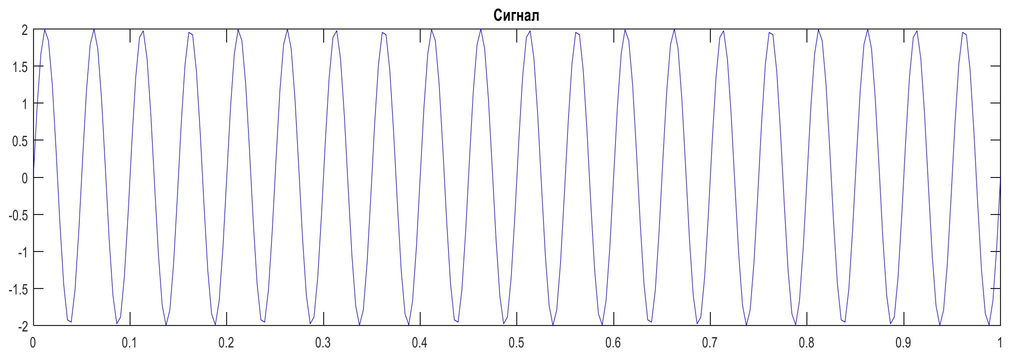
Примеры 2:

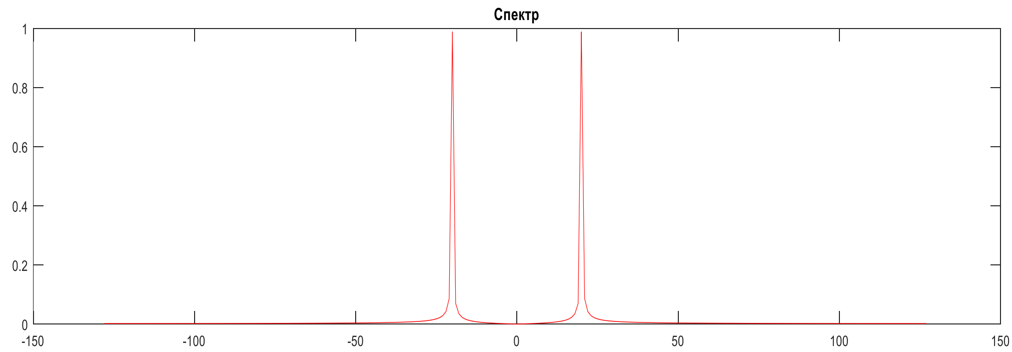
```
n=16;
N=64;
t=linspace(0,n,N);%Задание вектора времени
f=exp(-(t-n/2).^2);%Вычисление дискретной функции
F=fft(f);%Вычисление преобразования Фурье
subplot(411);
plot(t,f);%Отрисовка исходной функции
subplot(412);
plot(1:N, real(F));
subplot(413);
plot(1:N, imag(F));
subplot(414);
plot(1:N, abs(F));%Фурье образ как функция номера
```



Примеры 3:

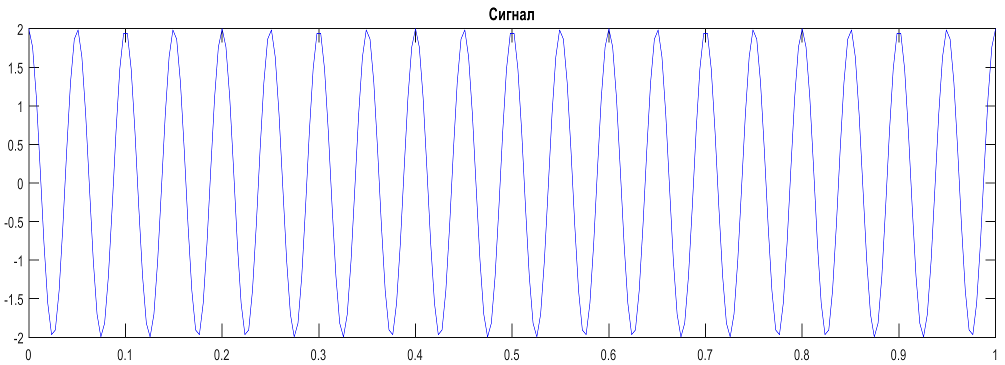
```
N=256;%Число точек
T=1;%Интервал времени,с
dt=T/(N);
Nyq=N/(2*T)%Частота Найквиста, Гц
df=1/T;%Шаг частоты
f=20;%Частота сигнала
w=2*pi*f;
t=linspace(0,T,N);%Задание вектора времени
s=2*sin(w*t./T);%Вычисление дискретной функции
F=fft(s)/N;%Вычисление преобразования Фурье
subplot(211);
plot(t,real(s),'b-');%Отрисовка исходной функции
F1=F(1:N/2+1);%Выделение первых N/2+1 (положительные
частоты)
F2=F(N/2+1:N);%Выделение спектра отрицательных частот
F=[F2,F1];%Объединение спектра
%Вычисление вектора частот
nu=-Nyq+df*(0:N);
subplot(212);
plot(nu(1:N),abs(F(1:N)),'r-')
```

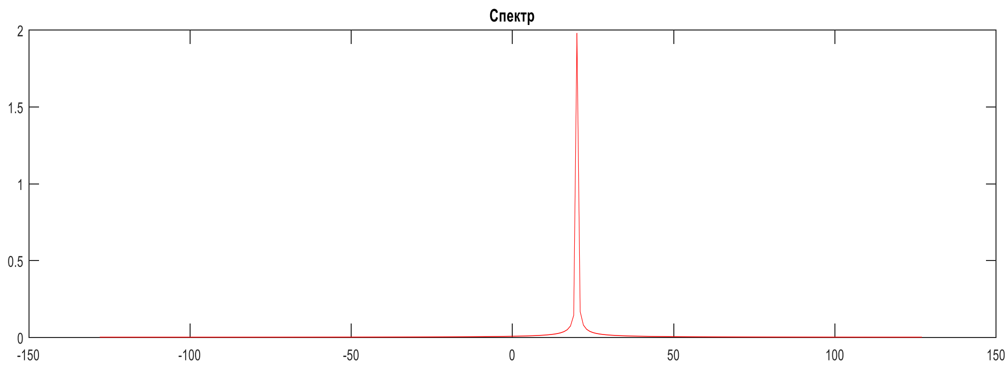




Примеры 4:

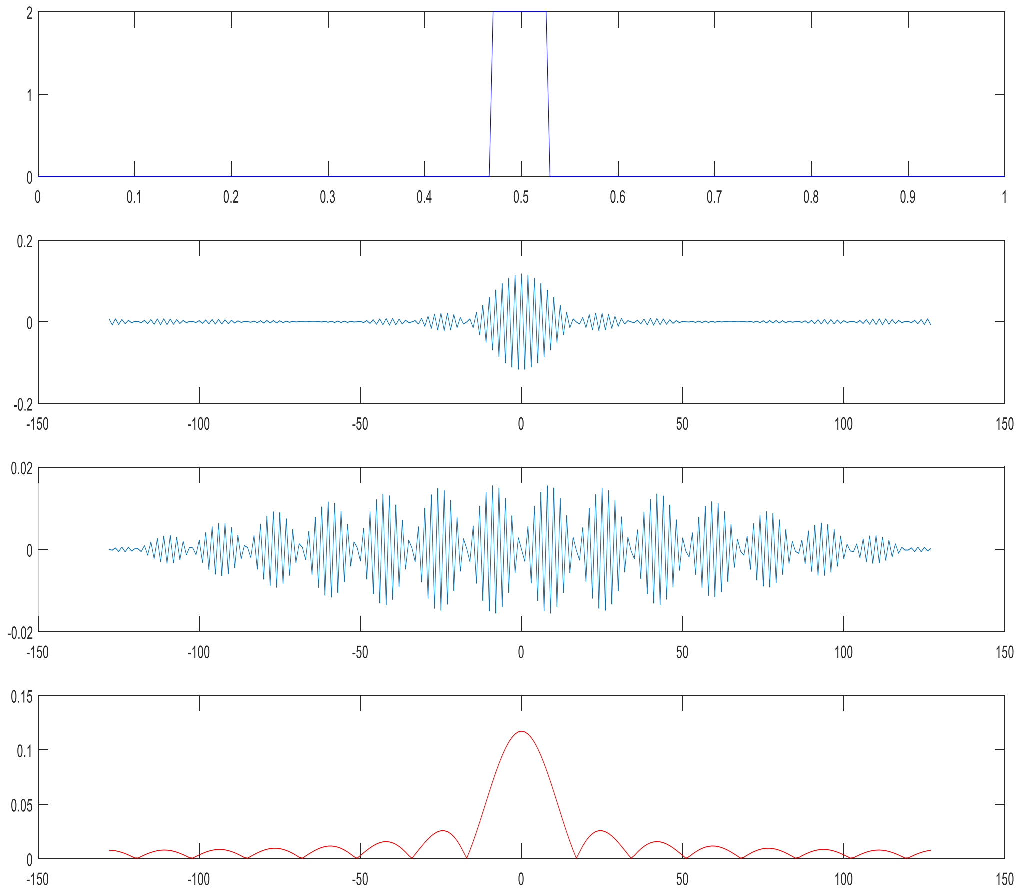
```
N=256;%Число точек
T=1;%Интервал времени,с
dt=T/(N);
Nyq=N/(2*T)%Частота Найквиста, Гц
df=1/T;%Шаг частоты
f=20;%Частота сигнала
w=2*pi*f;
t=linspace(0,T,N);%Задание вектора времени
s=2*(cos(w*t./T)+i*sin(w*t./T));%Вычисление дискретной
функции
F=fft(s)/N;%Вычисление преобразования Фурье
subplot(211);
plot(t,real(s),'b-');%Отрисовка исходной функции
F1=F(1:N/2+1);%Выделение первых N/2+1 (положительные
частоты)
F2=F(N/2+1:N);%Выделение спектра отрицательных частот
F=[F2,F1];%Объединение спектра
%Вычисление вектора частот
nu=-Nyq+df*(0:N);
subplot(212);
plot(nu(1:N),abs(F(1:N)),'r-')
```





Примеры 5:

```
%%%Прямоугольный импульс
N=256;%Число точек
T=1;%Интервал времени,с
dt=T/(N);
Nyq=N/(2*T)%Частота Найквиста, Гц
df=1/T;%Шаг частоты
f=50;%Частота сигнала
w=-2*pi*f;
t=linspace(0,T,N);%Задание вектора времени

for x=1:1:N;

s(1,x)=0;
if x > N/2 -8 & x < N/2 + 8;%Вычисление дискретной функции
  s(1,x)=2;
end

end;
F=fft(s)/N;%Вычисление преобразования Фурье
subplot(411);
plot(t,s,'b-');%Отрисовка исходной функции
F1=F(1:N/2+1);%Выделение первых N/2+1 (положительные  частоты)
F2=F(N/2+1:N);%Выделение спектра отрицательных частот
F=[F2,F1];%Объединение спектра
%Вычисление вектора частот
nu=-Nyq+df*(0:N);
subplot(412);
plot(nu(1:N),real(F(1:N)))
subplot(413);
plot(nu(1:N),imag(F(1:N)))
subplot(414);
plot(nu(1:N),abs(F(1:N)),'r-')
```



Эти формулы описывают прямое преобразование Фурье. ReX[x] - массив, содержащий значения косинусоидальных составляющих. ImX[x] - массив, содержащий значения синусоидальных составляющих. Такие обозначения введены в силу комплексного представления непрерывного преобразования Фурье (см. выше). При этом действительной части соответствуют косинусы, а мнимой - синусы. Это не должно вводить Вас в заблуждение - элементы этих массивов являются действительными числами и коэффициенты при синусах и косинусах являются действительными числами. Также, исследуемая функция является функцией действительного переменного. Комплексная форма преобразования Фурье может вводится для удобства записи двух интегралов - для косинуса и синуса. Массивы Re[x] и Im[x] составляют так называемый частотный домен (frequency domain), в то время как исходная выборка называется временным доменом (time domain).

ОДПФ

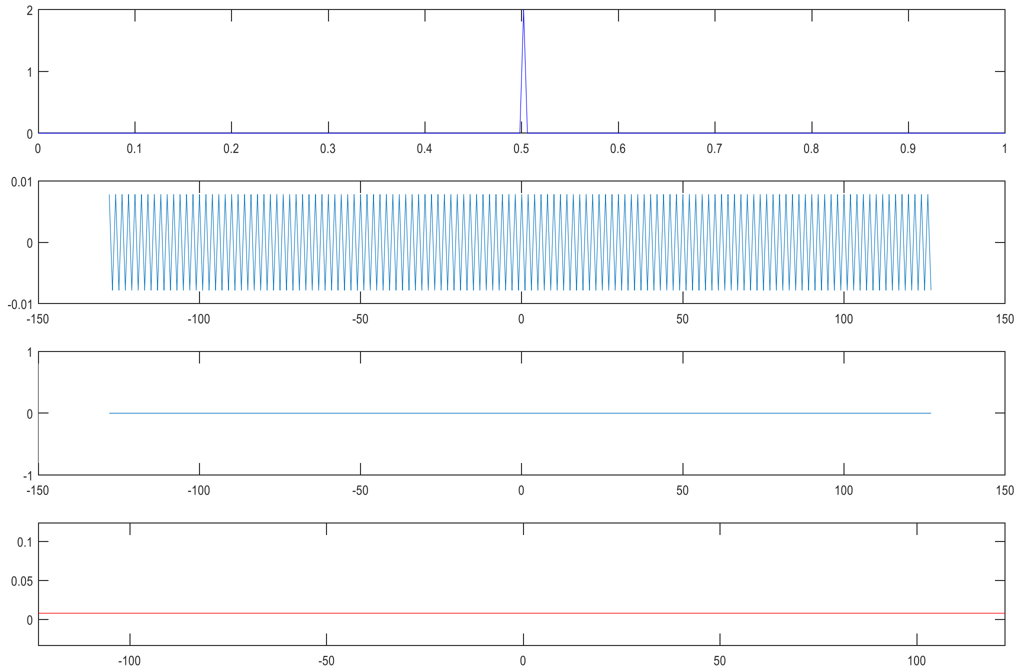
Обратное дискретное преобразование Фурье имеет вид:

$$x_n = \sum_{i=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi ki}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} X_k [cos\frac{2\pi ki}{N} + jsin\frac{2\pi ki}{N}]$$

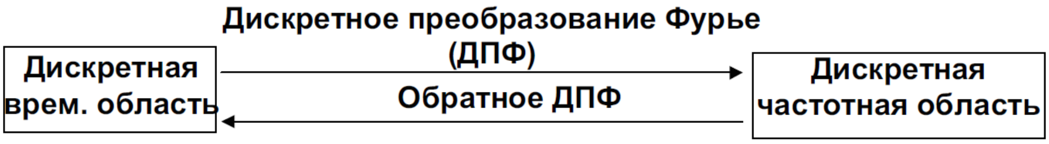
ОДПФ - из частотных составляющих позволяет сформировать исходный сигнал. Такой процесс преобразования называется синтезом или обратным преобразованием Фурье. Заметим, что формулы обратного преобразования аналогичны формулам прямого преобразования, только теперь подынтегральной функцией являются коэффициенты при синусах и косинусах. Это свойство является очень важным и называется двойственностью преобразования Фурье. Свойство двойственности позволяет объяснить следующий факт: единичный импульс во временном домене (единичное значение одной выборки при нулевых значениях остальных) соответствует синусоиде и косинусоиде в частотном домене и наоборот.

Примеры 6:

```
%%%Одиночный импульс
N=256;%Число точек
T=1;%Интервал времени,с
dt=T/(N);
Nyq=N/(2*T)%Частота Найквиста, Гц
df=1/T;%Шаг частоты
f=50;%Частота сигнала
w=-2*pi*f;
t=linspace(0,T,N);%Задание вектора времени

for x=1:1:N;

s(1,x)=0;
if x > N/2  & x < N/2 + 2;%Вычисление дискретной функции
  s(1,x)=2;
end

end;
F=fft(s)/N;%Вычисление преобразования Фурье
subplot(411);
plot(t,s,'b-');%Отрисовка исходной функции
F1=F(1:N/2+1);%Выделение первых N/2+1 (положительные  частоты)
F2=F(N/2+1:N);%Выделение спектра отрицательных частот
F=[F2,F1];%Объединение спектра
%Вычисление вектора частот
nu=-Nyq+df*(0:N);
subplot(412);
plot(nu(1:N),real(F(1:N)))
subplot(413);
plot(nu(1:N),imag(F(1:N)))
subplot(414);
plot(nu(1:N),abs(F(1:N)),'r-')
```



Применение дискретного преобразования Фурье (ДПФ)



- **Цифровой спектральный анализ**
  - **Спектральные анализаторы**
  - **Обработка речевого сигнала**
  - **Обработка сигналов изображения**
  - **Распознавание образов**

- **Проектирование фильтров**
  - **Вычисление импульсной характеристики по частотной**
  - **Вычисление частотной характеристики по импульсной**

- **Быстрое преобразование Фурье (БПФ) – просто алгоритм для эффективного вычисления дискретного преобразования Фурье**

Быстрое преобразование Фурье

ДПФ для своей реализации требует выполнения N^2 умножений комплексных чисел. ДПФ может быть сильно упрощено, если использовать свойства симметрии и периодичности коэффициентов. Результатом переработки выражений для ДПФ является быстрое преобразование Фурье (БПФ), которое требует только $\frac{N\log_2 N}{2}$ умножений комплексных чисел. Вычислительная эффективность БПФ по сравнению с ДПФ становится весьма существенной, когда количество точек БПФ увеличивается до нескольких тысяч. Очевидно, что БПФ вычисляет все компоненты выходного спектра (или все, или ни одного!). Если необходимо рассчитать только несколько точек спектра, ДПФ может оказаться более эффективным. Вычисление одного выходного отсчета спектра с использованием ДПФ требует только N умножений с комплексными числами.