Функциональный анализ — одна из важнейших областей современной математики. Его возникновение и развитие связано с именами таких крупных ученых как Гильберт, Рисс, Банах, Фреше, Колмогоров, Соболев, Тихонов и др.

Как самостоятельная математическая дисциплина функциональный анализ оформился в начале XX в. в результате переосмысления и обобщения ряда понятий математического анализа, алгебры и геометрии. Датой рождения функционального анализа считается 1932 г., когда вышла в свет основополагающая монография Стефана Банаха "Теория линейных операций".

Важной особенностью функционального анализа является общая абстрактная форма рассмотрения проблем анализа, позволяющая единообразно исследовать далекие, казалось бы, друг от друга вопросы. Именно поэтому сегодня идеи, концепции и методы функционального анализа проникают чуть ли не во все области математики, объединяя их в единое целое.

Функциональный анализ играет важную роль в современном математическом образовании инженера-исследователя, которому предстоит применять математические методы в конкретных областях науки. На языке функционального анализа получают ясное выражение основные проблемы прикладной и вычислительной математики.

Данный курс рассчитан на 32 лекционных часа + зачет + 32 часа практики.

Мы рассмотрим следующие разделы функционального анализа:

1. Теория меры.
2. Интеграл Лебега.
3. Метрические пространства и их свойства.
4. Нормированные векторные пространства.
5. Сопряженные операторы и сопряженные пространства.

Рекомендованная литература.

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн: "Университетское", 1984.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1972.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М: Наука, 1980.

4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теория и задачи функционального анализа. М: Наука, 1979.

5. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу.

Глава 1

ТЕОРИЯ МЕРЫ

§1. Предварительные сведения из теории множеств

Понятие множества является первоначальным. Множество X считается заданным, если известны его элементы, т.е. для любого элемента a выполнено $a \in X$ или $a \notin X$.

Основные определения и операции над множествами.

Пусть A и B — множества. Множество A есть **подмножество** множества B, если любой элемент множества A является элементом множества B. Обозначается $A \subset B$.

Множество всех подмножеств множества X обозначается $\wp(X)$.

Множество, состоящее из одного элемента x, обозначается $\{x\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается $\emptyset$. Для любого множества X выполнено $\emptyset \in X$.

Если на множестве X задано некоторое соотношение $P(x)$ между элементами этого множества, то подмножество, состоящее из этих элементов $x \in X$, для которых соотношение $P(x)$ истинно, записывается так

$$\{x|\ x \in X,\ P(x)\}.$$

Пусть A и B — множества.

Пересечением множеств A и B называется множество (см. Рис. 1)

$$A \cap B = \{x|\ x \in A,\ x \in B\}.$$

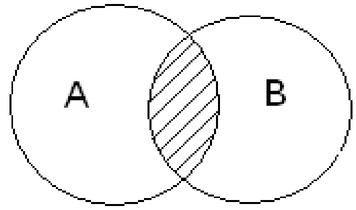

Рис. 1.

Если есть совокупность множеств $A_i,\ i \in I$ (I — конечное или бесконечное), то

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\, x|\ x \in A_i,\ i \in I\}\,.$$

Объединением множеств A и B называется множество (см. Рис.2)

$$A \cup B = \{\, x|\ x \in A \text{ или } x \in B\}\,.$$

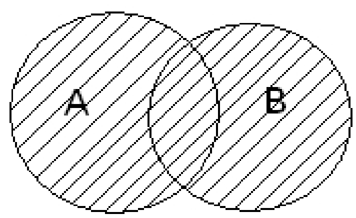

Рис. 2.

Если есть совокупность множеств $A_i,\ i \in I$, то

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x|\ \exists i \in I \text{ такое, что } x \in A_i\}.$$

Знаком $\sqcup$ будем обозначать в дальнейшем **объединение непересекающихся множеств**. Таким образом, запись

$$A = A_1 \sqcup A_2$$

означает, что

$$A = A_1 \cup A_2 \ \text{ и } \ A_1 \cap A_2 = \emptyset;$$

а запись

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = A$$

означает, что

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \ \text{ и } \ A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j, \ i,j \in I.$$

Разностью множеств A и B называется множество (см. Рис. 3)

$$A \backslash B = \{\, x|\ x \in A,\ x \notin B \}\,.$$

Если $A \subset B$, то $A \backslash B = \emptyset$.

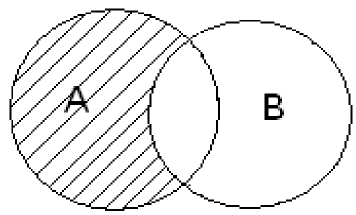

Рис. 3.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество (см. Рис. 4)

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

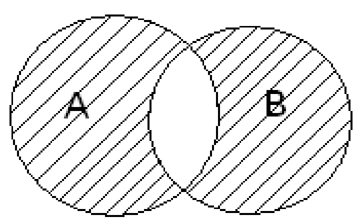

Рис. 4.

K — Канторово множество,

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел,

$\mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R}_-)$ — множество положительных (отрицательных) действительных чисел,

$\mathbb{R}^n$ — действительное n-мерное пространство,

$\mathbb{C}^n$ — комплексное n-мерное пространство,

$\wp(X)$ — множество всех подмножеств множества X.

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Определение 1. *Отношением между множествами X и Y называется любое подмножество R из декартова произведения $X \times Y$. Если $X = Y$, то отношение R называется отношением на X.*

Примеры отношений на множестве $\mathbb{R}$:

$x \leq y; \quad y = \sin x; \quad x - y \in \mathbb{Z}.$

Определение 2. *Отношение R на множестве X называется:*

1) рефлексивным, если $(x, x) \in R, \ \forall x \in X$;

2) симметричным, если из $(x, y) \in R \ \Rightarrow \ (y, x) \in R$;

3) транзитивным, если из $(x, y) \in R, \ (y, z) \in R \ \Rightarrow \ (x, z) \in R$;

4) антисимметричным, если из $(x, y) \in R, \ (y, x) \in R \ \Rightarrow \ x = y$.

Выделяются следующие виды отношений:

1. Отношение эквивалентности

Отношение $R \subset X \times X$ называется **отношением эквивалентности** на множестве X, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. (Для $x, y \in X$ обозначается $x \sim y$).

Если на X задано отношение эквивалентности, то множество X разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов. Класс, содержащий элемент x, обозначается $[x]$.

Пример. В качестве X возьмем множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Введем отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y = 3k, \ k \in \mathbb{Z}$. Множество $\mathbb{Z}$ распадается на три класса:

$$[0] = \{... -6,\ -3, 0, 3, 6, ...\}\,,$$
$$[1] = \{... -5,\ -2, 1, 4, 7, ...\}\,,$$
$$[2] = \{... -7,\ -4,\ -1, 2, 5, ...\}\,.$$

2. Отношение порядка

Отношение на множестве X называется **отношением порядка**, если оно транзитивно, рефлексивно и антисимметрично. Условие $(x, y) \in R$ в случае отношения порядка обозначается в виде $x \prec y$ и читается "y следует за x" или "x предшествует y".

Непустое множество X с заданным на нем отношением порядка называется **упорядоченным множеством**.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Введем отношение порядка R на множестве X :

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x \leq y.$$

Это отношение обладает следующими свойствами:

1) $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (транзитивность);

2) $x \leq x$ (рефлексивность);

3) $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$ (антисимметричность).

Пример 2. Пусть X — произвольное множество. На $\wp(X)$ зададим отношение R :

$$(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subset B.$$

Это отношение обладает свойствами:

1) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (транзитивность);

2) $A \subset A$ (рефлексивность);

3) $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$ (антисимметричность).

Следовательно, отношение $A \subset B$ задает на множестве $\wp(X)$ отношение порядка и говорят, что множество $\wp(X)$ упорядочено.

3. Функции или отображения (функция — это частный случай отношения).

Пусть X и Y - множества. Будем говорить, что на множестве X задана **функция (отображение)** f со значениями во множестве Y, если каждому элементу $x \in X$

поставили в соответствие один и только один элемент $f(x)$ из Y.

Отображение $f: X \to Y$ называется **инъективным**, если из того, что $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Отображение $f: X \to Y$ называется **сюръективным**, если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Отображение $f: X \to Y$ называется **биективным**, если оно инъективно и сюръективно.

Конечные и бесконечные множества.

Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можем указать число элементов в данном множестве. Это можно сделать (хотя бы принципиально), если множество состоит из конечного числа элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов.

Два конечных множества мы можем сравнить по количеству элементов и судить, одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше, чем в другом. Спрашивается, можно ли подобным образом сравнивать бесконечные множества?

Посмотрим, как мы сравниваем конечные множества. Можно поступить двояко:

I) сосчитать элементы одного множества, затем другого множества и сравнить два полученных числа;

II) можно установить биекцию, т.е. взаимно однозначное соответствие между элементами множеств.

Способ I) годится только для конечных множеств, способ II) можно использовать для сравнения и бесконечных множеств.

Определение 3. *Два множества X и Y называются равномощными, если существует биективное отображение $f: X \to Y$.*

Определение 4. *Множество X называется счетным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел.*

Определение 5. *Про множество X говорят, что оно имеет мощность континуума, если оно равномощно множеству всех действительных чисел из отрезка* $[0, 1]$.

Замечание. Объединение счетного множества счетных множеств является счетным множеством.

Примеры:

Множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ - счетны.

Множество многочленов с рациональными коэффициентами счетно.

Множества $[a, b]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ несчетные и равномощны между собой. Их мощность называется **мощностью континуума**.

§2. Кольца и полукольца множеств

Классы множеств, для которых в дальнейшем будет определена мера, оказываются обычно замкнутыми относительно теоретико-множественных операций.

Введем такие классы множеств.

Определение 1. *Пусть X — непустое множество. Непустое семейство $K \subset \wp(X)$ подмножеств множества X называется кольцом, если оно замкнуто относительно операций пересечения и симметрической разности, т.е.*

$$A \in K,\ B \in K \Rightarrow A \cap B \in K,\ A \Delta B \in K.$$

Упражнение. Доказать следующие формулы:

1) $A \backslash B = A \cap (A \Delta B)$,

2) $A \cup B = (A \cap B) \Delta (A \Delta B)$.

Из 1), 2) следует утверждение:

Утверждение 1. *Если K — кольцо множеств, то для любых $A, B \in K$ выполняется $A \backslash B \in K$, $A \cup B \in K$, т.е. кольцо замкнуто относительно операций разности и объединения множеств.*

Определение 2. *Кольцо K подмножеств множества X называется алгеброй, если $X \in K$.*

Замечание. Т.о. если K — алгебра, то для любого $A \in K$ следует, что $X \backslash A \in K$, т.е. алгебра замкнута относительно операции перехода к дополнениям.

Определение 3. *Кольцо K называется σ-кольцом, если объединение счетного числа множеств из K принадлежит K, т.е.*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K \text{ для } A_i \in K,\ i = 1, 2, \ldots$$

Определение 4. *Кольцо K называется δ-кольцом, если пересечение счетного числа множеств из K принадлежит K, т.е.*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in K \text{ для } A_i \in K,\ i = 1, 2, \ldots$$

Теорема 1. *Для любого набора множеств $S \subset \wp(X)$ существует кольцо $K(S)$ – наименьшее из всех колец, содержащих множество S. Кольцо $K(S)$ называется кольцом, порожденным множеством S.*

Замечание. Наименьшее здесь понимается в том смысле, что всякое другое кольцо, содержащее S, содержит также и $K(S)$.

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{K |\, S \subset K\}$ – множество всех колец, содержащих S. Т.к. всегда $\wp(X) \in \Sigma$, то $\Sigma \neq \emptyset$. Положим

$$K(S) = \bigcap_{K \in \Sigma} K.$$

Покажем, что $K(S)$ — кольцо.

Если $A \in K(S),\ B \in K(S)$, то $A \in K,\ B \in K$ для любого $K \in \Sigma$. Т.к. K – кольцо, то $A \cap B \in K$ и $A \Delta B \in K$ для всех $K \in \Sigma$. Следовательно, $A \cap B \in K(S)$ и $A \Delta B \in K(S)$, тогда $K(S)$ – кольцо.

По построению $K(S) \subset K$ для всех $K \in \Sigma$, следовательно $K(S)$ — минимальное кольцо. ■

Явное построение кольца $K(S)$ по семейству S может оказаться довольно сложной задачей. Поэтому выделяют наборы подмножеств S, для которых кольца $K(S)$ строятся наиболее просто.

Определение 5. *Непустая система подмножеств $S \subset \wp(X)$ называется полукольцом, если для любых $A, B \in S$ выполняется:*

1) $A \cap B \in S$;
2) *если $A \subset B$, то существует конечный набор множеств $A_i \in S,\ i = \overline{1, n}$, такой, что $B \backslash A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$.*

Замечание. Очевидно, что кольцо является полукольцом.

Действительно, пусть K — кольцо. Тогда для любых $A, B \in K$, т.е. выполняется условие 1). Условие 2) выполняется при $n = 1:\ A_1 = B \backslash A \in K$.

Пример. Совокупность промежутков $[a,b)$ на прямой $\mathbb{R}$ образует полукольцо, но не кольцо.

Теорема 2. *Пусть S — полукольцо, тогда минимальное кольцо $K(S)$, содержащее S, состоит из множеств, являющихся конечными объединениями непересекающихся множеств из S, т.е.*

$$K(S) = \{A|\, A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in S\}.$$

§3. Общее понятие меры

Пусть X — множество, $S \subset \wp(X)$ — некоторое полукольцо его подмножеств.

Определение 1. *Будем говорить, что на полукольце S задана мера μ, если любому элементу $A \in S$ поставлено в соответствие вещественное число $\mu(A)$ таким образом, что выполняются следующие аксиомы:*

1) *если* $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in S,\ k = \overline{1,n},$ *то* $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ *(аддитивность);*
2) $\mu(A) \geq 0$ *(положительность).*

Т.о. мера есть числовая функция множества, т.е. отображение $\mu:\ S \to \mathbb{R}$.

Замечание. Мера не является отображением из X в $\mathbb{R}$.

Определение 2. *Мера, введенная на полукольце S называется счетно-аддитивной (σ-аддитивной), если свойство 1) меры выполняется для счетного набора множеств $A_k \in S$, т.е. если*

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

где $A, A_k \in S,\ k = 1, 2, \ldots,$ *то*

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Пример 1. Рассмотрим полукольцо множеств S, состоящее из полуинтервалов на прямой $\mathbb{R}$. Естественная мера полуинтервала — его длина:

$$\mu([a,b)) = \begin{cases} b-a, & \text{если } b \geq a, \\ 0, & \text{если } b < a. \end{cases}$$

Она удовлетворяет аксиомам 1), 2) определения 1, т.е. является мерой.

Пример 2. Пусть полукольцо S состоит из конечных подмножеств некоторого множества X. Положим

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} 1,$$

т.е. $\mu(A)$ — количество точек в множестве $A \in S$. Аксиомы 1), 2) выполняются.

Пример 3. Пусть S — полукольцо, состоящее из полуоткрытых прямоугольников

$$A = \{(x, y) |\, x \in [a, b),\ y \in [d, c)\},\ b \geq a, c \geq d,$$

со сторонами параллельными осям координат в пространстве $\mathbb{R}^2$. Тогда площадь

$$\mu(A) = (b - a)(c - d)$$

прямоугольника A удовлетворяет аксиомам 1), 2) и, следовательно, является мерой.

Пример 4. Пусть S — полукольцо из примера 1. Возьмем произвольную неубывающую функцию $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Положим

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a).$$

Покажем, что введенная функция интервала неотрицательна и аддитивна, т.е. является мерой.

Действительно, если

$$[a, b) = \bigsqcup_{k=1}^{n} [a_{k-1}, a_k),$$

где $a_0 = a,\ a_n = b,\ a_{k-1} < a_k,\ k = \overline{1, n}$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \mu([a_{k-1}, a_k)) = \sum_{k=1}^{n} (F(a_k) - F(a_{k-1}) = F(a_n) - F(a_0) = \mu([a, b)).$$

Из условия, что $F(t),\ t \in \mathbb{R}$, — неубывающая функция (т.е. $F(t_2) \geq F(t_1)$, если $t_2 > t_1$) следует, что $\mu([a, b)) \geq 0$.

Т.о. любая неубывающая функция порождает некоторую меру на полукольце S, состоящем из полуинтервалов.

Верно и обратное: по заданной мере на полукольце S можно построить неубывающую функцию по следующему правилу

$$F(t) = \begin{cases} \mu([0,t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -\mu([t,0)), & t < 0. \end{cases}$$

Соответствие между мерами и неубывающими функциями будет взаимно однозначным, если рассматривать только те функции, для которых $F(0) = 0$.

Определение 3. *Меры, получаемые с помощью той или иной неубывающей функции F, называются мерами Лебега-Стилтьеса.*

В дальнейшем нас будут интересовать, в основном, только счетно-аддитивные меры.

Теорема 1. *Длина является σ-аддитивной мерой на полукольце S, состоящем из полуинтервалов вида $[a,b)$.*

Существуют примеры мер, которые являются аддитивными, но не являются σ-аддитивными.

Пример. На полукольце S, состоящем из полуинтервалов на $\mathbb{R}$, зададим меру μ с помощью функции $F(t) = sign\, t$

$$sign\, t = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \\ -1, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$[-1,0) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right),$$

но

$$\mu([-1,0)) = 1 \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)\right) = 0.$$

Свойство σ-аддитивности не выполняется.

Определение 4. *Пусть на полукольце S задана мера $m(A)$ для любого $A \in S$. Мера μ, заданная на полукольце K, называется продолжением меры m, если*

1) $S \subset K$,
2) $\mu(A) = m(A),\ \forall A \in S$.

Основная наша задача — научиться строить продолжение меры.

Теорема 2. *Пусть m — мера на полукольце $S \subset \wp(X)$ и $K(S)$ — минимальное кольцо, порожденное S. Тогда на $K(S)$ существует единственная мера μ, являющаяся продолжением меры m. Если m — σ-аддитивная мера, то и мера μ — σ-аддитивна.*

Продолжение μ меры m строиться следующим образом. По теореме 2 из §2 любое множество $A \in K(S)$ представимо в виде

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k, \text{ где } A_k \in S, \tag{1.1}$$

Поскольку $A_k \in S,\ k = \overline{1,n}$, то для них определена мера $m(A_k)$. Само множество A может не пренадлежать S и поэтому мера $m(A)$ не определена. Доопределим для A меру μ по формуле

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k). \tag{1.2}$$

Т.к. $S \subset K(S)$, следовательно $A_k \in K(S),\ k = \overline{1,n}$, то функция $\mu(A)$, определяемая формулами (1.1), (1.2), является мерой.

Кроме того, можно показать, что значение $\mu(A)$ не зависит от разбиения множества A на непересекающиеся подмножества A_k из (1.1).

Определение 5. *Пусть K — кольцо подмножеств множества X, т.е. $K \subset \wp(X)$, и пусть μ — σ-аддитивная мера на этом кольце. Множество $A \subset X$ (необязательно принадлежащее кольцу K) называется множеством меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный или счетный набор множеств $A_k \in K$ такой, что*

1) $A \subset \bigcup\limits_k A_k$,
2) $\sum\limits_k \mu(A_k) < \varepsilon$.

Если $A \subset K$, то следующие выражения эквивалентны: "множество A есть множество меры нуль" и "$\mu(A) = 0$".

Определение 6. *Мера μ на кольце $K \subset \wp(X)$ называется полной мерой, если из условия $\mu(A) = 0$ следует, что любое подмножество $B \subset A$ принадлежит K и $\mu(B) = 0$.*

§4. Измеримые множества. Лебеговское продолжение меры

Если мера m, заданная на полукольце S, обладает лишь свойством аддитивности (но не σ-аддитивности), то ее продолжением на кольцо $K(S)$ исчерпываются в значительной степени все возможности продолжения (распространия) такой меры с исходного полукольца на более широкий класс множеств.

Если же рассматриваемая мера является σ-аддитивной, то она может быть распространена с полукольца S на класс множеств, значительно более обширный, чем кольцо $K(S)$ и, в некотором смысле, максимальный. Это можно сделать с помощью так называемого Лебеговского продолжения.

Определение 1. *Пусть m — σ-аддитивная мера на алгебре $K \subset \wp(X)$. Внешней мерой множества $A \subset X$ называется число*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{i \in I} m(A_i), \; A \subset \bigcup_{i \in I} A_i, \; A_i \in K, \tag{1.3}$$

где $\inf$ *вычисляется по всевозможным конечным или счетным покрытиям множества A элементарными множествами A_i.*

Множества из алгебры K называются **элементарными**.

Внешняя мера, определена для всех множеств $A \subset X$. Можно показать, что она является продолжением меры m как функции множества, т.е. если $A \in K$, то

$$\mu^*(A) = m(A) \text{ для любого } A \in K.$$

Замечание. Внешняя мера, вообще говоря, не является мерой, т.к. она может не обладать свойством аддитивности.

Определение 2. *Множество $A \subset X$ называется измеримым по Лебегу относительно меры m, если для него имеет место равенство*

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \backslash A) = m(X).$$

Критерий измеримости множеств. Следующие свойства эквивалентны:

1) множество A измеримо по Лебегу,

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество B такое, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

Замечание 1. Свойство 2) можно взять в качестве определения измеримого множества.

Замечание 2. Из свойства 2) следует, что любое измеримое множество может быть сколь угодно "близко" приближено элементарным множеством.

Обозначим через $L(K, m)$ совокупность всех измеримых по Лебегу множеств из X.

Замечание. $K \subset L(K, m)$.

Определение меры Лебега. *На совокупности $L(K, m)$ определим меру Лебега μ (как сужение внешней меры):*

$$\mu(A) = \mu^*(A).$$

Основные свойства измеримых множеств и определенной на них меры Лебега сформулированы в следующей теореме — основной теореме теории меры Лебега.

Теорема 1. *Если исходная мера m — σ-аддитивна, то множество $L(K, m)$ измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру множеств, а мера Лебега является σ-аддитивным продолжением меры m на $L(K, m)$.*

Выше мы построили лебеговское продолжение меры в предположении, что $X \in K$ (K — алгебра), т.е. $m(X) < \infty$. Однако уже в случае кольца, порожденного полуинтервалами на $\mathbb{R}$, с длинной в качестве меры это условие не выполняется.

Поэтому ослабим условие конечности меры (т.е. требование $m(X) < \infty$), заменив его более слабым условием σ-конечности.

Определение 3. *Мера m, заданная на кольце $K \subset \wp(X)$, называется σ-конечной, если существует разбиение*

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k, \text{ где } X_k \in K \text{ и } m(X_k) < \infty. \tag{1.4}$$

Пример 1. Длина как мера на кольце, порожденном полуинтервалами из $\mathbb{R}$, является σ-конечной, т.к.

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{k=-\infty}^{+\infty} [k, k+1).$$

<u>Пример 2.</u> Мера, определенная на конечных подмножествах из $\mathbb{R}$ как число элементов этого подмножества, не является σ-конечной, т.к. $\mathbb{R}$ несчетно и его нельзя представить как счетное объединение конечных множеств.

Предположим теперь, что мера m является σ-конечной, т.е. имеет место представление (1.4). Для каждого $X_k \in K$ строится лебеговское продолжение меры, т.е. повторяются описанные выше рассуждения и построения, заменяя X на X_k и K на $K_k = K \cup \wp(X_k)$.

Определение 4. *Множество $A \subset X$ называется измеримым по Лебегу относительно σ-конечной меры m, если измеримы все множества*

$$A_k = A \cap X_k \text{ в } X_k,\ k = 1, 2, \ldots,\ X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Мерой множества A называется сумма ряда

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_k),$$

если он сходится и $+\infty$ в противном случае.

Отсюда следует, что в случае σ-конечной меры m множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда оно представимо в виде

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

где каждое множество A_k измеримо в X_k соответственно.

Замечание. Нетрудно показать, что продолженная мера μ и класс измеримых множеств не зависит от способа представления множества X в виде объединения непересекающихся множеств конечной меры.

Мера Лебега на плоскости.

На прямоугольнике

$$X_{00} = \{(x, y)|\, x \in [0, 1),\ y \in [0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

рассмотрим полукольцо S, состоящее из прямоугольников вида

$$S_{abcd} = \{(x, y)|\, x \in [a, b),\ y \in [c, d)\},$$

где $a \le b,\ c \le d,\ \ a, b, c, d \in [0, 1)$. На S зададим меру

$$m'(S_{abcd}) = (b-a)(d-c),$$

равную площади прямоугольника S_{abcd}.

Пусть $K = K(S)$ — алгебра подмножеств, порожденная полукольцом S. Согласно доказанной выше теореме 2 из §2, множество K ((см. Рис. 5)) состоит из множеств, являющихся конечными объединениями непересекающихся прямоугольников S_{abcd}:

$$K = \left\{ A |\ A = \bigsqcup_{i=1}^{n(A)} S_{a_i b_i c_i d_i} \right\}.$$

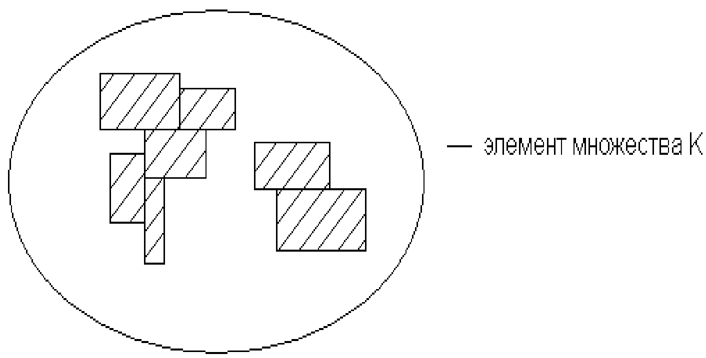

Рис. 5.

Согласно теореме 2 из §3 мы можем продолжить меру $m'(S_{abcd})$, заданную на полукольце S, на кольцо $K = K(S)$ в соответствии с формулой (1.2) следующим образом

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n(A)} m'(S_{a_i b_i c_i d_i}) = \sum_{i=1}^{n(A)} (b_i - a_i)(d_i - c_i).$$

Т.о. теперь мы можем определять площадь фигур из $K(S)$. Отметим, что множество $K(S)$ более широкое, чем S, т.е. мы научились определять площадь более сложных фигур, чем прямоугольники из S.

Согласно введенной ранее договоренности, элементы из $K(S)$ называются элементарными множествами.

Теперь попытаемся построить продолжение меры, заданной на $K(S)$, на еще более широкий класс множеств, т.е. повторим для данного случая конструкцию продолжения меры по Лебегу.

Для любого $A \subset X_{00}$ определим внешнюю меру

$$\mu^*(A) = \inf_k \sum_{i=1}^{n(A_k)} (b_i - a_i)(d_i - c_i),$$

где inf берется по всем таким элементарным множествам

$$A_k = \bigsqcup_{i \in I(A_k)} S_{a_i b_i c_i d_i} \in K(S),$$

что $A \subset A_k$ и множество $I(A_k) = \{1, 2, \ldots, n(A_k)\}$ счетное (см. Рис. 6).

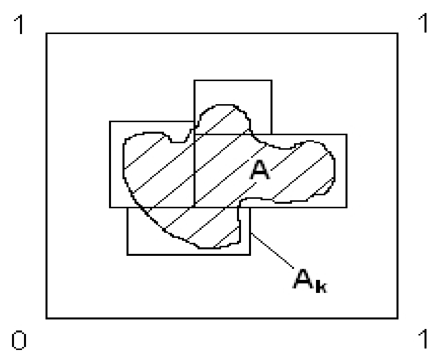

Рис. 6.

Согласно определению множесто A измеримо, если

$$\mu^*(A) + \mu^*(X_{00} \backslash A) = 1. \tag{1.5}$$

Теперь мы можем продолжить меру m, заданную на $K(S)$, на еще более широкий класс множеств, включающийся в X_{00} : на такие множества $A \subset X_{00}$, для которых имеет место соотношение (1.5). Для таких множеств мера определяется равенством

$$\mu(A) = \mu^*(A),$$

само множество A называется измеримым, а построенная функция $\mu(A)$, заданная на множестве измеримых множеств A, называется мерой Лебега на прямоугольнике X_{00}, порожденной мерой m, заданной на полукольце S.

Возникает вопрос: существуют ли неизмеримые множества? Да, существуют.

Выше мы построили меру Лебега для множеств, принадлежащих единичному квадрату $X_{00} \subset \mathbb{R}^2$. Перейдем к рассмотрению измеримых множеств из всего пространства $\mathbb{R}^2$.

Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо, если для любого единичного прямоугольника

$$X_{kp} = \{(x, y)|\, x \in [k, k+1),\ y \in [p, p+1)\}$$

множество $A \cap X_{kp}$ измеримо по Лебегу на единичном прямоугольнике X_{kp}.

Аналогичным образом строится продолжение меры Лебега для любого множества (пространства) $\mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, \ldots$

§5. Измеримые функции

Пусть X — множество, K — некоторая σ-алгебра подмножеств множества X и на K задана σ-аддитивная полная мера μ.

Определение 1. *Функция $f : X \to R$ называется измеримой, если для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множество $X_c = \{x|\ f(x) < c\}$ измеримо.*

Пример 1. На $\mathbb{R}^1$ с мерой Лебега любая непрерывная функция измерима.

Пример 2. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \end{cases}$$

измерима. Действительно, если $c > 1$, то $X_c = \mathbb{R}$; если $0 < c \leq 1$, то $X_c = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$; если $c \leq 0$, то $X_c = \varnothing$.

Пример 3. $\mathbb{R}$ — измеримо по Лебегу; $\mathbb{Q}$ — измеримо по Лебегу и $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

Одним из свойств класса измеримых функций является его замкнутость относительно предельного перехода. Мы будем рассматривать три типа сходимости:

1. **Равномерная сходимость.** Последовательность функций f_n сходится равномерно к f на множестве $X,$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что при $n > n(\varepsilon)$ выполнимо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$.
2. **Точечная сходимость.** Последовательность функций f_n сходится к f точечно, если $\forall x \in X \ \ f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.
3. **Сходимость почти всюду.** Последовательность функций $f_n,$ заданных на пространстве с мерой, сходится к функции почти всюду, если для всех $x \in X,$ за исключением множества меры нуль, $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Обозначается $f_n \to f$ п.в.

Замечание. Из $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. Обратное не верно.

Свойства измеримых функций.

Теорема 1. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится точечно к функции f, то f — измерима.*

Следствие 1. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти всюду, то f — измерима.*

Доказательство. Пусть $f_n \to f$ точечно на множестве $X_0 \subset X$ и $\mu(X \backslash X_0) = 0$. Тогда $\{x | f(x) < c\} = [\{x | f(x) < c\} \cap X_0] \cup [\{x | f(x) < c\} \cap (X \backslash X_0)]$. Первое из этих множеств измеримо по теореме 1, а второе множество есть подмножество меры нуль и, значит, тоже измеримо (в силу полноты меры). ■

Следствие 2. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f равномерно, то f — измерима.*

Доказательство очевидно.

Определение 2. *Функции f и g , заданные на одном и том же измеримом множестве, называются эквивалентными, если*

$$\mu(\{x | f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Если функция измерима, то любая эквивалентная ей функция измерима.

Определение 3. *Функция $f : X \to R$ называется простой, если она измерима и принимает конечное или счетное множество значений.*

Теорема 2. *Функция $f : X \to R$ является простой тогда и только тогда, когда*

$$X = \bigsqcup_k A_k,$$

где A_k измеримы, и $f(x)$ принимает постоянное значение y_k на A_k.

Теорема 3. *Для любой измеримой функции $f(x)$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций.*

Доказательство. Укажем явно эту последовательность. Зафиксируем n и построим функцию $f_n(x)$. Для этого положим

$$f_n(x) = \frac{m}{n}, \text{ если } \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n}, \text{ где } m = 0, \ \pm1, \ \pm2, ...$$

Покажем, что множество A_{mn}, на котором функция $f_n(x)$ принимает постоянное значение m/n, измеримо. Действительно,

$$A_{mn} = \underbrace{\left\{ x \,\middle|\, f(x) < \frac{m+1}{n} \right\}}_{\bar{A}_{m+1,n}} \setminus \underbrace{\left\{ x \,\middle|\, f(x) < \frac{m}{n} \right\}}_{\bar{A}_{m,n}}.$$

Множества $\overline{A}_{m+1,n}$ и $\overline{A}_{m,n}$ измеримы в силу измеримости функции $f(x)$, следовательно измеримо и множество A_{mn}.

Множество целых чисел $m = 0, \ \pm1, \ \pm2, ...$ счетно, следовательно $f_n(x)$ — простая функция.

По построению

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}, \ \forall x \in X,$$

причем

$$\frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, последовательность f_n сходится к f равномерно. ■

Теорема 4. *Множество простых функций замкнуто относительно алгебраических операций, т.е. если f и g - простые функции, то $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g , где $g \neq 0$ п.в., — также простые функции.*

Доказательство. Пусть $X = \bigsqcup\limits_k A_k$ и $f(x) = y_k$ при $x \in A_k$, а также $X = \bigsqcup\limits_i B_i$ и $g(x) = z_i$ при $x \in B_i$. Тогда $X = \bigsqcup\limits_{k,i} (A_k \cap B_i)$ и для $x \in A_k \cap B_i$ имеем

$$(f+g)\cdot(x) = y_k + z_i, \quad (f-g)\cdot(x) = y_k - z_i,$$
$$(f\cdot g)\cdot(x) = y_k \cdot z_i, \qquad (f/g)\cdot(x) = y_k/z_i. \ \blacksquare$$

Следствие. *Множество всех измеримых функций замкнуто относительно алгебраических операций.*

§6. Интеграл Лебега

Пусть X — пространство с конечной σ-аддитивной полной мерой μ . Пусть A, $A \subset X$, — измеримое множество. Определим характеристическую функцию по правилу

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad x \in X.$$

От характеристической функции интеграл Лебега определяется по правилу

$$\int\limits_X \chi_A(x)\, d\mu = \mu(A).$$

Это определение согласуется с тем, что если A есть элементарное множество на прямой, например, полуинтервал $[a, b)$, то интеграл Римана характеристической функции совпадает с длиной полуинтервала, т.е. его мерой.

Дальше интеграл Лебега будем вводить так, чтобы сохранялись свойства интеграла Римана:

1) линейность: $\int\limits_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_X f(x)dx + \beta \int\limits_X g(x)dx$;

2) непрерывность: если f_n сходится к f равномерно, то $\int\limits_X f_n(x)dx \to \int\limits_X f(x)dx$.

Рассмотрим вначале простую функцию f, принимающую конечное число значений. С помощью характеристической функции χ_A эта функция f может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}(x), \ x \in X, \tag{1.6}$$

где $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, A_k — измеримые множества.

Для сохранения свойств линейности интеграл Лебега от функции (1.6) введем по правилу:

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k). \tag{1.7}$$

Из (1.7) немедленно вытекает неравенство

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \le \sup_{x\in X}|f(x)|\,\mu(X)\,. \tag{1.8}$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} y_k\mu(A_k)\right| \le \sup_{k=\overline{1,n}}|y_k|\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k) = \sup_{k=\overline{1,n}}|y_k|\,\mu(X)\,.$$

Лемма 1. *Пусть последовательность простых функций f_n, принимающих конечное число значений, равномерно сходится к f. Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности f_n.

Доказательство. Проверим, что числовая последовательность

$$\alpha_n = \int\limits_X f_n(x)d\mu$$

является последовательностью Коши. Действительно, в силу (1.8) имеем

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left|\int\limits_X (f_n(x) - f_m(x))\,d\mu\right| \le \sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)|\,\mu(X) \to 0 \text{ при } m,n\to\infty.$$

Здесь $\mu(X) = const$ и выражение

$$\sup_{x\in X}|f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \text{ при } m,n\to\infty$$

выполняется в силу того, что функции $f_n(x)\to f(x)$ равномерно.

Значит, последовательность α_n сходится.

Пусть $\{g_n(x)\}$ — другая аналогичная последовательность функций, равномерно сходящаяся к функции $f(x)$. Тогда

$$\left|\int\limits_X (f_n(x) - g_n(x))d\mu\right| \le \sup_{x\in X}|f_n(x) - g_n(x)|\,\mu(x). \tag{1.9}$$

В силу того, что последовательности функций $f_n(x)$ и $g_n(x)$ сходятся равномерно к функции $f(x)$ на множестве X имеем

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-g_n(x)|=\sup_{x\in X}|(f_n(x)-f(x))+(f(x)-g_n(x))|\leq\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|+$$
$$+\sup_{x\in X}|f(x)-g_n(x)|\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Отсюда с учетом (1.9) получаем

$$\left|\int\limits_X (f_n(x)-g_n(x))d\mu\right|\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

т.е. предел последовательности не зависит от выбора последовательности. ■

Если измеримая функция $f(x)$ ограничена, то очевидно, что последовательность простых функций $f_n(x)$, построенных в теореме 3 из предыдущего параграфа, равномерно сходящаяся к $f(x)$, принимает конечное число значений. В лемме 1 доказано, что существует предел интегралов от функций $f_n(x)$ и этот предел не зависит от выбора последовательности $f_n(x)$. Тогда корректно следующее определение.

Определение 1. *Интегралом Лебега ограниченной измеримой функции $f(x)$ на множестве X с конечной мерой μ называется число*

$$\int\limits_X f(x)d\mu\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu,$$

где $\{f_n(x)\}$ — равномерно сходящаяся к $f(x)$ последовательность простых функций, принимающих конечное число значений.

Существование интеграла Лебега для любой ограниченной измеримой функции следует из предыдущих рассуждений.

Так как предел не зависит от выбора последовательности, можно зафиксировать последовательность простых функций $f_n(x)$, построенную в теореме 3 из предыдущего параграфа:

$$f_n(x)=\frac{m}{n},\ \text{если}\ \frac{m}{n}\leq f(x)<\frac{m+1}{n},\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\quad x\in X.$$

Эта последовательность равномерно сходится к $f(x)$ на множестве X.

Функция $f_n(x)$ принимает конечное число значений

$$y_m=\frac{m}{n},\ \text{где}\ |m|\leq n\sup_{x\in X}|f(x)|,$$

на множестве

$$A_{mn} = \left\{ x \,\middle|\, \frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n} \right\}.$$

Используя определение интеграла от функции $f_n(x)$, получаем эквивалентное определение интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции.

Определение 2. *Интегральной суммой Лебега S_n для функции $f(x)$, $x \in X$, будем называть сумму вида*

$$S_n = \sum_m \frac{m}{n} \mu \left(\left\{ x \,\middle|\, \frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n} \right\} \right).$$

Интегралом Лебега называется предел интегральных сумм

$$\int_X f(x)\, d\mu \stackrel{\text{det}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Так как $S_n := \int\limits_X f_n(x) d\mu$ для построенных выше простых функций $f_n(x)$, то это определение эквивалентно определению 1, причем существование предела уже доказано.

Формула для интегральных сумм Лебега позволяет описать отличие в определении интеграла Римана и интеграла Лебега.

В обоих определениях (в случае $f(x) > 0$) в основе лежит интуитивное представление об интеграле как площади (мере) фигуры, лежащей между графиком функции $f(x)$ и осью OX. Для подсчета площади (меры) эта фигура разбивается на более простые части, для которых выписывается приближенное значение площади (меры).

При составлении интегральных сумм Римана отрезок $[a, b]$ разбивается на части точкам $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = b$ (см. Рис. 7), в каждой части выбирается точка $\xi_k \in [x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{0, n}$, и составляется сумма

$$S_n^R = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

При этой конструкции в качестве приближенного значения площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, графиком функции $f(x)$ и вертикальными отрезками, проходящими через точки x_k, x_{k+1}, берется число $f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$. Такое приближение оправдано лишь в случае, когда значения функции $f(x)$ на всем отрезке $[x_{k+1}, x_k)$ близко к значению $f(\xi_k)$, что выполнено, если функция $f(x)$ непрерывна.

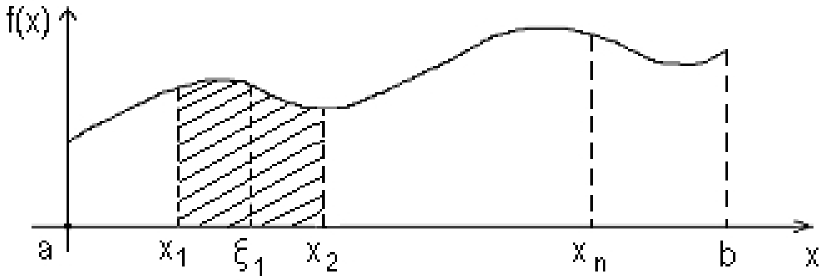

Рис. 7.

При составлении интегральных сумм Лебега поступаем следующим образом. Пусть

$$f_* = \inf_{x \in X} f(x), \;\; f^* = \sup_{x \in X} f(x).$$

На отрезке $[f_*, f^*]$ выделяем точки $y_{mn} = m/n$, где m — целое число, $m > nf_*$, $m < nf^*$.

На оси OX выделяются множества A_{mn} (см. Рис. 8) , где функция $f(x)$ принимает значения от m/n до $(m+1)/n$:

$$A_{mn} = \left\{ x \,\middle|\, \frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n} \right\}.$$

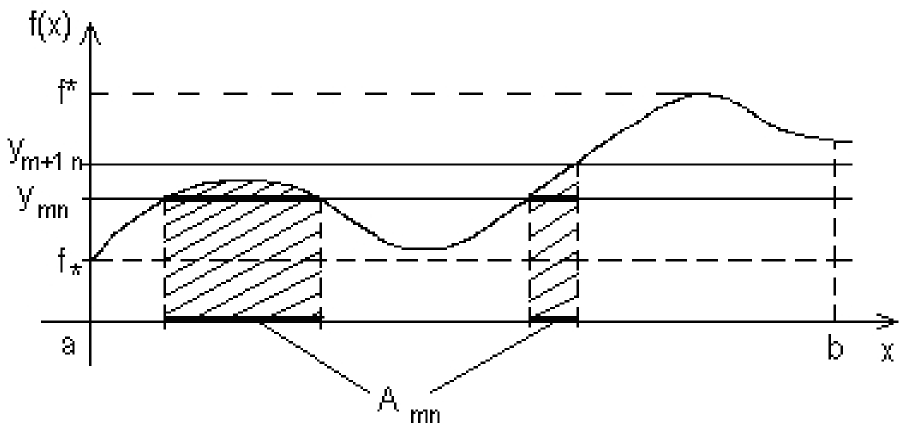

Рис. 8.

$$S_n = \sum_m \frac{m}{n} \mu\left(A_{mn}\right).$$

На множестве A_{mn} функция $f(x)$ заменяется на значения $y_{mn} = m/n$. Погрешность при этом не превосходит $1/n$ для любой функции и, следовательно, такое приближение точнее.

Т.о. различие в двух определениях заключается в том, что при составлении интегральных сумм Римана разбиение на элементарные фигуры производится по признаку близости точек на оси OX, а при составлении интегральных сумм Лебега — по признаку близости значений функции.

Одно из преимуществ второго способа нам уже известно: любая измеримая ограниченная функция интегрируема по Лебегу.

Суммирование по Риману и по Лебегу аналогично подсчету монет разного достоинства двумя способами. Риман "считает монеты" в том порядке, в котором они ему подаются: (1коп. + 2коп. + 5коп. + 20коп. + 1коп. + 3коп. + ...) . Лебег же сначала "подсчитает" количество n_1 монет достоинством 1 коп., затем количество n_2 — 2 коп., n_3 — 3 коп. и т.д., а затем определит сумму

$$\sum_i i\, n_i.$$

Интеграл от произвольной измеримой функции определяется аналогично, но неограниченная функция может оказаться неинтегрируемой.

Определение 3. *Простая функция $f(x)$, $x \in X$, принимающая значения y_k на множествах A_k, $k = 1, 2, ...$, называется интегрируемой, если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$$

сходится абсолютно. Если функция $f(x)$ интегрируема, то сумма этого ряда называется интегралом Лебега, т.е.

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k). \tag{1.10}$$

Заметим, что неравенство (1.8) и основанная на нем лемма 1 справедливы для любых простых интегрируемых функций. Поэтому следующее определение корректно.

Определение 4. *Измеримая функция $f(x)$, $x \in X$, называется интегрируемой (суммируемой), если существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых интегрируемых функций $f_n(x)$, $x \in X$. Интегралом Лебега функции f по множеству X с мерой μ называется предел интегралов Лебега от функций $f_n(x)$:*

$$\int\limits_X f(x)d\mu \overset{\text{det}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu.$$

Множество всех функций, интегрируемых на множестве X по мере μ, обозначается $L_1(X,\mu)$.

Основные свойства интеграла Лебега.

1. По определению

$$\int\limits_A 1\, d\mu = \mu(A) = \int\limits_X \chi_A(x)d\mu.$$

Здесь A - измеримое множество, $A \subset X$.

2. Если функции f и g интегрируемые, то функция $f+g$ интегрируемая и

$$\int\limits_X (f(x)+g(x))\, d\mu = \int\limits_X f(x)\, d\mu + \int\limits_X g(x)\, d\mu.$$

Доказательство. Вначале справедливость этого равенства проверяется для простых интегрируемых функций, а затем рассматриваются последовательности простых интегрируемых функций f_n и g_n, равномерно сходящиеся к f и g соответственно. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое равенство. ■

3. Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f(x)$ — интегрируемая функция и имеет место равенство

$$\int\limits_X \lambda f(x)\, d\mu = \lambda \int\limits_X f(x)\, d\mu,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство можно провести по схеме свойства 2.

4. Если функция ограничена и измерима, то она интегрируема (следствие леммы 1).

5. Если f — интегрируемая функция и $f(x) \le c$, то

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu \le c\mu(X).$$

Доказательство. Построим функцию $f_n(x)$, $x \in X$:

$$f_n(x) = \frac{m}{n}, \text{ если } \frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}, \ x \in X, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Выше было показано, что $f_n(x) \to f(x)$ равномерно. Кроме того, верны неравенства:

$$f_n(x) \le f(x) \le c, \quad x \in X;$$

$$\int\limits_X f_n(x)\, d\mu \le \sup_{x \in X} f_n(x)\, \mu(X) \le c\mu(X).$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу и получим требуемое неравенство. ■

5а. Если f — интегрируемая функция и $f(x) \ge 0$, то

$$\int\limits_X f(x) d\mu \ge 0.$$

5б. Если f_1 и f_2 — интегрируемые функции и $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in X$, то

$$\int\limits_X f_1(x) d\mu \le \int\limits_X f_2(x) d\mu.$$

6. Если $|f(x)| \le \varphi(x)$, $x \in X$, где φ — интегрируемая функция, а f — измеримая, то f — интегрируемая.

6а. Если $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$, $x \in X$, где f_1, f_2 — интегрируемые функции, а f — измеримая, то f — интегрируемая.

6б. Если f — интегрируемая, а g — ограниченная ($|g(x)| \le c$) измеримая функция, то $f(x)g(x)$ — интегрируемая и

$$\left| \int\limits_X f(x)\, g(x)\, d\mu \right| \le c \int\limits_X |f(x)|\, d\mu.$$

6в. Если A и B — измеримые множества и $A \cap B = \varnothing$, $A, B \subset X$, то

$$\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B}.$$

Следовательно, если функция f интегрируема на X, то используя свойства 2 и 6, получаем

$$\int\limits_{A \cup B} f(x)\, d\mu = \int\limits_A f(x)\, d\mu + \int\limits_B f(x)\, d\mu.$$

Это свойство, как и свойство 2, называется **аддитивностью** интеграла Лебега.

7. Если $f(x)$ — интегрируемая функция, то $|f(x)|$ — также интегрируемая, причем

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \le \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

8. Если $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)\,d\mu = 0$ для любой функции f, т.е. на множестве меры нуль любая функция измерима.

8а. В частности, если $f(x) = g(x)$ почти всюду и f — интегрируемая функция, то g — интегрируемая и

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X g(x)\,d\mu.$$

Последнее свойство позволяет усилить некоторые предыдущие свойства. В условиях можно требовать выполнения неравенств почти всюду и при этом выводы сохраняются.

Возникает новый класс функций — измеримых ограниченных почти всюду. Этот класс обозначается $L_\infty(X,\mu)$.

9. Если $\int\limits_X |f(x)|\,d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.

Для доказательства свойства 9 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть* f *— интегрируемая функция,* $f(x) \ge 0$, *и* $A_c = \{x|\, f(x) \ge c\}$, $c > 0$. *Тогда справедливо неравенство Чебышева*

$$\mu(A_c) \le \frac{1}{c}\int\limits_X f(x)d\mu.$$

Доказательство. Из свойств 5, 5а и 6в получаем

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_{A_c} f(x)d\mu + \int\limits_{X\setminus A_c} f(x)d\mu \ge \int\limits_{A_c} f(x)\,d\mu \ge c\mu(A_c).$$

Разделив правую и левую части на c, получим неравенство Чебышева. ■

Доказательство свойства 9. Обозначим $A_c = \{x|\ |f(x)| \ge c\}$. Тогда

$$A_0 = \{x|\ |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

Нужно показать, что $\mu(A_0) = 0$.

По неравенству Чебышева

$$\mu\left(A_{1/n}\right) \le n\int\limits_X |f(x)|\,d\mu = 0,$$

т.к. $\int\limits_X |f(x)|\, d\mu = 0$ по условию теоремы. Значит

$$\mu(A_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_{1/n}\right) = 0. \blacksquare$$

Теорема 1 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть f — интегрируемая функция. Тогда для любого $\xi > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если* $\mu(A) < \delta$, то

$$\left|\int\limits_A f(x)\, d\mu\right| < \xi.$$

Теорема 2. *Если $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, f — интегрируема на A_k и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f(x)| d\mu$$

сходится, то функция f интегрируема на A и

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f(x)\, d\mu.$$

§7. Предельный переход под знаком интеграла

Уже в определении интеграла Лебега заложена возможность перехода к пределу под знаком интеграла в случае равномерной сходимости.

а) Если последовательность интегрируемых функций f_n равномерно сходится к функции f на множестве X, то f — интегрируемая и

$$\int\limits_X f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu. \tag{1.11}$$

Действительно, т.к. f_n сходится к f равномерно на множестве X, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n \geq n_0$ выполняется

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|f(x)| \leq \varepsilon + |f_{n_0}(x)|\,,\ x \in X.$$

Из свойства 6 получаем интегрируемость функции $f(x)$, $x \in X$.

Кроме того, имеем

$$\left|\int\limits_X f(x)d\mu - \int\limits_X f_n(x)d\mu\right| = \left|\int\limits_X (f(x) - f_n(x))d\mu\right| \le \int\limits_X |f(x) - f_n(x)|d\mu \le$$
$$\le \underbrace{\sup_{x\in X}|f(x) - f_n(x)|}_{\substack{\to 0 \\ \text{в силу равномерной сходимости}}} \underbrace{\mu(X)}_{\text{const}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, имеет место (1.11).

б) Если последовательность f_n точечно (или почти всюду) сходится к функции f на множестве X, то переходить к пределу под знаком интеграла нельзя.

Действительно, пусть, например:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n, \text{ если } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}, \\ 0, \text{ для всех остальных } x. \end{cases}$$

Тогда $f_n \to 0$ при $n \to \infty$ точечно, но

$$\int\limits_0^1 f_n(x)d\mu = 1 \ne 0.$$

При точечной сходимости может также оказаться, что предельная функция не интегрируема.

<u>**Пример 1.**</u> Если

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ при } x > \frac{1}{n}, \\ 0, \text{ при } x \le \frac{1}{n}, \end{cases}$$

то $f_n(x) \to \frac{1}{x}$ точечно на $(0,1)$, но предельная функция не интегрируется.

<u>**Пример 2.**</u> Пусть

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}(x).$$

При любых y_k последовательность

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}(x), \quad k = 1, 2, ...$$

интегрируемых функций точечно сходится к $f(x)$. Но функция f интегрируема лишь при дополнительном условии, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \; \mu(A_k)$$

сходится.

Глава 2

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Метрические пространства. Определения и примеры

Одним из важнейших понятий математического анализа является понятие предельного перехода. Это понятие основано на возможности измерять расстояние между точками в соответствующих множествах. Если во множестве указаны взаимные "расстояния" между его элементами, то это позволяет ввести и изучить свойства предельного перехода в чистом виде, т.е. независимо от природы элементов, участвующих в этом построении. Поэтому метрические пространства представляют собой одну из важнейших математических структур.

Определение 1. *Метрикой на множестве называется отображение* $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$, *принимающее неотрицательные значения и удовлетворяющее следующим трем аксиомам (аксиомам метрики):*

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall\ x, y, z \in X$, *(неравенство треугольника).*

Значение $\rho(x, y)$ метрики ρ на паре элементов (x, y) называется **расстоянием** между точками x и y.

Определение 2. *Метрическим пространством (МП) называется пара* (X, ρ), *где* X *— множество,* ρ *— метрика на нем.*

Если метрика на множестве зафиксирована, то метрическое пространство (X, ρ) будем обозначать просто X. Отображение $f : X \to Y$ будем иногда обозначать f :

$(X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$, подчеркивая тем самым, что множества X и Y рассматриваются как метрические пространства.

На каждом множестве A в метрическом пространстве (X, ρ_X) естественным образом определяется метрика $\rho_A(x, y) = \rho_X(x, y)$, $\forall x, y \in A$. Множество A с определенной выше метрикой называется **полупространством** метрического пространства (X, ρ_X).

Примеры метрических пространств:

Пример 1. Пространство $C[0, 1]$ состоит из числовых функций, заданных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$. Если x и y — непрерывные функции, то метрика в вводится следующим образом

$$\rho(x, y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)| .$$

Проверим, выполнение аксиом метрики. Отметим, что расстояние $\rho(x, y)$ задано для всех непрерывных функций из $C[0, 1]$.

Если $\rho(x, y) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)| = 0$, то $x(t) = y(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, следовательно, аксиома 1) выполняется.

Очевидно, что $\rho(x, y) = \rho(x, y)$, это означает, что аксиома 2) также выполняется.

Далее имеем

$$\rho(x, y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)| \le \max_{0 \le t \le 1} (|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|) \le$$
$$\le \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - z(t)| + \max_{0 \le t \le 1} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

тогда выполняется аксиома 3).

Таким образом, мы получили метрическое пространство.

Пример 2. Пространство l_1. Элементами этого пространства являются бесконечные числовые последовательности $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. Метрику зададим формулой:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|,$$

где $y = (y_1, y_2, y_3, ...)$ — последовательность из пространства l_1.

Выполнение аксиом 1)–3) очевидно.

Пример 3. Пространство l_∞. Элементами этого пространства являются бесконечные ограниченные числовые последовательности $x = (x_1,\, x_2,\, x_3, ...)$, т.е. такие, что $\sup\limits_k |x_k| < \infty$. Метрику определяем формулой

$$\rho(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|.$$

Пример 4. Пространство l_p. Элементами пространства являются бесконечные числовые последовательности $x = (x_1,\, x_2,\, x_3, ...)$ такие, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ сходится, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Метрика задается формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пример 5. Пространство S. Элементами пространства являются бесконечные числовые последовательности. Метрика задается формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Пример 6. Пространство $C_L\,[0, 1]$. Элементами являются непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$. Метрику зададим формулой

$$\rho_L(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt.$$

Пример 7. Пространство $\mathbb{R}^n$. Метрику можно задать множеством способов. Отметим одну серию таких способов. Для любого $p \geq 1$ зададим метрику:

$$\rho_p\,(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности:

при $p = 2:$ $\quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$ — евклидова метрика;

при $p = 1:$ $\quad \rho_1(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|;$

при $p = \infty:$ $\rho_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$

Множество векторов $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\rho_2(x, 0) \leq 1$, изображено на Рис. 9.

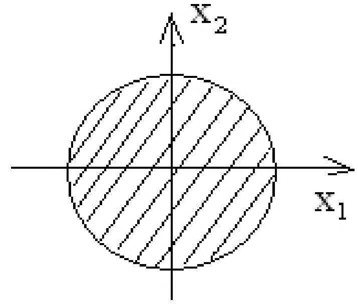

Рис. 9.

Множество векторов $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\rho_1(x,0) \leq 1$, изображено на Рис. 10.

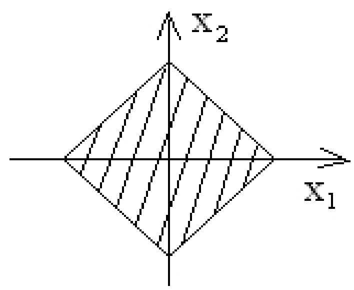

Рис. 10.

Множество векторов $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\rho_\infty(x,0) \leq 1$, изображено на Рис. 11.

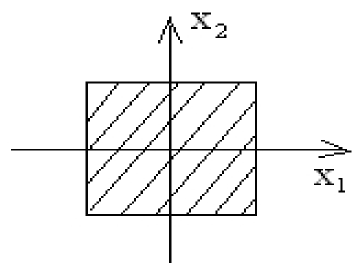

Рис. 11.

При рассмотрении понятий математического анализа легко заметить, что такие понятия, как предел, непрерывность, равномерная непрерывность, последовательность Коши, можно сформулировать так, что они используют лишь расстояние между точками из $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, имеют смысл в произвольных метрических пространствах, независимо от их природы.

Приведем соответствующие определения.

Определение 3. *Последовательность точек (элементов) x_n метрического пространства называется сходящейся, если существует такой элемент $a \in X$, что $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geq n(\varepsilon)$ выполняется $\rho(x_n, a) < \varepsilon$.*

Точка a называется пределом последовательности $\{x_n\}$. В этом случае записываем

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \textit{или} \quad x_n \to a \textit{ при } n \to \infty.$$

Теорема 1. *В метрическом пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела, т.е.

$$x_n \to a \text{ и } x_n \to b \quad \text{при } n \to \infty.$$

Тогда по неравенству треугольника имеем

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, $\rho(a, b) = 0$ и в силу аксиомы 1) имеем $a = b$. ■

Определение 4. *Отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что из неравенства $\rho_X(x, x_0) < \delta$ следует $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

Отображение f называется непрерывным на X (на множестве $A \subset X$), если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$ $(x_0 \in A)$.

Определение 5. *Отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется равномерно непрерывным, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что из неравенства $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$ следует неравенство $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in X$.*

Определение 6. *Последовательность точек $x_n \in X$ называется последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью) в метрическом про-*

странстве, если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для $n, m \geq n(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Рассмотрим конкретный вид сходимости последовательностей в различных пространствах.

Пример 1. Пространство $C[0,1]$. Условие $\rho_C(x_n, x_0) \to 0$ имеет следующий вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Это есть широко используемое в математическом анализе понятие равномерной сходимости последовательности функций.

Пример 2. Пространство $C_L[0,1]$. Условие $\rho_L(x_n, x_0) \to 0$ имеет вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \int\limits_0^1 |x_n(t) - x_0(t)| dt < \varepsilon \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Этот тип сходимости называется сходимостью в среднем и также встречается в математическом анализе.

Пример 3. Пространство S. Пусть x_n — последовательность элементов из S. Каждый элемент x_n из S является последовательностью чисел

$$x_n = (x_n(1), x_n(2), ..., x_n(k), ...).$$

Сходимость последовательности x_n к элементу x_0 в пространстве S означает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_n(k) - x_0(k)|}{1 + |x_n(k) - x_0(k)|} < \varepsilon.$$

Тогда для каждого слагаемого получаем

$$\frac{1}{2^k} \; \frac{|x_n(k) - x_0(k)|}{1 + |x_n(k) - x_0(k)|} < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что для каждого фиксированного числа k имеем $|x_n(k) - x_0(k)| \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, при фиксированном k из (2.1) получаем, что $\frac{y_n}{(1+y_n)} \to 0$ при $n \to 0$, где $y_n := |x_n(k) - x_0(k)| > 0$. Из последних соотношений следует $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, из сходимости в метрике пространства S вытекает покоординатная сходимость последовательности.

Можно показать и обратное: из покоординатной сходимости вытекает сходимость в пространстве S.

Определение 7. *Отображение метрических пространств* $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ *называется изометрией, если:*

1) отображение f *— биективно,*

2) для любых $x_1, x_2 \in X$ *выполняется равенство*

$$\rho_Y\left(f(x_1), f(x_2)\right) = \rho_X\left(x_1, x_2\right).$$

Определение 8. *Метрические пространства* (X, ρ_X) *и* (Y, ρ_Y) *называются изометрическими, если между ними существует изометрия.*

В теории метрических пространств изучаются те свойства метрических пространств, которые сохраняются при изометрических отображениях. Иначе говоря, изометрические пространства считаются одинаковыми с точки зрения теории метрических пространств.

Пример 1. Множество $X = \mathbb{R}$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

изометрично интервалу $(-1, 1)$ с обычной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Изометрия задается отображением

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Пример 2. Пространства $C[0, 1]$ и $C[a, b]$ изометричны. Изометрией является отображение $f(x(t)) = x\left(a(1-t) + bt\right)$, действующее из $C[a, b]$ в $C[0, 1]$, т.е.

$$f: x(\cdot) \to y(\cdot),$$

где $x(t)$, $t \in [a, b]$, $y(t) = x(a(1-t) + bt)$, $t \in [0, 1]$, и

$$\rho\left(x_1(\cdot), x_2(\cdot)\right) = \rho\left(y_1(\cdot), y_2(\cdot)\right).$$

§2. Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства

Понятие последовательности Коши, специфическое для метрического пространства, позволяет выделить класс полных метрических пространств.

Рассмотрим связь между последовательностями Коши и сходящимися последовательностями.

Теорема 1. *В метрическом пространстве сходящаяся последовательность есть последовательность Коши.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty. \blacksquare$$

Классическая теорема "критерий Коши" утверждает, что в пространстве $\mathbb{R}$ действительных чисел верно и обратное утверждение: каждая последовательность Коши сходится.

Приведем примеры, показывающие, что обратное утверждение для произвольных метрических пространств не верно.

Пример 1. Пусть $X = (-1, 1)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

является последовательностью Коши, но не имеет предела в X, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \notin X.$$

Пример 2. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел с метрикой $\rho\,(x, y) = |x - y|$. Последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

является последовательностью Коши, но не сходится в пространстве $\mathbb{Q}$, т.к.

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \notin \mathbb{Q}.$$

Пример 3. В пространстве $C_L[0, 1]$ рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ n(t - \frac{1}{2}), & \text{если } \frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < t \leq 1. \end{cases}$$

Проверим, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши. Действительно, если $m > n$, то

$$\rho_L(x_n, x_m) = \int\limits_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\, dt = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x_m(t)|\, dt < \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Эта последовательность сходится в среднем к разрывной функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Но функция $f(t)$, $t \in [0,1]$, является разрывной и, следовательно, $f(t) \notin C_L\,[0,1]$.

Пример 4. На $\mathbb{R}$ введем метрику

$$\rho_1(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Последовательность $x_n = n$ является последовательностью Коши в этой метрике:

$$\rho_1(n, m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| \to 0, \text{ при } n, m \to \infty.$$

Но она не является сходящейся.

Действительно, если в последовательности существует такое x_0, что

$$\rho(n, x_0) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

тогда

$$\frac{x_0}{1+|x_0|} \to \frac{n}{1+n} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Однако, для нашей последовательности всегда выполняется

$$\left| \frac{x_0}{1+|x_0|} \right| < 1$$

и, значит, точки x_0 не существует.

Отметим, что в примерах 1, 2 пространство легко "исправить" так, чтобы любая последовательность Коши оказалась сходящейся. Так в примере 1 вместо $(-1,1)$ достаточно рассмотреть более широкое пространство $[-1,1]$, а в примере 2 — заменить $\mathbb{Q}$ пространством $\mathbb{R}$.

В примерах 3,4 это сделать сложнее.

Определение 1. *Метрическое пространство* (X,ρ) *называется полным, если в нем любая последовательность Коши сходится.*

Таким образом, пространства $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $\mathbb{Q}$, $C_L[0,1]$ не являются полными метрическими пространствами, а $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{R}$ — полные метрические пространства.

Теорема 2. *Пространство* $C\,[0,1]$ *является полным метрическим пространством.*

Упражнение. Доказать полноту пространств $l_1,\ l_p,\ l_\infty,\ S$.

Определение 2. *Открытым (замкнутым) шаром с центром в точке* x_0 *радиуса* r *в метрическом пространстве* (X,ρ) *называется множество*

$$B\,(x_0,r) = \{x \in X|\ \rho\,(x,x_0) < r\} \quad \left(B\,(x_0,r) = \{x \in X|\ \rho\,(x,x_0) \le r\}\right).$$

Определение 3. *Множество* $U \in X$ *называется открытым в метрическом пространстве* (X,ρ), *если для любого* $x_0 \in U$ *существует число* $r > 0$ *такое, что* $B\,(x_0,r) \subset U$.

Пусть A — подмножество в метрическом пространстве (X,ρ). Точки пространства X могут быть по-разному расположены относительно множества A :

1. Точка $x_0 \in X$ называется **внешней точкой** множества A, если существует радиус $r > 0$ такой, что $B\,(x_0,r) \cap A = \emptyset$;

2. Точка $x_0 \in X$ называется **точкой прикосновения** множества A, если для любого $r > 0$ шар $B\,(x_0,r)$ содержит точки множества A, т.е. $B\,(x_0,r) \cap A \neq \emptyset$.

Множество всех точек прикосновения множества A называется **замыканием** множества A и обозначается $\bar{A}$.

Определение 4. *Множество* $A \subset X$ *называется всюду плотным в* X, *если* $\bar{A} = X$.

Пример. Множество $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Пополнение метрических пространств.

Выше мы показали, что для некоторых неполных метрических пространств можно построить расширения, которые являются полными метрическими пространствами.

Оказывается, такое построение возможно для каждого метрического пространства.

Определение 5. *Пополнением метрического пространства* (X, ρ_X) *называется полное метрическое пространство* (Y, ρ_Y) *такое, что* (X, ρ_X) *является его всюду плотным подпространством.*

Теорема 3. *Для каждого метрического пространства существует пополнение.*

§3. Теоремы о продолжении

В анализе часто встречается задача, которая может быть сформулирована следующим образом.

Пусть X — метрическое пространство, множество $A \subset X$, f_0 — заданная на A непрерывная функция. Требуется найти непрерывную функцию f на X такую, что $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in A$, или доказать ее существование.

Функция f называется **продолжением** f_0.

Отметим, что задача продолжения не всегда имеет решение. Например, если

$$X = \mathbb{R},\ A = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f_0(x) = \sin \frac{1}{x},$$

то не существует непрерывной на $\mathbb{R}$ функции, совпадающей с f_0 на A, при $x = 0$ (функцию f_0 нельзя доопределить в нуле так, чтобы она стала непрерывной).

Ясно также, что продолжение может быть не единственным. Поэтому представляют интерес теоремы о существовании и единственности продолжения.

Подходящим классом отображений, для которых будет доказана теорема о существовании продолжения, являются равномерно непрерывные отображения.

Теорема 1. *Пусть* X, Y *— метрические пространства, причем* Y *— полное МП, множество* A *всюду плотно в* X $(A \subset X,\ \bar{A} = X)$; $f_0 : A \to Y$ *— равномерно непрерывное отображение. Тогда существует равномерно непрерывное продолжение* $f : X \to Y$ *отображения* f_0. *Такое продолжение единственное.*

Из теоремы следует, что равномерно непрерывное отображение достаточно задавать на всюду плотных множествах. В связи с этим желательно иметь всюду плотные множества возможно меньшей мощности, чтобы такое задание было проще.

С этой точки зрения особенно удобным являются пространства, в которых существуют всюду плотные счетные множества.

Определение 1. *Метрическое пространство, в котором существует всюду плотное счетное множество, называется сепарабельным.*

В сепарабельных пространствах непрерывные отображения однозначно определяются своими значениями в счетном числе точек.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}$ является сепарабельным, т.к. множество $\mathbb{Q}$ счетно и всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Пример 2. Пространство $C\,[0,1]$ сепарабельно. Счетным всюду плотным множеством в этом пространстве является множество полиномов с рациональными коэффициентами.

Пример 3. Пространство l_1 сепарабельно. Счетным всюду плотным множеством в нем является множество последовательностей вида $x = (q_1, q_2, ..., q_n, ...)$, где $q_i \in \mathbb{Q}$.

Пример 4. Пространство l_∞ не является сепарабельным.

Пространство $L_1(T, \mu)$

Пусть (T, K, μ) пространство с мерой, то есть:

T — множество;

K — σ-алгебра измеримых множеств;

μ — полная σ-аддитивная мера.

Обозначим через $Z_1(T, \mu)$ множество всех функций, интегрируемых по Лебегу на T, то есть функций, для которых существует интеграл Лебега $\int\limits_T x(t)d\mu$.

Каждой паре функций из $Z_1(T, \mu)$ поставим в соответствие число

$$\rho(x, y) = \int\limits_T |x(t) - y(t)|\, d\mu. \tag{2.2}$$

Легко проверить, что для $\rho(x, y)$ выполняются аксиомы 2), 3) метрики.

Однако, аксиома 1) не выполняется: если $\rho(x, y) = 0$ то $x(t) = y(t)$ почти всюду, но вообще говоря $x \neq y$. Таким образом, в $Z_1(T, \mu)$ функция (2.2) не является метрикой.

Построим новое метрическое пространство. В $Z_1(T, \mu)$ введем отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x(t) = y(t)$ почти всюду. Множество интегрируемых функций, эквивалентных функции x, как и раньше, обозначим через $[x]$. Множество классов эквивалентности обозначим через $L_1(T, \mu)$.

Метрику в $L_1(T, \mu)$ зададим формулой

$$\rho([x], [y]) = \int\limits_T |x(t) - y(t)| d\mu = \rho(x, y). \tag{2.3}$$

Теперь расстояние в $L_1(T, \mu)$ определено корректно, так как аксиома 1) метрики выполняется по построению: если $\rho([x], [y]) = 0$, то $x \sim y$ и, значит, $[x] = [y]$.

Таким образом, построено пространство $L_1(T, \mu)$ с метрикой (2.3) является метрическим пространством.

Элементы пространства $L_1(T, \mu)$ обычно называют функциями, хотя это неточно: пространство состоит их класса функций и обладает далеко не всеми свойствами функций. Например, для элемента $[x] \in L_1(T, \mu)$ не определено значение в точке $t \in T$, так как $[x]$ есть класс эквивалентных функций и значение в точке зависит от выбора представителя из этого класса.

Теорема 2. *Пространство $L_1(T, \mu)$ — полное метрическое пространство.*

Укажем в $L_1(T, \mu)$ некоторые всюду плотные множества:

1) множество интегрируемых функций (по определению интегрируемая по Лебегу функция является пределом последовательности простых функций);

2) множество простых функций, принимающих конечное число значений.

Теорема 3. *Пусть $T = [0, 1]$, μ — мера Лебега. Множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $L_1(T, \mu)$ и, следовательно, пространство $L_1(T, \mu)$ является пополнением пространства $C_L[0, 1]$.*

Следствие. *Если $T = [0, 1]$ и μ — мера Лебега, то пространство $L_1(T, \mu)$ сепарабельно.*

Множество многочленов с рациональными коэффициентами является счетным всюду плотным множеством в $L_1(T, \mu)$.

Пространство $L_p(T, \mu)$

Пусть T — пространство с σ-конечной мерой ρ. Зададим число $1 < p < \infty$ и обозначим через $Z_p(T, \mu)$ множество измеримых функций, для которых существует интеграл $\int\limits_T |x(t)|^p d\mu$.

В этом множестве введем отношение эквивалентности $x \sim y$, если $x(t) = y(t)$ почти всюду для $t \in T$. Множество классов эквивалентных между собой функций обозначим через $L_p\left(T, \mu\right)$. На этом множестве зададим метрику формулой

$$\rho\left([x], [y]\right) = \left(\int\limits_T |x(t) - y(t)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $[x]$ — класс эквивалентных между собой функций, содержащих x.

Теорема 4. *Пространство $L_p\left(T, \mu\right)$ полно.*

Следствие. *Пространство l_p полно.*

§4. Принцип сжимающих отображений

Пусть $f : X \to X$ — отображение метрического пространства в себя.

Определение 1. *Точка $a \in X$ называется неподвижной точкой отображения f, если $f\left(a\right) = a$.*

Отсюда следует, что неподвижная точка есть решение уравнения $f\left(x\right) = x$. Уравнения такого вида возникают в различных приложениях.

Одним из общих результатов, дающих достаточные условия существования неподвижной точки, является теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения.

Определение 2. *Отображение $f : (X, \rho_X) \to (X, \rho_X)$ называется сжимающим, если существует постоянная α, $0 \leq \alpha < 1$, такая, что для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство*

$$\rho\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) \leq \alpha\rho\left(x_1, x_2\right). \tag{2.4}$$

Таким образом, сжимающее отображение есть отображение, удовлетворяющее условию Липшица с постоянной $\alpha < 1$. Из этого следует, что такое отображение всегда равномерно непрерывно, а значит, и непрерывно.

Заметим, что в формуле (2.4) число α не может быть отрицательным, значит, можно требовать только $\alpha < 1$.

Теорема Банаха. *В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

Доказательство. Единственность неподвижной точки получаем независимо от полноты пространства. Пусть существует две неподвижные точки $a = f(a)$, $b = f(b)$, $a \neq b$. Тогда

$$0 < \rho(a,b) = \rho(f(a), f(b)) \leq \alpha\rho(a,b) < \rho(a,b).$$

В результате получили противоречие.

Существование неподвижной точки докажем методом последовательных приближений. Возьмем любую точку $x_0 \in X$ и построим последовательность

$$x_1 = f(x_0), \; x_2 = f(x_1), \; \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \; \ldots$$

Покажем, что эта последовательность является последовательностью Коши. Оценим сначала расстояние между соседними членами:

$$\rho(x_k, x_{k+1}) = \rho(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq \alpha\rho(x_{k-1}, x_k) = \alpha\rho(f(x_{k-2}), f(x_{k-1})) \leq \ldots \leq \alpha^k\rho(x_1, x_0).$$

Считая $m > n$ и применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{m-1})\rho(x_1, x_0),$$

из этого следует, что

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n(1-\alpha^{m-n})}{1-\rho}\rho(x_0, f(x_0)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, f(x_0)).$$

Так как X — полное пространство, то последовательность Коши x_n сходится к некоторому элементу $a \in X$. Переходя в равенстве $x_n = f(x_{n-1})$ к пределу (что обосновано в силу непрерывности функции f), получаем $a = f(a)$. ■

Следствие. *Для любого начального приближения x_0 последовательные приближения $x_n = f(x_{n-1})$ сходятся к неподвижной точке a отображения f, причем справедлива оценка погрешности*

$$\rho(x_n, a) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, f(x_0)).$$

Указанная теорема дает простой способ построения приближенного решения уравнения $f(x) = x$.

Укажем несколько случаев, когда решение уравнения $f(x) = x$ с несжимающим отображением можно свести к рассмотрению сжимающих отображений.

Отображение f может оказаться сжимающим не на всем пространстве X, а на некотором подпространстве $M \subset X$. Чтобы к M, рассмотренному как самостоятельное метрическое пространство, применить принцип сжимающих отображений, надо проверить выполнение условия

$$f(M) \subset M.$$

Частный случай такой ситуации рассмотрен в следующей теореме.

Теорема 1 (локальный принцип сжимающих отображений). *Пусть выполняются условия:*

1) *X — полное метрическое пространство;*
2) *на некотором шаре $B[x_0, r]$ отображение f является сжимающим с постоянной $\alpha < 1$;*
3) *$\rho(x_0, f(x_0)) \leq (1 - \alpha) r$.*

Тогда в шаре $B[x_0, r]$ существует, и притом только одна, неподвижная точка отображения f.

Теорема 2. *Пусть X — полное метрическое пространство и несжимающее отображение $f : X \to X$ таково, что его некоторая N-я итерация*

$$f_N(x) = \underbrace{f(f \ldots (f(x)) \ldots)}_{N}$$

является сжимающим отображением. Тогда отображение f имеет, и притом единственную, неподвижную точку в X.

Замечание. В случае, если $f_0 : X \to X$ — сжимающее отображение неполного метрического пространства X в себя, то неподвижной точки может не существовать.

Пример. Пусть X — множество рациональных точек отрезка $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Отображение $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$ переводит X в X и является сжимающим, но не имеет неподвижной точки в X.

§5. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений

Интегральными уравнениями называют уравнениями относительно неизвестной функции, которая в этих уравнениях находится под знаком интеграла.

Ограничимся рассмотрением интегральных уравнений вида

$$a\,(t)\,x\,(t) - \int\limits_T K(t,s,x(s))\,d\mu(s) = y\,(t)\,,\ t \in T, \tag{2.5}$$

где

T — пространство с мерой;

$a\,(t)\,, y\,(t)$ — заданные на T функции;

$K\,(t,s,z)$ — функция, заданная на множестве $T \times T \times \mathbb{R}$;

$x\,(t)$ — неизвестная функция.

Чаще всего T — подпространство из $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега.

Решением уравнения (2.5) называется функция $x\,(t)$, при подстановке которой выполняется равенство (2.5) для всех или почти всех $t \in T$.

Укажем некоторые примеры задач, приводящие к исследованию интегральных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f\,(x,t)\,,\ x\,(0) = y_0. \tag{2.6}$$

Проинтегрировав (2.6) с учетом начального условия, получаем интегральное уравнение

$$x\,(t) = y_0 + \int\limits_0^t f\,(\tau, x\,(\tau))\,d\tau.$$

Пример 2. Задача о восстановлении изображения. Рассмотрим следующую физическую задачу. Пусть в трехмерном пространстве (x,y,z) вдоль оси Z распространяется излучение, интенсивность которого есть функция от x, y : $\varphi = \varphi\,(x,y)$. Требуется измерить эту функцию.

Для этого на плоскости (x,y) устанавливается экран, который регистрирует поступающее на него излучение. Изображение на экране позволяет восстановить интенсивность поступающего на него потока излучения как функцию от x, y.

Однако на пути потока обычно имеются препятствия, искажающие изображение (например, атмосфера Земли при космической или астрономической съемке).

Рассмотрим случай, когда на пути излучения расположено полупрозрачное препятствие, которое пропускает часть излучения, а остальную часть поглощает и рассеивает. В результате на экране фиксируется не искомая интенсивность $\varphi(x,y)$, а некоторая иная величина $\psi(x,y)$ (см. Рис. 12).

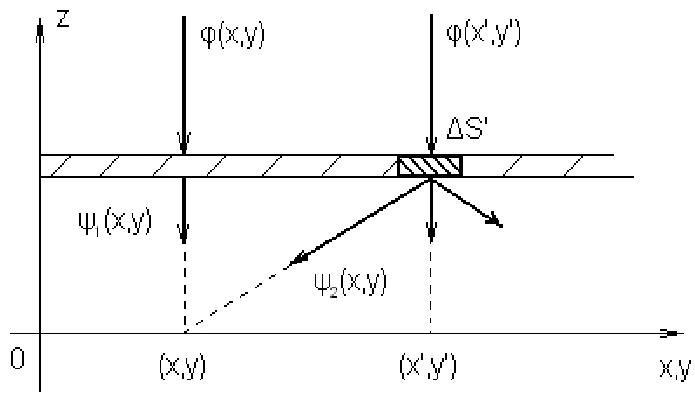

Рис. 12.

Подсчитаем интенсивность $\psi(x,y)$ излучения, поступающего на экран в точку (x,y). Часть излучения $\psi_1(x,y)$, которая проходит через препятствие без отклонения, пропорциональна $\varphi(x,y)$, то есть

$$\psi_1(x,y) = \mu\varphi(x,y).$$

Интенсивность $\psi_2(x,y)$ излучения, поступающего в точку (x,y) из других точек препятствия в результате рассеивания, найдем следующим образом.

От элементарного участка $\Delta S'$, расположенного в окрестностях точки (x',y'), поступает излучение, пропорциональное площади $\Delta x'\Delta y'$ этого участка и интенсивности излучения, поступающего в (x',y'). Коэффициент пропорциональности K зависит от расположения точек (x,y) и (x',y'), так как $K = K(x,y,x',y')$. Например, если излучение в точке (x',y') рассеивается равномерно во всех направлениях, то этот коэффициент пропорционален телесному углу, под которым видна элементарная площадка $\Delta S'$ из точки (x,y). Таким образом получаем соотношение

$$\Delta\psi_2(x,y) = K(x,y,x',y')\varphi(x',y')\,\Delta x'\Delta y'.$$

Суммируя по всем элементарным площадкам и переходя к пределу при $\Delta x'\Delta y' \to 0$ получаем

$$\psi_2(x,y) = \iint\limits_D K(x,y,x',y')\varphi(x',y')\,dx'dy',$$

где D — некоторая область в $\mathbb{R}^2$. И в результате получаем соотношение

$$\mu\varphi(x,y) + \iint\limits_D K(x,y,x',y')\varphi(x',y')\,dx'dy' = \psi(x,y), \tag{2.7}$$

которое представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(x,y)$ с заданными функциями $\psi(x,y)$ и $K(x,y,x',y')$.

Введем некоторые классы интегральных уравнений.

Интегральное уравнение (2.5) будем называть **линейным**, если

$$K(t,s,z) = K(t,s)\,z.$$

Линейное уравнение принимает вид

$$a(t)\,x(t) - \int\limits_T K(t,s)\,x(s)\,d\mu(s) = y(t), \;\; t \in T. \tag{2.8}$$

Функция двух переменных $K(t,s)$ называется **ядром** интегрального уравнения (2.8).

Интегральное уравнение (2.8) есть уравнение **первого рода**, если $a(t) \equiv 0$, и уравнение **второго рода**, если $a(t) \equiv 1$.

Если $T = [a,b]$, где $b < \infty$, то выделяют класс уравнений вида

$$a(t)\,x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds + y(t), \;\; t \in T, \tag{2.9}$$

включающих интеграл с переменным верхним пределом. Такие уравнения называются **уравнениями Вольтера**.

Интегральное уравнение (2.9) есть частный случай уравнения (2.8). Действительно, положим

$$K_1(t,s,z) = \begin{cases} 0, & \text{при } s > t, \\ K(t,s,z), & \text{при } s \le t. \end{cases}$$

Тогда очевидно, что (2.9) можно записать в виде

$$a(t)\,x(t) = \int\limits_a^b K_1(t,s,x(s))\,ds + y(t).$$

Идея применения принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям заключается в следующем. Пусть есть интегральное уравнение второго рода:

$$x(t) = \int\limits_T K(t, s, x(s))\, d\mu(x) + y(t), \; t \in T. \tag{2.10}$$

Соотношение

$$x \to \int\limits_T K(t, s, x(s))\, d\mu(x) + y(t)$$

определяет отображение F множества функций на T в себя. Значение $F(x)$ есть функция от t , заданная как интеграл, зависящий от параметра t , то есть

$$(F(x))(t) = \int\limits_T K(t, s, x(s))\, d\mu(x) + y(t). \tag{2.11}$$

Из этого следует, что уравнение (2.10) можно записать в виде $x = F(x)$, то есть искомое решение — неподвижная точка отображения F.

Для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений, нужно:

1) выбрать некоторое полное метрическое пространство X, состоящее из функций, заданных на T;

2) проверить, что (2.11) задает отображение F пространства X в себя;

3) проверить, что отображение (2.11) — сжимающее в пространстве X.

Покажем, каким образом такая схема реализуется в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. *Пусть $T = [a, b]$ и пусть $K(t, s, z)$ — непрерывная функция переменных t, s, z, удовлетворяющая условию Липшица по z, то есть существует постоянная величина L такая, что*

$$|K(t, s, z_1) - K(t, s, z_2)| \le L\,|z_1 - z_2|.$$

Если выполнено неравенство $L(b - a) < 1$, то интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_a^b K(t, s, x(s))\, ds + y(t), \; t \in [a, b], \tag{2.12}$$

имеет, и притом единственное, непрерывное решение для любой непрерывной функции $y(t)$.

Доказательство. Зафиксируем пространство $C\,[a,b]$. Это пространство полное. Нетрудно показать, что формула

$$(F\,(x))\,(t) = \int\limits_a^b K\,(t,s,x\,(s))\,ds + y\,(t)$$

определяет отображение пространства $C\,[a,b]$ в себя.

Проверим, что отображение F сжимающее. Используя условие Липшица, получаем

$$|F\,(x_1)\,(t) - F\,(x_2)\,(t)| \leq \int\limits_a^b |K\,(t,s,x_1\,(s)) - K_2\,(t,s,x_2\,(s))|\,ds \leq$$
$$\leq L\int\limits_a^b |x_1\,(s) - x_2\,(s)|\,ds \leq L\,(b-a)\,\rho\,(x_1,x_2)\,,$$

из этого следует, положив $\alpha = L\,(b-a) < 1$, получаем, что

$$\rho\,(F\,(x_1)\,, F\,(x_2)) = \max_{a\leq t\leq b} |F\,(x_1)\,(t) - F\,(x_2)\,(t)| \leq L\,(b-a)\,\rho\,(x_1,x_2) = \alpha\rho\,(x_1,x_2)\,.$$

Так как $\alpha < 1$, то отображение F — сжимающее. Тогда согласно теореме Банаха, существует, и притом единственная, неподвижная точка отображения F, то есть существует, и притом единственное, решение $x\,(t)$ интегрального уравнения (2.12). ■

Условие $L\,(b-a) < 1$ есть условие малости функции $K\,(t,s,z)$.

Для уравнений Вольтера существование решения получается без требования малости ядра — функции $K\,(t,s,z)$.

Теорема 2. *Пусть $K\,(t,s,z)$ удовлетворяет условию Липшица по z*

$$|K\,(t,s,z_1) - K\,(t,s,z_2)| \leq L\,|z_1 - z_2|\,.$$

Тогда интегральное уравнение Вольтера

$$x\,(t) = \int\limits_a^b K\,(t,s,x\,(s))\,ds + y\,(t) \tag{2.13}$$

имеет единственное непрерывное решение $x\,(t) \in C\,[a,b]$ для любой функции $y\,(t) \in C\,[a,b]$.

Если $K\,(t,s,z) = K\,(t,s)\,z$, то есть уравнение линейное, и $K\,(t,s)$ — непрерывная функция, то

$$|K\,(t,s,z_1) - K\,(t,s,z_2)| \leq \max_{t,s} |K\,(t,s)| \cdot |z_1 - z_2|\,,$$

то есть выполнено условие Липшица с постоянной

$$L = \max_{t,s} |K(t,s)|$$

и, следовательно, для линейных уравнений второго рода справедливы теоремы 1, 2 без требования выполнения условия Липшица.

Используя теоремы 1, 2 и результаты предыдущего параграфа, нетрудно получить схемы приближенного решения интегрального уравнения.

§6. Компактные метрические пространства

Классическая лемма из математического анализа, лемма Больцано-Вейерштрасса, служит истоком понятия компактного пространства.

Лемма Больцано-Вейерштрасса. *У любой ограниченной последовательности вещественных чисел существует сходящаяся подпоследовательность.*

Определение 1. *Метрическое пространство (X, ρ) называется компактным, если у любой последовательности точек этого пространства существует сходящаяся подпоследовательность.*

Свойство компактности является более сильным, чем свойство полноты.

Лемма 1. *Компактное метрическое пространство полно.*

Замечание. Обратное утверждение не верно. Например, пространство $\mathbb{R}$ полное, но не является компактным.

Проверку существования у последовательности $\{x_n\}$ сходящейся подпоследовательности можно проводить в 2 шага:

1) выделение последовательности Коши;

2) доказательство сходимости последовательности Коши.

Так как второй шаг есть фактически проверка полноты пространства, то наиболее существенным является шаг 1). Это приводит к выделению еще одного класса метрических пространств.

Определение 2. *Метрическое пространство (X, ρ) называется предкомпактным, если у любой последовательности в X можно выделить подпоследовательность Коши.*

Результат предыдущих рассуждений можно сформулировать следующим образом:

Утверждение. *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и полно.*

Определение 3. *Множество M в метрическом пространстве называется ограниченным, если множество чисел $\rho(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in M$, ограничено.*

Лемма 2. *Предкомпактное множество ограничено.*

Замечание. Обратное утверждение не верно. В произвольном метрическом пространстве ограниченное множество может не быть предкомпактным.

Определение 4. *Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное число. Множество S в метрическом пространстве (X, ρ) называется ε-сетью для $M \subset X$, если для любой точки $x \in M$ существует точка $x' \in S'$ такая, что $\rho(x, x') \leq \varepsilon$.*

Определение 5. *Метрическое пространство (X, ρ) называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть.*

Сравним это определение с определением ограниченного пространства или множества. Ограниченное пространство может быть покрыто одним шаром некоторого радиуса, а вполне ограниченное может быть покрыто конечным числом шаров с заданным радиусом $\varepsilon > 0$.

Замечание. Из вполне ограниченности следует ограниченность, но не наоборот.

Теорема Хаусдорфа (критерий предкомпактности). *Метрическое пространство предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Свойства компактных пространств.

Теорема 1. *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.*

Следствие 1. *Образ компактного множества при непрерывном отображении ограничен и замкнут.*

Следствие 2. *Пусть X — компактное метрическое пространство и $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывная числовая функция. Тогда f ограничена и достигает своих точных верхней и нижней граней.*

Теорема 2. *В* $\mathbb{R}^n$ *множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

Глава 3

НОРМИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Нормированные пространства

Мы начинаем изучение пространств, являющихся одновремено векторными и метрическими.

Определение 1. *Векторным пространством над полем K называется множество X, для которого заданы два отображения:*

а) $(x, y) \in (X \times X) \Rightarrow (x + y) \in X$ *(сложение);*

б) $(\lambda, x) \in (K \times X) \Rightarrow (\lambda x) \in X$ *(умножение на число),*

причем выполняются следующие аксиомы:

I. Множество X является абелевой группой относительно сложения:

1) $x + (y + z) = (x + y) + z;$

2) $x + y = y + x;$

3) существует элемент $0 \in X$ такой, что $x + 0 = x,\ \forall x \in X;$

4) для любого $x \in X$ существует элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = 0.$

II. Для любых $a, c \in K$ и $x, y \in X$ справедливы равенства:

1) $a \cdot (c \cdot x) = (a \cdot c) \cdot x;$

2) $1 \cdot x = x;$

3) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y;$

4) $(a + c) \cdot x = a \cdot x + c \cdot x.$

Точки векторного поля называются **векторами**.

Примеры векторных пространств:

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ с покоординатными операциями сложения и умножения на число — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Пример 2. Пространство $\mathbb{C}^n$ с покоординатными операциями — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Пример 3. Пусть T — произвольное множество. Множество $F(T)$ всех функций, определенных на T со значениями в $\mathbb{R}$, является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ с естественными операциями сложения и умножения на число:

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (cx)(t) = cx(t), \ t \in T.$$

Определение 2. *Подмножество L ($L \subset X$) векторного пространства X называется векторным подпространством, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на число, т.е. если $x, y \in L$ и $c \in K$, то $(x+y) \in L$ и $cx \in L$.*

Примеры векторных пространств:

Пример 1. $C[0,1]$ — пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Пример 2. $L_p(T,\mu)$ — пространство измеримых на T интегрируемых в степени p функций со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) — вектороное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Пример 3. Множество всех периодических функций (с разными периодами), определенных на $\mathbb{R}$ и со значениями в $\mathbb{R}$, не является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$, т.к. сумма двух периодических функций $\sin t$ и $\sin \pi t$ не является периодической.

Доказательство. Функция $\sin t$ имеет период $k_1 = 2\pi$. Функция $\sin \pi t$ имеет период $k_2 = 2$, т.к. верно $sin(\pi(t+2)) = \sin \pi t$.

Следовательно,

$$\begin{cases} \sin t = \sin(t + k_1 l_1), \\ \sin \pi t = \sin(\pi(t + k_2 l_2)), \end{cases}$$

где $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ (l_1, l_2 — любые целые числа).

Функция $\sin t + \sin \pi t = (\sin + \sin \pi)(t)$ будет периодической, если существует такое число k, которое можно представить в виде $k = k_1 l_1 = k_2 l_2$, где l_1 и l_2 — целые числа. Очевидно, что такое предстваление не возможно, т.к. не существует таких $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, что $l_2 = \pi l_1$. ■

Для векторных пространств вводится понятие нормы, обобщающее понятие длины вектора.

Определение 3. *Нормой на векторном пространстве X называется отображение из X в $\mathbb{R}$ (каждому $x \in X$ соответствует норма $\|x\| \in \mathbb{R}$), удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1) $||x|| \geq 0$ и из равенства $||x|| = 0$ следует, что $x = 0$;

2) $||\lambda x|| = |\lambda| \, \|x\|$;

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (неравенство треугольника).

Нормированным векторным пространством называется векторное пространство с заданной на нем нормой.

В любом нормированном векторном пространстве формула

$$\rho(x, y) = ||x - y|| \tag{3.1}$$

определяет **метрику**. Действительно:

1) если $\rho(x, y) = ||x - y|| = 0$, то согласно первой аксиоме нормы имеем $x = y$;

2) $\rho(x, y) = ||x - y|| = ||(-1) \cdot (y - x)|| = |-1| \cdot ||y - x|| = ||y - x|| = \rho(y, x)$ (здесь мы учли вторую аксиому нормы);

3) $\rho(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (здесь мы учли третью аксиому нормы).

Свойства 1)–3) — это аксиомы, определяющие общее понятие метрики.

Метрика, введенная по правилу (3.1), называется метрикой, порожденной нормой.

Введенная по формуле (3.1) метрика обладает **двумя дополнительными свойствами**:

а) $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$ (инвариантность относительно сдвига);

б) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$ (положительная однородность).

Утверждение. *Если в векторном пространстве X заданна метрика, обладающаа свойствами а) и б), то функция $\rho(x,0)$ есть норма на X и эта норма порождает исходную метрику.*

Примеры нормированных векторных пространств:

Пример 1. $C[0,1]$ — нормированное векторное пространство с нормой

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)|.$$

Пример 2. $L_p(T,\mu)$ — нормированное векторное пространство с нормой

$$||x||_p = \left(\int\limits_T |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1.$$

Пример 3. l_p — нормированное векторное пространство с нормой

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{1}{p}}\right)^{p},\ p\ge 1.$$

Пример 4. Пространство S не удовлетворяет свойству б), поэтому нельзя ввести норму на его метрике

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|}.$$

Напомним, что здесь мы использовали следующие обозначения:

$C[0,1]$ — пространство числовых функций, заданных и непрерывных на $[0,1]$, метрика в этом пространстве задается формулой

$$\rho(x,y) = \max_{0\le t\le 1} |x(t)-y(t)|;$$

$L_p(T,\mu)$ — множество измеримых на множестве T функций, для которых существует интеграл $\int\limits_T |x(t)|^p d\mu$, метрика в этом пространстве задается формулой

$$\rho(x,y) = \left(\int\limits_T |x(t)-y(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}};$$

l_p, $p\ge 1$, — пространство бесконечных числовых последовательностей

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...),$$

таких что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p$ сходится, метрика в этом пространстве задается формулой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^{\frac{1}{p}}\right)^p;$$

S — пространство, элементами которого являются все бесконечные числовые последовательности $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$. Метрика в пространстве S задается формулой

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}.$$

Метрики, заданные в пространствах из примеров 1–3, обладают свойствами а) и б) и порождаются указанными нормами.

Метрика в векторном пространстве S обладает свойством а), но не обладает свойством б) и, следовательно, не порождается нормой.

Поскольку всякая норма задает метрику, то в нормированных пространствах естественным образом определяется сходимость, непрерывность, полнота и другие, связанные с расстояниями понятия.

Алгебраические операции сложения и умножения на число являются отображениями $X\times X\to X$ и $K\times X\to X$. Поэтому естественно возникает вопрос об их непрерывности относительно заданной нормы.

Теорема 1. *Отображения, задающие операции сложения и умножения на число в нормированном пространстве, непрерывны.*

Определение 4. *Множество B (содержащее конечное или бесконечное число элементов) в векторном пространстве X называется линейно-независимым, если для любого конечного набота $x_1,x_2,...,x_n$ элементов из B равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ возможно только при $\lambda_i=0,\ i=\overline{1,n}$.*

Если в пространстве X можно найти n линейно-независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство X имеет **размерность n.** Если же в X можно указать систему из произвольного конечного числа ленейно-независимых элементов, то говорят, что пространство X **бесконечномерное**.

Определение 5. *В конечномерном пространстве X линейно-независимое множество $B\subset X$ называется базисом пространства X, если любой элемент $x\in X$*

однозначно представим в виде конечной комбинации элементов из B.

Отсюда следует, что в n-мерном пространстве X базисом является любая система из n линейно-независимых элементов.

Базис могут иметь и бесконечномерные пространства. В этом случае базис будет состоять из бесконечного (для сепарабельных пространств — счетного) числа элементов. Тогда, вместо однозначного представления элементов в виде конечной суммы базисных элементов, необходимо требовать однозначную разложимость элемента $x \in X$ в бесконечный ряд по элементам базиса. При этом сходимость ряда в нормированном векторном пространстве определяется обычным образом: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

сходится и имеет сумму S, если последовательность частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

сходится по норме к S, т.е.

$$||S_n - S|| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

§2. Банаховы пространства

Определение 1. *Банаховым пространством называется полное нормированное векторное пространство.*

Примеры банаховых пространств:

Пример 1. Пространство $C[0,1]$ с нормой

$$||\mathrm{x}|| = \max_{0 \leq \mathrm{t} \leq 1} |x(t)|.$$

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ с любой из следующих норм:
а) $||x||_p = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}},\ p \geq 1;$
б) $||x||_{\infty} = \max\limits_{\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{n}}} |x_k|.$

Пример 3. Пространство l_p с нормой

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},\ p \geq 1.$$

__**Пример 4.**__ Пространство $L_p(T,\mu)$ с нормой

$$||x||_p = \left(\int\limits_T |x(t)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полнота данных пространств была уже проверенна.

Укажем одно свойство, характеризующее банаховы пространства в классе нормированных пространств.

Как уже ранее отмечалось, в нормированном пространстве можно рассматривать ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \text{ где } x_k \in X.$$

Такой ряд называется **сходящимся**, если последовательность частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

сходится , т.е. S такое, что $||S_n - S|| \to 0$ при $n \to \infty$.

Элемент $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда и обозначается $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Вместе с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ можно рассмотреть числовой ряд $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k||$, состоящий из норм элементов.

Определение 2. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k||$, состоящий из норм, сходится, то исходный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, называется абсолютно сходящимся.*

Для числовых рядов в математическом анализе доказывается, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходися, т.е. абсолютно сходящийся ряд сходится.

В нормированном пространстве справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Нормированное пространство является банаховым тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X — банахово пространство и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|a_k\|$ сходится. Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Покажем, что частичные суммы этого ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ образуют последовательность Коши.

Действительно, если $m > n$, то

$$||S_m - S_n|| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} ||a_k|| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

т.к. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||a_k||$ сходится.

Поскольку X — полное пространство, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Кроме того верно неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} ||a_k||,$$

которое обобщает неравенство треугольника для норм.

Достаточность. Пусть в нормированном пространстве X любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

Покажем, что X — полное пространство, т.е. любая последовательность Коши сходится.

Возьмем в X произвольную последовательность Коши $\{x_n\}$. Выберем ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ так, чтобы

$$||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}.$$

Тогда для ряда

$$x_{n_1} + \sum_{i=2}^{\infty} (x_{n_i} - x_{n_{i-1}}) \tag{3.2}$$

аналогичный ряд, составленный из норм, сходится, и, следовательно, сходится (в силу предположения) сам ряд (3.2). Но для ряда (3.2) частичная сумма

$$S_k = x_{n_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (x_{n_i} - x_{n_{i-1}}) = x_{n_k},$$

следовательно, сходится и выделенная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Справедливо утверждение: если у последовательности Коши сходится подпоследовательность, то и сходится сама последовательность Коши.

Учитывая последнее утверждение и сходимость $\{x_{n_k}\}$ заключаем, что в X сходится любая последовательность Коши. Следовательно, X — полное нормированное пространство (банахово пространство). ■

Если X_0 — неполное нормированное пространство, то ранее мы показали, что для него (см. метрические пространста) существует пополнение X. Однако X еще не будет банаховым пространством, так как пополнение (по конструкции теоремы) не является векторным пространством. Его легко превратить в векторное, задав операции сложения и умножения на число следующим образом:

Пусть $x, y \in X$. Существуют последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X_0$ такие, что

$$y_n \to y,\ x_n \to x \text{ при } n \to \infty.$$

Положим по определению

$$x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n), \quad \lambda x = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n.$$

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого нормированного пространства X_0 существует банахово пространство X, являющееся пополнением X_0, причем X_0 является векторным подпространством в X.*

Напомним, что пополнением метрического пространства X_0 называется полное метрическое пространство X такое, что

$$X_0 \subset X,\ \bar{X}_0 = X.$$

Для нормированных пространств дополнительно требуется чтобы:

1) X было векторным пространством.

2) X_0 было векторным подпространством X.

§3. Критерий конечномерности нормированного пространства. Эквивалентные нормы

Пусть на векторном пространстве X заданы две нормы: $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$.

Определение 1. *Две нормы на векторном пространстве X называются эквивалентными, если существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для любого $x \in X$ справедливы неравенства:*

$$c_1||x||_1 \le ||x||_2 \le c_2||x||_1.$$

Выделение эквивалентных норм вызвано тем, что эквивалентные нормы порождают одинаковые сходящиеся последовательности, одинаковые последовательности Коши, ограниченные множества, замкнутые множества, компактные и предкомпактные.

Теорема 1. *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *любые две нормы эквивалентны.*

Следствие 1. *Конечномерное нормированное пространство полно.*

Следствие 2. *Конечномерное подпространство нормированного пространства замкнуто.*

Прежде чем переходить к рассмотрению критерия конечномерности нормированного пространства, сформируем лемму, имеющую самостоятельное значение.

Лемма (о почти перпендикуляре). *Пусть* X *— нормированное векторное пространство,* L *— его замкнуто векторное подпространство,* $L \neq X$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует точка* $u \in X \backslash L$, $||u|| = 1$, *такая что*

$$||u - l|| \geq 1 - \varepsilon, \ \forall l \in L.$$

Лемма имеет простой геометрический смысл. В случае, когда $X = \mathbb{R}^2$ — плоскость с евклидовой нормой $||\cdot||_2$ и L — прямая, проходящаа через центр O, существует вектор $u_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash L$ такой, что $||u_0|| = 1$ и $||u_0 - l|| \geq 1$ для любого $l \in L$. Это есть перпендикуляр к L единичной длины. При других нормах такого элемента (с $\varepsilon = 0$) может и не существовать, но есть элемент с близким свойством (почти перпендикуляр).

Теорема 2 (Ф. Рисс). *Нормированное векторное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда в нем единичный шар предкомпактен.*

§4. Гильбертовы пространства

При построении метрического пространства в качестве аксиом принимают свойство расстояния между точками в евклидовом пространстве; при построении теории нормированных пространств (НП) — свойства длины вектора.

При изучении евклидовых пространств широко используется понятие угла между векторами, причем вместо задания двух объектов — длины вектора и угла между ними — удобно задавать скалярное произведение, через которое выражается длина вектора и угол.

Определение 1. *Будем говорить, что на векторном пространстве H (над полем K) задано скалярное произведение, если каждой паре элементов $x, y \in H$ поставленно в соответствие число $(x, y) \in K$ так, что выполняются ряд аксиом:*

1) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$, $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, (линейность по первой переменной);

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (эрмитовость), где черта означает комплексное сопряжение $\alpha = a + ib$, $\bar{\alpha} = a - ib$;

3) $(x, x) \geq 0$, причем из равенства $(x, x) = 0$ следует, что $x = 0$.

В случае векторного пространства H над полем $\mathbb{R}$ аксиома 2) имет вид

$$(x, y) = (y, x).$$

Из свойств 1) и 2) получаем свойство антилинейности по второй переменной:

$$(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \bar{\lambda}_1 (x, y_1) + \bar{\lambda}_2 (x, y_2).$$

Пример 1. В пространстве $\mathbb{C}^n$ стандартное скалярное произведение имеет вид

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k,$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)'$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)'$.

Пример 2. В пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартное скалярное произведение имеет вид

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Любое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_k y_i = x' A y,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij}, j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix}$$

положительно определенная матрица.

Пример 3. В пространстве l_2 зададим скалярное произведение формулой

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k. \tag{3.3}$$

Из неравенства

$$|x_k \bar{y}_k| \leq \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2)$$

получаем, что ряд в (3.3) сходится абсолютно.

Пример 4. В пространстве $L_2[0,1]$ зададим скалярное произведение формулой

$$(x,y) = \int_0^1 x(t)\bar{y}(t)dt. \tag{3.4}$$

Пример 5. Формула (3.4) задает скалярное произведение на векторном пространстве C[0,1].

Определение 2. *Конечномерное вещественное векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым.*

Конечномерное комплексное векторное пространство со скалярным произведением назвается унитарным пространством.

Определение 3. *Векторное пространство со скалярным произведением называется предгильбертовым пространством.*

Утверждение. *Функция $||x|| : x \to \sqrt{(x,x)}$ является нормой на предгильбертовом пространстве.*

Доказательство. Проверим выполнение аксиом нормы:

1) $\sqrt{(x,x)} \geq 0$, если $\sqrt{(x,x)} = 0$, то $x = 0$ (следует из аксиомы 3) скалярного произведения);

2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda\bar{\lambda})}\sqrt{(x,x)} = |\lambda|\|x\|$;

3) $\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) = \|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2 \leq$ $\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. ■

Лемма 1. *В любом предгильбертовом пространстве справедливо неравенство Коши-Буняковского:*

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}. \tag{3.5}$$

Таким образом предгильбертово пространство является частным случаем нормированного пространства и для него справедливы все теоремы, доказанные для нормированных пространств.

Определение 4. *Векторное пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, *называется гильбертовым пространством.*

Примеры:

Пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l_2, $L_2[0,1]$ — гильбертовы пространства.

Пространство $C[0,1]$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_0^1 x(t)\bar{y}(t)dt = \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

неполно по норме $||x|| = \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 dt}$ и, следовательно, является неполным предгильбертовым пространством.

Пусть H_0 — предгильбертово пространство и H — его пополнение как нормированного пространства. Поскольку скалярное произведение в силу неравенства Коши-Буняковского есть непрерывная функция и H_0 всюду плотно в H, то скалярное произведение продолжается на все $H \times H$ по непрерывности. Другими словами, если $x, y \in H$, то найдутся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in H_0$ такие, что

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \;\; y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Тогда

$$(x,y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Всякое предгильбертово пространство обладает пополнением, являющимся гильбертовым пространством.*

§5. Ортогональность. Теорема о проекции

Пусть H — предгильбертово пространство.

Определение 1. *Два вектора* $x, y \in H$ *называются ортогональными, если* $(x, y) = 0$.

Определение 2. *Вектор* $x \in H$ *называется ортогональным к множеству* $M \subset H$ *(обозначается это символом* $x \perp M$*), если* $(x, z) = 0$ *для любого* $z \in M$.

Множество векторов, ортогональных множеству M, называется его **ортогональным дополнением** и обозначается $M^{\perp}$.

Лемма 1. *Ортогональное дополнение к любому множеству является замкнутым векторным подпространством в* H.

Определение 3. *Набор векторов* $\{b_i\}$ *называется ортогональным, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны.*

Определение 4. *Система векторов* e_i, $i \in N$, *называется ортонормированной, если*

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \qquad i, j \in N.$$

Понятие ортогональности лежит в основе одной из древнейших теорем.

Теорема Пифагора. *Пусть* $x_1, ..., x_n$ *— ортогональный набор векторов из* H *и* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. *Тогда*

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2.$$

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k, x_i) = \sum_{k=1}^{n} (x_k, x_k) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \blacksquare$$

С понятием ортогональности связанно понятие проекции вектора на подпространство.

Определение 5. *Пусть* L *— векторное подпространство в предгильбертовом пространстве* H. *Проекцией вектора* $x \in H$ *на* L *называется вектор* $y \in L$ *такой, что* $x - y \perp L$, *т.е.* $(x - y, l) = 0$ *для любого* $l \in L$.

В отличие от конечномерного случая в бесконечномерном пространстве со скалярным произведением может не существовать проекции вектора на векторное подпространство.

Пример. Пусть $H = C[0,1]$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)\overline{y}(t)dt = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Множество $P[0,1]$ функций, являющихся многочленами, будет векторным подпространством пространства H.

Возьмем функцию $x(t) = e^t$. Покажем что не существует проекций этой функции на векторное подпространство $P[0,1]$.

Предположим, что такая проекция существует, т.е. существует многочлен $y(t)$ такой, что функция $x(t) - y(t)$, $t \in [0,1]$, ортогональна любому многочлену.

Тогда, положив

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!},$$

имеем

$$(x - y, x_n - y) = 0.$$

Поскольку $x_n \in P[0,1]$, $y \in P[0,1]$, то $(x_n - y) \in P[0,1]$.

Переходя к пределу в последнем уравнении, получаем $||x - y||^2 = 0$, т.е. $x = y$. Так как e^t не является многочленом, то такое равенство невозможно. Следовательно, такого многочлена не существует.

Замечание. Дополнительные требования полноты пространства H и замкнутости подпространства L обеспечивают существование проекции.

В случае плоскости утверждение из элементарной геометрии "перпендикуляр короче наклонной" описывает одно из важнейших свойств проекции: пусть $y \in L$ есть проекция вектора x на подпространство L, тогда

$$\|x - y\| \le \|x - l\|, \ \forall l \in L,$$

т.е проекция y есть ближайшая к x точка из подпространства L.

Приведенный выше пример показывает, что векторное подпространство $P[0,1]$ не имеет ближайшего элемента к точке e^t.

Лемма 2. *Пусть H — гильбертово пространство, L — его замкнутое векторное подпространство. Тогда для любого $x \in H$ существует в L ближайший к x*

элемент $y \in L$ такой, что

$$||x-y|| = \inf_{l \in L} ||x-l|| \le ||x-l||, \ \forall l \in L.$$

Определение 6. *Множество L замкнуто, если оно совпадает со своим замыканием: $L = \bar{L}$.*

Теорема (о проекции). *Пусть H — гильбертово пространство, L — его замкнутое векторное подпространство. Для любого $x \in H$ существует, и притом единственная, его проекция на L.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Если $x \in L$, то y=x — его проекция. Пусть $x \notin L$. Тогда согласно лемме 2, существует вектор $y \in L$ такой, что

$$||x-y|| = d = \inf_{l \in L} ||x-l|| \le ||x-l||, \ \forall l \in L. \tag{3.6}$$

Проверим, что вектор y является проекцией. Возьмем любой элемент $l \in L$ и покажем, что

$$(x-y, l) = 0.$$

По построению элемента y получаем, что для любых $t \in \mathbb{R}$ и $l \in L$ вектор $\bar{l} = y + tl \in L$, следовательно, с учетом (3.6) получаем

$$\|x-\bar{l}\|^2 = \|x-(y+tl)\|^2 < \|x-y\|^2 = d^2.$$

Обозначим $z = x - y$, тогда

$$\|x-(y+tl)\|^2 = \|z-tl\|^2 = d^2 - 2tRe(z,l) + t^2\|l\|^2 \ge d^2.$$

Следовательно, для любого $t \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$t^2\|l\|^2 - 2t\mathrm{Re}(z,l) \ge 0,$$

что невозможно, если $\mathrm{Re}(z,l) \neq 0$.

Аналогичные рассуждения с заменой t на it приводят к тому, что число (z,l) имеет нулевую мнимую часть $\mathrm{Im}(z,l) = 0$.

Таким образом, мы показали, что $\mathrm{Re}(z,l) = 0$ и $\mathrm{Im}(z,l) = 0$, следовательно, $(z,l) = 0$.

Докажем единственность проекции.

Если y_1 — другая проекция, т.е. $x = y + z$ и $x = y_1 + z_1$, где $y, y_1 \in L$, $z, z_1 \in L^{\perp}$, тогда $y - y_1 = z - z_1 \in L^{\perp}$ (т.к. $z, z_1 \in L^{\perp}$). Но с другой стороны $y - y_1 \in L$ (т.к. $y, y_1 \in L$). Тогда

$$(y - y_1, z - z_1) = (y - y_1, y - y_1) = \|y - y_1\|^2 = 0,$$

следовательно, $\|y - y_1\| = 0$, а значит $y - y_1 = 0$, т.е. $y = y_1$. ■

Следствие 1. *Пусть L — замкнутое подпространство гильбертова пространства H и $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение L. Тогда H разлагается в прямую сумму*

$$H = L \oplus L^{\perp},$$

т.е. любой вектор $x \in H$ представляется в виде $x = y + z$, где $z \in L^{\perp}$, $y \in L$ и это представление единственное.

В силу теоремы о проекции каждому $x \in H$ становится в соответствие его проекция $y \in L$. Возникает отображение

$$P_L : H \to L. \tag{3.7}$$

Можно показать, что отображение (3.7) обладает свойствами:

1) $P_L(x + y) = P_L(x) + P_L(y),\ \forall x, y \in H$ (аддитивность);

2) $P_L(\lambda x) = \lambda P_L(x),\ \forall x \in H,\ \forall \lambda \in K$ (однородность).

Отображения, обладающие свойствами 1), 2) называются **линейными операторами**.

Следовательно, отображение (3.7) является линейным оператором.

Определение 7. *Линейный оператор $P_L : H \to L$ называется ортогональным проектором.*

Следствие 2. *Для ортогонального проектора P_L справедливы следующие свойства:*

1) $P_L x = x$, если $x \in L$, и $P_L x = 0$, если $x \in L^{\perp}$;

2) $P_L^2 = P_L P_L = P_L$;

3) $(P_L x, z) = (x, P_L z)$, $\forall x, z \in H$.

§6. Разложение по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве

Пусть $\{e_k\}$ — счетная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H.

Как и в случае конечномерных пространств, базис, являющийся ортонормированной системой, наиболее удобен для разложения.

Основная задача, которую мы рассмотрим в этом параграфе, заключается в том, чтобы выяснить, когда произвольный элемент $x \in H$ можно представить в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k. \tag{3.8}$$

Предположим, что допустимо представление (3.8). Умножим скалярно равенство (3.8) на e_n, получим

$$(x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k, e_n) = c_n.$$

Определение 1. *Число $c_n = (x, e_n)$ называется коэффициентом Фурье элемента x по ортонормированной системе $\{e_k\}$. Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

называется рядом Фурье элемента x.

Таким образом, если для x возможно представление (3.8), то это ряд Фурье элемента x. В частности если

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = 0,$$

то $c_k = 0$, так как векторы e_k линейно независимы.

Выясним следующие вопросы:

1. Сходится ли ряд Фурье.
2. Если ряд Фурье сходится, то чему равна его сумма.
3. Когда сумма ряда Фурье для элемента x совпадает с x.

Теорема 1. *Пусть $\{e_k\}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, x — произвольный элемент из H, $c_n = (x, e_n)$. Тогда*

1. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$ *сходится, причем справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \le \|x\|^2;$$

2. Ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e_k$ *сходится;*

3. Сумма ряда Фурье есть проекция элемента x *на попространство* L, *порожденное системой* $\{e_k\}$;

4. Элемент $x \in H$ *равен сумме своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда справедливо равенство Парсеваля-Стеклова*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \|x\|^2.$$

Следствие. *Отрезок ряда Фурье обладает экстремальным свойством, т.е.*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}c_k e_k\| = \inf_{l\in L}\|x-l\|,$$

где L *— подпространство, порожденное векторами* $e_k,\ k = 1, 2, ..., n$.

Определение 2. *Ортонормированная система* $\{e_k\}$ *называется полной, если из того, что* $(x, e_k) = 0$ *для любых* k *следует что* $x = 0$.

Из определения следует, что к полной системе $\{e_k\}$ нельзя присоединить элемент так, чтобы она оставалась ортонормированной.

Теорема 2. *Пусть* H *— гильбертово пространство,* $\{e_k\}$ *— ортонормирвоанная система в* H, L *— подпространство в* H, *порожденное системой* $\{e_k\}$. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) любой элемент $x \in H$ *является суммой своего ряда Фурье;*

2) система $\{e_k\}$ *— полная;*

3) для любого $x \in H$ *выполняется равенство Парсеваля-Стеклова*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \|x\|^2;$$

4) подпространство L *совпадает с* H.

Теорема 3. *Для того чтобы в гильбертовом пространстве H существовала полная счетная ортогональная система необходимо и достаточно, чтобы H было сепарабельным и бесконечномерным.*

Напомним, что пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду полное множество. Например, пространство $C[0,1]$ — сепарабельно, т.к. счетным, всюду плотным множеством в нем является множество полиномов с рациональными коефициентами.

§7. Полные ортонормированные системы в конкретных пространствах

Пример 1. В пространстве l_2 рассмотрим систему векторов e_k вида

$$e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),\ k = 1, 2, ...,$$

где 1 соответствует k-му элементу вектрора e_k.

Очевидно, что эта система ортонормированна. Покажем ее полноту.

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_2$ и $(x, e_k) = 0,\ k = 1, 2, \dots,$ т.к. $(x, e_k) = x_k$, то получим $x = 0$. Следовательно, система полная.

Пример 2. В пространстве $L_2[-1,1]$ классическим примером ортонормированной системы является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ cos(\pi t),\ sin(\pi t),\ cos(2\pi t),\ sin(2\pi t),\ \dots . \tag{3.9}$$

Ортонормированность этой системы проверяется непосредственным вычислением.

Проверим полноту этой системы. Для этого, согласно теореме 2 из §6, проверим, что подпространство L, порожденное системой (3.9), совпадает с $L_2[-1,1]$.

Воспользуемся теоремой Вейерштрасса о том, что любую непрерывную периодическую функцию можно равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т.е. линейной комбинацией функций из системы (3.9).

По теореме Вейерштрасса непрерывные функции, удовлетворяющие условию $u(-1) = u(1)$, принадлежат замкнутому подпространству L. Но такие непрерывные функции образуют всюду плотное множество в $L_2[-1,1]$, отсюда следует, что $L = L_2[-1,1]$.

Пусть f — функция из $L_2[-1,1]$, ее коэфициенты, отвечающие функциям (3.9), принято обозначать

$$a_0,\ a_n,\ b_n,\ n = 1,2,\ldots .$$

Таким образом, для коэффициентов Фурье имеем

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)dx,\ a_n = \int\limits_{-1}^{1} \cos(\pi n t) f(t)dt,\ b_n = \int\limits_{-1}^{1} \sin(\pi n t) f(t)dt,\ n = 1,2,\ldots .$$

Соответствующий ряд Фурье имеет вид

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n t) + b_n \sin(\pi n t)). \tag{3.10}$$

Для любой функции $f \in L_2[-1,1]$ ряд (3.10) сходится в среднем именно к ней, т.е. ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n t) + b_n \sin(\pi n t)) \to f(t)$$

по норме пространства $L_2[-1,1]$.

Норма в $L_2[-1,1]$ вводится по формуле

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} f^2(t)dt}.$$

Глава 4

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Пространства линейных ограниченных операторов

Среди отображений нормированных пространств выделяется класс линейных отображений, сохраняющих структуру векторного пространства.

Определение 1. *Пусть X_1 и X_2 — векторные пространства над одним и тем же полем K. Отображение $A : X_1 \to X_2$ называется линейным отображением или линейным оператором, если*

1) $A(x + y) = Ax + Ay,\ \forall x, y \in X_1$ (аддитивность);

2) $A(\lambda x) = \lambda Ax,\ \forall x \in X,\ \forall \lambda \in K$ (однородность).

Для произвольного отображения $f : X_1 \to X_2$ нормированных или метрических пространств следующие свойства различны и каждое последующее влечет предыдущее:

1. f непрерывно в точке x_0;
2. f непрерывно в каждой точке x;
3. f равномерно непрерывно;
4. f удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует $c > 0$ такое, что

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq c\,\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in X_1.$$

Определение 2. *Линейный оператор $A : X_1 \to X_2$, где X_1 и X_2 — нормированные пространства, называется ограниченным, если существует постоянная $c > 0$*

такая, что для любого $x \in X_1$ выполняется неравенство ограниченности

$$\|Ax\|_{X_2} \le c\,\|x\|_{X_1}.$$

Пример. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор. В $\mathbb{R}^n$ зададим норму

$$\|x\|_\infty = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|.$$

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ x_k \in R,$$

тогда

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k.$$

Оценим норму

$$\|Ax\|_\infty \le \sum_{k=1}^{n} \|x_k A e_k\| \le \max_{k=\overline{1,n}} |x_k| \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|\,\|x\|_\infty.$$

Положим

$$c = \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|,$$

тогда по определению 2 любой линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ ограничен.

Теорема 1. *Пусть X_1 и X_2 — нормированные пространства, $A : X_1 \to X_2$ — линейный оператор. Следующие свойства оператора эквивалентны:*

1. *A непрерывен в точке 0;*
2. *A непрерывен в любой точке;*
3. *A равномерно непрерывен;*
4. *A ограничен.*

Определение 3. *Линейным функционалом на векторном пространстве над полем K называется линейное отображение $f : X \to K$.*

Таким образом, линейный функционал является частным случаем линейного оператора.

Неравенство ограниченности оператора

$$\|Ax\| \le c\,\|x\|$$

запишем в виде

$$\|Ax\|/\|x\| \le c$$

и, обозначив $x_0 = x/\|x\|$, получаем

$$\|Ax_0\| \le c, \ \|x_0\| = 1.$$

Таким образом, наименьшая из констант c в неравенстве ограниченности есть точная верхняя грань множества $\{\|Ax\| \mid \ \|x\| = 1\}$, т.е.

$$\min c = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Введем **норму ограниченного оператора**

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

§2. Пространства линейных ограниченных операторов

Пусть X и Y — нормированные пространства. Рассмотрим множество $L\left(X,Y\right)$, состоящее из всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.

Если $A, B \in L\left(X,Y\right)$, то **суммой** $A+B$ операторов A и B называется оператор, действующий по формуле

$$\left(A+B\right)\left(x\right) = Ax + Bx.$$

Произведением оператора A на число λ называется оператор λA, действующий по формуле

$$\left(\lambda A\right)\left(x\right) = \lambda Ax.$$

Напомним, что для ограниченного оператора определена норма

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Теорема 1. *Множество $L\left(X,Y\right)$ с введенными операциями сложения и умножения на число и нормой оператора образует нормированное векторное пространство. Пространство $L\left(X,Y\right)$ полно, если полно пространство Y.*

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность операторов $A_n \in L\left(X,Y\right)$ сходится к оператору $A \in L\left(X,Y\right)$ по норме, если*

$$\left\|A_n - A\right\|_L \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Сильная сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Определение 2. *Пусть X и Y — нормированные пространства. Последовательность операторов $A_n \in L(X,Y)$ сходиться к оператору A сильно, если для $\forall x \in X$ последовательность $A_n x$ сходится к Ax (в Y).*

Введение сильной сходимости обусловлено тем, что встречаются последовательности операторов, которые естественно считать сходящимися, но они оказываются не сходящимися по норме.

Пример. Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_k\}$ — полный ортонормированный базис в H. Любой элемент $x \in H$ представляется в виде ряда Фурье

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k. \tag{4.1}$$

Построим оператор P_n :

$$P_n x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Этот оператор является проектором на подпространство L_n, порожденное элементами $(e_1, ..., e_n)$. Равенство (4.1) по определению означает, что

$$P_n x \to x = Ix,$$

т.е. последовательность операторов P_n **сильно сходится** к единичному оператору I.

Оператор $(I - P_n)$ есть проектор на подпространство $L_n^{\perp}$ и поэтому $\|I - P_n\| = 1$, т.е. P_n не сходится к I по норме.

Лемма 1. *Если последовательность $A_n \in L(X,Y)$ сходится по норме к оператору A, то A_n сходится к A сильно.*

Замечание. Как показывает приведенный выше пример, обратное утверждение не верно.

В определении предела сильно сходящейся последовательности операторов не требуется, чтобы предельный оператор был линейным и ограниченным.

Если A_n сходится к A сильно и A_n линейные, то, переходя к пределу в равенствах

$$A_n(x_1 + x_2) = A_n x_1 + A_n x_2,$$
$$A_n(\lambda x) = \lambda A_n x,$$

убеждаемся, что оператор A — **линейный**. Однако в **неполных** пространствах оператор A **может не быть ограниченным**. Если же пространство, на котором определен оператор, является полным, то оператор A ограничен. Это утверждение является следствием следующей фундаментальной теоремы.

Теорема 2 (Банаха-Штейнгауза)(принцип равномерной ограниченности). *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и пусть M — множество ограниченных линейных операторов $M \subset L(X, Y)$ такое, что для любого $x \in X$ существует постоянная $c_x > 0$ такая, что $\|Ax\| \leq c_x$ для любого $A \in M$. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|A\| \leq c$ для любого $A \in M$.*

Следствие. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное. Если последовательность $A_n \in L(X, Y)$ сильно сходится к оператору A, то*

1) последовательность A_n ограничена по норме;

2) оператор A ограничен.

Доказательство. Проверим, что множество $\{A_n\}$ удовлетворяем условия теоремы Банаха-Штейнгауза. Действительно, $\{A_n x\}$ — сходящаяся последовательность для всех $x \in X$. Значит $\|A_n x\| \leq c_x$. По теореме Банаха-Штейнгауза существует c такая, что $\|A_n\| \leq c$. Тогда справедливо неравенство

$$\|A_n x\| \leq c \|x\| .$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем неравенство ограниченности предельного оператора A. ■

§3. Обратные операторы

Многие задачи, встречающиеся в теории дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и других приложениях, могут быть записаны в виде уравнений

$$Ax = y, \tag{4.2}$$

где x — неизвестная функция из некоторого пространства X, y — известная функция из некоторого пространства Y, A — заданный линейный оператор из X в Y.

При исследовании (4.2) необходимо по возможности дать ответы на следующие вопросы:

1. существует ли решение уравнения (4.2) для любого $y \in Y$;

2. единственно ли это решение;

3. если не единственно, то сколько решений существует;

4. если не для любого y существует решение, то какие условия нужно наложить на y для существования решения;

5. как найти решение точно или приближенно.

Рассмотрим, с какими свойствами оператора A связаны перечисляемые свойства уравнения (4.2).

Определение 1. *Пусть $A : X \to Y$. Оператор $B : Y \to X$ называется правым обратным к оператору A, если*

$$AB = I_Y.$$

Оператор $B : Y \to X$ называется левым обратным к оператору A, если

$$BA = I_X.$$

Оператор B называется обратным к A (и обозначается A^{-1}), если

$$AB = I_Y,\ BA = I_X,$$

т.е. является одновременно левым и правым обратным.

Заметим, что в определении нет требования линейности или ограниченности оператора B.

Множество

$$\mathrm{Ker} A = \{x|\, x \in X, Ax = 0\}$$

называется **ядром** оператора A.

Множество

$$\mathrm{Im} A = \{y|\, \exists x \in X : y = Ax\}$$

называется **образом** оператора A.

Лемма 1. *Для линейного оператора A следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения $Ax = y$ единственно для любого $y \in \mathrm{Im} A$;

2) $\mathrm{Ker} A = \{0\}$;

3) для оператора A существует левый обратный оператор.

Лемма 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *решение уравнения* $Ax = y$ *существует для любого* $y \in Y$;
2) $\mathrm{Im}A = Y$;
3) *для оператора* A *существует правый обратный оператор* B.

Приведем несколько теорем, которые позволяют получить условия существования ограниченного оператора, обратного к оператору A.

Оператор A называется **обратимым**, если для него существует линейный ограниченный обратный оператор.

Теорема 1. *Пусть* X *— банахово пространство,* Y *— нормированное пространство,* $A : X \to Y$ *— ограниченный обратный оператор и пусть:*

1) $\mathrm{Im}A = Y$ *(образ плотен в* Y*)*;
2) *существует постоянная* $c > 0$ *такая, что* $\|Ax\| \geq c\|x\|$.

Тогда оператор A *обратим.*

Теорема 2. *Пусть* X *— банахово пространство и* $A \in L(X, X)$, $\|A\| \leq 1$. *Тогда оператор* $T = I - A$ *обратим.*

Теорема Банаха об обратном операторе.

Среди теорем об обратном операторе особое место занимает теорема Банаха. Эта теорема вместе с теоремой Банаха-Штейнгауза и теоремой Хана-Банаха составляют три основных принципа линейного функционального анализа.

Теорема 3 (Банаха) (об обратном операторе). *Пусть* X *и* Y *— банаховы пространства,* $A : X \to Y$ *— линейный биективный ограниченный оператор. Тогда* A^{-1} *является непрерывным оператором.*

Отображение $f : X \to Y$ называется **инъективным**, если из $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.

Отображение $f : X \to Y$ называется **сюрьективным**, если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется **биективным**, если оно инъективно и сюрьективно.

Глава 5

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Линейные ограниченные функционалы

Определение 1. *Линейным функционалом на векторном пространстве X над полем K называется отображение $f : X \to K$, удовлетворяющее условию*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

для любых $x_1, x_2, x \in X$ и $\lambda \in K$.

Вспоминая определение линейного оператора, видим, что линейный функционал — частный случай линейного оператора, когда $Y = K$. Из этого следует, что для линейного функционала справедливы все понятия и теоремы, приведенные выше для линейных операторов.

Приведем некоторые из этих понятий:

1. Линейный функционал на нормированном пространстве называется **ограниченным**, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $|f(x)| \leq c \|x\|$.

2. Нормой ограниченного линейного функционала называется наименьшая из констант c, при которых справедливо неравенство ограниченности, т.е.

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Определение 2. *Пространство $L(X, K)$ линейных ограниченных функционалов на X называется пространством, сопряженным к пространству X, и обозначается*

X'.

<u>**Пример 1.**</u> Пусть X — конечномерное нормированное пространство с базисом $e_1, e_2, ..., e_n$. Тогда элемент x представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \; x_k \in \mathbb{R}.$$

Поскольку в X все нормы эквивалентны, будем считать, что

$$\|x\|_X = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

Если f — линейный функционал на X, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k, \text{ где } \xi_k = f(e_k).$$

Полагая

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k,$$

имеем $f(x) = (x, \xi)$. Из неравенства Коши-Буняковского получаем оценку

$$|f(x)| = |(x, \xi)| \le \|\xi\| \, \|x\|,$$

которая показывает, что в конечномерном нормированном пространстве X каждый линейный функционал ограничен.

<u>**Пример 2.**</u> Пусть $X = C[0, 1]$. Функционал f на X определяем формулой

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

Легко проверить, что этот функционал линейный.

Проверим его ограниченность:

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t)dt \right| \le 1 \cdot \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| = \|x\|.$$

<u>**Пример 3.**</u> Пусть H — гильбертово пространство и u ($u \in H$) — произвольный элемент H. Линейный функционал на H определим формулой

$$f(x) = (x, u)$$

Линейность этого функционала следует из аксиом скалярного произведения, а неравенство Коши-Буняковского $|(x,u)| \leq \|x\| \|u\|$ является неравенством ограниченности для функционала f и показывает, что

$$\|f\| \leq \|u\|.$$

Так как в случае $x = u$ имеет место равенство $f(u) = (u,u) = \|u\| \|u\|$, то постоянная $\|u\|$ есть наименьшая, при которой справедливо неравенство ограниченности, т.е.

$$\|f\| = \|u\|.$$

Таким образом, мы получили, что каждый элемент $u \in H$ порождает линейный ограниченный функционал

$$f(x) = (x,u) \text{ с нормой } \|f\| = \|u\|.$$

Следующая теорема утверждает, что верно и обратное.

Теорема Рисса. *Для каждого ограниченного функционала f на гильбертовом пространстве H существует, и притом единственный, элемент $u \in H$ такой, что $f(x) = (x,u)$, причем $\|f\| = \|u\|$.*

Эта теорема утверждает, что между элементами гильбертова пространства H и его сопряженного пространства H' существует биективное соответствие $u \in H \to f_u \in H'$, где $f_u(x) = (x,u)$.

Формула $f_u(x) = (x,u)$ задает общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

§2. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала

Эта теорема, как уже отмечалось, относится к числу трёх основных принципов функционального анализа.

Определение 1. *Пусть X — множество, (f_2) — семейство отображений. $f_2 : X \to R$. Говорят, что это семейство отображений разделяет точки пространства X, если для каждой пары $x_1 \neq x_2$ точек, принадлежащих X, $\exists\, f \in (f_2)$ такая, что*

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Нужно выяснить, разделяют ли ограниченные линейные функционалы точки нормированного пространства, т.е. достаточно ли много таких функционалов.

Близкая к этой задаче — задача о продолжении линейного ограниченного функционала.

Определение 2. *Пусть $L \subset X$ — подпространство нормированного пространства X и пусть на L задан линейный ограниченный функционал f_0. Продолжением функционала f_0 называется линейный ограниченный функционал f на X такой, что $f(x) = f_0(x)$ для любого $x \in L$.*

Если для ограниченного функционала существует продолжение, то для $x_1 \neq x_2 \in X$ разделяющий их функционал строится следующим образом: на подпространстве $L = \{t(x_1 - x_2) |\, t \in K\}$ зададим функционал $f[t(x_1 - x_2)] = t$. Его продолжение f на X разделяет точки x_1 и x_2. Действительно,

$$f[t(x_1 - x_2)] = t \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Отметим, что если f — продолжение f_0, то

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \geq \sup_{\substack{x \in L, \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \|f_0\|,$$

т.е. при продолжении норма не может уменьшиться. Представляют интерес такие продолжения, при которых норма не увеличивается.

Покажем, как эти задачи решаются в случае гильбертова пространства H на основе теоремы Рисса.

Пример 1. Если $x_1 \neq x_2$, то для функционала $f(x) = (x, x_1 - x_2)$ имеем

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = \|x_1 - x_2\|^2 \neq 0,$$

т.е. линейные ограниченные функционалы разделают точки гильбертова пространства H.

Пример 2. Пусть $L \subset H$ — подпространство гильбертова пространства H и f_0 — функционал на L. Согласно теореме Рисса $f_o(x) = (x, u_0)$, где $u_0 \in L$. Тогда формула $f(x) = (x, u_0)$ определяет линейный ограниченный функционал на H, являющийся продолжением f_0, причем $\|f\| = \|f_0\|$.

Теорема Хана-Банаха. *Пусть X — нормированное пространство, L — его векторное пространство. Тогда для каждого ограниченного линейного функционала $f : L \to C$ существует определенный на всем пространстве X ограниченный линейный функционал F такой, что:*

1) *F является продолжением f;*
2) *$\|F\| = \|f\|$.*

Следствие 1. *Линейные ограниченные функционалы разделяют точки нормированного пространства X, т.е. если $x_1 \neq x_2$, то существует функционал $f \in X$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Следствие 2. *Пусть $x_0 \neq 0$ — точка нормированного пространства X. Тогда существует линейный ограниченный функционал f на X такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$.*

Следствие 3. *Пусть L — векторное подпространство нормированного пространства X и $x_0 \in X$ — внешняя точка для L. Тогда существует функционал $f \in X'$ такой, что $f(x) = 0$ для $x \in L$ и $f(x_0) \neq 0$.*

§3. Общий вид линейных ограниченных функционалов в конкретных пространствах

Для ряда банаховых пространств сопряженное пространство можно описать явно. Такое описание дается с помощью теорем об общем виде линейного ограниченного функционала.

Ранее мы уже установили общий вид функционалов в пространстве $\mathbb{R}^n$ и в гильбертовом пространстве H.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$. Любой ограниченный линейный функционал f на $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

где y_k , $k = \overline{1,n}$, — заданные константы, характеризующие f.

Пример 2. Гильбертово пространство H. Согласно теореме Рисса, любой линейный ограниченный функционал единственным образом представляется в виде $f(x) = (x, u)$, где $u \in H$ и характеризует f, причем $\|f\| = \|u\|$.

Пример 3. Пространство C_0 — пространство бесконечных последовательностей $\{x_1,\, x_2,\, \dots\}$, сходящихся к нулю с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

Пусть

$$e_k = (\underbrace{0,\, ...,\, 0}_{k-1},\, 1,\, 0,\, ...),\ \ k = 1,\, 2,\, ...,$$

последовательность элементов из C_0. Тогда любой $x \in C_0$ представим в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

причем последний ряд сходится по норме C_0. Действительно,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_{C_0} = \max_{k>n} |x_k| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть f — любой ограниченный функционал на C_0. Тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Следовательно, функционал f определяется последовательностью чисел $y = \{y_k\}$.

Покажем, что $y \in l_1$ (l_1 — пространство последовательностей $\{x_1, x_2 ...\}$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ сходится).

Положим $x^{(n)} = (\operatorname{sign} y_1, \operatorname{sign} y_2, ..., \operatorname{sign} y_n, 0, ...) \in C_0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| = |f(x^{(n)})| \le \|f\| \|x^{(n)}\|_{C_0} = \|f\|,$$

причем $|f(x^{(n)})| \le \|f\| \|x^{(n)}\|_{C_0}$ — верно для любого ограниченного функционала. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k| \le \|f\|$. Следовательно, $y \in l_1$.

Покажем, что для любой последовательности $y = \{y_k\} \in l_1$ формула

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

определяет линейный ограниченный функционал на C_0. Действительно, имеем

$$|f(x)| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|\right) \max_k |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \|x\|_{C_0}.$$

Отсюда следует, что

1) функционал f определен (ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|$ сходится, т.к. $y = \{y_k\} \in l_1$) ;

2) функционал f ограничен, причем

$$\|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|.$$

Линейность очевидна.

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пространство C_0' линейно изометрично пространству l_1. Этот изометризм задается формулой*

$$y = \{y_k\} \in l_1 \to f \in C_0', \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Напомним, что отображение метрических пространств

$$f : (X, \rho_x) \to (Y, \rho_y)$$

называется **изометрией**, если

1) f биективно;

2) для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется равенство $\rho_y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_x(x_1, x_1)$;

и метрические пространства (X, ρ_x), (Y, ρ_y) называются **изометрическими**, если между ними существует изометрия.

Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный биективный оператор $f : X \to Y$ такой, что f и f^{-1} ограничены, называется **изоморфизмом**. Два нормированных пространства X и Y называются **изоморфными**, если существует изоморфизм $f : X \to Y$.

Пример 4. Пространство l_1. Рассуждая как и в случае C_0, можно показать, что справедлива теорема.

Теорема 2. *Пространство l_1' линейно изометрично пространству l_∞. Этот изоморфизм задается формулой*

$$y = \{y_k\} \in l_\infty \to f \in l_1', \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Норма в l_1 задается формулой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|,$$

норма в l_∞ задается формулой

$$\|x\|_\infty = \sup_{k=1,2,...} |x_k|.$$

Пространство l_∞ — это множество всех последовательностей $\{x_1, x_2, ...\}$, для которых

$$\sup_{k=1,2,...} |x_k| < \infty.$$

<u>Пример 5.</u> Пространство l_p.

Теорема 3. *Пространство l'_p при $1 < p < \infty$ изометрично пространству l_q, где $1/p + 1/q + 1$. Этот изоморфизм задается формулой*

$$y = \{y_k\} \in l_q \to f \in l'_p, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Пространство l_p — это множество всех последовательностей $\{x_1, x_2, \ldots\}$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ сходится. Норма задается числом

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

<u>Пример 6.</u> Пространство $L_p(T, \mu)$, $1 < p < \infty$.

Теорема 4. *Пусть T — пространство с полной σ-конечной мерой μ. Пространство $(L_p(T, \mu))'$ при $1 < p < +\infty$ линейно изометрично пространству $L_q(T, \mu)$, где $1/p + 1/q + 1$. Изоморфизм задается формулой*

$$u \in L_q(T, \mu) \to f \in (L_p(T, \mu))', \quad f(x) = \int_T x(t) u(t) dt.$$

<u>Пример 7.</u> Пространство $L_1(T, \mu)$.

Теорема 5. *Пространство $(L_1(T, \mu))'$ линейно изометрично пространству $L_\infty(T, \mu)$. Этот изоморфизм задается формулой*

$$u \in L_\infty(T, \mu) \to f \in (L_1(T, \mu))', \quad f(x) = \int_T x(t) u(t) dt.$$

§4. Сопряженные операторы

Пусть X и Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Возьмем линейный функционал

$$f \in Y'$$

и по нему построим новый функционал

$$g(x) = f(Ax).$$

Проверим, что g — линейный ограниченный функционал на X. Следующие равенства вытекают из линейности функционала f и оператора A :

$$g(x_1 + x_2) = f(A(x_1 + x_2)) = f(Ax_1) + f(Ax_2) = g(x_1) + g(x_2),$$
$$g(\lambda x) = f(A(\lambda x)) = \lambda f(Ax) = \lambda g(x).$$

Следовательно, g — линейный функционал.

Из неравенств

$$|g(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \, \|Ax\| \leq \|f\| \, \|A\| \, \|x\|$$

получаем, что g — ограниченный функционал и

$$\|g\| \leq \|A\| \, \|f\|.$$

Т.о. возникает отображение A'

$$A' : A'f \to g \in X'.$$

Определение 1. *Сопряженным оператором к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ называется оператор A', действующий по формуле $A'(f) = g$ из пространства Y' в пространство X' :*

$$A'f(x) = f(Ax).$$

Замечание. В выражении $A'f(x)$ из двух возможных вариантов расположения скобок: $(A'f)(x)$ и $A'(f(x))$ второй не имеет смысла, т.к. $f(x)$ — число и оператор A'

нельзя применять к числу. Поэтому выражение $A'f(x)$ читается по первому варианту: оператор A' применяется к функционалу, получается некоторый новый функционал, значение которого и вычисляется в точке x.

Следующая теорема показывает, что операция сопряжения не выводит из класса ограниченных линейных операторов.

Теорема 1. *Оператор A', сопряженный к линейному ограниченному оператору A, является линейным ограниченным, причем $\|A'\| = \|A\|$.*

Построив для любого оператора A его сопряженный оператор A', мы определили отображение, действующее из $L(X, Y)$ в $L(X', Y')$, которое оператору $A \in L(X, Y)$ ставит в соответствие его сопряженный оператор $A' \in L(X', Y')$. Это отображение называется **отображением сопряжения**.

Отметим следующие свойства сопряжения:

1) $(A + B)' = A' + B'$ (линейность);

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$ (линейность);

3) $\|A'\| = \|A\|$ (изометричность);

если $X = Y$, то дополнительно:

4) $I'_X = I_{X'}$;

5) $(AB)' = B'A'$;

6) Если оператор A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, то A' также обратим и $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Приведем пример задачи, при решении которой естественно возникают сопряженные операторы.

Пусть $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор (X, Y — банаховы пространства). Задача заключается в том, чтобы установить, имеет ли уравнение

$$Ax = y$$

решение $x \in X$ для заданного $y \in Y$. То есть нужно определить образ оператора A

$$\mathrm{Im}A = \{y |\, y = Ax,\ x \in X\}.$$

Теорема 2. *Пусть X и Y — банаховы пространства и $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор,* $\mathrm{Im}A$ *— его образ. Замыкание образа оператора A совпадает* *с множеством векторов* y, *удовлетворяющих условию* $f(y) = 0$ *для любого функционала* $f \in Y$ *такого, что* $A'f = 0:$

$$\overline{\mathrm{Im} A} = \{y \in Y |\, f(y) = 0,\ \forall f \in \beta\},$$

где $\beta = \{f \in Y' |\, A'f = 0\}$.