**ТЕМА 13. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА**

Теория Максвелла является единой теорией электромагнитного поля, позволяющей решить основную задачу электродинамики: для заданной системы электрических зарядов и токов найти характеристики электромагнитного поля.

Теория Максвелла – макроскопическая теория. В ней рассматривается электромагнитное поле, создаваемое протяженными зарядами и токами, размеры которых неизмеримо больше размеров атомов. Математическим выражением теории Максвелла являются четыре уравнения, которые записываются в интегральной и дифференциальной форме. Уравнения в интегральной форме справедливы для макроскопических контуров и поверхностей, уравнения в дифференциальной форме представляют собой соотношения между характеристиками поля в конкретной точке. Связь между уравнениями в интегральной и дифференциальной форме устанавливается с помощью теорем Остроградского-Гаусса и Стокса. Прежде чем формулировать уравнения Максвелла, необходимо познакомиться с еще одной характеристикой векторного поля – его ротором.

**13.1. Ротор векторного поля**

Как уже отмечалось, векторным полем называется пространство или некоторая его часть, в каждой точке которого определена векторная функция трех пространственных координат и времени . Если значение функции зависит от времени, поле называется нестационарным, в противном случае – стационарным. Ротором векторного поля  называется вектор, обозначаемый , который можно представить как векторное произведение:

.

Здесь – набла-вектор, который представляет собой векторный дифференциальный оператор первого порядка (оператор Гамильтона):

, .

Для того чтобы найти координаты вектора , представим векторное произведение  в виде детерминанта третьего порядка и раскроем его по элементам первой строки:

.

Таким образом, проекции ротора на координатные оси (его координаты):

, , .

В чем же заключается геометрический смысл ротора как характеристики векторного поля? Для ответа на этот вопрос необходимо сформулировать теорему Стокса:

.

Согласно этой теореме, поток ротора через поверхность  численно равен циркуляции вектора  вдоль контура, ограничивающего эту поверхность.

Выберем на поверхности , ограниченной контуром , точку . Используя теорему Стокса, а также свойства поверхностных интегралов, можно показать, что проекция вектора  на направление нормали к поверхности в этой точке численно равна пределу отношения циркуляции по контуру  к площади поверхности при условии, что поверхность стягивается в точку :

.

Из этого равенства следует, что ротор векторного поля в определенной точке связан с циркуляцией поля в этой же точке: если циркуляция поля равна нулю, ротор также равен нулю. Поскольку циркуляция вектора  равна интегралу по контуру, ротор поля иногда называют вихрем, характеризующим завихренность поля.

Теперь обратимся к конкретным полям – электростатическому и магнитному. Как уже отмечалось, стационарное электрическое поле

потенциально; это означает, что работа сил поля при перемещении заряда не зависит от траектории, а в случае замкнутой траектории работа равна нулю:

.

Поскольку циркуляция вектора напряженности равна нулю, . Именно поэтому электростатическое поле иногда называют безвихревым.

Теперь найдем ротор напряженности стационарного магнитного поля. Выше уже отмечалось, что , т.е. циркуляция вектора  численно равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых контуром интегрирования. Если ток распределен непрерывно по поверхности, «натянутой» на контур, то  (здесь  – вектор плотности тока). Поэтому . По теореме Стокса ; в соответствии с этим имеем: , т.е. ротор напряженности магнитного поля в определенной точке поля равен плотности тока проводимости в этой же точке. Поскольку, вообще говоря, , магнитное поле называют вихревым или соленоидальным.

**13.2. Вихревое электрическое поле**

Как уже отмечалось, индукционный ток возникает при перемещении либо деформации контура в стационарном магнитном поле, а также при изменении индукции поля. Если контур перемещается либо деформируется в стационарном поле, роль э.д.с. играет сила Лоренца. Если же индукционный ток в неподвижном контуре обусловлен изменением индукции магнитного поля, остается предположить, что электроны проводника движутся под действием электрического поля (ниже мы убедимся в том, что это поле является вихревым). В отличие от электростатического поля, создаваемого зарядами, вихревое поле порождается переменным магнитным полем.

Если вектор напряженности вихревого поля обозначить , то по определению

.

С другой стороны,

, ,

где – поверхность, охватываемая контуром. Следовательно,

.

Поскольку поверхность неподвижна, операции интегрирования и дифференцирования можно поменять местами:

.

По теореме Стокса

.

Поэтому

.

Следовательно, электрическое поле, которое приводит к возникновению индукционной э.д.с. в случае нестационарного магнитного поля, характеризуется ненулевым ротором напряженности и поэтому является вихревым (линии напряженности такого поля всегда замкнуты).

Максвелл предположил, что переменное магнитное поле порождает

вихревое поле независимо от наличия в пространстве проводящего контура. В общем случае электрическое поле складывается из электростатического и вихревого: (здесь  – напряженность электростатического поля). Поскольку , имеем: .

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полем указывает на то, что их раздельное рассмотрение возможно только в строго определенной системе отсчета. Действительно, электростатическое поле создается неподвижными электрическими зарядами. Однако эти же заряды, перемещающиеся в другой системе отсчета, создают магнитное поле. Аналогично, неподвижный в определенной системе отсчета провод с током создает в ней стационарное магнитное поле. Однако относительно другой системы провод может перемещаться; при этом может возникать переменное магнитное поле и, соответственно, вихревое электрическое поле.

Таким образом, поле, которое в одной системе отсчета является чисто электрическим или магнитным, в другой системе может представлять собой совокупность переменных электрических и магнитных полей, образующих единое электромагнитное поле.

**13.3. Ток смещения**

Английский физик Д.К. Максвелл был гениальным человеком. Его интуиция подсказывала ему, что переменное электрическое поле должно порождать магнитное поле аналогично тому, как переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле. В качестве физической величины, характеризующей способность вихревого электрического поля создавать магнитное поле, Максвелл ввел в электродинамику ток смещения.

По теореме Гаусса для электрического поля

,

где – вектор электрической индукции. В результате дифференцирования последнего равенства имеем:

.

Считая поверхность  неподвижной, символы интегрирования и дифференцирования можно поменять местами:

.

Поскольку размерность производной  равна 1 А/м2, Максвелл предложил назвать эту производную плотностью тока смещения:

.

Учитывая, что вектор  зависит, вообще говоря, не только от времени, но и от координат точки поля, правильнее использовать символ частной производной:

.

Как известно, в диэлектрике . Поэтому

.

Здесь первое слагаемое представляет собой плотность тока смещения в вакууме, второе – плотность поляризационного тока смещения, обусловленного упорядоченным движением связанных зарядов при поляризации. В общем случае токи проводимости и токи смещения сосуществуют, поэтому полный ток равен их сумме.

В качестве примера, иллюстрирующего роль токов смещения, можно упомянуть электрическую цепь, содержащую конденсатор. Если ее подключить и источнику постоянной э.д.с, тока не будет из-за разрыва в цепи, обусловленного наличием конденсатора. Если же используется источник переменной э.д.с, в цепи существует ток. Понятно, что в последнем случае цепь замыкается токами смещения, обусловленными переменным электрическим полем между обкладками конденсатора.

Как уже отмечалось, циркуляция вектора напряженности магнитного поля численно равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых контуром интегрирования:

.

Иногда это равенство называют законом полного тока. Согласно гипотезе Максвелла ток смещения, подобно току проводимости, является источником магнитного поля. Исходя из этого Максвелл обобщил закон полного тока:

,

где , . Имеем:

.

По теореме Стокса

.

Следовательно,

.

**13.4. Уравнения Максвелла**

Таким образом, введение тока смещения «уравняло в правах» электрическое и магнитное поле. Действительно, из явления электромагнитной индукции следует, что переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле; из закона полного тока, обобщенного Максвеллом, вытекает, что переменное электрическое поле создает магнитное поле.

Установленная Максвеллом неразрывная связь электрических и магнитных полей позволила ему создать единую теорию электрических и магнитных явлений, математическим выражением которой являются четыре уравнения. Впоследствии эти уравнения были названы уравнениями Максвелла; в электродинамике они играют такую же роль, как законы Ньютона в механике. Первую пару составляют уравнения

. (13.1)

Первое из них по существу представляет собой закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Если говорить более конкретно, из первого уравнения следует, что переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле. Второе уравнение отражает тот факт, что в природе не существуют магнитные заряды, которые создавали бы магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле. Можно сказать, что из второго уравнения следует соленоидальность магнитного поля.

Вторую пару образуют уравнения

. (13.2)

Первое из этих уравнений устанавливает связь между полным током, состоящим из тока проводимости и тока смещения, и магнитным полем. Из этого уравнения получается, что переменное электрическое поле создает магнитное поле. Второе уравнение отражает тот факт, что источником электрического поля являются электрические заряды. Для того чтобы корректно решить основную задачу электродинамики (по заданному распределению сторонних электрических зарядов и токов проводимости найти характеристики электромагнитного поля), эти четыре уравнения необходимо дополнить тремя материальными уравнениями:

, , . (13.3)

Система уравнений (13.1) – (13.3) составляет основу электродинамики покоящихся сред. Поскольку каждое из этих уравнений относится к определенной точке поля, их называют уравнениями Максвелла в дифференциальной (локальной) форме.

Проинтегрируем уравнение



по произвольной поверхности , левую часть преобразуем по теореме Стокса, в правой части поменяем местами символы интегрирования и дифференцирования:

.

Следовательно, первое из уравнений Максвелла в интегральной форме представляет собой закон электромагнитной индукции.

Проинтегрируем уравнение  по объему :

. (13.4)

Согласно теореме Остроградского-Гаусса

.

С учетом равенства (13.4) имеем: . Следовательно, второе из уравнений Максвелла в интегральной форме представляет собой теорему Гаусса для магнитного поля. Рассуждая аналогично, можно показать, что уравнения (13.2), записанные в интегральной форме, дают нам закон полного тока и теорему Гаусса для электрического поля.

Развитая Максвеллом единая теория электрического и магнитного поля позволила объяснить все известные на то время опытные факты и предсказать ряд новых явлений. В частности, Максвелл пришел в выводу о существовании электромагнитных волн и вычислил скорость их распространения.