

ВЕСТИНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

$\frac{3}{1975}$

Л. А. ЗОЛОТОРЕВИЧ, В. П. СУПРУН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫХ СХЕМ

Методы анализа цифровых схем делятся на прямые и косвенные. Прямые методы опираются на различные алгебро-структурные описания схем на основе схемных списков, к которым относятся, например, нулевые и единичные покрытия схемы, построенные на основе π -алгоритма, D -кубы схемы, эквивалентные нормальные формы.

Для косвенных методов анализа не требуется построения иных описаний схем, кроме схемного списка. Основным аппаратом косвенных методов анализа является логическое программное моделирование, позволяющее воспроизводить проведение схемы при подаче на ее входы набора воздействий. Косвенные методы анализа цифровых схем несут универсальный характер, однако для получения одних и тех же результатов они требуют значительно больше времени, чем прямые [1].

Дискретные схемы, встречающиеся на практике, достаточно сложны (они описываются сотнями — тысячами переменных). Это обстоятельство не позволяет пользоваться для их анализа традиционными способами задания дискретного автомата таблицами и графами переходов: такое представление при большом количестве переменных становится неприемлемо громоздким и практически нереализуемым [2]. В этом случае для анализа цифровых схем применяется логическое программное моделирование, использующее в качестве исходных данных схемные списки.

Программные модели сложных логических схем могут применяться для анализа схемы на корректность ее синтеза, анализа тестов контроля на полноту, для нахождения области устойчивой работы.

Наибольший интерес представляет моделирование последовательностных асинхронных логических схем. Существует несколько методов моделирования таких схем, включающих операцию обрыва замкнутых контуров схемы. При выполнении этой операции возникает вопрос, где необходимо произвести обрыв одного или всех контуров схемы, чтобы полученный автомат был эквивалентен реальной схеме и, кроме того, имел бы минимальное число внутренних состояний.

Проведем анализ выходных функций и функций переходов схем с замкнутыми контурами относительно перемещения точки обрыва контура.

Для отыскания замкнутых контуров в схеме воспользуемся так называемым методом последовательного перебора путей, начиная от выхода схемы. При этом обход контура в направлении, противоположном распространению сигнала, будем называть отрицательным. Начало контура (конец контура) обозначим P , а контур $P - P$ (рис. 1). Всевозможные точки обрыва контура $P - P$, упорядоченные вдоль отрицательного обхода, обозначим P_1, P_2, \dots, P_k .

Оборвем контур $P - P$ в некоторой точке $P_i (1 \leq i \leq k)$. Операция обрыва равносильна введению некоторой абстрактной задержки Δt на месте обрыва, синхронизирующей работу схемы. (В дальнейшем для

краткости изложения будем пользоваться термином — задержка). Образовавшийся в результате обрыва псевдовход обозначим y_i , а псевдовыход y'_i , где y_i назовем предыдущим, а y'_i — последующим внутренним состоянием схемы.

Тогда можно записать, что $y'_i(t) = y_i(t + \Delta t)$, где Δt — период работы схемы.

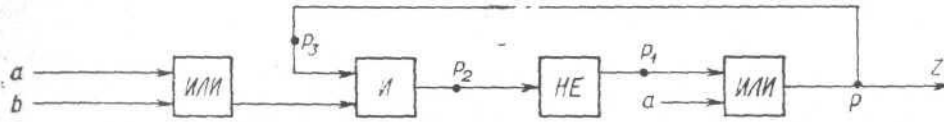


Рис. 1

Множество псевдовходов схемы при всевозможных точках обрыва контура $P - P$ обозначим $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, а множество псевдовыходов $Y' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_k\}$.

Теперь оборвем контур $P - P$ в некоторой точке P_j , где $1 < j \leq k$, и введем задержку Δt (рис. 2). Выразим значение функции y_i через значение входных переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и предыдущее состояние схемы y_j в точке обрыва P_j .

$$y_i = \varphi_i(y_j, X) = \varphi_{i,j}. \quad (1)$$

Уравнение такого вида назовем уравнением связи первого рода.

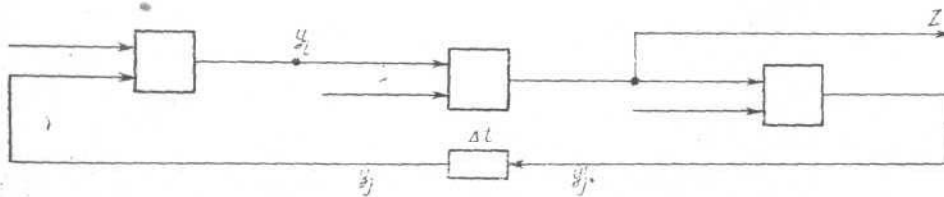


Рис. 2

Заметим, что уравнение (1) в момент времени $t + \Delta t$ имеет вид

$$y'_i = \varphi_i(y'_j, X). \quad (1')$$

Определив функцию φ , тем самым зададим некоторое отображение множества пар (y_j, X) в множество Y , т. е. $\varphi: Y \times X \rightarrow Y$ с тем лишь ограничением, что $i < j$. Для определения функции используется матрица A , которая имеет вид:

$$A(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} & \dots & \varphi_{1,k} \\ 0 & 1 & \varphi_{2,3} & \dots & \varphi_{2,k} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \varphi_{3,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, с помощью преобразования φ любую функцию y_j ($j \neq 1$) можно свести к функции y_i ($i \neq k$), т. е. $y_j \xrightarrow{\varphi} y_i$.

Из рис. 2 видно, что значение функции y'_j , в свою очередь, определяется значением функции y_i и входных переменных X , т. е.

$$y'_j = \Psi_j(y_i, X) = \Psi_{j,i}. \quad (2)$$

Уравнение такого вида назовем уравнением связи второго рода.

Определив функцию Ψ , тем самым зададим некоторое отображение множества пар (y_i, X) в множество Y' , т. е. $\Psi: Y \times X \rightarrow Y'$.

Для определения функции \mathcal{L} используется матрица B , которая имеет вид:

$$B(\Psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_{3,1} & \Psi_{3,2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{k,1} & \Psi_{k,2} & \Psi_{k,3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, с помощью преобразования Ψ любую функцию y_i можно свести к y_j , т. е. $y_i \xrightarrow{\Psi} y_j$ (для $i < j$).

Заметим, что в матрице $A(\varphi)(B(\Psi))$ элементы $a_{ij}=0$ ($b_{ji}=0$) при $i > j$, так как для данных точек обрыва P_i, P_j функций перехода первого (второго) рода не существует.

При обрыве контура $P - \bar{P}$ в точке P_i выходная функция z зависит от значения входных переменных x_1, x_2, \dots, x_n и внутреннего состояния y_i в данный момент времени t , т. е.

$$z(t) = f_i(y_i(t), X(t)). \quad (3)$$

Используя уравнения связи первого рода (1), можно получить зависимость выходной функции z от входных переменных X и от состояния схемы в точке P_j : $z = f_i(y_i, X) = f_i[\varphi_i(y_j, X), X]$, где $f_i[\varphi_i(y_j, X), X]$ обозначим через $f_j(y_j, X)$.

Тогда выходная функция имеет вид: $z = f_j(y_j, X)$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\Phi_1 = \Psi \varphi$, а $\Phi_2 = \varphi \Psi$, т. е. оператор Φ_1 указывает на последовательное действие сначала оператора φ , а потом оператора Ψ , а оператор Φ_2 — на обратное действие указанных операторов. При этом оператор Φ_1 определен на множестве $Y_1 = \{y_2, y_3, \dots, y_k\}$, а Φ_2 — на $Y_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$.

Сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма. Операторы Φ_1 и Φ_2 равносильны на множестве $Y^* = Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $y_i \in Y^*$, тогда существуют такие $y_l, y_j \in Y$, что $l < i < j$.

Выполним следующие преобразования:

$$\Phi_1(y_i) = \Psi[\varphi(y_i, X), X] = \Psi(y_l, X) = y'_i;$$

$$\Phi_2(y_i) = \varphi[\Psi(y_i, X), X] = \varphi(y'_j, X) = y'_i.$$

Таким образом, $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ на множестве $Y^* = \{y_2, y_3, \dots, y_{k-1}\}$.

Следует заметить, что, применяя оператор $\Phi_1(\Phi_2)$ на множестве $Y_1(Y_2)$, получим переходные функции $y'_2, y'_3, \dots, y'_k(y'_1, y'_2, \dots, y'_{k-1})$.

Проиллюстрируем сказанное на примере (см. рис. 1).

Используя положения, приведенные выше, вычислим функции связи первого и второго рода. Здесь y_1, y_2, y_3 — значение функции соответственно в точках P_1, P_2, P_3 ; y'_1, y'_2, y'_3 — последующее значение функции при обрыве контура соответственно в точках P_1, P_2, P_3 . Функции связи первого рода имеют вид:

$$y_1 = \bar{y}_2 \quad (\text{обрыв в точке } P_2);$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \bar{a}\bar{b} + \bar{y}_3 \\ y_2 &= (a+b)y_3 \end{aligned} \right\} (\text{обрыв в точке } P_3).$$

Функции связи второго рода имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} y'_3 &= a + y_1 \\ y'_2 &= a + \bar{y}_3 \end{aligned} \right\} (\text{обрыв в точке } P_3),$$

$$y'_2 = (a + y_1)(a + b) = a + by_1 \quad (\text{обрыв в точке } P_2).$$

Функции перехода автомата при обрыве контура в точке P_i ($i = 1, 2, 3$) можно определить с помощью операторов Φ_1 или Φ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{а) } y_1' &= \bar{y}_2' = \overline{a + by_1} = \bar{a}(\bar{b} + \bar{y}_1); \\ y_1' &= \bar{a}\bar{b} + \bar{y}_3' = \bar{a}\bar{b} + \overline{a + y_1} = \bar{a}(\bar{b} + \bar{y}_1); \\ y_2' &= (a + b)y_3' = (a + b)(a + \bar{y}_2) = a + by_3'. \end{aligned}$$

Здесь функции переходов вычислены с помощью оператора Φ_1 при обрыве контура в точке P_i ($i = 1, 2$).

б) Вычислим функции переходов с помощью оператора Φ_2 при обрыве контура в точке P_i ($i = 2, 3$):

$$\begin{aligned} y_3' &= a + y_1 = a + \bar{a}\bar{b} + \bar{y}_3 = a + \bar{b} + \bar{y}_3; \\ y_3' &= a + \bar{y}_2' = a + \overline{(a + b)y_3} = a + \bar{b} + \bar{y}_3; \\ y_2' &= a + by_1 = a + by_3'. \end{aligned}$$

Запишем выражение функции выхода z в зависимости от возможных точек обрыва контура.

$$z_1 = a + y_1; \quad z_2 = a + \bar{y}_2; \quad z_3 = a + \bar{b} + \bar{y}_3.$$

Сведем аналитическое представление функции z_i к функции z_j ($i, j = 1, 2, 3$), используя при этом функции связи первого и второго рода и функции переходов:

$$\begin{aligned} z_1 &= a + y_1 = a + \bar{y}_2 = z_2; \\ z_1 &= a + y_1 = a + \bar{a}\bar{b} + \bar{y}_3 = a + \bar{b} + \bar{y}_3 = z_3; \\ z_2 &= a + \bar{y}_2 = a + \overline{(a + b)y_3} = a + \bar{b} + \bar{y}_3 = z_3; \\ z_2' &= a + \bar{y}_2' = a + \overline{(a + by_1)} = a + \bar{a}(\bar{b} + \bar{y}_1) = a + \bar{y}_1' = z_1'; \\ z_3' &= a + \bar{b} + \bar{y}_3' = a + \bar{b} + \overline{(a + \bar{y}_2)} = a + \bar{a}(\bar{b} + \bar{y}_2) = a + \bar{y}_2' = z_2'; \\ z_3' &= a + \bar{b} + \bar{y}_3' = a + \bar{b} + \overline{(a + y_1)} = a + \bar{a}(\bar{b} + \bar{y}_1) = a + \bar{y}_1' = z_1'. \end{aligned}$$

Таким образом, если последовательностная схема не содержит элементов памяти типа триггер, линия задержки, то замкнутый контур можно оборвать в любой точке, причем значение выхода схемы не изменится.

Если рассматриваемая последовательностная схема содержит h ($h > 0$) замкнутых контуров, которые можно оборвать в r точках, возникает задача определения наименьшего числа точек r^* , обеспечивающих обрыв всех контуров данной схемы. Обозначим множество замкнутых контуров схемы через $B = \{b_j\}$, $j = 1, 2, \dots, h$, а множество всевозможных точек обрыва контуров через $A = \{P_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Точка $P_i \in A$ обрывает некоторое непустое множество замкнутых контуров $B_i \subseteq B$.

Выразим отношение точек обрыва к замкнутым контурам булевой (то есть состоящей из нулей и единиц) матрицей $S = \|A : B\|$, удовлетворяющей условию $c_{i,j} = 1 \leftrightarrow P_i : b_j$, где символ «:» означает возможность обрыва контура b_j в точке P_i .

Рассматриваемая задача есть задача нахождения кратчайшего покрытия множества B элементами множества A .

В [3] приводится структура приближенного и точного алгоритмов нахождения кратчайшего покрытия.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 3. Выделим контуры обратных связей, для чего используем метод последовательного перебора путей, начиная от выхода схемы в направлении, противоположном распространению сигнала и сформируем множество B .

- 1) 9-6-4-1-[11-7-5-11];
- 2) 9-6-4-[1-11-7-5-2-10-8-3-1];
- 3) 9-[6-4-1-11-7-5-2-10-8-6];
- 4) 9-6-4-[1-10-8-3-1];
- 5) 9-[6-4-1-10-8-6];
- 6) 9-[7-5-11-7];
- 7) 9-[7-5-2-10-8-3-1-11-7];
- 8) 9-7-5-2-[10-8-3-1-10];
- 9) 9-[7-5-2-10-8-6-4-1-11-7];
- 10) 9-7-5-2-[10-8-6-4-1-10].

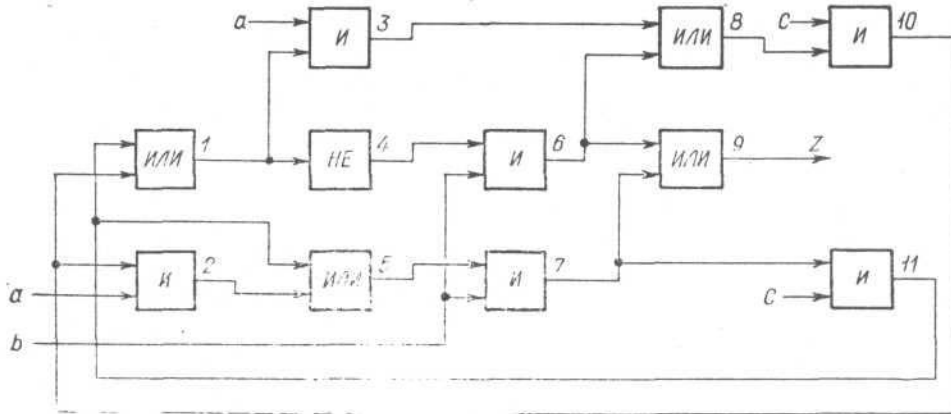


Рис. 3

Множество $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$. Множество A всевозможных точек обрыва замкнутых контуров состоит из точек $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$.

Построим матрицу $C = \|A:B\|$ по изложенным правилам:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$C =$	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	2
	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	3
	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	4
	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	5
	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	6
	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	7
	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	8
	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	10
	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	11

Применяя приближенный алгоритм нахождения кратчайшего покрытия, указанный выше, получим $r^* = 2$. Обрыв схемы на выходе элементов № 1 и № 5 обеспечит обрыв всех контуров обратной связи данной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проектирование цифровых вычислительных машин. Под ред. С. А. Майорова. М., 1972.
2. Григорьев В. С., Закревский А. Д., Перчук В. А. «Вычислительная техника в машиностроении». 1972, № 3, 147-153.
3. Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М., 1971.

Поступила в редакцию
25/VIII 1973 г.

БГУ им. В. И. Ленина,
вычислительный центр