

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
**«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»**

Кафедра информатики

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие по курсу «Геометрия и алгебра» для студентов
специальности «Информатика» БГУИР всех форм обучения

Минск 2006

УДК 681.3
ББК 22.19 я 73

Геометрия и алгебра (часть 1). Учебно-методическое пособие по курсу «Геометрия и алгебра» для студентов специальности «Информатика» БГУИР. 116с.

Настоящее пособие содержит курс лекций, охватывающих первый семестр изучения дисциплины «Геометрия и алгебра». Пособие предназначено для студентов специальности «Информатика» всех форм обучения.

© БГУИР, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

1. Определители и системы линейных уравнений	4
2. Векторы в пространстве	11
3. Скалярное произведение векторов	16
4. Векторное и смешанное произведение	32
5. Матрицы	25
6. Системы линейных уравнений (общий случай)	31
7. Прямая на плоскости	39
8. Кривые второго порядка	43
9. Прямая и плоскость в пространстве	52
10. Поверхности второго порядка	59
11. Линейные пространства	71
12. Евклидовы пространства	81
13. Линейные операторы и их матрицы	90
14. Линейные операторы в Евклидовом пространстве	97
15. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов	102
16. Переход к новому базису	107
17. Канонический вид матрицы линейного оператора	109
18. Квадратичные формы	111
Литература	

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

с двумя неизвестными.

Решение этой системы называется пара чисел $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$, которая при подстановке обращает оба уравнения в тождества.

Умножим первое уравнение системы на a_{22} , второе на $-a_{12}$ и сложим их. Получим

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - b_1a_{12}$$

Аналогично, умножив первое уравнение на $-a_{21}$, второе на a_{11} и сложив, получим

$$x_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - b_1a_{12}.$$

Таким образом, мы получили систему

$$\begin{cases} x_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - b_1a_{12} \\ x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - b_1a_{12} \end{cases} \quad (1.2)$$

которая является следствием системы (1.1).

Рассмотрим теперь квадратную таблицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

составленную из коэффициентов при неизвестных в системе (1.1).

Такие таблицы называются матрицами. Элементы матрицы обозначаются буквами с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки (уравнения) в которой находится элемент, второй – номер столбца (неизвестного в системе). Например, a_{21} – элемент второй строки и первого столбца матрицы. В нашем случае мы имеем квадратичную матрицу второго порядка. Диагональ, идущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний, называется главной. Перемножим элементы главной диагонали и вычтем из результата произведения элементов побочной диагонали.

Полученное число $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ называется определителем матрицы A и обозначается

$$\Delta, |A| \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Заменяем теперь первый столбец определителя Δ (т.е. столбец коэффициентов при неизвестном x_1) на столбец свободных членов системы (1.1). Получим новый определитель

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Аналогично заменив в определителе Δ второй столбец (т.е. столбец коэффициентов при x_2) на столбец свободных членов, получим определитель

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Используя новые обозначения, систему (1.2) можно заменить виде

$$\begin{cases} x_1\Delta = \Delta_{x_1} \\ x_2\Delta = \Delta_{x_2}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Возможны три случая.

$$1) \Delta \neq 0, \text{ тогда } x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};$$

это так называемые формулы Крамера. Можно подставить найденные по формулам Крамера значения в систему (1.1) и убедиться, что она обращается в систему тождеств.

Таким образом, если $\Delta \neq 0$, то система (1.1) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Определитель Δ называют главным определителем системы.

2) $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_{x_1} , Δ_{x_2} отличен от нуля. Тогда очевидно, система (1.3), а значит и система (1.1) решений не имеет, или как говорят, не совместна.

3) $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$. особый случай. В этом случае можно показать, что уравнения системы пропорциональны и, следовательно, система (1.1) имеет бесконечное множество решений.

1.2. Определители

Запишем квадратичную матрицу n -го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

с одинаковым числом n строк и столбцов. Определитель n -го порядка обозначается

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 1. Пусть a_{ij} элемент определителя n -го порядка $|A|$. Минором M_{ij} , соответствующим данному элементу, называется определитель $(n-1)$ -порядка, полученный из исходного вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Например, для определителя 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

минор M_{32} имеет вид

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Определение 2. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор M_{ij} , взятый со знаком $+$, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, четная и со знаком минус, если эта сумма не четная.

Т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Определение 3. Определителем n -го порядка называется число

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

где $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ – алгебраические дополнения элементов 1-ой строки определителя $|A|$.

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению определителей 2-го порядка, определителей 4-го порядка к вычислению определителей 3-го и т.д. Поэтому данное определение называют рекуррентным.

Кратко определение 3 можно записать, используя знак суммирования.

Пусть символ $\sum_{k=1}^n a_k$ означает сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Тогда $|A| = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$.

Рассмотрим определитель 3-го порядка более подробно. По определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{22}a_{23}a_{31}.$$

Таким образом, определитель 3-го порядка можно вычислять, применяя правило треугольника, задаваемое формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{22}a_{23}a_{31}.$$

Пример. Определитель 3-го порядка можно вычислить, используя определение

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 3 - 6 = -9,$$

либо используя правило треугольника:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = -4.$$

1.3. Свойства определителей

Чтобы эффективно вычислить порядка выше 3, необходимо знать свойства определителей. Применение этих свойств позволяет намного уменьшить объем вычислений. Свойства, которые мы сформулируем, справедливы для определителей любого порядка.

Свойство 1. Определитель не меняется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.

Операция замены строк столбцами того же номера и наоборот называется транспонированием. Справедливость свойства 1 можно проверить, вычисляя исходный и транспонированный определители.

Упражнение. Доказать это свойство при $n = 3$.

Данное свойство устанавливает полное равноправие строк и столбцов определителя. Поэтому все дальнейшие свойства определителя можно доказывать только для строк или столбцов. В силу свойства 1 они будут справедливы и для строк.

Свойство 2. Если поменять местами два столбца (строки) определителя, то определитель изменит знак.

Например, при $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Умножение всех элементов некоторого столбца (строки) определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число.

Иными словами общий множитель всех элементов столбца (строки) можно выносить за знак определителя.

Доказательство. Из определения определителя следует, что общий множитель элементов 1-й строки можно вынести за знак определителя. Пусть λ - общий множитель элементов i -ой строки. Поменяем местами i -ю и 1-ю строки, вынесем множитель, а потом поменяем строки обратно.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны 0, то он сам = 0.

Это свойство вытекает из свойства 3 при $\lambda = 0$.

Свойство 5. Если к элементам некоторой строки (столбца) добавить элементы другой строки (столбца) умноженное на произвольный множитель λ , то величина определителя при этом не изменится.

Например, при $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

В чем можно убедиться вычислениями.

Тоже и при $n = 3$ и т.д.

Свойство 6. Определитель имеющий две одинаковые или пропорциональные строки (столбцы) равен 0.

Действительно, это непосредственно следует из свойств 5 и 4.

Свойство 7. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраическое дополнения. Т.е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

для всех $i = 1, \dots, n$

и

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

для всех $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Докажем, например, справедливость разложения определителя по 2-ой строке:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - (a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} + \dots + a_{2n}(-1)^{n+1}M_{2n}) = \\ &= a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + \dots + a_{2n}(-1)^{n+2}M_{2n} = \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n}. \end{aligned}$$

Свойство 8. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраическом дополнении соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0.

Доказательство. Докажем это свойство для столбцов определителя. Пусть

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Построим определитель $|A^*|$ в котором на месте k -го столбца стоит j -й:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $|A^*| = 0$, поскольку этот определитель имеет два одинаковых столбца. С другой стороны, в силу свойства 7

$$|A^*| = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{kn}.$$

В итоге получаем,

$$a_{1j}A_{1k} + \dots + a_{nj}A_{nk} = 0.$$

1.4. Системы n линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему

[illegible]

Решением системы называется набор чисел $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2 \dots x_n = \alpha_n$ обращающих все уравнения в тождества.

Рассмотрим матрицу системы и ее определитель

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Умножим первое уравнение системы (1.4) на алгебраическое дополнение A_{1l} , второе на $A_{2l}, \dots$, последнее на A_{nl} сложим их все. Получим

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1}) + \dots$$
$$+ x_n(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}.$$

В силу свойств 7,8 имеем

$$x_i \Delta = b_1 A_{1_i} + b_2 A_{2_i} + \dots + b_n A_{n_i}, \quad (1.5)$$

где $\Delta = |A|$. Правую часть последнего равенства обозначим Δ_{x_i} , т.е.

$$\Delta_{x_1} = x_1 \Delta = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}.$$

Очевидно, Δx_1 - определитель, получающийся из главного определителя $|A|$ системы (1.4) при замене его 1-го столбца на столбец свободных членов. В правой части (1.5) – разложение Δx_1 по первому столбцу.

Аналогично получается формулы

$$\begin{cases} x_2 \Delta = \Delta_{x_2} \\ \dots\dots\dots \\ x_n \Delta = \Delta_{x_n} \end{cases},$$

где Δ_{x_k} есть определитель, получается из Δ заменой k -го столбца столбцом свободных членов. Объединяя их с (1.5), получаем систему

$$\begin{cases} x_1 \Delta = \Delta_{x_1} \\ \dots\dots\dots \\ x_n \Delta = \Delta_{x_n} \end{cases} \quad (1.6)$$

Система (1.6) является следствием системы (1.4). Таким образом, мы показали, что если система (1.4) имеет решение, то это решение будет и решением системы (1.6).

Если $\Delta \neq 0$ то из (1.6) получаем

$$x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.7)$$

Непосредственной подставкой этих значений в систему (1.4) можно убедиться, что они действительно являются ее решением. Формулы (1.7) называются формулами Крамера.

Анализируя систему (1.6), мы можем сделать следующие выводы.

1) Если $\Delta \neq 0$, то система (1.4) имеет единственное решение, которое может быть вычислено по формулам Крамера.

2) Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из вспомогательных определителей Δ_{x_k} не равен нулю, то система (1.6), а значит и система (1.4), решений не имеет.

3) Если $\Delta = \Delta_{x_1} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$, то случай называется особым. В этом случае нужно дополнительное исследование. В дальнейшем мы покажем, что в данном случае система либо имеет бесконечно много решений, либо их не имеет вовсе.

Если все свободные члены в системе (1.4) равны нулю, т.е.

$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, то система называется однородной. Очевидно, однородная система всегда имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Из выше приведенных рассуждений вытекает, что это решение будет единственным тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$.

2. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Определение вектора. Линейные операции над векторами

Вектором будем называться направленный отрезок или, что тоже самое, упорядоченную пару точек. Обозначают вектор $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$.

Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны некоторой прямой. Если векторы параллельны некоторой плоскости, то их называют компланарными.

Определение 1. Векторы называются равными, если они равны по длине, коллинеарны и одинаково направлены.

Из данного определения вытекает, что векторы можно свободно перемещать в пространстве.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b}$ такой, что

1) $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$,

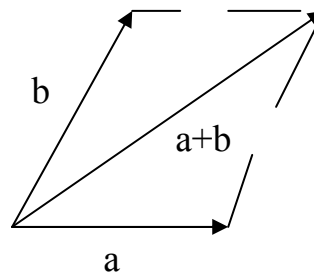
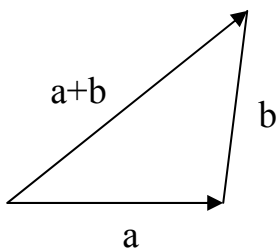
2) $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$,

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

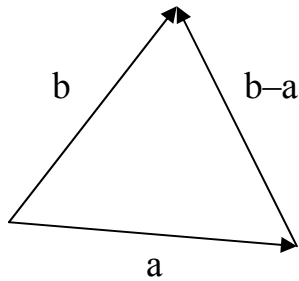
Вектор $(-1) \vec{a}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $(\vec{a} + \vec{b})$, который строится по правилу треугольника или параллелограмма

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма $\vec{a}$ и $-\vec{b}$.



Геометрически это:



Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами, вытекающими непосредственно из их определения.

- 1) $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$,
- 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
- 3) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$,
- 4) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$,
- 5) $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$.

Кроме того, справедливо свойство

б) если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то для любого вектора $\vec{b}$ коллинеарного $\vec{a}$ существует единственное число λ такое, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

2.2. Линейная зависимость векторов. Базис

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ не все равные нулю такие, что

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_n = \vec{0}. \quad (2.1)$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ *линейно независимые*, если данное равенство может иметь место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Выражение $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Очевидно, что если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Справедливо и обратное: если один из векторов представлен в виде комбинации остальных, то все эти векторы линейно зависимы.

Пример. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и любые два некаллинеарных вектора линейно независимы.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} - \lambda \vec{a} = 0,$$

$$\lambda_1 \vec{b} - \lambda_2 \vec{a} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \vec{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Можно также показать, тройка компланарных векторов линейно зависима, а три некопланарных вектора всегда линейно не зависимы.

Теорема. Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум, а в пространстве – трем.

Базисом на плоскости называют два любых линейно независимых вектора. Таким образом, два неколлинеарных вектора образуют на плоскости базис.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости, а $\vec{c}$ – вектор плоскости. Т.к. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы, то $\vec{c}$ можно представить в виде комбинации $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$.

Тогда говорят, что вектор $\vec{c}$ разложен по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а числа λ_1 , λ_2 называют его координатами или компонентами в данном базисе. Данный факт записывается следующим образом: $\vec{c} = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Разложение вектора по базису единственно. Действительно, если предположить, что вектор $\vec{c}$ имеет два разложения $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ и $\vec{c} = \mu_1 \vec{a} + \mu_2 \vec{b}$, то

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \vec{a} + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{b},$$

что в силу линейной независимости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ возможно только при

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0 \text{ и } \lambda_2 - \mu_2 = 0, \text{ т.е. } \lambda_1 = \mu_1 \text{ и } \lambda_2 = \mu_2.$$

Базисом в пространстве называют тройку линейно независимых векторов. Как и в случае плоскости вектор $\vec{d}$ однозначно разлагается по векторам базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Т.е. $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ и он имеет координаты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в данном базисе. Записывают это $\vec{d} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве $Oxyz$. На каждой из осей выберем единичный (т.е. единичной длины) вектор

$$\vec{i} - \text{на } Ox,$$

$$\vec{j} - \text{на } Oy,$$

$$\vec{k} - \text{на } Oz.$$

Эти три единичных взаимно перпендикулярных вектора называют ортами. Т.к. они не компланарны, то образуют базис – декартов прямоугольный базис. Любой вектор $\vec{a}$ в пространстве может быть разложен по данному базису.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x; a_y; a_z)$$

$$\text{или } \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x; y; z).$$

Причем координатами $(a_x; a_y; a_z)$ или $(x; y; z)$ будут проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат.

Линейные операции над векторами сводятся к арифметическим операциям над их координатами.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Зная координаты вектора легко найти его длину

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Каждой точке М пространства можно представить в соответствии ее радиус-вектор $\vec{OM}$. Координаты этого вектора называют координатами точки и записывают М $(x; y; z)$.

Рассмотрим вектор

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Отсюда его длина

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направление вектора в пространстве определяется углами α, β, γ которые вектор составляет с осями координат. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора.

Пусть дан вектор

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Тогда a_x - проекция $\vec{a}$ на ось Ox и следовательно, $a_x = |\vec{a}| \cos \alpha$.

Аналогично $b_x = |\vec{b}| \cos \beta$, $c_x = |\vec{c}| \cos \gamma$ - проекции на оси Oy , Oz . и значит

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Если данные равенства возвести в квадрат и сложить, получим

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

Легко видеть что проекция единичного вектора $\vec{a}$ на оси координат совпадают с его направляющими косинусами и, следовательно, в случае единичного вектора

$$\vec{a} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}.$$

2.3. Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda > 0$ значит найти на данном отрезке точку M такую, что

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \text{ или } M_1M = \lambda MM_2.$$

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдем координаты точки $M(x, y, z)$. Очевидно

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}, \quad \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}.$$

Обозначим

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}, \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$

Тогда

$$\text{из } \overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2} \text{ следует } \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}).$$

Отсюда

$$\vec{r} = \frac{\lambda \vec{r}_2 + \vec{r}_1}{1 + \lambda}$$

или, расписывая по координатам, получаем

$$x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{\lambda z_2 + z_1}{1 + \lambda}.$$

3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними.

$$\text{Записывается: } \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Физическая интерпретация: точка M движется по прямой. На точку действует постоянно сила $\vec{F}$ под углом φ к направлению перемещения точки. Тогда работа A силы $\vec{F}$ будет равна скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и перемещению $\vec{l}$, т.е. $A = \vec{F}\vec{l}$.

Обозначим

Если $pr_a \vec{b}$ - проекция вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$, тогда известно, что

$$pr_a \vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi,$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|pr_a \vec{b}.$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|pr_a \vec{a}.$$

Т.е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию на него другого вектора.

$$\text{пр}_a \vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}, \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения.

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (свойство коммутативности).

Это свойство непосредственно вытекает из определения скалярного произведения.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = \vec{b}\vec{a}.$$

2) $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$, где λ - скаляр.

Свойство ассоциативности.

3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (свойство дистрибутивности).

Действительно

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = |\vec{c}| \text{пр}_c(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(\text{пр}_c \vec{a} + \text{пр}_c \vec{b}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

$$4) \vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

5) Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения,

$$\text{т.е. } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$, значит

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0.$$

Достаточность. Пусть $\vec{a}\vec{b} = 0$. Тогда

$$|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = 0,$$

$$\text{отсюда } \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

6) Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют острый угол, то их скалярное произведение положительно, если тупой – отрицательно.

Скалярное произведение в координатной форме. Пусть две вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ определены своими прямоугольными декартовыми координатами

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\vec{j}^2 + x_1y_2\vec{j}\vec{i} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}^2 + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + \\ &+ z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}^2,\end{aligned}$$

но

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{i} = \vec{k}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0, \quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1.$$

Следовательно

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

4. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

4.1. Векторное и смешанное произведение

Рассмотрим упорядоченную тройку неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, которые имеют общее начало. Эта тройка называется правой, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки. В противном случае тройка называется левой.

Определение 1. Векторным произведением векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ($\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$) такой, что

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi = \vec{a} \wedge \vec{b}$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$;
- 3) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Пример. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

Из определения вытекают геометрические свойства векторного произведения.

1) Модуль векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Критерий коллинеарности векторов. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Чтобы вывести остальные свойства векторного произведения, удобнее сначала ввести еще одну операцию над векторами – смешанное произведение.

4.2. Смешанное произведение

Определение 2. Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$$

Рассмотрим свойства смешанного произведения.

Свойство 1. Смешанное произведение неколлинеарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу. Оно положительно, если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая, и отрицательно, если она - левая.

Доказательство. Очевидно

$$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| |\cos \Theta| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| |\cos \Theta| \sin \varphi,$$

где φ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, Θ - угол между $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$. Но объем V построенного параллелепипеда равен произведению площади основания $S = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ на высоту $H = |\vec{c}| |\cos \Theta| \Rightarrow V = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$.

Знак смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \Theta$ очевидно совпадает со знаком $\cos \Theta$. Поэтому смешанное произведение положительно, когда вектор $\vec{c}$ направлен в ту же сторону от плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что и $\vec{a} \times \vec{b}$, т.е. когда тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая. В противном случае смешанное произведение отрицательно.

Свойство 2. Смешанное произведение равно нулю тогда только тогда, когда его сомножители компланарны.

Доказательство.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow 0 = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} \Leftrightarrow 0 = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \Theta = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \Theta \sin \varphi.$$

Это возможно в трех случаях.

А) Хоть один из векторов нулевой – тогда все векторы компланарны.

Б) $\cos \Theta = 0$, т.е. вектор $\vec{c}$ ортогонален $\vec{a} \times \vec{b}$ и следовательно лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Очевидно векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

В) $\sin \varphi = 0$, т.е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тогда очевидно все три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежат в одной плоскости.

Обратно, пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Тогда либо среди них есть нулевые в таком случае $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, либо все не нулевые, но лежат в одной плоскости. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c} \quad \cos \Theta = 0 \quad \text{или} \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0.$$

В обоих случаях $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Из данного свойства следует справедливость следующего утверждения.

Критерий компланарности векторов. Для того, чтобы векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно чтобы $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Замечание. Используя определение правой и левой троек, можно убедиться, что тройки $\vec{b}\vec{c}\vec{a}; \vec{c}\vec{a}\vec{b}$ имеют одну и ту же ориентацию с тройкой $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (т.е. одновременно все правые или все левые). В тоже время тройки $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}; \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}; \vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ имеют ориентацию противоположную ориентации тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Свойство 3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$.

Доказательство. Если среди векторов есть нулевые, то равенство верно. Если нет, то $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$ и достаточно показать, что $\vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Но в силу свойств 1,2 последнее неравенство очевидно с точностью до знака. И его левая и его правая часть по абсолютной величине равны объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. В случае, если векторы компланарны, объем параллелепипеда – нулевой. Но тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ имеют одинаковую ориентацию – следовательно, и знаки тоже совпадают.

Данное свойство служит оправданием записи смешанного произведения в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Действительно, безразлично, каких два рядом стоящих вектора умножаются векторно.

Используя свойства смешанного произведения и замечание по ориентации троек, можно убедиться что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$$

Действительно, по модулю они все совпадают как объемы одинаковых параллелепипедов. Первые три имеют одинаковые знаки, т.к. тройки векторов одной ориентации, вторые три – противоположные знаки.

Далее, используя полученное равенство и свойства скалярного произведения, можно убедиться, что

$$(\lambda \vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda \vec{c}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}),$$

где λ - скалярный множитель. Также имеют место равенства

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c},$$

$$\vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}_1\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_2\vec{c},$$

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1 + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_2.$$

Полученные равенства используются при вычислении смешанного произведения.

4.3.Алгебраические свойства векторного произведения

Свойство 1 (антикоммутативность). $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то формула справедлива. Предположим, что $\vec{a}$ не коллинеарен $\vec{b}$ и обозначим $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{m} = \vec{b} \times \vec{a}$.

Тогда из определения векторного произведения следует:
во-первых, $|\vec{c}| = |\vec{m}|$ (1-ое условие определения),

во-вторых, $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{m} \perp \vec{a}, \vec{b}$ (2-ое условие определения), т.е. векторы $\vec{c}$ и $\vec{m}$ коллинеарны. Таким образом, возможны два случая: либо $\vec{c} = \vec{m}$, либо $\vec{c} = -\vec{m}$.

Но первое невозможно, т.к. в этом случае в силу определения векторного произведения (3-е условие определения) обе тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ - правые, что неверно. Значит, $\vec{c} = -\vec{m}$.

Свойство 2. Для скалярного множителя λ справедливо

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}), \quad \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Доказательство. Во-первых, если первое равенство справедливо, то справедливо и второе. Действительно, $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -(\lambda \vec{b}) \times \vec{a} = -\lambda (\vec{b} \times \vec{a}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$.

Таким образом, в доказательстве нуждается только первое равенство. Выберем любой прямоугольный декартов базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, (т.е. базис, векторы которого имеют единичную длину и ортогональны друг другу).

Для любого вектора $\vec{c}$ очевидно $\vec{c}\vec{i} = |\vec{c}||\vec{i}|\cos\alpha = |\vec{c}|\cos\alpha = c_x$, аналогично, $\vec{c}\vec{j} = c_y$, $\vec{c}\vec{k} = c_z$, где c_x, c_y, c_z - компоненты вектора $\vec{c}$ в базисе.

Обозначим $\vec{m} = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$, $n = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$.

Очевидно, $m_x = \vec{m}\vec{i} = [(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}]\vec{i} = \lambda \vec{a}\vec{b}\vec{i} = \lambda (\vec{a}\vec{b}\vec{i})$.

Аналогично $n_x = \vec{n}\vec{i} = [\lambda (\vec{a}\vec{b}) \times \vec{b}]\vec{i} = \lambda \vec{a}\vec{b}\vec{i} = \lambda (\vec{a}\vec{b}\vec{i})$, т.е. $m_x = n_x$.

Совершенно аналогично, умножая скалярно векторы $\vec{m}, \vec{n}$ на $\vec{j}$ и $\vec{k}$, получим

$$m_y = n_y, m_z = n_z.$$

Следовательно, $\vec{m} = \vec{n}$.

Свойство 3 (свойство дистрибутивности).

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}),$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).$$

Доказательство. Аналогично доказательству свойства 2.

Покажем, что 2-ое равенство является следствием 1-го.

Действительно, если 1-ое справедливо, то в силу свойства антикоммутативности

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= -(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{c} \times \vec{a}) = \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).\end{aligned}$$

Таким образом, в доказательстве дается только 1-ое свойство.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - прямоугольный декартов базис.

Обозначим $\vec{m} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Тогда $m_z = \vec{m} \cdot \vec{i} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \vec{i} = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{i} + \vec{b} \cdot \vec{c} \vec{i}$ в силу правил действия над смешанным произведением.

$$n_x = \vec{n} \cdot \vec{i} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{i} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{i} = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{i} + \vec{b} \cdot \vec{c} \vec{i}.$$

Следовательно, $m_x = n_x$.

Аналогично получим $m_y = n_y, m_z = n_z \Rightarrow \vec{m} = \vec{n}$.

Отметим, что алгебраические свойства векторного произведения определяют правила действия при векторном умножении.

4.4. Векторное произведение в декартовых координатах

Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами.

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Умножим векторно $\vec{a}$ на $\vec{b}$, используя алгебраические свойства векторного произведения. Получим

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \times \vec{k}).\end{aligned}$$

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \end{cases} \begin{cases} \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \end{cases} \begin{cases} \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}. \end{cases}$$

С учетом таблицы умножения получается

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k},$$

или

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать символический определитель

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Действительно, раскрывая его по первой строке, мы получим выражение эквивалентное найденному выше.

Пример. Пусть $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (2, -1, -1). \end{aligned}$$

4.5. Смешанное произведение в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими прямоугольными декартовыми координатами

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Вычислим смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= [\vec{a} \times \vec{b}] \vec{c} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1) (x_3, y_3, z_3) = \\ &= x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) + y_3 (z_1 x_2 - z_2 x_1) + z_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Или используя определители 2-го порядка можно записать

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Но данное выражение является разложением по последней строке определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Таким образом, } \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

4.6. Двойное векторное произведение

Выражения $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ и $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ называют двойным векторным произведением. Вычислять двойное векторное произведение можно последовательно выполняя операции векторного умножения с соблюдением их порядка. Следует при этом помнить, что векторное умножение не обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Упражнение. Привести пример нарушения свойства ассоциативности.

Облегчить вычисление двойного векторного произведения можно с помощью формулы сокращенного умножения

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}), \quad (4.1)$$

которая дает разложение двойного векторного произведения по векторам $\vec{a}, \vec{b}$. Коэффициентами разложения здесь служат скалярные произведения $\vec{a}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}$.

Выражение $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ можно вычислить по формуле

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Докажем формулу сокращенного умножения (4.1).

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы $\vec{a}$ лежал на оси Oх, $\vec{b}$ - в плоскости Oxy. Тогда

$$\vec{a} = (x_1, 0, 0), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, 0), \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Вычислим правую и левую части соотношения (4.1) и убедимся в их равенстве.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x_1 y_2),$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & x_1 y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (-x_1 y_2 y_3, x_1 x_3 y_2, 0).$$

С другой стороны

$$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) = (x_2, y_2, 0) x_1 x_3 = (x_1 x_2 x_3, x_1 y_2 x_3, 0),$$

$$\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = (x_1, 0, 0)(x_2 x_3 + y_2 y_3) = (x_1 x_2 x_3 + x_1 y_2 y_3, 0, 0),$$

$$\Rightarrow \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = (-x_1 y_2 y_3, x_1 y_2 x_3, 0).$$

5.МАТРИЦЫ

Таблица из m строк и n столбцов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется прямоугольной матрицей порядка или размера $m \times n$. Часто в обозначении матрицы вместо квадратных скобок употребляют круглые. Размеры матрицы иногда удобно указать в обозначении – $A_{m \times n}$. Если $m=n$, то матрица называется квадратной матрицей порядка n .

Матрицы A и B называются равными ($A=B$) если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы совпадают, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Нулевой матрицей O называют матрицу, все элементы которой нулевые, т.е.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Сложение матриц. Операция сложения вводится только для матриц имеющих одинаковые размеры. Суммой матриц A и B называется матрица C такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Т.е. при сложении матриц складываются их соответствующие элементы.

Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что операция сложения матриц удовлетворяет условиям:

- 1) $A+B = B+A$,
- 2) $(A+B) + C = A + (B+C)$,
- 3) $A+O=A$.

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число, надо умножить на это число все элементы матрицы. Произведение матрицы A на число α обозначается αA

Пример. Пусть

$$\alpha = -3, \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\alpha A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу $(-1)A$ называют противоположной к матрице A и обозначают: $-A$, выражение $A-B = A + (-B)$ иногда называют разностью матриц.

5.1. Умножение матриц

Произведение AB матриц A и B определяется только в том случае, когда матрица A согласована с матрицей B , т.е. когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Например $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ согласована с $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, но B не согласована с A .

Значит, существует произведение AB , но не существует BA .

Квадратные матрицы одного порядка очевидно всегда взаимно согласованы.

Определение. Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -ого столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Коротко эту сумму записывают следующим образом:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

а произведение матриц обозначают $C=AB$.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = BA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Из примера видно, что для матричного умножения закон коммутативности $AB=BA$ не справедлив.

Следует отметить, что произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой.

Например

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ но } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq O.$$

При умножении квадратных матриц особое значение имеет единичная матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

у которой на главной диагонали – единицы, а все остальные элементы нулевые. Легко проверить, что $AE=EA=A$ для любой матрицы A того же порядка, что и E .

Матричное умножение обладает следующими свойствами:

$$1) (AB)C = A(BC),$$

$$2) (A+B)C = AC+BC, A(B+C) = AB+AC,$$

$$3) \alpha (AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

$$4) (AB)^* = B^* A^*, \text{ где знак } * \text{ означает транспонирование,}$$

5) $|AB| = |A||B|$, т.е. определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

5.2. Обратная матрица

Обратная матрица определяется только для квадратных матриц. Если A – квадратная матрица, то обратной к ней называется матрица того же размера A^{-1} , удовлетворяющая условию $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Если определитель матрицы A равен нулю, то матрица A называется вырожденной, в противном случае невырожденной.

Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

и протранспонируем ее, т.е. (т.е. поменяем местами соответствующие строки и столбцы).

Получается матрица B^* (операция транспонирования обозначается звездочкой)

$$B^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Лемма. $AB^* = B^*A = E|A|$.

Доказательство. Обозначим $C = AB^*$, т.е.

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца B^* . Очевидно, для элементов c_{ij} матрицы C , стоящих на главной диагонали, получим сумму произведений элементов i -ой строки на их алгебраические дополнения, что равно определителю матрицы A . Для остальных элементов c_{ij} ($i \neq j$) получим сумму произведений элементов i -ой строки матрицы A на алгебраические дополнения элементов j -ой строки, что равно 0. Значит

$$AB^* = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|E.$$

Аналогично получается $B^*A = |A|E$.

Теорема 5.1. Для того чтобы для матрицы A существовала обратная матрица необходимо и достаточно чтобы матрица A была не вырожденной.

Доказательство. Необходимость. Пусть обратная матрица A^{-1} существует. Тогда

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E|,$$

но $|E| = 1 \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$.

Т.е A – невырождена.

Достаточность. Пусть A – невырождена, т.е. $|A| \neq 0$. докажем, что матрица

$C = \frac{B^*}{|A|}$ является обратной для A .

Действительно, в силу леммы $AC = E$ и $CA = E$. Следовательно $C = A^{-1}$.

В процессе доказательства теоремы найдено выражение для обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} B^*$$

или

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Теорема 5.2. Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.

Доказательство. Предположим противное.

Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} матрицы обратные A . Тогда $AA_1^{-1} = E$. Умножим равенство на A_2^{-1} слева. Получим

$$A_2^{-1}AA_1^{-1} = A_2^{-1}E \Rightarrow (A_2^{-1}A)A_1^{-1} = EA_2^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow A_2^{-1} = A_1^{-1}.$$

Упражнения. Показать, что

$$1) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|},$$

$$2) (A^{-1})^{-1} = A,$$

$$3) (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n,$$

$$4) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Пример. Найдем обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$|A| = 3 - 2 = 1, \quad A_{11} = 3, \quad A_{12} = A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1.$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ аналогично } A^{-1}A = E.$$

5.3. Матричная запись системы линейных уравнений

Пусть дана система n -линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Выпишем матрицу системы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и обозначим

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Тогда система (5.1) равносильна матричному уравнению

$$AX=B. \tag{5.2}$$

Если матрица A не вырождена, то решение уравнения (5.2), а значит и системы (5.1), можно найти следующим образом.

Умножим на A^{-1} слева обе части равенства (5.2). Получим

$$A^{-1}AX=A^{-1}B,$$

Откуда

$$X=A^{-1}B. \tag{5.3}$$

Пример. В предыдущем разделе показана невырожденность матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1, \end{cases}$$

матрицей которой является A . Тогда систему можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix},$$

т.е. $x_1 = 5$, $x_2 = -2$.

Следовательно, мы имеем еще один способ решения систем линейных уравнений – матричный.

Упражнение. Вывести формулы Крамера из формулы (5.3).

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

6.1. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Выделим какие-нибудь k строк и k столбцов матрицы ($k \leq m, k \leq n$). Из элементов матрицы, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k -го порядка. Все такие определители называются минорами матрицы. Ясно, что всего можно составить $C_m^k C_n^k$ миноров k -го порядка.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Миноров 2-го порядка можно составить

$$C_2^2 C_3^2 = 3.$$

Это

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Определение 1. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Таким образом, если ранг матрицы равен r , то среди миноров этой матрицы есть по крайней мере один минор r -го порядка отличный от нуля, в то время как все миноры $(r+1)$ -го порядка и выше равны нулю.

Ранг матрицы A обозначают $r(A)$.

Следующие преобразования матрицы называется элементарным.

1) Транспонирование, т.е. замена каждой строки столбцом с тем же порядком и наоборот.

2) Перестановка двух строк (столбцов).

3) Умножение всех элементов строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$.

4) Прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число.

Теорема 6.1. При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

(Без доказательства).

Ранг матрицы можно вычислить, пользуясь определением, т.е., вычисляя все миноры матрицы, определить наивысший порядок отличных от нуля миноров. Но это очень трудоемко. Сформулированная теорема позволяет уменьшить вычисления, преобразуя матрицу с помощью элементарных преобразований к

эквивалентной (т.е. того же ранга) матрице, имеющей ненулевые элементы только на главной диагонали.

Пример.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

отсюда $r(A) = 3$.

6.2. Понятие n -мерного векторного пространства

Каждая точка в пространстве определяется тремя координатами. Однако, в математике часто встречаются объекты для задания которых недостаточно трех действительных чисел. Например, шар в пространстве определяется 4 числами – координатами его центра и величиной радиуса. Многочлен степени не выше n определяется $(n+1)$ числом – его коэффициентами.

Упорядоченная система n чисел $\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется n -мерным вектором. При этом числа x_i , $i = 1, \dots, n$, называются компонентами или координатами данного вектора. Два вектора называются равными, если равны все их соответствующие компоненты.

Для n -мерных векторов определяется операции сложения и умножения на число как покоординатные операции:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Очевидно,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

т.е. сложение коммутативно и ассоциативно.

Роль нуля играет нулевой вектор

$$\vec{0} = (0, \dots, 0).$$

Разность определяется следующим образом $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$.

Множество всех n -мерных векторов, для которых установлены операции сложения и умножения на число, называется n -мерным векторным пространством и обозначается R_n .

На векторное пространство R_n без изменений переносятся определения линейной комбинации, линейной независимости и зависимости векторов, данные в параграфе 2.

Покажем, что векторы $\vec{e}_1 = (1, 0 \dots 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0 \dots 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, \dots, 1, 0)$ линейно независимы, т.е. равенство $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Действительно, в силу определения операций сложения векторов и умножения вектора на число это равенство равносильно такому

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \vec{0}.$$

Отсюда

$$\lambda_i = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, n.$$

Также не трудно показать, что любые $(n+1)$ векторов линейно зависимы в R_n . Таким образом, максимальное число линейно независимых векторов в R_n равно n . Любая система из n линейно независимых векторов называется базисом в R_n . Нетрудно показать, что любой вектор однозначно разлагается по базису.

Рассмотрим еще один пример. Левая часть линейного уравнения с n неизвестными, т.е. выражение

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

называется линейной формой от неизвестных $x_1, \dots, x_n$.

Очевидно, линейная форма полностью определяется вектором $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из своих коэффициентов и, наоборот, всякий n -мерный вектор однозначно задает линейную форму. Таким образом, операции над векторами можно рассматривать как операции над линейными формами.

6.3. Теорема о ранге матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы можно рассмотреть как m -мерные векторы, строки как n -мерные векторы.

Базисным минором матрицы будет называться любой отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы. (Очевидно, для не нулевой матрицы базисный минор всегда существует, вообще говоря, не единственный).

Столбцы и строки, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются базисными.

Теорема 6.2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Доказательство. Пусть $r(A) = r$. Предположим для определенности, что отличный от нуля минор r -го порядка (т.е. базисный минор) расположен в левом верхнем углу матрицы, т.е.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обозначим i -ю строку матрицы через $\vec{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$. Докажем первое утверждение теоремы. Предположим противное, т.е. базисные строки линейно зависимы. Тогда одна из базисных строк, например, $\vec{a}_r$, является линейной комбинацией остальных:

$$\vec{a}_r = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_{r-1} \vec{a}_{r-1}.$$

Отсюда, и в миноре D r -ая строка является линейной комбинацией остальных. По свойству 5 определителей определитель D не изменится, если мы вычтем из r -ой строки 1-ю умноженную на α_1 , затем 2-ю умноженную на α_2 , ..., $(r-1)$ -ю на α_{r-1} . Но после этих преобразований строка минора D станет нулевой, т.е. он должен равняться нулю. Полученное противоречие доказывает первое утверждение.

Докажем второе утверждение теоремы. Очевидно, достаточно доказать, что небазисные строки матрицы линейно выражаются через базисные. Пусть

$$r < k \leq m \text{ и } 1 \leq l \leq n.$$

Рассмотрим определитель $(r+1)$ -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix}.$$

Он равен нулю при всех k и l . Действительно, если $l \leq r$, то он равен нулю т.к. у него два одинаковых столбца. Если же $l > r$, то это минор $(r+1)$ -го порядка матрицы ранга r и, следовательно, он тоже равен нулю.

Разложим определитель Δ по элементам последнего столбца:

$$\Delta = a_{2e}\Delta_1 + a_{2e}\Delta_2 + \dots + a_{re}\Delta_r + a_{ke}\Delta_{r+1} = 0, \quad (6.1)$$

где Δ_i - алгебраические дополнения элементов последнего столбца Δ .

Эти алгебраические дополнения зависят от k , но не зависят от l , т.к. при их вычислении последний столбец вычеркивается. Кроме того, $\Delta_{r+1} = D \neq 0$ и, значит, равенство (6.1) можно разделить на Δ_{r+1} . Получим

$$a_{kl} = \alpha_1 a_{1l} + \alpha_2 a_{2l} + \dots + \alpha_r a_{rl}, \quad (6.2)$$

где $\alpha_i = -\frac{\Delta_i}{D}$.

Равенство (6.2) справедливо при всех $k = 1, 2, \dots, n$. Но это означает, что $\overline{a_k} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_r \overline{a_r}$.

Так как при транспонировании матрицы ее строки становятся столбцами, а ранг не меняется, то имеет место следующие утверждения.

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу линейно независимых столбцов и равно рангу матрицы.

Следствие 2. Для того чтобы определитель был равен нулю необходимо и достаточно чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимы.

6.4. Метод окаймляющих миноров для вычисления ранга матрицы

Минором, окаймляющим минор M порядка k матрицы называется минор $(k+1)$ -го порядка этой матрицы, содержащий M .

Если внимательно посмотреть доказательство теоремы о ранге матрицы, то можно заметить, что в нем не использовался тот факт, что все миноры $(r+1)$ -го порядка равны нулю. В действительности рассматривались только миноры Δ , окаймляющие минор D . Таким образом, из теоремы о ранге следует:

Если в матрице A имеется минор порядка r , отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы A равен r .

Таким образом, для вычисления ранга достаточно найти отличный от нуля минор, все окаймляющие которого равны нулю.

Пример. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выпишем все окаймляющие миноры:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $r(A) = 2$.

Если дана система линейных форм

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Пример. Пусть дана система линейных форм

$$f_1 = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad f_2 = x_2, \quad f_3 = 2x_1 - x_2 + x_3.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow$ формы f_1 и f_2 линейно независимы.

Рассмотрим систему

[illegible]

Решением системы (6.3) называется совокупность n значений неизвестных $x_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, при подстановке которых в систему все уравнения обращаются в тождества.

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

B – называют расширенной матрицей системы.

Ясно, что $r(B) \geq r(A)$, так как каждый минор матрицы A является и минором матрицы B , но не наоборот.

Теорема 6.3 (критерий совместности системы). Для того чтобы система (6.3) была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы т.е. $r(A) = r(B)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (6.3) совместна, т.е. существует числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \quad (6.4)$$

Из последнего столбца матрицы B вычтем первый столбец, умноженный на α_1 , затем второй, умноженный на $\alpha_2, \dots$, наконец n -ый, умноженный на α_n .

В силу (6.4) получим матрицу

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом $r(B_1) = r(B)$, поскольку элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Но ясно, что $r(B_1) = r(A)$ так как все неизменные миноры матрицы B_1 равны соответствующим минорам матрицы A и обратно. Т.е. $r(A) = r(B)$.

Достаточность. Пусть $r(B) = r(A) = r$

И предположим, для определенности, что отличный от нуля минор r -го порядка расположен в левом верхнем углу матрицы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по теореме о ранге матрицы первые r строк матрицы B – базисные и, следовательно, линейно независимые, все остальные строки линейно выражаются через базисные. Но это означает, что первые r уравнений системы (6.3) независимы, а все остальные $(m-r)$ уравнений являются их следствиями, т.е. их

можно исключить из системы. Нам достаточно решить первые r уравнений; их решения автоматически будут удовлетворять и остальным уравнениям.

Далее возможны два случая:

1) Пусть $r=n$. Тогда систему, состоящую из первых r уравнений системы (6.3)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r, \end{cases}$$

можно решить по формулам Крамера. Ее главный определитель $D \neq 0$ и, значит, система имеет единственное решение. Тогда система (6.4) – совместная и определенная.

2) Пусть $r < n$. Возьмем r базисных уравнений (т.е. у нас это r первых уравнений). Первые r неизвестных оставим в левой части уравнений, остальные перенесем вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (6.5)$$

Так называемым свободным неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ можно придавать какие угодно значения, получая при этом соответствующие значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$ из системы (6.5).

Это случай совместной, но не определенной системы. Общие формулы решения можно получить, если считать свободные неизвестные параметрами и решать систему (6.5) относительно $x_1, x_2, \dots, x_r$ (например, по формулам Крамера).

Следствие. Совместная система будет определенной тогда и только тогда, когда $n=r$ (A).

В параграфе 1 при выводе формулы Крамера у нас остался не исследованным особый случай, когда в системе n уравнений с n неизвестными $\Delta = \Delta_{x_1} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$. Очевидно, у такой системы $r(B) < n$, т.к. все миноры n -го порядка матрицы B равны нулю. Аналогично $r(A) < n$, т.к. равен нулю единственный минор n -го порядка матрицы A .

Значит эта система может быть несовместной, если $r(A) \neq r(B)$ или совместной, но неопределенной, если $r(A) = r(B)$.

Пример. Пусть

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $r(B) = r(A) = 2$, т.е. система совместна.

Выберем два базисных уравнения с базисными неизвестными. Например,

выберем два первых уравнения с базисными неизвестными x_1, x_2 . Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 = 5x_3 - 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta = -3,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4x_3 & 2 \\ 5x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x_3 - 10x_3 + 2 = 3 - 6x_3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -1 + 2x_3.$$

Аналогично находим

$$x_2 = \frac{5x_3 + 1 - 8x_3 - 2}{-3} = x_3 + 1,$$

и получаем

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha - 1 \\ x_2 = \alpha + 1 \\ x_3 = \alpha, \end{cases}$$

где α – любое действительное число.

7. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

7.1. Различные типы уравнений прямой

Рассмотрим некоторую прямую L на плоскости Ox . Любой ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярный прямой называется ее *нормальным вектором*. Пусть известна точка $M(x_0, y_0)$ на прямой L и ее нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка. Очевидно

$M \in L$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен $\vec{n}$, т.е. когда

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Отсюда получаем *уравнение прямой L по заданному нормальному вектору и точке*:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (7.1)$$

Из (7.1) следует, что прямая L задается линейным уравнением относительно x и y . Покажем, что верно и обратное. Т.е. любое уравнение

$$Ax + By + C = 0, \quad (A^2 + B^2 \neq 0), \quad (7.2)$$

определяет некоторую прямую.

Действительно, в уравнении (7.2) либо $A \neq 0$, либо $B \neq 0$. Для определенности положим $B \neq 0$. Тогда уравнение (7.2) можно записать в виде $A(x-0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0$.

Последнее уравнение, а значит и уравнение (7.2) в силу (7.1), определяет прямую, проходящую через точку $(0, -\frac{C}{B})$, перпендикулярно вектору (A, B) .

Уравнение вида (7.2) называют *общим уравнением* прямой. Коэффициенты A и B являются компонентами нормального вектора прямой.

Любой вектор $\vec{S}$, параллельный прямой L , называется направляющим вектором этой прямой.

Пусть дана точка $M(x_0, y_0)$ на L и направляющий вектор $\vec{S} = (m, n)$, пусть $M(x; y)$ – произвольная точка. Тогда, если $M \in L$, то

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S}$, и, следовательно, $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$. Т.е. координаты любой точки прямой удовлетворяют уравнению

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}. \quad (7.3)$$

Легко видеть, что если $M \notin L$, то уравнение (7.3) не выполняется.

Уравнение (7.3) называют *каноническим уравнением* прямой.

Пусть даны две точки $M(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_2)$ на плоскости. Составим каноническое уравнение прямой, проходящей через эти точки. Очевидно, за направляющий вектор можно взять вектор $\vec{S} = \overrightarrow{M_0M_1}$ и, следовательно,

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1} \quad (7.4)$$

- уравнение прямой, проходящей через эти две точки.

Тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox , называется угловым коэффициентом k прямой (угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки).

Если прямая задана каноническим уравнением, то угловой коэффициент очевидно совпадает с тангенсом угла наклона к оси Ox направляющего вектора $\vec{S} = (m, n)$, т.е.

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{m}.$$

Тогда из (7.3) получается уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (7.5)$$

- уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом k .

Частный случай уравнения (7.5) получается, когда за точку M_0 на прямой берется точка $M_0(0; b)$ пересечения прямой L с осью Oy . Тогда уравнение (7.5) принимает вид

$$y = kx + b. \quad (7.6)$$

7.2. Угол между прямыми

1) Пусть прямые L_1 и L_2 пересекаются в точке M_1 и известны их нормальные векторы

$$\vec{n}_1 = (A_1; B_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2; B_2).$$

Тогда один из двух смежных углов между прямыми совпадает с углом между их нормальными векторами и, следовательно, определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых:

$$\varphi = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности:

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

2) Пусть известны направляющие векторы прямых:

$$\vec{S}_1 = (m_1; n_1), \quad \vec{S}_2 = (m_2; n_2).$$

Тогда угол между прямыми совпадает с углом между направляющими векторами и

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{S}_1 \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

3) Пусть известны угловые коэффициенты прямых: k_1 и k_2 . Тогда $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$,

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Следовательно

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Или окончательно

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Очевидно условие параллельности прямых сводится к условию $k_2 = k_1$.

Условие перпендикулярности: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

7.3. Нормальное уравнение прямой

Пусть дана прямая L . Проведем из начала координат перпендикуляр OP к L . Обозначим $|\overline{OP}| = p$, α – угол, образованный OP и осью Ox , $\vec{n}_0$ – единичный нормальный вектор прямой L , направленный одинаково с OP (если $P=O$, то единичного вектора $\vec{n}_0$). Очевидно, $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, где α – угол $\vec{n}_0$ с осью Ox .

Точка $M(x; y) \in L$ тогда и только тогда, когда
 $n_{\vec{n}_0} \overline{OM} = p \Leftrightarrow \vec{n}_0 \overline{OM} = p \Leftrightarrow \vec{n}_0 \overline{OM} = p \Leftrightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

Т.е. $M(x; y) \in L$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (7.7)$$

которое называется нормальным уравнением прямой L .

Чтобы перейти от общего уравнения прямой L к ее нормальному уравнению (7.7), надо вектор $\vec{n} = (A, B)$ умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

знак которого выбирается противоположным знаком C .

7.4. Расстояние от точки до прямой

Пусть дана прямая L и точка $M_0(x_0, y_0)$ на плоскости. Найдем расстояние d от точки до прямой. Условимся называть отклонением точки M_0 от прямой число $+d$, если точки O и M_0 лежат по разные стороны от прямой L , и $-d$, если точки O и M_0 лежат по одну сторону от L . Отклонение обозначают буквой δ . Таким образом, $\delta = \pm d$.

Пусть Q – проекция точки M_0 на прямую OP . Тогда

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

где PQ , OQ , OP – направленные отрезки. Но

$OQ = n_{\vec{n}_0} \overline{OM}_0$, $OP = p$, следовательно

$$\delta = n_{\vec{n}_0} \overline{OM}_0 - p = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p,$$

или

$$\boxed{\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p}, \quad d = |\delta|.$$

8. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением 2-ой степени относительно текущих декартовых координат.

В общем случае это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (8.1)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, т.е. по крайней мере один из коэффициентов A , B , C не равен нулю.

Замечание. В дальнейшем будет показано, что степень уравнения кривой не зависит от выбора декартовой системы координат.

В следующих пунктах мы рассмотрим кривые 2-го порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

8.1. Окружность

Окружностью называется кривая на плоскости, все точки $M(x, y)$ которой находятся на одинаковом расстоянии R от фиксированной точки плоскости $Q(a, b)$.

Число R называется радиусом окружности, точка Q – центром окружности.

Очевидно, в силу определения для всех точек окружности справедливо

$$|\overline{MQ}|^2 = R^2,$$

т.е. уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (8.2)$$

Если раскрыть скобки в (8.2), то получим

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Легко видеть, что в этом уравнении

- 1) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;
- 2) коэффициент при xy равен 0.

Рассмотрим теперь обратную задачу.

Пусть в (8.1) $A=C$, $B=0$. Будет ли при этих условиях уравнение (8.1) задавать окружность?

Прежде всего, не ограничивая общности, можно считать, что $A=C=1$ (в противном случае мы разделили бы обе части уравнения (8.1) на A).

Таким образом, можно считать, что исследуемое уравнение имеет вид $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Выделим в нем полные квадраты по x и по y :

$$(x^2 + 2Dx + D^2) + (y^2 + 2Ey + E^2) + F - D^2 - E^2 = 0,$$

отсюда

$$(x+D)^2 + (y+E)^2 = D^2 + E^2 - F.$$

Возможны три случая:

- а) $D^2 + E^2 - F > 0$, тогда последнее уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(-D; -E)$ и радиусом $R = \sqrt{D^2 + E^2 - F}$;
- б) $D^2 + E^2 - F < 0$, тогда это уравнение ничего не задает;
- в) $D^2 + E^2 - F = 0$, тогда уравнению удовлетворяет только одна точка $(-D; -E)$.

8.2. Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек плоскости называемых фокусами, есть постоянная величина (эта величина обозначается $2a$ и предполагается строго большей расстояния между фокусами).

Фокусы эллипса принято обозначать F_1 и F_2 , а расстояние между ними $2c$. Выберем на плоскости декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2 , т.е. $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Выведем уравнение эллипса в данной системе координат.

Рассмотрим любую точку $M(x, y)$ эллипса.

Отрезки F_1M и F_2M называют фокальными радиусами точки M и обозначаются r_1 и r_2 . Очевидно

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

$$r_1 + r_2 = 2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

откуда после приведения подобных

$$-cx + a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (8.3)$$

Возводим еще раз в квадрат и получаем

$$c^2x^2 + a^4 - 2ca^2x = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - 2a^2xc,$$

и после приведения подобных

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Введем новую величину $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Тогда последнее уравнение принимает вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

или окончательно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.4)$$

Т.е. координаты любой точки эллипса удовлетворяют уравнению (8.4). Можно показать, что координаты точек, не лежащих на эллипсе, уравнению (8.4) не удовлетворяют. Таким образом, (8.4) является уравнением эллипса. Оно называется каноническим уравнением эллипса.

Установим форму эллипса.

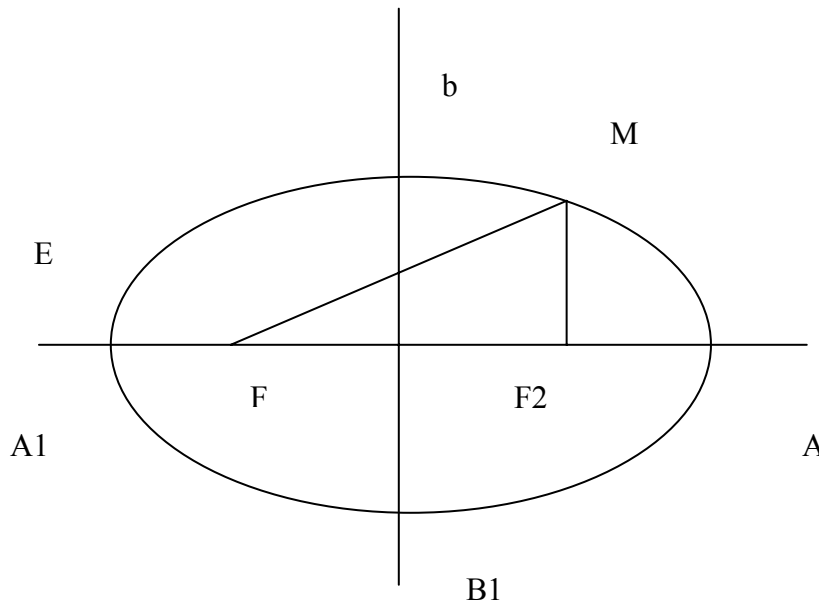


Рис.8.1

График эллипса можно нарисовать следующим образом. Нить длиной $2a$ закрепим в фокусах F_1 и F_2 и острием карандаша, натянув нить, нарисуем овал (рис.8.1). Это и есть график эллипса. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе E . Рассмотрим точку $M_1(-x; y)$ симметричную M относительно оси Oy и точку $M_2(x; -y)$ симметричную M относительно оси Ox . Т.к. уравнение (8.4) содержит только четные степени x и y , то

$$M \in E \Rightarrow M_1 \in E, \quad M_2 \in E.$$

Таким образом, эллипс E имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, совпадающие в выбранной системе координат с координатными осями. Оси симметрии обычно называют просто осями эллипса, а их пересечение – центром эллипса. Та ось, на которой лежат фокусы называется фокальной.

Точки пересечения эллипса с осями называются вершинами эллипса. Очевидно это точки $A(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B_1(0, -b)$.

Отрезки $OA=a$ и $OB=b$ называются соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение половины расстояния между фокусами и большой полуоси. Обозначим эксцентриситет буквой ε . Таким образом, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, при этом $c < a$ и, следовательно, $\varepsilon < 1$.

Эксцентриситет является характеристикой формы эллипса. Действительно

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Таким образом, чем меньше эксцентриситет, тем меньше отличается большая полуось от малой и тем меньше вытянут эллипс. При $\varepsilon = 0$ эллипс переходит в окружность, фокусы его сливаются в одну точку – центр окружности.

Используя величину ε найдем более простые выражения для фокальных радиусов точки $M(x, y)$ эллипса. Как мы уже отмечали $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Равенство (8.3), полученное в предыдущей лекции, разделим на a и получим

$$a - \frac{c}{a}x = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

откуда

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Но $r_1 + r_2 = 2a$, значит $r_1 = 2a - r_2 = 2a - (a - \varepsilon x) = a + \varepsilon x$.

Таким образом,

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x \\ r_2 = a - \varepsilon x. \end{cases}$$

Отметим еще, что параметрическое уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Эллипс можно тоже задать параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

На практике эллипс получается при проектировании окружности на плоскость не параллельную этой окружности и при сечении цилиндра плоскостью.

8.3. Гипербола

Определение 8.4. Гиперболой называется кривая из плоскости, для каждой точки которой абсолютная величина разности расстояния до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина. (Эта величина обозначается $2a$ и предполагается не равной нулю и меньшей расстояния между фокусами).

Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 гиперболы через $2c$ и выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси абсцисс и были равноудаленными от начала координат, т.е. $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Выведем уравнение гиперболы в данной системе координат.

Пусть

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на гиперболе.

По определению гиперболы получаем

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После упрощений, подобных тем которые были проделаны в предыдущем разделе с уравнением эллипса, получим уравнение

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$$\text{Полагая } b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

и разделив полученное уравнение на его правую часть, можно записать его в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.3)$$

Очевидно, все точки гиперболы удовлетворяют уравнению (8.3), которое будем называть каноническим уравнением гиперболы. Можно также показать, что точки не лежащие на гиперболе не могут удовлетворять.

каноническому уравнению. Исследуем форму гиперболы.

Т.к. координаты x и y входят в каноническое уравнение только в четных степенях, гипербола, как и эллипс, имеет две оси симметрии, совпадающие с координатными осями. Кроме того, начало координат является центром симметрии гиперболы. Рассмотрим каноническое уравнение гиперболы в первой четверти, где оно равносильно уравнению

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \geq a.$$

Легко видеть, что при возрастании x от a до $+\infty$ в данном уравнении y возрастает от 0 до $+\infty$.

Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}} = \frac{b}{a},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[y - \frac{b}{a}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

Т.е. прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы (рис. 8.5)

Из соображений симметрии получаем:

Т.е. гипербола имеет пару асимптот $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ и ее график имеет вид, изображенный на рис. 8.5.

Точки пересечения гиперболы с осями координат называются ее вершинами. Очевидно это точки $A(a, 0)$ и $A_1(-a, 0)$. Иногда точки $B(0, b)$ и $B(0, -b)$ называют мнимыми вершинами гиперболы. Соответственно ось Ox называют действительной осью гиперболы, а ось Oy – мнимой. Отрезки $OA = a$ и $OB = b$ называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

Как обычно строят гиперболу? Строят так называемый основной

прямоугольник, образованный параллельными осям прямыми, проходящими через вершины гиперболы. Потом по его диагоналям проводят асимптоты, затем достраивают правую и левую ветви гиперболы (рис.8.5).

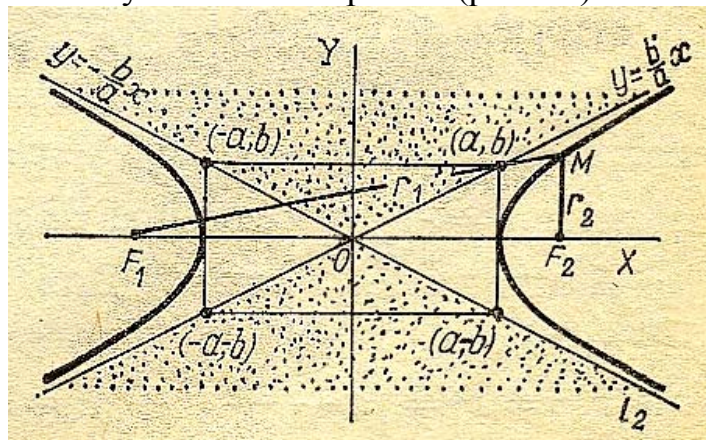


Рис. 8.5

Величину $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называют эксцентриситетом гиперболы. Т.к. у гиперболы $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет является характеристикой формы гиперболы.

Поскольку $b^2 = c^2 - a^2$, то $\frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1$.

Следовательно, чем меньше эксцентриситет ε , тем меньше отношение $\frac{b}{a}$, которое определяет форму основного прямоугольника гиперболы. Т.е. чем меньше ε , тем

более вытянут основной прямоугольник в направлении действительной оси, и тем самым сильнее наклонена к этой оси асимптота.

Аналогично формулам для вычисления фокальных радиусов точек эллипса получаются формулы для фокальных радиусов точек гиперболы

$$\begin{cases} r_1 = (\varepsilon_x + a) \operatorname{sgn} x \\ r_2 = (\varepsilon_x - a) \operatorname{sgn} x. \end{cases}$$

Как и эллипс, гиперболу можно задавать параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch}(t) \\ y = b \cdot \operatorname{sh}(t), \quad t \in R. \end{cases}$$

8.4.Парабола

Определение 8.5. Параболой называется кривая на плоскости, все точки которой равноудалены от фиксированной точки плоскости F , называемой фокусом, и фиксированной прямой на плоскости, называемой директрисой. (Предполагается, что фокус не лежит на директрисе).

Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называют параметром параболы и обозначают p .

Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокус перпендикулярно директрисе и имела положительное направление от директрисы к фокусу, а начало координат было равноудалено от фокуса и директрисы (рис.8.6).

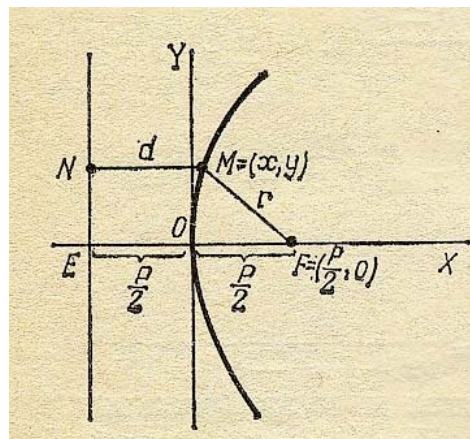


Рис. 8.6

Пусть $M(x, y)$ произвольная точка параболы, точки Q и N получены пересечением с осью Oy и директрисой горизонтальной прямой, проходящей через точку M . Тогда по определению параболы $NM = FM$ и, следовательно,

$$NM = NQ + QM = \frac{p}{2} + x.$$

Поскольку

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

получаем

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

откуда

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Приводим подобные и окончательно получаем уравнение

$$y^2 = 2px. \quad (8.4)$$

Данное уравнение называют каноническим уравнением параболы. Все точки параболы очевидно удовлетворяют ему. Можно показать, что верно и обратное: все точки удовлетворяющие каноническому уравнению лежат на параболе.

Исследуем форму параболы. Т.к. в уравнение параболы y входит во второй степени, значит парабола симметрична относительно оси Ox . Далее левая часть уравнения положительна и $p > 0$, значит всегда $x \geq 0$. Таким образом, парабола, описываемая каноническим уравнением (8.4), расположена в первой и четвертой четверти. Очевидно также, что начало координат лежит на параболе.

8.5 Директрисы эллипса и гиперболы

Пусть система координат выбрана так, что эллипс и гипербола задаются своими каноническими уравнениями.

Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса (гиперболы). Таким образом, как и фокусы, директрисы бывают левые и правые.

Теорема 1. Если r - расстояние точки эллипса (гиперболы) до какого-нибудь фокуса, d - расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, тогда

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем теорему для эллипса. Для определенности возьмем правый фокус эллипса (рис.8.7).

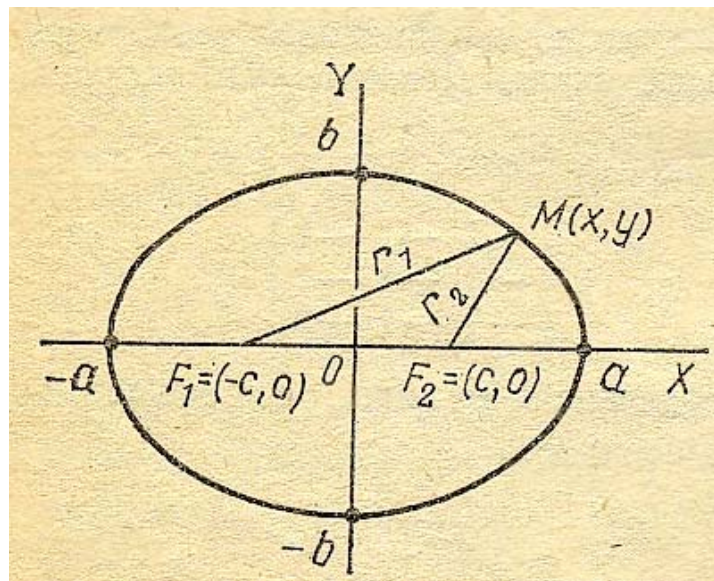


Рис.8.7

Пусть $M(x, y)$ - точка эллипса. Тогда расстояние этой точки до директрисы равно

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Соответственно фокальный радиус точки $r = r_2 = a - \varepsilon x$.

Следовательно

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Замечание. У параболы по определению $\frac{r}{d} = 1$. В соответствии с этим

считают, что эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$. Тогда формула $\frac{r}{d} = \varepsilon$ остается справедливой и для параболы. Более того данную формулу можно положить в основу определения кривых 2-го порядка, равносильного данным выше.

Определение 8.6. Кривая, для каждой точки которой расстояние r до некоторой фиксированной точки (фокуса) и расстояние d до некоторой фиксированной прямой (директрисы) находятся в отношении $\frac{r}{d} = \varepsilon$, ($\varepsilon = \text{const}$),

называется эллипсом при $\varepsilon < 1$, гиперболой при $\varepsilon > 1$ и параболой при $\varepsilon = 1$.

Иногда кривые 2-го порядка называют коническими сечениями. Круговым конусом называется поверхность, полученная вращением прямой вокруг оси вращения, пересекающей данную прямую.

При сечении конуса плоскостями получают кривые второго порядка (см. рис.8.8).

Кривые второго порядка часто встречаются на практике. Например в оптике.

Если источник света поместить в фокусе параболы, то лучи отражаясь от параболы, пойдут параллельно ее оси. Если источник света поместить в фокусе эллипса, то лучи отразившись от эллипса пересекутся во втором фокусе.

Планеты солнечной системы вращаются по эллипсам, одним из фокусов которых является солнце.

Ракета запускается с земли с начальной скоростью $v > 11,2$ км/сек будет двигаться по гиперболической траектории.

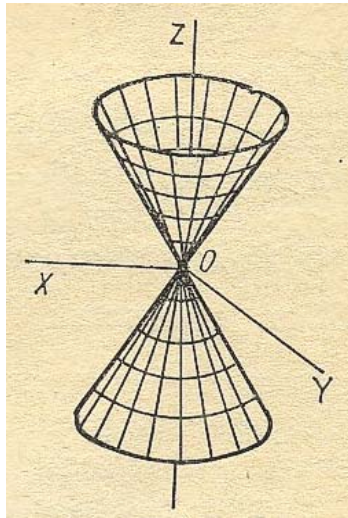


Рис. 8.8

9. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение $\phi(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности S , если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяет этому уравнению тогда и только тогда, когда $M \in S$.

Пересечение двух поверхностей S_1 и S_2 с уравнениями $\phi_1(x, y, z) = 0$ и $\phi_2(x, y, z) = 0$ задает в пространстве кривую с уравнениями

$$\begin{cases} \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

9.1. Уравнение плоскости по заданной точке и заданному нормальному вектору

Любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, называется ее нормальным вектором.

Пусть у плоскости Π известен ее нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая в этой плоскости. Пусть $M(x, y, z)$ произвольная точка. Очевидно, что

$$M \in \Pi \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0,$$

что равносильно

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (9.1)$$

Это и есть уравнение плоскости Π .

9.2. Общее уравнение плоскости

В предыдущем пункте мы показали, что любая плоскость задается уравнением линейным относительно координат x, y, z . Верно и обратное. Каждое уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0), \quad (9.2)$$

задает плоскость. Действительно. Предположим для определенности, что $C \neq 0$ и перепишем (9.2) в виде

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0.$$

Это уравнение определяет плоскость с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, проходящую через точку $M_0(0, 0, -\frac{D}{C})$. Уравнение (9.2) называют общим уравнением плоскости.

9.3. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках

Общее уравнение плоскости (9.2) называют полным, если все его коэффициенты $A, B, C, D \neq 0$ и неполным в противном случае.

Относительно неполных уравнений следует помнить, что

а) если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат (координаты точки $O(0, 0, 0)$ удовлетворяет в этом случае уравнению (9.2));

б) если $A = 0 (B = 0, C = 0)$, то плоскость параллельна оси $Ox (Oy, Oz)$. Действительно, если параметр $A = 0$, то нормальный вектор $\vec{n} = (0, B, C)$, т.е. перпендикулярен Ox , т.е. плоскость параллельна Ox .

Пример. Плоскость Π задана уравнением $By + D = 0 \Rightarrow \Pi \parallel Ox, \Pi \parallel Oz$.

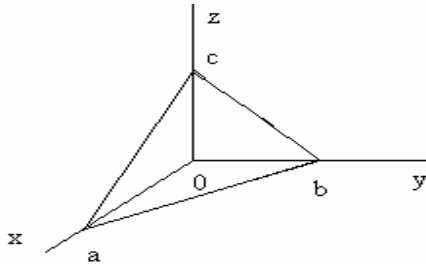
Рассмотрим теперь полное уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Т.к. все коэффициенты отличны от нуля, то это уравнение можно записать в виде

$$-\frac{x}{\frac{D}{A}} - \frac{y}{\frac{D}{B}} - \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1.$$

Обозначив $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (9.3)$$

Уравнение (9.3) называют уравнением плоскости в отрезках. Числа a, b, c имеют здесь простой геометрический смысл – они равны величинам отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно (отрезок отсчитывается от начала координат).



Чтобы убедиться в этом достаточно найти точки пересечения плоскости, заданной уравнением (9.3), с осями координат. Например, точка пересечения с осью Ox находится совместным решением уравнения (9.3) и уравнения оси Ox : $y = 0, z = 0 \Rightarrow x = a$. Аналогично находятся точки пересечения с осями Oy, Oz (рис.9.1).

Рис.9.1

9.4. Угол между плоскостями.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Рассмотрим две плоскости: Π_1 и Π_2 заданные соответственно уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Легко видеть, что один из двух смежных двугранных углов образуемых плоскостями совпадает с углом φ между нормальными векторами плоскостей Π_1 и Π_2

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}, \text{ где } \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \text{ и } \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Тогда

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей равносильно коллинеарности их нормальных векторов. Т.е. $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

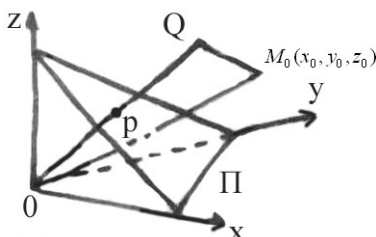
Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

9.5. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана плоскость Π . Опустим из начала координат перпендикуляр OP на данную плоскость.

Обозначим $p \triangleq |\overline{OP}|$. На прямой OP возьмем единичный вектор $\vec{n}_0$, направление которого совпадает с



направлением $\overrightarrow{OP}$ (если $P \in \Pi$, то $\overrightarrow{n_0}$ любой единичный нормальный вектор). Т.к. $\overrightarrow{n_0}$ - единичный вектор, то $\overrightarrow{n_0} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, т.е. его компонентами являются направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{OP}$ (здесь α, β, γ углы образованные вектором $\overrightarrow{n_0}$ с осями координат). Очевидно, что

$$M(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow np_{n_0} \overrightarrow{OM} = p,$$

но,

$$np_{n_0} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{n_0} \cdot \overrightarrow{OM}, \text{ где } \overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

Отсюда получаем уравнение плоскости Π :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (9.4)$$

Уравнение (9.4) называют нормальным уравнением плоскости. Еще раз повторим, что α, β, γ - углы образованные перпендикуляром к плоскости OP с осями координат, p – расстояние от плоскости до начала координат.

Чтобы перейти от общего уравнения плоскости (9.2) к ее нормальному уравнению (9.4) надо общее уравнение умножить на нормирующий множитель μ

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак μ выбирается противоположным знаком свободного члена D в уравнении (9.2). Т.е. $\operatorname{sgn} \mu = -\operatorname{sgn} D$.

Упражнение. Вывести выражение для нормирующего множителя μ .

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве. Спроектируем эту точку на ось определяемую вектором $\overrightarrow{n_0}$. Т.к. на рис.9.2 ее проекцией будет точка Q . Тогда расстояние d от точки M_0 до плоскости Π равно, т.е.

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}| = |np_{n_0} \overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OP}|,$$

где OQ и OP – направленные отрезки.

Т.о.,

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|$$

или, если плоскость Π задана своим общим уравнением, справедлива формула

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

9.6. Уравнение прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве полностью определяется заданием какой-либо точки на прямой и направляющего вектора прямой. (Напомним, что направляющим называется любой ненулевой вектор, параллельный прямой).

Рассмотрим прямую L , на которой дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и для которой известен направляющий вектор $\vec{S} = (m, n, p)$.

Пусть $M(x, y, z)$ любая точка пространства. Очевидно, что $M \in L$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{S}$, т.е. когда $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}$, где t – скалярный множитель, называемый параметром. Он может принимать любое действительное значение в зависимости от положения точки M на прямой L .

Таким образом, т.к. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, из $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}$ получаем уравнение прямой L :

$$\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \\ z - z_0 = tp \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases} \quad (9.5)$$

Это параметрические уравнения прямой. При изменении параметра t изменяются координаты x, y, z и точка $M(x, y, z)$ перемещается по прямой.

Используя радиус вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ точек M и M_0 уравнение (9.5) можно записать с помощью векторного уравнения прямой:
 $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}$.

Так как из системы (9.5) можно выразить t

$t = \frac{x - x_0}{m}; t = \frac{y - y_0}{n}; t = \frac{z - z_0}{p}$, то систему (9.5) часто записывают в виде:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (9.6)$$

Систему уравнений (9.6) называют каноническими уравнениями прямой

Отметим, что система (9.6) только другая форма записи системы (9.5).

Например, если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$. Это

означает, что $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

Чтобы перейти от канонических уравнений прямой к ее параметрическим уравнениям надо все части равенства (9.6) приравнять t и выразить x, y, z через t .

Пусть теперь прямая L задана как пересечение двух непараллельных плоскостей, т.е. системой линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Систему (9.7) иногда называют общими уравнениями прямой.

Как перейти от общих уравнений прямой L к ее каноническим уравнениям?

1) Найдем точку $M_0 \in L$. Для этого придадим произвольное значение одной из координат. Например $z = 0$ и решим систему (9.7).

2) Найдем направляющий вектор $\vec{S}$ прямой L . Т.к. прямая перпендикулярна нормальным векторам $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то за направляющий вектор $\vec{S}$ можно принять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, т.е.

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Пример. Пусть заданы общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ x - y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Полагая $z = 0$, получаем

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Т.е. $M_0(3, 2, 0)$.

Найдем направляющий вектор

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}, \text{ т.е. } m = 1, n = -5, p = -2,$$

отсюда канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{-2}$.

9.7. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. За направляющий вектор прямой можно принять вектор

$\vec{S} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Тогда канонические уравнения прямой L имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (9.8)$$

9.8. Угол между прямыми в пространстве.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть даны две прямые z_1 и z_2 с направляющими векторами $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Один из смежных углов между прямыми совпадает с углом между направляющими векторами.

Тогда $\cos \varphi = \frac{|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}$ или $\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$

Условие параллельности прямых равносильно условию коллинеарности векторов $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, т.е. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ компоненты пропорциональны.

Условие перпендикулярности прямых равносильно условию ортогональности векторов $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, т.е. имеют вид $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

9.9. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Две прямых могут а) пересекаться, б) быть параллельными, в) скрещиваться. В первых двух случаях прямые лежат в одной плоскости.

Пусть известны канонические уравнения прямых

$(L_1): \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $(L_2): \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$.

Очевидно для того, чтобы прямые лежали в одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ и

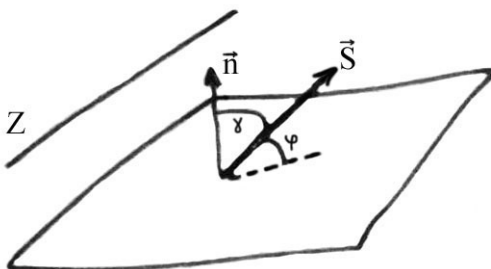
$\vec{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ были компланарны. Последнее равносильно равенству нулю их смешанного произведения.

Т.е. $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$.

9.10. Угол между прямой и плоскостью.

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость Π , заданную уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямую L , заданную уравнением $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.



Т.к. угол φ между прямой L и плоскостью Π является дополнительным к углу γ между $\vec{S}$ и

$\vec{n}$, то $\cos \gamma = \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{S}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{S}|}$, т.е.

$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Рис.9.3

Условие параллельности прямой L и плоскости Π , получается отсюда при $\varphi = 0$, т.е.

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости равносильно по коллинеарности нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой, т.е. имеет вид

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

9.10. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть имеются прямая $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскость

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тогда прямая будет лежать в данной плоскости, если ее направляющий вектор перпендикулярен нормальному вектору плоскости и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$, т.е. если выполнены условия

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Am + bn + Cp = 0. \end{cases}$$

10. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхность, которая определяется уравнением второй степени относительно декартовых координат x, y, z называется поверхностью второго порядка.

Перечислим и разберем все поверхности второго порядка.

10.1. Сфера

Сферой называется поверхность все точки которой удалены на одинаковое расстояние R (радиус сферы) от фиксированной точки $Q(x_0, y_0, z_0)$, называемой центром сферы.

В силу определения сферы, очевидно, ее уравнение имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (10.1)$$

Легко видеть, что в уравнении сферы:

- 1) коэффициенты при x^2, y^2, z^2 равны и отличны от нуля;
- 2) коэффициенты при xy, xz, yz равны 0.

Как это было сделано при исследовании уравнения окружности, можно показать, что обратно: любое уравнение второго порядка удовлетворяет условиям 1) и 2) задает либо сферу либо точку, либо ничего.

10.2. Цилиндрические поверхности

Поверхность составленная из всех прямых, пересекающих заданную линию K и параллельных заданной прямой L , называется цилиндрической. При этом линия K называется направляющей цилиндрической поверхности, а прямые параллельные L , и составляющие поверхность, называются образующими.

Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$. Это уравнение не содержит координаты z , следовательно на нее не накладывается никаких связей и она может принимать любые значения. Обозначим через S поверхность, определяемую уравнением $F(x, y) = 0$, и докажем, что это цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси Oz .

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - произвольная точка S .

$M_0 \in S \Rightarrow F(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ координаты точки $M(x_0, y_0, z)$, $\forall z$, удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0 \Rightarrow M \in S$ при любых z . Это означает, что на поверхности S целиком лежит прямая проходящая через точку M_0 и параллельная оси Oz .

S – цилиндрическая поверхность, а уравнение $F(x, y) = 0$ на плоскости Oxy определяет направляющую этой поверхности. В пространстве уравнением направляющей будет:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z - z_0 = 0 \end{cases}$$

Совершенно аналогично можно показать, что уравнения $F(y, z) = 0$ и $F(x, z) = 0$ определяющие цилиндрические поверхности с образующими параллельными соответственно Ox и Oy .

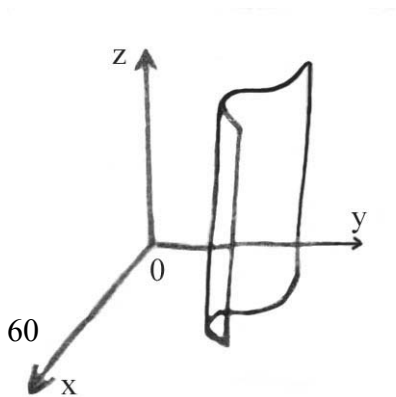
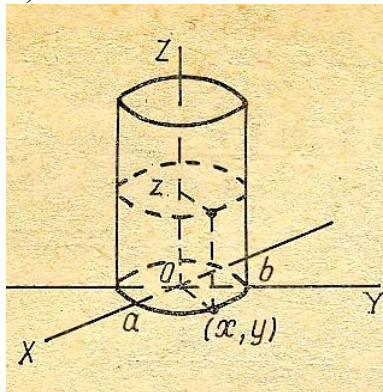


Рис.10.1

Рассмотрим цилиндрические поверхности второго порядка.

- 1) эллиптический цилиндр с образующими параллельными оси Oz.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

В частности при $a = b$ получится прямой круговой цилиндр. Аналогично можно рассмотреть другие эллиптические цилиндры с образующими параллельными осям Ox и Oy.

Рис. 10.2

- 2) Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (См. рис.10.3).

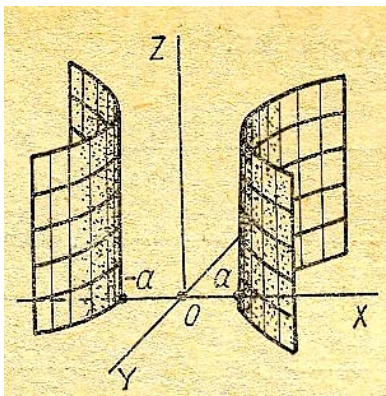


Рис. 10.3

- 3) Параболический цилиндр : $y^2 = 2px$ (рис.10.4).

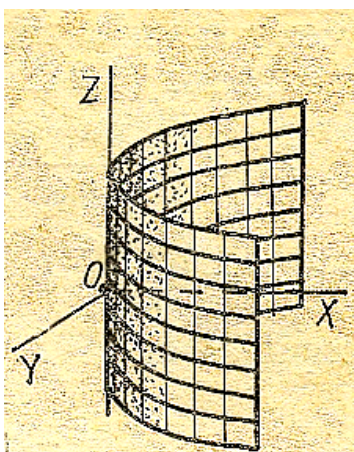


Рис. 10.4

10.3. Конические поверхности

Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию K и проходящих через данную точку P , называется конической поверхностью. При этом K называется направляющей, точка P – вершиной, а каждая из прямых составляющих поверхность – образующей конической поверхности.

Найдем уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат $O(0,0,0)$ и направляющей

$$(K) \begin{cases} z = c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

т.е. это эллипс с полуосями a, b лежащими в плоскости $z = c$.

Пусть $M(x, y, z)$ - любая точка этой поверхности. Проведем через нее образующую OM , пересекающуюся с направляющей в точке $N(X, Y, c)$.
Уравнение OM :

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-0}{Y-0} = \frac{z-0}{c-0},$$

$$\text{т.е. } \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{c} \Rightarrow X = \frac{xc}{z}, Y = \frac{yc}{z}.$$

Подставим полученные значения во 2-е уравнение системы (K) и получим:

$$\frac{x^2 c^2}{a^2 z^2} + \frac{y^2 c^2}{b^2 z^2} = 1,$$

откуда получаем уравнение искомой поверхности

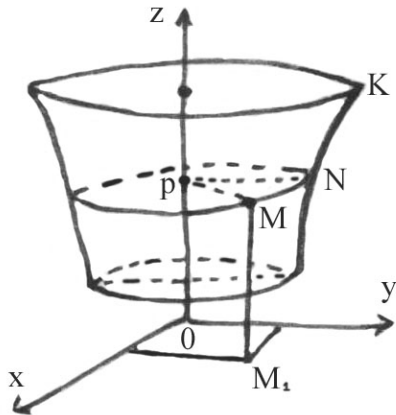
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (10.2)$$

Эту поверхность называют конусом второго порядка.

10.4. Поверхность вращения

Пусть линия K , лежащая в плоскости Oyz задана уравнением

$$(K) \begin{cases} X = 0 \\ F(Y, Z) = 0 \end{cases}.$$



Рассмотрим поверхность, образованную вращением этой линии вокруг оси Oz . Такая поверхность называется поверхностью вращения. Найдем ее уравнение.

Возьмем любую точку $M(x, y, z)$ поверхности вращения. Через эту точку проведем плоскость перпендикулярную оси Oz . Пусть P точка пересечения этой плоскости с осью Ox , N – точка пересечения с кривой K . Тогда PM и PN равны радиусу окружности вращения точки N и

Рис.10.5

следовательно, $PM=PN$. Но $PN = |Y|$, где Y – ордината точки $N(X, Y, Z)$. Тогда

$$PM = |PM| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |Y| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{или } Y = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Кроме того координата Z точки N равна координате z точки M , т.е. $Z=z$. Но координаты точки N удовлетворяют уравнениям (K) , следовательно, подставляя их значения в (K) получаем, что координаты x, y, z любой точки M поверхности вращения удовлетворяют уравнению

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

(10.3)

Можно показать, что координаты точек не лежащих на поверхности вращения этому уравнению не удовлетворяют.

Таким образом уравнение (10.3) является уравнением поверхности вращения относительно оси Oz линии K , определяемой уравнениями (K) .

Аналогично можно получить уравнения поверхностей вращения, когда кривая K лежит в координатных плоскостях Oxy или Oxz , а осью вращения будет Ox или Oy .

Пример. Найти поверхность, образованную вращением параболы

$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz..

Подставляя в уравнение $F(Y, Z) = Y^2 - 2pZ = 0$ значения

$$Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, Z = z,$$

получаем уравнение поверхности вращения

$$(x^2 + y^2) - 2pz = 0, \text{ откуда окончательно}$$

$$2pz = x^2 + y^2.$$

Отметим, что данная поверхность называется параболоидом вращения.

10.5.Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой специально выбранной декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(10.4)

Уравнение (10.4) называют каноническим уравнением эллипсоида, а параметры a, b, c – полуосями эллипсоида. Исследуем форму эллипсоида. Из уравнения (10.4), включающего только четные степени координат, следует, что эллипсоид имеет три плоскости симметрии, совпадающие с координатными плоскостями при сделанном выборе системы координат.

Рассмотрим сечения эллипсоида плоскостями параллельными координатной плоскости Оху. Каждая из таких плоскостей задается уравнением $z = \varepsilon$, а линия, которая получается в сечении определяется системой уравнений

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2},$$

$$z = \varepsilon.$$

(10.5)

Тогда, если $|\varepsilon| < c$, то эти уравнения задают эллипс $\frac{x^2}{a_\varepsilon^2} + \frac{y^2}{b_\varepsilon^2} = 1$, лежащий в

плоскости $z = \varepsilon$ и имеющий полуоси

$$a_\varepsilon = a\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2}} \text{ и } b_\varepsilon = b\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{c^2}}.$$

Этот эллипс расположен симметрично относительно плоскостей Охz и Оуz. Величины a_ε и b_ε имеют наибольшее значение при $\varepsilon = 0$. В этом случае $a_\varepsilon = a$ и $b_\varepsilon = b$. Т.е. самый крупный эллипс получается при сечении координатной плоскостью $z=0$.

При $\varepsilon = \pm c$ уравнения (10.5) задают одну точку $(0, 0, \pm c)$ (иногда говорят, что это эллипс выродившийся в точку). Т.е. плоскости $z = \pm c$ касаются эллипсоида.

При $|\varepsilon| > c$ уравнения (10.5) ничего не задают, т.е. плоскость $z = \varepsilon$ не пересекается с эллипсоидом.

Совершенно аналогичная картина получается при исследовании эллипсоида с помощью сечений $x = \varepsilon, y = \varepsilon$. Отметим только, что сама плоскость Oyz (т.е. $x=0$) пересекает эллипсоид по эллипсу

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

а плоскость Oxz по

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

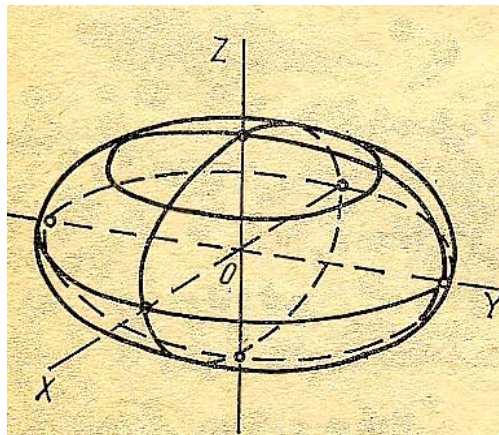


Рис.10.6

При $a = b$ эллипсоид можно рассматривать как поверхность вращения образованную вращением эллипса вокруг оси Oz .

Если $a=b=c$, то эллипсоид является сферой.

10.6. Гиперболоиды

Существует два типа гиперболоидов: однополостный и двуполостный. При соответственном выборе системы координат они определяются следующими уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - однополостный,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ - двуполостный.}$$

Очевидно оба гиперболоида имеют три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, совпадающие с координатными плоскостями.

Исследуем их форму с помощью метода сечений. Рассмотрим сечения однополостного гиперboloида координатными плоскостями Oxz и Oyz .

В первом случае в сечении получится гипербола

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

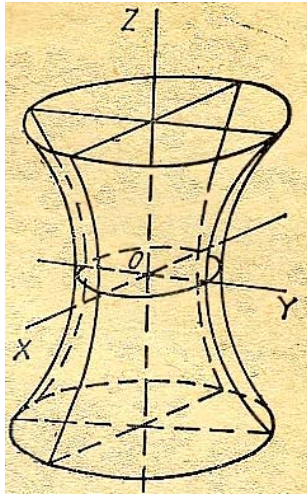
во втором гипербола

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

Сечения однополостного гиперboloида плоскостью $z = \varepsilon$ дают

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{c^2}, \text{ т.е. эллипс с полуосями } a_\varepsilon = a\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{c^2}} \text{ и } b_\varepsilon = b\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{c^2}}.$$

Причем полуоси a_ε и b_ε этого эллипса принимает наименьшее значение $a_\varepsilon = a$, $b_\varepsilon = b$ при $\varepsilon = 0$. Иначе говоря, самый малый эллипс получается в сечении координатной плоскостью $z=0$ (этот эллипс называют горловым эллипсом однополостного гиперboloида).



Очевидно, что при возрастании $|\varepsilon|$ размеры эллипсов получаемых в сечении возрастают. Таким образом, однополостный гиперboloид представляет собой что-то вроде бесконечной трубки (рис.10.7), расширяющейся в обе стороны от горлового эллипса. Числа a, b, c – полуоси гиперboloида. Если $a = b$, то гиперboloид является поверхностью вращения, полученной вращением гиперболы вокруг оси Oz .

Рис.10.7

Совершенно аналогично исследуется форма двуполостного гиперboloида. При сечении его плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ получается соответственно следующие линии сечения:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ и соответственно}$$

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Т.е., это гиперболы с действительной осью Oz.

Теперь рассмотрим сечения, параллельные плоскости Oxy ($z = \varepsilon$)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - 1 \\ z = \varepsilon. \end{cases}$$

При $|\varepsilon| < c$ эти уравнения ничего не задают, т.е. секущая плоскость не пересекает гиперболоид.

При $\varepsilon = \pm c$ секущая плоскость касается гиперболоида в точках $(0,0,\pm c)$.

При $|\varepsilon| > c$ в сечении получается эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_\varepsilon^2} + \frac{y^2}{b_\varepsilon^2} = 1 \\ z = \varepsilon \end{cases}, \text{ где } a_\varepsilon = a\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - 1} \text{ и } b_\varepsilon = b\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - 1}.$$

Полуоси этого эллипса при возрастании $|\varepsilon|$ все время возрастают. На основании всего сказанного делаем вывод: двуполостный гиперболоид состоит из двух частей (полостей, каждая из которых имеет вид выпуклой чаши (рис.10.8).

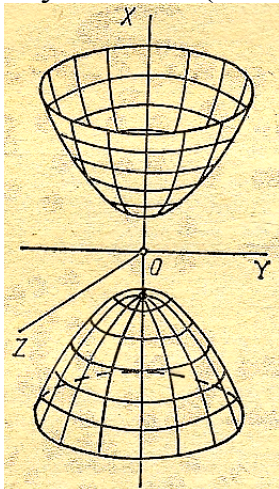


Рис.10.8

10.7. Параболоиды

Существует два параболоида: эллиптический и гиперболический.

При соответственном выборе системы координат эллиптический и гиперболический параболоиды определяются следующими каноническими уравнениями:

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - \text{эллиптический } (p, q > 0),$$

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - \text{гиперболический } (p, q > 0).$$

Параболоиды имеют две взаимно-пересекающиеся плоскости симметрии.

Исследуем параболоиды методом сечений.

В сечении эллиптического параболоида координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ получаются соответственно параболы

$$\begin{cases} 2z = \frac{y^2}{q} \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2z = \frac{x^2}{p} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Обе параболы симметричны относительно оси Ox с вершинами в начале координат.

Рассмотрим теперь сечения эллиптического параболоида плоскостями параллельными координатным плоскостями Oxy : (т.е. $z = \varepsilon$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2\varepsilon \\ z = \varepsilon \end{cases}, \text{ т.е. если } \varepsilon > 0, \text{ то в сечении получится эллипс } \frac{x^2}{a_\varepsilon^2} + \frac{y^2}{b_\varepsilon^2} = 1$$

с полуосями $a_\varepsilon = \sqrt{2p\varepsilon}$, $b_\varepsilon = \sqrt{2q\varepsilon}$. Его размеры увеличиваются с ростом ε .

В частности, при $\varepsilon = 0$ в сечении получается одна точка $(0,0,0)$, при $\varepsilon < 0$ секущая плоскость не пересекается с параболоидом. Таким образом, эллиптический параболоид имеет вид бесконечной выпуклой чаши.

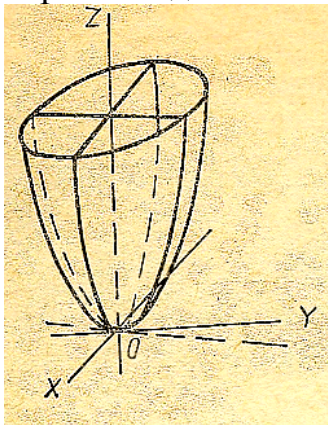


Рис.10.9

Рассмотрим сечения гиперболического параболоида плоскостью Oxy Это восходящая парабола $\begin{cases} 2pz = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ с вершиной в точке 0 и симметричной оси Oz .

Сечение гиперболического параболоида плоскостью $x = \varepsilon$ даст нисходящую

$$\text{параболу } \begin{cases} 2z = -\frac{y^2}{q} + \frac{\varepsilon^2}{p} \\ x = \varepsilon \end{cases},$$

поднятую на величину $\frac{\varepsilon^2}{p}$ над плоскостью Oxy .

Все эти параболы имеют одинаковый параметр q , следовательно отличаются только положением в пространстве. Таким образом, гиперболический параболоид

(рис. 10.10) образован параболой $\begin{cases} 2z = -\frac{y^2}{q} \\ x = 0 \end{cases}$, скользящей вершиной по параболе

$$\begin{cases} 2z = \frac{x^2}{p} \\ y = 0 \end{cases}.$$

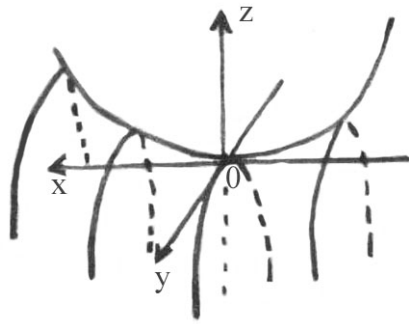


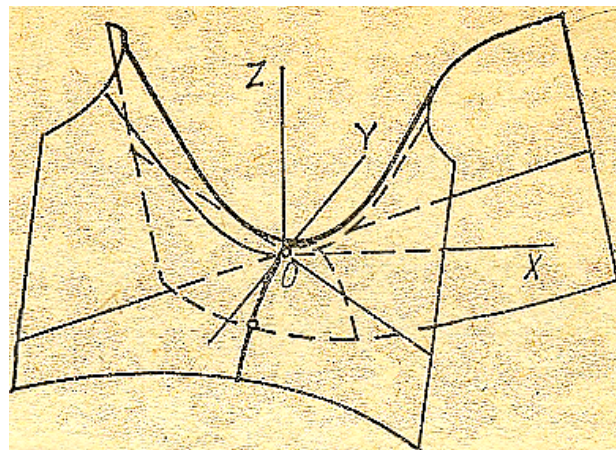
Рис.10.10

Рассмотрим сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = \varepsilon$. Кривая лежащая в сечении задается уравнениями

$$2\varepsilon = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \quad z = \varepsilon.$$

При $\varepsilon > 0$ это гипербола с действительной осью параллельной оси Ox . При $\varepsilon < 0$ это гипербола с действительной осью параллельной оси Oy . При $\varepsilon = 0$ получается

пара прямых: $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$



10.8. Линейчатость поверхностей второго порядка

Коническая и цилиндрическая поверхности являются линейчатыми, т.е. составленными из прямых (не из отрезков, а из прямых!). Кроме цилиндра и конуса, линейчатыми являются однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Рассмотрим однополостный гиперболоид. Его каноническое уравнение перепишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (10.6)$$

Рассмотрим два линейных уравнения

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (10.7)$$

где α, β - некоторые числа не равные одновременно нулю.

Уравнения (10.7) задают пару плоскостей, которые очевидно пересекаются (поскольку коэффициенты при переменных не пропорциональны и, следовательно, условие параллельности не выполнено). Значит, при каждом наборе пары чисел (α, β) уравнения (10.7) определяют некоторую прямую $L_{\alpha\beta}$.

Пусть оба числа α, β отличны от нуля. Перемножим уравнения (10.7). После сокращения на $\alpha\beta$ получается уравнение гиперболоида (10.6), т.е. координаты всех точек прямой $L_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнению однополостного гиперболоида (10.6). Следовательно, эта прямая целиком лежит на однополостном гиперболоиде.

Если $\alpha = 0, \beta \neq 0$, тогда (10.7) имеет вид

$$1 + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0.$$

Для точек, удовлетворяющих такому уравнению, очевидно, выполняется и уравнение гиперболоида (10.6).

Таким образом, все семейство прямых $\{Z_{\alpha\beta}\}$ лежит на гиперболоиде. Докажем обратно, что через любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ однополостного гиперболоида проходит некоторая прямая этого семейства. Т.е. надо доказать, что для точки M_0 найдутся числа α, β одновременно не равные нулю такие, что координаты этой точки удовлетворят (10.7). В итоге мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) - \beta\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) = 0 \\ \alpha\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) - \beta\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = 0 \end{cases} \quad (10.8)$$

относительно неизвестных α, β .

Но главный определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} & -\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \\ 1 - \frac{y_0}{b} & -\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) \end{vmatrix} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 0$$

поскольку точка M_0 лежит на гиперboloиде и, следовательно, ее координаты удовлетворяют его каноническому уравнению.

В таком случае однородная система (10.8) имеет ненулевые решения и, следовательно, для точки M_0 найдутся тся прямая семейства $\{L_{\alpha\beta}\}$, на которой она лежит.

Мы показали, что однополостной гиперboloид является линейчатой поверхностью. Можно показать, что более того, этот гиперboloид является дважды (!) линейчатой поверхностью. Это означает, что он обладает двумя семействами прямолинейных образующих. Второе семейство задается уравнениями:

$$\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Гиперболический параболоид $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ тоже является дважды линейчатой поверхностью.

11. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение линейного пространства. В § 2 определена операция сложения свободных векторов из $\mathbf{R}^3$ и операция умножения векторов на действительные числа, а также перечислены свойства этих операций. Распространение этих операций и их свойств на множество объектов (элементов) произвольной природы приводит к обобщению понятия линейного пространства геометрических векторов из $\mathbf{R}^3$, определенного в § 2.

Сформулируем определение векторного пространства. Множество V элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \dots$ называется *линейным* или *векторным пространством*, если:

- 1) имеется правило, которое каждым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из V ставит в

соответствие третий элемент из V , называемый *суммой* x и y и обозначаемый $x + y$;

2) имеется правило, которое каждому элементу $x \in V$ и любому действительному числу α ставит в соответствие элемент из V , называемый *произведением* элемента x на число α и обозначаемый αx .

При этом сумма двух элементов $x + y$ и произведение αx элемента на число должны удовлетворять следующим требованиям – аксиомам линейного пространства:

1°. $x + y = y + x$ (коммутативность сложения).

2°. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения).

3°. существует элемент $0 \in V$, называемый нулевым, такой, что $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in V$.

4°. Для любого $x \in V$ существует элемент $(-x)$, называемый противоположным для x , такой, что $x + (-x) = 0$.

5°. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

6°. $1 \cdot x = x, \forall x \in V$.

7°. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

8°. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbf{R}$.

Элементы линейного пространства будем называть *векторами* независимо от их природы.

Из аксиом 1° - 8° следует, что в любом линейном пространстве V :

1) существует единственный нулевой вектор;

2) для каждого вектора $x \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-x) \in V$, причем $(-x) = (-1)x$;

3) для любого вектора x справедливо равенство $0 \cdot x = 0$.

Докажем, например, первое утверждение. Допустим, что в пространстве V существуют два нуля: 0_1 и 0_2 . Положив в аксиоме 3° $x = 0_1, 0 = 0_2$ получим $0_1 + 0_2 = 0_1$. Аналогично, если $x = 0_2, 0 = 0_1$, то $0_2 + 0_1 = 0_2$. Учитывая аксиому 1°, получаем $0_1 = 0_2$.

Доказательство утверждений 2 и 3 рекомендуем провести читателю самостоятельно.

Примеры линейных пространств. 1. Множество действительных чисел образует линейное пространство $\mathbf{R}$. Аксиомы 1° - 8° в нем, очевидно, выполняются.

2. Множество свободных векторов пространства, как показано в § 2, также образует линейное пространство, обозначаемое $\mathbf{R}^3$. Нулем этого пространства служит нулевой вектор.

Множество векторов на плоскости и на прямой также являются линейными пространствами. Будем обозначать их $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$ соответственно.

3. Обобщением пространства $\mathbf{R}^3$ служит пространство $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$, называемое *арифметическим n -мерным пространством*, элементами (векторами) которого

являются упорядоченные совокупности n произвольных действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е.

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Удобно использовать обозначение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при этом x_i называется i -й координатой (компонентой) вектора $\mathbf{x}$.

Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ определим сложение и умножение на число следующими формулами:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n); \\ \alpha \mathbf{x} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

Нулевым элементом пространства $\mathbf{R}^n$ является вектор $\mathbf{0} = 0, 0, \dots, 0$. Равенство двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из $\mathbf{R}^n$, по определению, означает равенство соответствующих координат, т. е. $(\mathbf{x} = \mathbf{y}) \Leftrightarrow (x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n)$.

Выполнение аксиом 1° - 8° очевидно.

4. Пусть $C_{[a, b]}$ – множество непрерывных функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Суммой функций f и g из $C_{[a, b]}$ называется функция $h = f + g$, определяемая равенством

$$h = f + g \Leftrightarrow h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in [a, b].$$

Произведение функции $f \in C_{[a, b]}$ на число $\alpha \in \mathbf{R}$ определяется равенством

$$u = \alpha f \Leftrightarrow u(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in [a, b].$$

Так введенные операции сложения двух функций и умножения функции на число превращают множество $C_{[a, b]}$ в линейное пространство, векторами которого являются функции. Аксиомы 1° - 8° в этом пространстве, очевидно, выполняются. Нулевым вектором этого пространства является нулевая функция, а равенство двух функций f и g означает, по определению, следующее:

$$(f = g) \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in [a, b].$$

Линейная зависимость векторов. Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ – векторы линейного пространства V и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – произвольные действительные числа. Вектор

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}^i \quad (11.1)$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – *коэффициентами линейной комбинации*. Говорят, что множество векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ порождает пространство V , если каждый вектор $\mathbf{y}$ из V может быть представлен в виде (11.1). Векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ линейного пространства V называются *линейно-зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n = \mathbf{0} \quad (11.2)$$

Если же равенство (11.2) выполняется лишь в единственном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ называются *линейно-независимыми*.

Понятие линейной зависимости векторов в $\mathbf{R}^3$ введено в § 2. Там же

показано, что если векторы линейно-зависимы, то один из них является линейной комбинацией остальных векторов.

Это доказательство дословно переносится на случай любого линейного пространства V .

Верно и обратное: если один из векторов из $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ является линейной комбинацией остальных, то указанные векторы линейно-зависимы.

Действительно, пусть, например, $\mathbf{x}^1 = \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \alpha_3 \mathbf{x}^3 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n$. Тогда $(-1) \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n = \mathbf{0}$. Так как $-1 \neq 0$, то последнее равенство и устанавливает линейную зависимость векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 11.1. 1) Если среди векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ содержится нулевой вектор, то $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ линейно-зависимы.

2) Если среди векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ имеется k ($k < n$) линейно-зависимых векторов, то и вся совокупность векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ линейно-зависима.

3) Если векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ линейно-независимы, то и любая часть этих векторов линейно-независима.

Доказательство. 1) Если вектор $\mathbf{x}^k = \mathbf{0}$, то из равенства $0 \cdot \mathbf{x}^1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{x}^{k-1} + 1 \cdot \mathbf{x}^k + 0 = \mathbf{0}$ и вытекает линейная зависимость векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$.

2) Пусть векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$, $k < n$, линейно-зависимы. Тогда из равенства $\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0}$, в котором среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ хотя бы одно не равно нулю, получим равенство $\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k + 0 \cdot \mathbf{x}^{k+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{x}^n = \mathbf{0}$, которое и означает линейную зависимость всех векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$.

3) Пусть векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ линейно-независимы. Если бы некоторая часть этих векторов образовала линейно-зависимую систему, то на основании второго свойства вся система $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ была бы линейно-зависимой.

Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие понятие линейной зависимости векторов.

Пример 1. В линейном пространстве $\mathbf{R}^3$ векторы $\mathbf{x}^1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{x}^2 = (2, 1, 3)$ и $\mathbf{x}^3 = (14, -2, 12)$, очевидно, линейно-зависимы, так как имеет место равенство $3\mathbf{x}^1 + 2\mathbf{x}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 = \mathbf{0}$.

Пример 2. Три функции $f_1 = 1$; $f_2 = \cos 2x$; $f_3 = \sin^2 x$ линейно-зависимы, поскольку $f_1 - f_2 - 2f_3 = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Пример 3. Покажем, что в пространстве $C_{[a, b]}$ векторы $\mathbf{y}^1 = 1$, $\mathbf{y}^2 = x$, $\mathbf{y}^3 = x^2$, ..., $\mathbf{y}^{n+1} = x^n$, где n - любое целое положительное число, линейно-независимы. Для этого достаточно убедиться, что равенство

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (11.3)$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$.

Действительно, полагая в равенстве (11.3) $x_0 = 0$, получаем $\alpha_1 = 0$. Тогда находим $x(\alpha_2 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{n+1} x^{n-1}) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Последнее соотношение для всех $x \in \mathbf{R}$ возможно, если $\alpha_2 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{n+1} x^{n-1} = 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Полагая здесь снова $x_0 = 0$, получаем $\alpha_2 = 0$. Продолжая эти рассуждения, на $n + 1$ -м шаге имеем $\alpha_{n+1} = 0$, т.е. равенство (11.3) возможно при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$.

Пример 4. В пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим векторы

$$\mathbf{e}^1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}^2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}^n = (0, 0, \dots, 1). \quad (11.4)$$

Покажем, что они линейно-независимы. Действительно, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - произвольные действительные числа. Тогда $\alpha_1 \mathbf{e}^1 + \alpha_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}^n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 (1, 0, \dots, 0) + \alpha_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + \alpha_n (0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$, т.е. векторы $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ - линейно-независимы.

Базис и размерность линейного пространства. Говорят, что множество векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ порождает пространство V , если любой вектор $\mathbf{x}$ из V есть линейная комбинация векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$. Совокупность линейно-независимых векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$, порождающих линейное пространство V , называют *базисом* этого пространства.

Если $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ - базис пространства V , то для любого $\mathbf{x} \in V$ имеет место равенство

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{u}^1 + a_2 \mathbf{u}^2 + \dots + a_n \mathbf{u}^n = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}^i. \quad (11.5)$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются *координатами* или *компонентами* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$.

Докажем единственность представления (11.5). Допустим, что $\mathbf{x}$ можно представить еще и в виде $\mathbf{x} = b_1 \mathbf{u}^1 + b_2 \mathbf{u}^2 + \dots + b_n \mathbf{u}^n$. Вычтя это равенство из соотношения (11.5), получим $(a_1 - b_1) \mathbf{u}^1 + (a_2 - b_2) \mathbf{u}^2 + \dots + (a_n - b_n) \mathbf{u}^n = \mathbf{0}$. Так как векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ линейно-независимы, то $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Как и в $\mathbf{R}^3$, линейные операции над векторами пространства V при заданном базисе приводят к обычным линейным операциям над числами - координатами этих векторов в данном базисе, т.е. если

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{u}^1 + a_2 \mathbf{u}^2 + \dots + a_n \mathbf{u}^n, \mathbf{y} = b_1 \mathbf{u}^1 + b_2 \mathbf{u}^2 + \dots + b_n \mathbf{u}^n,$$

то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a_1 + b_1) \mathbf{u}^1 + (a_2 + b_2) \mathbf{u}^2 + \dots + (a_n + b_n) \mathbf{u}^n;$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha a_1) \mathbf{u}^1 + (\alpha a_2) \mathbf{u}^2 + \dots + (\alpha a_n) \mathbf{u}^n. \quad (11.6)$$

Учитывая взаимно-однозначное соответствие между вектором и его координатами в выбранном базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$, будем писать

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{u}^1 + a_2 \mathbf{u}^2 + \dots + a_n \mathbf{u}^n \Leftrightarrow \mathbf{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (11.7)$$

Теорема 11.2. Если линейное пространство V имеет базис, состоящий из n элементов, то всякие p векторов из V при $p > n$ линейно-зависимы.

Доказательство. Согласно свойству 3 из теоремы 11.1, можно считать, что $p = n + 1$. Рассмотрим случай, когда пространство V имеет базис, состоящий из единственного элемента $\mathbf{u}$. Тогда для любых $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ имеем $\mathbf{x}^1 = a_1 \mathbf{u}$ и $\mathbf{x}^2 = a_2 \mathbf{u}$. Если a_1 и a_2 не равны нулю, то $a_2 \mathbf{x}^1 - a_1 \mathbf{x}^2 = 0$ и, значит, векторы $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ линейно-зависимы. Если же $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$, то векторы $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ тоже линейно-зависимы, так как среди них есть нулевой вектор.

Дальнейшие рассуждения продолжаем по индукции. Допустим, что в пространстве, базис которого состоит из $n - 1$ элемента, n векторов линейно-зависимы. Рассмотрим пространство V , имеющее базис $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$. Пусть $n + 1$ элементов из V имеют вид

$$\mathbf{x}^m = a_{m1} \mathbf{u}^1 + a_{m2} \mathbf{u}^2 + \dots + a_{mn} \mathbf{u}^n, \quad m = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Если в этом равенстве все a_{mn} , $m = 1, 2, \dots, n, n + 1$, равны нулю, то векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n, \mathbf{x}^{n+1}$ принадлежат пространству, порожденному элементами $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^{n-1}$. Следовательно, по предположению индукции они линейно-зависимы. Пусть теперь хотя бы одно a_{mn} , например a_{n+1n} , отлично от нуля. Рассмотрим векторы

$$\mathbf{y}^m = \mathbf{x}^m - \frac{a_{mn}}{a_{n+1n}} \mathbf{x}^{n+1}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Координаты вектора $\mathbf{y}^m$ при n -м элементе $\mathbf{u}^n$ базиса равны нулю, и, значит, по предположению индукции векторы $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ линейно-зависимы. В таком случае существуют n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, не все равные нулю, которые удовлетворяют равенству $a_1 \mathbf{y}^1 + a_2 \mathbf{y}^2 + \dots + a_n \mathbf{y}^n = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n - \frac{1}{a_{n+1n}} (a_1 a_{1n} + \dots + a_n a_{nn}) \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{0}.$$

А так как не все числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ равны нулю, то векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ являются линейно-зависимыми.

Следствие 1. Если пространство V имеет базис из n элементов и если p векторов из V линейно-независимы, то $p \leq n$.

Следствие 2. Если линейное пространство V имеет некоторый базис из n элементов, то и всякий другой базис пространства V состоит из n элементов.

Доказательство. Если $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^p$ – другой базис пространства V , то векторы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^p$ – линейно-независимы и по предыдущему следствию $p \leq n$. Поменяв местами базисы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^p$ и $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$, получаем, что $n \leq p$. Значит, $p = n$.

Если V – линейное пространство с конечным базисом, то число n элементов этого базиса называется *размерностью* пространства V . Размерность обозначается $\dim V$ (англ. dimension – размерность).

Линейное пространство V называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое число линейно-независимых векторов.

Теорема 11.3. Любую систему из k линейно-независимых векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k$, $k < n$, n -мерного пространства V можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $k < n$. Допустим, что к векторам $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k$ нельзя добавить вектор $\mathbf{u}^{k+1}$, такой, что векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}$ будут линейно-независимы. Это значит, что в пространстве V имеется только k линейно-независимых векторов, т.е. $\dim V = k < n$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, к векторам $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k$ можно добавить вектор $\mathbf{u}^{k+1} \in V$, такой, что система векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}$ линейно-независима. Если $k + 1 < n$, то, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что можно добавить еще один вектор $\mathbf{u}^{k+2} \in V$ так, что векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+2}$ линейно-независимы. После конечного числа шагов получим ровно n линейно-независимых векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}, \dots, \mathbf{u}^n$, образующих, по определению, базис пространства V .

Приведем примеры базисов конкретных линейных пространств.

Пример 5. В пространстве $\mathbf{R}^3$ базис образует тройка единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ имеет вид $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$, где α, β, γ – проекции вектора на оси координат.

Пример 6. В пространстве $\mathbf{R}^n$ базисом служит система векторов (11.4), так как эти векторы, как показано выше, линейно-независимы, и для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ справедливо разложение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + \dots + x_n \mathbf{e}^n$.

Пример 7. Пусть P_n – пространство многочленов степени не выше n . В примере 3 показано, что векторы $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно-независимы. Каждый многочлен $f(x) \in P_n(x)$ выражается через них очевидным образом: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Отсюда следует, что векторы $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют базис пространства P_n и $\dim P_n = n + 1$.

Пример 8. Примером бесконечномерного пространства может служить пространство $C_{[a, b]}$. В самом деле, для любого номера n система $n + 1$ векторов этого пространства $1, x, x^2, \dots, x^n$, как показано в примере 3, является линейно-независимой.

Понятие подпространства и линейной оболочки. Подпространством линейного пространства V называется всякое подмножество $V_1 \subset V$, обладающее следующими свойствами:

1°. если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$.

2°. если $\mathbf{x} \in V_1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha \mathbf{x} \in V_1$.

Убедимся, что подпространство $V_1 \subset V$, удовлетворяющее требованиям 1° и 2°, само является линейным пространством. Действительно, аксиомы 1°, 2°, 5° - 8° линейного пространства для векторов из V_1 , очевидно, выполняются. Надо убедиться только в том, что нулевой вектор принадлежит V_1 и что для любого $\mathbf{x} \in V_1$ существует противоположный элемент $(-\mathbf{x}) \in V_1$.

В самом деле, если $\mathbf{x} \in V_1$, то и произведения $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $(-1) \mathbf{x} = -\mathbf{x}$ также принадлежат V_1 .

Приведем примеры линейных подпространств.

Пример 9. Пусть $V = \mathbf{R}^2$. В этом пространстве рассмотрим множества V_1 и V_2 векторов вида $\mathbf{a} = (x, 0)$ и $\mathbf{b} = (0, y)$, где $\mathbf{a} \in V_1$ и $\mathbf{b} \in V_2$. Любые два вектора $\mathbf{a}^1 = (x_1, 0)$ и $\mathbf{a}^2 = (x_2, 0)$ из V_1 обладают свойствами

$$\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 = (x_1 + x_2, 0) \in V_1, \quad \alpha \mathbf{a} = (\alpha x, 0) \in V_1.$$

Аналогично для векторов $\mathbf{b}^1 = (0, y_1)$ и $\mathbf{b}^2 = (0, y_2)$ из V_2 имеем

$$\mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2 = (0, y_1 + y_2) \in V_2, \quad \alpha \mathbf{b} = (0, \alpha y) \in V_2.$$

Таким образом, V_1 и V_2 - подпространства пространства $\mathbf{R}^2$. Подпространство V_1 состоит из векторов, параллельных оси X , а подпространство V_2 образуют векторы, параллельные оси Y .

Пример 10. Рассмотрим линейное пространство $V = \mathbf{R}^3$. Векторы вида $\mathbf{a} = (x, 0, 0)$, или вида $\mathbf{b} = (0, y, 0)$, или вида $\mathbf{c} = (0, 0, z)$ образуют три самостоятельных линейных подпространства в $\mathbf{R}^3$. Аналогично векторы вида $\mathbf{a}^1 = (0, y, z)$; $\mathbf{b}^1 = (x, 0, z)$ и $\mathbf{c}^1 = (x, y, 0)$ тоже образуют линейные подпространства в $\mathbf{R}^3$ векторов, параллельных плоскостям YZ , XZ и XY соответственно.

Пример 11. Пусть $V = C_{[a, b]}$, а V_1 - множество функций f из $C_{[a, b]}$, таких, что $f(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$. Если $f_1(x_0) = 0$, $f_2(x_0) = 0$, то $f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0$ и $\alpha f_1(x_0) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$. Значит, V_1 - подпространство пространства $C_{[a, b]}$.

Если в n -мерном пространстве V всякие $n + 1$ векторов линейно-зависимы, то это утверждение и подавно выполнено в подпространстве $V_1 \subset V$, т.е. $\dim V_1 \leq \dim V$. Другими словами, *размерность подпространства не превосходит размерности самого пространства*.

Важным в теории линейных пространств является понятие линейной оболочки.

Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$ - система векторов линейного пространства V . *Линейной оболочкой*, порожденной векторами $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$, называется совокупность всех линейных комбинаций вида $\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ - любые

числа из $\mathbf{R}$, и обозначается $L(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$.

Легко показать, что линейная оболочка $L(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ является подпространством линейного пространства V . Действительно, пусть $\mathbf{y}^1 = \alpha'_1 \mathbf{x}^1 + \alpha'_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha'_k \mathbf{x}^k$, $\mathbf{y}^2 = \alpha''_1 \mathbf{x}^1 + \alpha''_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha''_k \mathbf{x}^k$ - произвольные элементы из $L(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1 + \mathbf{y}^2 &= (\alpha'_1 + \alpha''_1) \mathbf{x}^1 + (\alpha'_2 + \alpha''_2) \mathbf{x}^2 + \dots + (\alpha'_k + \alpha''_k) \mathbf{x}^k \in \\ &\in L(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k), \quad \alpha \mathbf{y}^1 = (\alpha \alpha'_1) \mathbf{x}^1 + (\alpha \alpha'_2) \mathbf{x}^2 + \dots + (\alpha \alpha'_k) \mathbf{x}^k \in L(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k). \end{aligned}$$

Следовательно, $L(x^1, x^2, \dots, x^k)$ - подпространство линейного пространства V , а, значит, $\dim L \leq \dim V$, причем $\dim L = k$ тогда и только тогда, когда векторы $x^1, x^2, \dots, x^k$ линейно-независимы.

Пересечение и прямая сумма пространств. Если V_1 и V_2 - два линейных пространства, то *пересечением* этих пространств называется совокупность $V_1 \cap V_2$ всех векторов x , принадлежащих как V_1 , так и V_2 , т.е.

$$V_1 \cap V_2 = \{x | x \in V_1 \text{ и } x \in V_2\}.$$

Покажем, что $V_1 \cap V_2$ образует линейное пространство. В самом деле, если x и y принадлежат $V_1 \cap V_2$, то они принадлежат и V_1 , и V_2 . Поэтому вектор $x + y$ и вектор αx , $\alpha \in \mathbf{R}$, также принадлежат и V_1 и V_2 , т.е. $x + y \in V_1 \cap V_2$ и $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

Совокупность всех векторов вида $y + z$, где $y \in V_1$, $z \in V_2$, называется *суммой пространств* V_1 и V_2 и обозначается $V_1 + V_2$, т.е.

$$V_1 + V_2 = \{y + z | y \in V_1, z \in V_2\}. \quad (11.8)$$

Пример 12. Пусть V_1 - пространство всех векторов вида $b = (x, 0, z)$. Тогда суммой этих пространств является множество векторов вида $a + b = (x, y, 2z)$, т.е. $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3$. Пересечение пространств V_1 и V_2 есть множество векторов вида $(0, 0, z)$, т.е. $V_1 \cap V_2$ - множество векторов, параллельных оси Z .

Подпространства V_1 и V_2 линейного пространства V называются *дополнительными* в V , если выполнены соотношения

$$V_1 + V_2 = V, \quad V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \in V. \quad (11.9)$$

В этом случае говорят, что пространство V представлено в виде *прямой суммы подпространств* V_1 и V_2 .

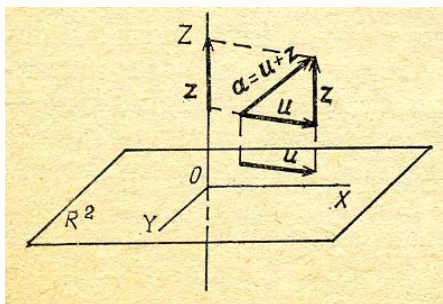


Рис. 12.1

Пример 13. В пространстве $\mathbf{R}^3$ выделим плоскость Оху (рис. 12.1). Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ линейное подпространство $\mathbf{R}^1$ векторов вида $z = (0, 0, z)$, направленных параллельно оси Z . Векторы на плоскости $\mathbf{R}^2$, имеют вид $u = (x, y, 0)$. Общим вектором пространств $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$ является, очевидно, нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Пусть $a = (x, y, z)$ - любой вектор из $\mathbf{R}^3$.

Тогда $a = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) = u + z$. Таким образом, $\mathbf{R}^3$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$.

Теорема 11.4. Для того чтобы пространство V являлось прямой суммой подпространств V_1 и V_2 , необходимо и достаточно, чтобы всякий элемент $x \in V$ единственным образом записывался в виде

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in V_1, \quad x^2 \in V_2.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $V_1 + V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = 0$. Предположим, что $x \in V$ имеет два представления $x = x^1 + x^2$ и $x = y^1 + y^2$. Отсюда $x^1 + x^2 = y^1 + y^2$ или $x^1 - y^1 = y^2 - x^2$. Левая часть принадлежит V_1 , а правая - V_2 . Поскольку общим у V_1 и V_2 является нуль, то $x^1 = y^1$, $x^2 = y^2$.

Достаточность. Если для любого $x \in V$ верно единственное разложение $x = x^1 + x^2$, то, по определению, $V = V_1 + V_2$. Покажем теперь, что единственным элементом, общим у V_1 и V_2 , является 0 . Действительно, если $a \in V_1 \cap V_2$ и $a \neq 0$, то для x имеем двоякое представление $x = x^1 + x^2$ и $x = (x^1 - a) + (x^2 + a)$, что противоречит единственности.

В общем случае будем говорить, что пространство V разлагается в прямую сумму подпространств $V_1, V_2, \dots, V_k$, если

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_k, \quad V_i \cap V_j = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k.$$

В этом случае $x \in V$ единственным образом представляется в виде

$$x = x^1 + x^2 + \dots + x^k, \quad x^i \in V_i, i = 1, 2, \dots, k.$$

Например, в пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим подпространства $\mathbf{R}_{x_1}^1, \mathbf{R}_{x_2}^1, \dots, \mathbf{R}_{x_n}^1$ порождаемые векторами вида $(x_1, 0, \dots, 0), (0, x_2, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, x_n)$ соответственно. Поскольку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n)$, то $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}_{x_1}^1 + \mathbf{R}_{x_2}^1 + \dots + \mathbf{R}_{x_n}^1$. Кроме того, $\mathbf{R}_{x_j}^1 \cap \mathbf{R}_{x_k}^1 = 0$, т.е. указанная сумма - прямая.

Теорема 11.5. Если пространство V представлено в виде прямой суммы пространств V_1 и V_2 , то $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Доказательство. Из соотношения $V = V_1 + V_2$ следует, что для любого $x \in V$ справедливо равенство $x = x^1 + x^2$, где $x^1 \in V_1$, $x^2 \in V_2$. Пусть $u^1, u^2, \dots, u^k$ - базис пространства V_1 ($\dim V_1 = k$) и $v^1, v^2, \dots, v^r$ - базис пространства V_2 ($\dim V_2 = r$). Тогда для x^1 и x^2 имеют место разложения $x^1 = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_k u^k$ и $x^2 = \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \dots + \beta_r v^r$. Поскольку $V_1 \cap V_2 = 0$, то векторы $u^1, u^2, \dots, u^k, v^1, v^2, \dots, v^r$ линейно-независимы (докажите это), и, значит, $x = x^1 + x^2 = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_k u^k + \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \dots + \beta_r v^r$.

Итак, векторы $u^1, u^2, \dots, u^k, v^1, v^2, \dots, v^r$ линейно-независимы и, согласно последнему равенству, порождают все пространство V . Значит, они образуют базис V и $\dim V = n = k + r$.

12. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение евклидова пространства. Линейное пространство V называется *евклидовым*, если каждой паре векторов x, y из V поставлено в соответствие действительное число (x, y) , называемое *скалярным произведением*, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$1^\circ. (x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in V;$$

$$2^\circ. (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in V;$$

(12.1)

3°. $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R};$

4°. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V; (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$

В дальнейшем, если не оговорено особо, будут рассматриваться евклидовы пространства конечной размерности n .

Приведем примеры конкретных евклидовых пространств.

Пример 1. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^3$ свободных векторов, в котором скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется как в § 2. Оно удовлетворяет аксиомам 1° - 4°. Поэтому $\mathbf{R}^3$ - евклидово пространство.

Пример 2. Пусть $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ - базис линейного пространства V . Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ этого пространства, заданных разложениями

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + \dots + x_n \mathbf{e}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}^1 + y_2 \mathbf{e}^2 + \dots + y_n \mathbf{e}^n = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

введем скалярное произведение по формуле

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

(12.2)

В частности, в линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ формула (12.2) также определяет скалярное произведение, превращая его тем самым в евклидово пространство $\mathbf{R}^n$.

Проверка справедливости аксиом 1° - 4° не представляет труда. Следовательно, линейное пространство V , а значит, и $\mathbf{R}^n$ со скалярным произведением (12.2) является евклидовым.

Из аксиом 2° и 3° скалярного произведения следует, что если $\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{y}^1 + \alpha_2 \mathbf{y}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{y}^n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - числа из $\mathbf{R}$, а $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ - векторы из V , то

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \alpha_1 \mathbf{y}^1 + \alpha_2 \mathbf{y}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{y}^n) = \alpha_1 (\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) + \alpha_2 (\mathbf{x}, \mathbf{y}^2) + \dots + \alpha_n (\mathbf{x}, \mathbf{y}^n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathbf{x}, \mathbf{y}^i) \quad (12.3)$$

Неравенство Коши - Буняковского. Покажем, что для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \cdot \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}$$

(12.4)

называемое *неравенством Коши - Буняковского*^{*}, причем знак равенства в нем имеет место только в том случае, если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно-зависимы.

В самом деле, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то неравенство (12.4) очевидно, поэтому будем считать, что $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим вектор $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$, где λ - любое действительное число. Поскольку $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq 0$, то имеем

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2 (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0.$$

(12.5)

При $\lambda = -(\mathbf{x}, \mathbf{y})/(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ из неравенства (1.86) получим

^{*} О. Коши (1798 – 1857) – французский математик; В.Я. Буняковский (1804 – 1889) – русский математик.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2 \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})^2} (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0$$

или

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \geq 0 \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

что равносильно неравенству (12.4).

Знак равенства в (12.4) возможен тогда и только тогда, когда $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\lambda \mathbf{y}$, т.е. когда векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно-зависимы.

Из определения скалярного произведения в $\mathbf{R}^n$ (формула (12.2)) следует, что в $\mathbf{R}^n$ неравенство Коши - Буняковского принимает вид

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

(12.6)

Норма вектора. Определим *норму* (или *длину*) *вектора* в евклидовом пространстве V равенством

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

(12.7)

которая в $\mathbf{R}^n$ имеет вид

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

(12.8)

Введенное таким образом понятие нормы вектора обобщает понятие длины вектора в пространстве $\mathbf{R}^3$.

Перечислим свойства нормы вектора, непосредственно вытекающие из ее определения:

$$1^\circ. \|\mathbf{x}\| \geq 0, \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$2^\circ. \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x} \in V.$$

$$\text{В самом деле, } \|\alpha \mathbf{x}\| = \sqrt{(\alpha \mathbf{x}, \alpha \mathbf{x})} = \sqrt{\alpha^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

3°. Норма удовлетворяет *неравенству треугольника* (неравенству Минковского*)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

(12.9)

Действительно, используя неравенство Коши - Буняковского, получаем

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

что равносильно неравенству (1.90).

Расстояние. *Расстоянием* между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства V назовем величину

* Г. Минковский (1864 – 1909) – немецкий математик.

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})}.$$

(12.10)

В пространстве $\mathbf{R}^n$ расстояние между $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, согласно равенствам (12.7) и (12.10), определяется равенством

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

(12.11)

Расстояние $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обладает следующими свойствами:

1°. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$; $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Действительно, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})} \geq 0$, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2°. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Это свойство вытекает из того, что $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

3°. Расстояние $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет неравенству треугольника

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V.$$

В самом деле, в силу свойства 3° нормы

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Угол между векторами. Ортогональность. Из неравенства Коши-Буняковского для ненулевых векторов получаем

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \Leftrightarrow -(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|) \leq (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|)$$

или

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Отсюда следует, что существует, и притом единственное, значение угла φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$, для которого

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

(12.12)

Назовем *углом между векторами* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства V угол φ , косинус которого определяется соотношением (12.12). Введенное понятие угла между векторами в пространстве обобщает понятие угла между векторами в $\mathbf{R}^3$.

Если $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ - базисные векторы пространства $\mathbf{R}^n$, то направляющие косинусы вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ определим соотношениями

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{e}^i) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{e}^i)}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{e}^i\|} = \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{e}^i)$ - угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{e}^i$ из $\mathbf{R}^n$.

Легко проверить, что $\sum_{i=1}^n \cos^2(\mathbf{x}, \mathbf{e}^i) = 1$.

Умножив ненулевой вектор $\mathbf{x}$ на число $1/\|\mathbf{x}\|$, получим вектор $\mathbf{x}^0$, длина которого равна единице, т. е.

$$\mathbf{x}^0 = \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x} = \left(\frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}\|}, \dots, \frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}\|} \right) = (\cos(\mathbf{x}, \mathbf{e}^1), \cos(\mathbf{x}, \mathbf{e}^2), \dots, \cos(\mathbf{x}, \mathbf{e}^n)) \right)$$

Отсюда следует, что координатами вектора единичной длины, как и в $\mathbf{R}^3$, служат направляющие косинусы этого вектора.

Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из V называются *ортгогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Как и в $\mathbf{R}^3$, считается, что нулевой вектор ортгогонален любому вектору $\mathbf{x}$ из V .

Из определения косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве следует, что для того, чтобы ненулевые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ были ортгогональны, необходимо и достаточно, чтобы $\cos \varphi = 0$. Введенное понятие ортгогональности в евклидовом пространстве соответствует обычному понятию перпендикулярности в $\mathbf{R}^3$.

Отметим, что ортгогональность векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в $\mathbf{R}^n$ равносильна выполнению равенства

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0.$$

Ортгогональный базис. Попарно-ортгогональные векторы в евклидовом пространстве V обладают одним важным свойством.

Покажем, что система попарно-ортгогональных векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$, не содержащая нулевого вектора, линейно-независима. Убедимся, что равенство $\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0}$ возможно лишь при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$. В самом деле, скалярно умножим обе части этого равенства на $\mathbf{x}^j, j = 1, 2, \dots, k$, и, учитывая, что $(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) = 0, i \neq j$, получим $(\alpha_j \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^j) = \alpha_j (\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^j) = 0, j = 1, 2, \dots, k$. Так как $(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^j) > 0$, то из последнего равенства имеем $\alpha_j = 0, j = 1, 2, \dots, k$.

Итак, попарно-ортгогональные ненулевые векторы линейно-независимы. Если их число равно n , где n - размерность пространства, то они образуют базис евклидова пространства, называемый *ортгогональным базисом*. Если же нормы векторов ортгогонального базиса равны единице, то базис называется *ортонормированным*.

Следовательно, базис из векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ называется ортонормированным, если

$$(\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^j) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 12.1. Во всяком n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ - произвольный базис пространства V . Положим $\mathbf{v}^1 = \mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^1\|} \cdot \mathbf{v}^1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^1\|} \cdot \mathbf{x}^1$. Пусть далее $\mathbf{v}^2 = \mathbf{x}^2 + \lambda_1 \mathbf{u}^1$,

где число λ_1 подберем так, чтобы векторы $\mathbf{v}^2$ и $\mathbf{u}^1$ были ортгогональны, т. е.

$$((\mathbf{v}^2, \mathbf{u}^1) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^1) + \lambda_1(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = 0).$$

Так как $\mathbf{u}^1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^1\|} \cdot \mathbf{x}^1, (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = 1$, то отсюда находим, что

$$\left(\frac{(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^1)}{\|\mathbf{x}^1\|} + \lambda_1 = 0 \right) \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^1)}{\|\mathbf{x}^1\|} = -(\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^1).$$

При этом значении λ_1 вектор $\mathbf{v}^2 = \mathbf{x}^2 - \frac{(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^1)}{\|\mathbf{x}^1\|} \mathbf{x}^1$ ортогонален $\mathbf{u}^1$. Нормируя

$\mathbf{v}^2$, получаем, что векторы $\mathbf{u}^2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^2\|} \mathbf{v}^2$ и $\mathbf{u}^1$ образуют ортонормированную пару.

Далее, полагая $\mathbf{v}^3 = \mathbf{x}^3 + \lambda_1 \mathbf{u}^1 + \lambda_2 \mathbf{u}^2$ и подбирая λ_1 и λ_2 так, чтобы выполнялись условия $\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^1$ и $\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^2$, с учетом ортогональности векторов $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$, получаем

$$(\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^1) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3 + \lambda_1 \mathbf{u}^1 + \lambda_2 \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^1) + \lambda_1 = 0);$$

$$(\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^2) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3 + \lambda_1 \mathbf{u}^1 + \lambda_2 \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^2) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^2) + \lambda_2 = 0),$$

откуда $\lambda_1 = -(\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^1); \lambda_2 = -(\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^2)$, т.е. $\mathbf{v}^3 = \mathbf{x}^3 - (\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^1) \mathbf{u}^1 - (\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^2) \mathbf{u}^2$.

Пронормировав $\mathbf{v}^3$, получим вектор $\mathbf{u}^3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^3\|} \mathbf{v}^3$, который вместе с $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$

образует систему трех ортонормированных векторов. Продолжив этот процесс, после n шагов получим n ортонормированных векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$, которые образуют ортонормированный базис.

Указанный в теореме 12.1 алгоритм построения ортонормированного базиса называется *процессом ортогонализации Грама - Шмидта**, который, учитывая его сложность, рассмотрим подробно.

Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ - произвольные линейно-независимые векторы. Тогда ортонормированная система векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ получается по следующей схеме:

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{x}^1$$

$$\mathbf{u}^1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^1\|} \mathbf{v}^1,$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^1) \mathbf{u}^1$$

$$\mathbf{u}^2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^2\|} \mathbf{v}^2,$$

$$\mathbf{v}^3 = \mathbf{x}^3 - (\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^1) \mathbf{u}^1 - (\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^2) \mathbf{u}^2$$

$$\mathbf{u}^3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^3\|} \mathbf{v}^3,$$

.....

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{x}^n - (\mathbf{x}^n, \mathbf{u}^1) \mathbf{u}^1 - (\mathbf{x}^n, \mathbf{u}^2) \mathbf{u}^2 - \dots - (\mathbf{x}^n, \mathbf{u}^{n-1}) \mathbf{u}^{n-1}$$

$$\mathbf{u}^n = \frac{1}{\|\mathbf{v}^n\|} \mathbf{v}^n.$$

Пример 3. Ортонормировать векторы $\mathbf{x}^1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{x}^2 = (-2, 1, 2)$ и $\mathbf{x}^3 = (1, -1, 0)$.

* И. Грам (1850 – 1916) – датский математик; Э. Шмидт (1876 – 1959) – немецкий математик.

Решение. По формулам (1.97) получаем $\mathbf{v}^1 = \mathbf{x}^1 = (1, 0, 0) = \mathbf{u}^1$, $\mathbf{v}^2 = (-2, 1, 2) - (-2)(1, 0, 0) = (0, 1, 2) \Rightarrow u^2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Далее, так как $(\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^1) = 1$, $(\mathbf{x}^3, \mathbf{u}^2) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, то $\mathbf{v}^3 = (1, -1$

$0) - (1, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(0, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \Rightarrow u^3 = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Легко увидеть, что полученные векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ ортонормированы.

Найдем выражение скалярного произведения в координатах для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, заданных в произвольном ортонормированном базисе евклидова пространства V .

Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ - ортонормированный базис пространства V и $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{u}^1 + x^2 \mathbf{u}^2 + \dots + x^n \mathbf{u}^n$ и $\mathbf{y} = y^1 \mathbf{u}^1 + y^2 \mathbf{u}^2 + \dots + y^n \mathbf{u}^n$ - векторы из V . Тогда в силу формул (1.84) и (1.96) получим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u^i, \sum_{j=1}^n y_j u^j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (u^i, u^j) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Итак, в ортонормированном базисе скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Выясним смысл координат произвольного вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе.

Теорема 12.2. Координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярному произведению этого вектора на соответствующие базисные векторы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ - ортонормированный базис и $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{u}^1 + x^2 \mathbf{u}^2 + \dots + x^n \mathbf{u}^n$ - произвольный вектор. Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\mathbf{u}^i$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}^i) = x_1 (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^i) + \dots + x_i (\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^i) + \dots + x_n (\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^i).$$

Отсюда получаем

$$x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{u}^i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как $\|\mathbf{u}^i\| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, то, как и в $\mathbf{R}^3$, скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^i) = x_i$ естественно назвать *проекцией вектора $\mathbf{x}$ на вектор $\mathbf{u}^i$* .

Таким образом, координаты вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе равны проекциям его на соответствующие базисные векторы.

Итак, формула

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}^i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{u}^i) \mathbf{u}^i$$

представляет собой разложение произвольного вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ евклидова пространства.

Ортогональное дополнение. Вектор $\mathbf{x}$ евклидова пространства V называется *ортогональным подпространству $L \subset V$* , если он ортогонален любому вектору из L , т. е.

$$(\mathbf{x} \perp L) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in L) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{y} \in L)$$

Если подпространство L порождено векторами $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ (является

линейной оболочкой этих векторов, т. е. $L = L(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n)$, то

$$(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}^i, i = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \perp L(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n)).$$

Последнее равенство в $\mathbf{R}^3$ выражает тот известный из элементарной геометрии факт, что вектор перпендикулярен к плоскости тогда и только тогда, когда он перпендикулярен к любым двум неколлинеарным векторам этой плоскости.

Два подпространства L и M пространства V называются *ортогональными*, если любой вектор подпространства L ортогонален любому вектору подпространства M , т. е.

$$(L \perp M) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \forall \mathbf{x} \in L, \forall \mathbf{y} \in M) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{x} \in L, \forall \mathbf{y} \in M)$$

Если при этом пространства L и M дополняют друг друга в V (т. е. $V = L + M$, $L \cap M = \mathbf{0}$), то M называется *ортогональным дополнением* к L и обозначается $M = L^\perp$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 12.3. Евклидово пространство V является прямой суммой подпространства L и его ортогонального дополнения, т. е.

$$(V = L + L^\perp) \Leftrightarrow ((\forall \mathbf{x} \in V) : \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \in L, \mathbf{z} \in L^\perp),$$

причем

$$n = \dim V = \dim L + \dim L^\perp.$$

Аффинное пространство. Координаты точки. Пусть имеется линейное пространство V и множество U элементов произвольной природы, называемых *точками* и обозначаемых прописными латинскими буквами, причем каждой упорядоченной паре точек M и N поставлен в соответствие единственный вектор $\mathbf{x} \in V$. При этом будем писать $\mathbf{x} = \overrightarrow{MN}$. Предполагается, что соответствие между точками и векторами обладает свойствами:

1°. Для каждой точки $M \in U$ и любого вектора $\mathbf{x} \in V$ существует единственная точка: $N \in U$, такая, что $\overrightarrow{MN} = \mathbf{x}$.

2°. Для любых трех точек $M, N, P \in U$ справедливо соотношение $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

3°. Для точек $M, N \in U$ справедливо соотношение $\overrightarrow{MN} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (M = N)$ (точки совпадают).

Множество U , удовлетворяющее условиям 1° - 3°, называется *аффинным пространством*, связанным с линейным пространством V .

Аффинное пространство называется n -мерным, если n -мерно соответствующее ему линейное пространство.

Теорема 12.4. Для любой точки $M \in U$ справедливо соотношение $\overrightarrow{MM} = \mathbf{0}$. Для любых двух точек $M, N \in U$ справедливо соотношение $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

Доказательство. Из аксиомы 2° при $N = M$ и $P = N$ следует $2 \cdot \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM} = \mathbf{0}$. Далее, из этой же аксиомы при $P = M$ получим $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

Пусть U - аффинное пространство. Выберем в нем какую-нибудь точку O и назовем ее *началом координат*. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ в силу

аксиомы 1° найдется единственная точка M , такая, что $OM = x$. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между всеми точками M из U и векторами $OM = x \in V$. Вектор $OM \in V$ называется *радиус-вектором* точки $M \in U$.

Пусть $e^1, e^2, \dots, e^n$ - некоторый базис пространства V и вектор $x = OM$ имеет в этом базисе координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти же координаты припишем и соответствующей вектору x точке M , и будем писать $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Итак, каждой точке n -мерного аффинного пространства в заданном базисе однозначно соответствует совокупность n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, называемых ее *координатами*.

Если $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $N = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ - две точки аффинного пространства U , то в силу аксиомы 2°

$$(OM + MN = ON) \Leftrightarrow (MN = ON - OM = (y_1 - x_1)e^1 + (y_2 - x_2)e^2 + \dots + (y_n - x_n)e^n),$$

т. е. координаты вектора MN равны разностям соответствующих координат его конца N и начала M :

$$MN = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) \quad (12.13)$$

Заметим, что если векторы пространства V назвать точками пространства U и каждой упорядоченной паре точек x и y из V поставить в соответствие вектор $y - x$, то, очевидно, линейное пространство V можно рассматривать как аффинное.

Расстоянием $\rho(M, N)$ между двумя точками M и N аффинного пространства называется длина вектора MN , т. е. $\rho(M, N) = \|MN\|$. В силу формулы (12.13)

$$\rho(M, N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2},$$

что для векторов x и y евклидова пространства совпадает с формулой (12.11).

Прямая и гиперплоскость в R^n . Будем говорить, что векторы a и b параллельны, если угол между ними равен 0 или π .

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Тогда, как и в случае пространства R^3 , легко получить, что

$$(a \parallel b) \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \right),$$

т. е. два вектора a и b в пространстве R^n параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ - вектор в R^n , а $Q = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ - некоторая точка в соответствующем аффинном пространстве R^n . Для любого $t \in R$ вектор ta параллелен a . В силу аксиомы 1° аффинного пространства найдется единственная точка $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, такая, что $QM = ta$. Это соотношение называется *векторным параметрическим уравнением прямой в пространстве R^n* , которое в координатной форме запишется следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_1^0 = ta_1; \\ x_2 - x_2^0 = ta_2; \\ \dots\dots\dots \\ x_n - x_n^0 = ta_n, t \in \mathbf{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1^0 + ta_1; \\ x_2 = x_2^0 + ta_2; \\ \dots\dots\dots \\ x_n - x_n^0 = ta_n, t \in \mathbf{R}. \end{array} \right. \quad (12.14)$$

Исключив параметр t из уравнений (12.14), получим *канонические уравнения прямой в пространстве $\mathbf{R}^n$* :

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}.$$

Совокупность всех векторов, проходящих через точку Q , ортогональных вектору $\mathbf{a}$, называется *гиперплоскостью H в $\mathbf{R}^n$* (плоскостью при $n = 3$).

Пусть $\mathbf{b}$ - произвольный вектор, ортогональный $\mathbf{a}$. По аксиоме 1° аффинного пространства существует единственная точка M , такая, что $\mathbf{b} = \mathbf{QM}$. Из условия ортогональности получаем $((\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{OM}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0$, где $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ - радиус-векторы точек M и Q соответственно.

Перепишем полученное равенство в координатной форме. Имеем

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0.$$

Это уравнение и есть искомое *уравнение гиперплоскости H* , которое при $n = 3$ превращается в уравнение плоскости $a_1(x - x^0) + a_2(y - y^0) + a_3(z - z^0) = 0$, проходящей через точку $Q = (x^0, y^0, z^0)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

13. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

Понятие линейного оператора. Пусть V и W - два линейных пространства. Отображение $\mathbf{A} : V \rightarrow W$, называется *линейным оператором*, если

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}^1 + \beta \mathbf{x}^2) = \alpha \mathbf{Ax}^1 + \beta \mathbf{Ax}^2, \quad \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \quad (13.1)$$

Из определения линейного оператора следует более общее соотношение, которому он удовлетворяет:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^n) &= \alpha_1 \mathbf{Ax}^1 + \alpha_2 \mathbf{Ax}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{Ax}^n, \\ \forall \mathbf{x}^i \in V, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Вектор $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ называется *образом вектора $\mathbf{x} \in V$* .

Оператор, который каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ ставит в соответствие нулевой вектор $\mathbf{0} \in W$, является, очевидно, линейным и называется *нулевым оператором*. Нулевой оператор обозначается символом $\mathbf{O}$. Таким образом, $\mathbf{Ox} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in V$.

Линейный оператор $\mathbf{A}$, для которого $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V$, называется *тождественным* и обозначается $\mathbf{E}$.

Оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий соотношению $\mathbf{Ax} = \alpha \mathbf{x}$ для некоторого фиксированного $\alpha \in \mathbf{R}$, называется *скалярным оператором* или *оператором*

подобия. При $\alpha = -1$ оператор $-\mathbf{A}$ называется противоположным оператору $\mathbf{A}$. Очевидно, при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ скалярный оператор превращается в нулевой и тождественный соответственно.

Областью значений линейного оператора $\mathbf{A} : V \rightarrow W$ называется множество векторов вида $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, и обозначается $\text{im } \mathbf{A}$.

Таким образом,

$$\text{im } \mathbf{A} = \{ \mathbf{y} \in W \mid \mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \forall \mathbf{x} \in V \}.$$

Ядром линейного оператора $\mathbf{A}$ называется множество $\ker \mathbf{A}$ всех $\mathbf{x} \in V$, для которых $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ (англ. kernel- ядро):

$$\ker \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in V \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \}.$$

Легко убедиться, что область значений $\text{im } \mathbf{A}$ (англ. image - образ) линейного оператора $\mathbf{A} : V \rightarrow W$ является подпространством пространства W , а ядро $\ker \mathbf{A}$ - подпространством пространства V . В самом деле, если $\mathbf{y}^1 = \mathbf{Ax}^1$ и $\mathbf{y}^2 = \mathbf{Ax}^2$, то в силу формулы (13.1) вектор $\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2) = \alpha_1 \mathbf{y}^1 + \alpha_2 \mathbf{y}^2$ принадлежит, очевидно, $\text{im } \mathbf{A}$. Аналогично показывается, что $\ker \mathbf{A}$ - подпространство пространства V .

Размерность области значений $\text{im } \mathbf{A}$ линейного оператора называется *рангом оператора* и обозначается $\dim(\text{im } \mathbf{A})$, а размерность ядра $\ker \mathbf{A}$ называется *дефектом оператора* и обозначается $\dim(\ker \mathbf{A})$.

Матрица линейного оператора в заданном базисе. Пусть V - линейное пространство с базисом $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$, а $\mathbf{A}$ - линейный оператор, действующий из V в линейное пространство W размерности m , базисом которого служат векторы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^m$. Тогда любой вектор $\mathbf{x} \in V$ представим в виде $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}^1 + x_2 \mathbf{u}^2 + \dots + x_n \mathbf{u}^n$. В силу линейности оператора $\mathbf{A}$ получаем

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A} \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{u}^j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{A} \mathbf{u}^j. \quad (13.2)$$

Векторы $\mathbf{A} \mathbf{u}^i \in W$, $j = 1, 2, \dots, n$, однозначно разлагаются по векторам базиса пространства W :

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^i = a_{1j} \mathbf{v}^1 + a_{2j} \mathbf{v}^2 + \dots + a_{mj} \mathbf{v}^m = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{v}^i, \quad (13.3)$$

где $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ - координаты векторов $\mathbf{A} \mathbf{u}^i \in W$. Так как вектор $\mathbf{Ax}$ тоже принадлежит W , то аналогично

$$\mathbf{Ax} = y_1 \mathbf{v}^1 + y_2 \mathbf{v}^2 + \dots + y_m \mathbf{v}^m = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{v}^i, \quad (13.4)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_m$ - координаты вектора $\mathbf{Ax} \in W$. Из формул (13.2) - (13.4) получаем

$$\sum_{i=1}^m y_i \mathbf{v}^i = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{v}^i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{v}^i,$$

откуда, приравняв координаты при соответствующих векторах $\mathbf{v}^i$, $i = 1, 2, \dots, m$, получим систему из m равенств вида

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned} \right\}$$

Эти равенства представляют собой формулы для вычисления координат $y_1, y_2, \dots, y_m$ вектора $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ при линейном отображении $\mathbf{A} : V \rightarrow W$ через координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ вектора $\mathbf{x} \in V$.

Из данных равенств следует, что при заданных базисах $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ в пространстве V и $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^m$ в пространстве W линейный оператор $\mathbf{A} : V \rightarrow W$ полностью определяется матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (13.5)$$

которая называется *матрицей линейного оператора $\mathbf{A}$* в выбранных базисах.

Столбцами матрицы A , как следует из равенств (13.3) и (13.5), служат координаты векторов $\mathbf{A}\mathbf{u}^1, \mathbf{A}\mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{u}^n$ в базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^m$ пространства W . Строки этой матрицы образуют коэффициенты разложения координат вектора $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ по координатам вектора $\mathbf{x}$. В силу единственности разложений векторов по базису матрица A линейного оператора $\mathbf{A}$ при фиксированных базисах пространств V и W определяется однозначно. Поскольку умножение матрицы на вектор обладает линейными свойствами, то любую прямоугольную матрицу можно рассматривать как матрицу некоторого линейного оператора.

Таким образом, между множествами матриц и линейных операторов устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

В силу этого соответствия операторы и их матрицы будем обозначать одними и теми же буквами, т. е. если $\mathbf{A}$ -оператор, то A - его матрица.

Таким образом, равенство $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ в координатной форме имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (13.6)$$

Еще раз отметим, что формула (13.6) устанавливает связь между координатами вектора $\mathbf{x} \in V$ и координатами его образа $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in W$.

Из равенства (13.6) следует, что область значений $\text{im } \mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$ совпадает с линейной оболочкой L , порожденной векторами-столбцами матрицы A . Следовательно, ранг линейного оператора равен числу линейно-независимых векторов-столбцов его матрицы.

Если пространство W совпадает с пространством V , то матрица линейного оператора $\mathbf{A} : V \rightarrow V$ (очевидно, квадратная порядка n) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

в некотором выбранном базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$. Столбцами ее являются координаты векторов $A\mathbf{u}^j, j = 1, 2, \dots, n$, в этом базисе.

Примеры линейных операторов и их матриц. Если $A: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ или $A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ - линейные операторы, действующие в пространствах $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$, то их матрицы имеют вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

соответственно. Эти операторы переводят векторы из $\mathbf{R}^2$ в векторы из $\mathbf{R}^2$ или векторы из $\mathbf{R}^3$ в векторы того же пространства $\mathbf{R}^3$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть A - оператор подобия, отображающий вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ в некоторый параллельный ему вектор $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$. Линейность этого оператора очевидна.

Если $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - базис пространства $\mathbf{R}^3$, то

$$A\mathbf{i} = \alpha \mathbf{i} = \alpha \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (\alpha, 0, 0)^T;$$

$$A\mathbf{j} = \alpha \mathbf{j} = 0\mathbf{i} + \alpha \mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0, \alpha, 0)^T;$$

$$A\mathbf{k} = \alpha \mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \alpha \mathbf{k} = (0, 0, \alpha)^T,$$

и, значит, матрица этого оператора

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

При $\alpha \neq 0$ областью значений оператора подобия является, очевидно, все пространство $\mathbf{R}^3$, а ядром - нулевой вектор, так как только этот вектор удовлетворяет при преобразовании подобия равенству $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ясно, что ранг оператора подобия $\dim(\text{im } A) = 3$, а его дефект $\dim(\ker A) = 0$.

Пример 2. Пусть A - поворот векторов плоскости $\mathbf{R}^2$ вокруг начала координат на угол φ против часовой стрелки. Это преобразование линейно, так как если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сложить и затем повернуть их сумму $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ на угол φ , то получим тот же результат, если оба вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ повернуть сначала на угол φ , а затем их сложить. Аналогично, не имеет значения, умножить ли вектор $\mathbf{a}$

на число α , а затем повернуть его на угол φ , или сделать это в обратном порядке.

Найдем матрицу оператора поворота. Для этого обратимся к рис. 1.30, из которого видно, что

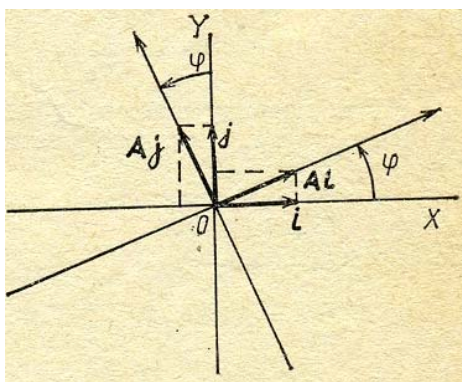


Рис. 1.30

$$A\mathbf{i} = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \mathbf{j} = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j};$$

$$A\mathbf{j} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j} = -\sin \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j},$$

так что искомая матрица оператора поворота в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Используя матрицу оператора, получим формулы преобразования координат вектора на плоскости при повороте ее на угол φ - так называемые *формулы преобразования поворота*. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ - вектор на плоскости, тогда координаты y_1, y_2 вектора $A\mathbf{x}$ при повороте плоскости на угол φ определяются из соотношений

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \cos \varphi \cdot x_1 - \sin \varphi \cdot x_2; \\ y_2 = \sin \varphi \cdot x_1 + \cos \varphi \cdot x_2. \end{cases}$$

Ясно, что областью значений оператора поворота является вся плоскость $\mathbf{R}^2$, а ядром - нулевой вектор, т. е. $\dim(\operatorname{im} A) = 2, \dim(\ker A) = 0$.

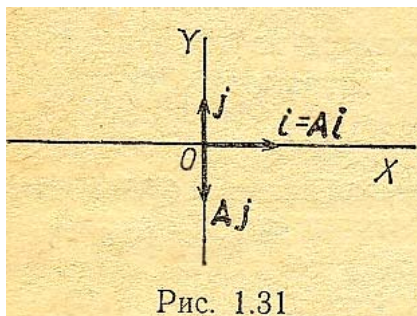


Рис. 1.31

Пример 3. Пусть A - зеркальное отражение (симметрия) векторов плоскости $\mathbf{R}^2$ относительно оси X . Линейность такого преобразования очевидна, Из рис. 1.31 следует, что $A\mathbf{i} = \mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$, $A\mathbf{j} = -\mathbf{j} = 0 \cdot \mathbf{i} - 1 \cdot \mathbf{j}$, поэтому матрица данного оператора есть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Пусть A - зеркальное отражение векторов пространства $\mathbf{R}^3$ относительно плоскости XU . При этом $A\mathbf{i} = \mathbf{i}$, $A\mathbf{j} = \mathbf{j}$, $A\mathbf{k} = -\mathbf{k}$, так что матрица искомого оператора имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{im} A = \mathbf{R}^3$, а $\ker A = \{0\}$.

Пример 5. Пусть A - ортогональное проектирование векторов пространства $\mathbf{R}^3$ на плоскость XU . Линейность этого отображения следует из линейных свойств проекций векторов. Так как при этом имеем $A\mathbf{i} = \mathbf{i}$, $A\mathbf{j} = \mathbf{j}$, $A\mathbf{k} = \mathbf{0}$, то матрица данного оператора

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, в этом случае областью значений оператора является плоскость XU , а ядром его служат все векторы, перпендикулярные к этой плоскости, так что $\dim(\operatorname{im} A) = 2, \dim(\ker A) = 1$.

Пример 6. Пусть $A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ - линейный оператор, для которого $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$,

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$.

Решение. Согласно условию, матрица A имеет две строки и три столбца:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

По определению,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

так что

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Действия над линейными операторами. В множестве линейных операторов, действующих из V в W , определим операции суммы операторов и умножения оператора на число.

Суммой линейных операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, определяемый равенством $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

Произведением линейного оператора $\mathbf{A}$ на число α называется оператор $\alpha \mathbf{A}$, определяемый равенством $(\alpha \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

Линейность операторов $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\alpha \mathbf{A}$ очевидна.

Операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, действующие из V в W в заданных базисах, имеют матрицы A и B одинаковых размеров. Учитывая равенство (13.6), получаем матричные равенства $(A + B)(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$; $(\alpha A)(\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x})$ для суммы операторов и произведения оператора на число, т. е. *матрицей суммы операторов является сумма матриц этих операторов, а матрицей произведения оператора на число является произведение матрицы оператора на это число.*

Пусть U , V и W - три линейных пространства размерностей k , n и m соответственно. Произведением или композицией двух линейных операторов $\mathbf{A} : V \rightarrow W$ и $\mathbf{B} : U \rightarrow V$ - называется оператор $\mathbf{C} : U \rightarrow W$, обозначаемый $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, такой, что

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{AB})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in U.$$

Таким образом, произведение операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ состоит в последовательном выполнении преобразований $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$, т. е. сначала на вектор $\mathbf{x}$ действует оператор $\mathbf{B}$, а затем на полученный результат действует оператор $\mathbf{A}$.

Линейность оператора $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ вытекает из следующего равенства:

$$\mathbf{C}(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2) = (\mathbf{AB})(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2) = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2)] = \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{B}\mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{B}\mathbf{x}^2) = \alpha_1 \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}^1) + \alpha_2 \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}^2) = \alpha_1 (\mathbf{AB})\mathbf{x}^1 + \alpha_2 (\mathbf{AB})\mathbf{x}^2 = \alpha_1 \mathbf{C}\mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{C}\mathbf{x}^2.$$

Покажем, что *матрица произведения линейных операторов равна произведению матриц этих операторов.* В самом деле, пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^k$ -

базис пространства U , $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ - базис пространства V , $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \dots, \mathbf{w}^m$ - базис пространства W . Тогда, согласно равенству (13.3),

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})\mathbf{u}^j &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u}^j) = \mathbf{A}\left(\sum_{s=1}^n b_{sj} \mathbf{v}^s\right) = \sum_{s=1}^n b_{sj} \mathbf{A}\mathbf{v}^s = \sum_{s=1}^n b_{sj} \sum_{i=1}^m a_{is} \mathbf{w}^i = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{s=1}^n b_{sj} a_{is}\right) \mathbf{w}^i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}\right) \mathbf{w}^i, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость сформулированного выше утверждения.

Заметим, что, вообще говоря, как и для матриц, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Пример 7. Из геометрических соображений ясно, что последовательное выполнение двух поворотов плоскости $\mathbf{R}^2$ на углы φ и ψ равносильно одному повороту ее на угол $\varphi + \psi$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - операторы поворота на угол φ и ψ соответственно, а

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \text{ и } B = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} -$$

их матрицы. Тогда поворот на угол $\varphi + \psi$ осуществляет оператор с матрицей

$$AB = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{bmatrix},$$

откуда следует, что результирующий поворот осуществлен на угол $\varphi + \psi$.

Справедливы следующие свойства линейных операторов:

- 1°. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
- 2°. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
- 3°. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$.
- 4°. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
- 5°. $\alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta) \mathbf{A}$.
- 6°. $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}$, $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$.
- 7°. $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha \mathbf{A}) \mathbf{B}$.
- 8°. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
- 9°. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.
- 10°. $(\mathbf{AB}) \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Справедливость свойств 1° - 6° очевидна. Докажем свойство 10°. Действительно, по определению произведения линейных операторов:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(\mathbf{BC})](\mathbf{x}) &= \mathbf{A}[(\mathbf{BC})\mathbf{x}] = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{Cx})]; \\ [(\mathbf{AB})\mathbf{C}](\mathbf{x}) &= (\mathbf{AB})(\mathbf{Cx}) = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{Cx})], \end{aligned}$$

откуда и следует справедливость свойства 10°.

Свойства 7° - 9° доказываются аналогично.

Обратный оператор. Линейный оператор $\mathbf{A}$ называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т. е. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, в противном случае оператор называется *вырожденным*, т. е. для вырожденного оператора равенство $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ возможно и при некотором $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Оператор проектирования примера 5, очевидно, является вырожденным, так как он переводит ненулевые векторы, ортогональные плоскости XU , в нулевой вектор.

Невырожденными являются, например, операторы подобия и поворота.

Из определения невырожденного оператора следует, что его дефект равен нулю, т. е. $\dim (\ker \mathbf{A}) = 0$.

Важнейшим свойством невырожденного оператора является взаимная однозначность отображения. Итак, если $\mathbf{A}$ - невырожденный оператор, то для каждого $\mathbf{y} \in W$ существует единственный $\mathbf{x} \in V$, такой, что $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Оператор, определяющий вектор $\mathbf{x}$ для данного $\mathbf{y}$ из соотношения $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, называется *обратным* оператору $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Таким образом, исходя из определения обратного оператора имеем

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Аналогично

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{y} \in W.$$

Из этих равенств видно, что

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}, \quad (13.7)$$

где $\mathbf{E}$ – тождественный оператор.

Докажем линейность обратного оператора. Пусть $\mathbf{y}^1$ и $\mathbf{y}^2$ – произвольные векторы из W и $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ – отвечающие им единственные векторы из V , для которых $\mathbf{y}^1 = \mathbf{A}\mathbf{x}^1$, $\mathbf{y}^2 = \mathbf{A}\mathbf{x}^2$. Тогда, учитывая линейность оператора $\mathbf{A}$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\alpha_1 \mathbf{y}^1 + \alpha_2 \mathbf{y}^2) &= \mathbf{A}^{-1}(\alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{x}^2) = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2)] = \\ &= (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2) = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 = \alpha_1 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}^1 + \alpha_2 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что если линейные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ невырожденные, то и их произведение $\mathbf{AB}$ является невырожденным оператором, обратным для которого служит $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, т. е.

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Это следует из равенства

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})] = \mathbf{A}[(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1}] = \mathbf{AE}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ – фиксированный базис пространства V . Тогда в этом базисе линейным операторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ соответствуют единственные квадратные матрицы A и A^{-1} порядка n , которые, согласно равенствам (13.7), удовлетворяют соотношению

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица порядка n .

Матрица A^{-1} , определенная равенством выше, является очевидно *обратной* для матрицы A .

14. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сопряженные операторы и их матрицы. Изучим дополнительные свойства линейных операторов, связанные с понятием ортогональности в евклидовом пространстве. Вначале докажем следующее утверждение: если $\mathbf{A}$ и

B - линейные операторы, действующие в n -мерном евклидовом пространстве V , и $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, то $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

В самом деле, положив в равенстве $((\mathbf{x}, (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{y}) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y}))$ вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{y}$, получим $((\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{y}, (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{y}) = \|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{y}\|^2 = 0$, $\forall \mathbf{y} \in V$, что равносильно равенству $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{y} \in V$, т. е. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Введем следующее определение. Линейный оператор $\mathbf{A}^*$ называется сопряженным оператору $\mathbf{A}$, если

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \quad (14.1)$$

Естественно возникает вопрос: существует ли для данного оператора $\mathbf{A}$ сопряженный?

Теорема 14.1. Каждый линейный оператор $\mathbf{A}$ имеет единственный сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$.

Доказательство. Выберем в пространстве V ортонормированный базис $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$. Каждому линейному оператору $\mathbf{A} : V \rightarrow V$ в этом базисе отвечает матрица $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Пусть A^T - матрица, транспонированная к A . Ей соответствует линейный оператор $\mathbf{B}$. Тогда

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i) = (a_{1j}\mathbf{u}^1 + a_{2j}\mathbf{u}^2 + \dots + a_{nj}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^i) = a_{ij},$$

и

$$(\mathbf{u}^j, \mathbf{B}\mathbf{u}^i) = (\mathbf{u}^j, a_{1i}\mathbf{u}^1 + a_{2i}\mathbf{u}^2 + \dots + a_{ni}\mathbf{u}^n) = a_{ij},$$

откуда

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i) = (\mathbf{u}^j, \mathbf{B}\mathbf{u}^i). \quad (14.2)$$

Пусть далее $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \dots + x_n\mathbf{u}^n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}^1 + y_2\mathbf{u}^2 + \dots + y_n\mathbf{u}^n$ - любые два вектора из V . Рассмотрим скалярные произведения $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y})$:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(A \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{u}^j, \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{u}^i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i (\mathbf{A}\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i),$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y}) = \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{u}^j, B \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{u}^i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i (\mathbf{u}^j, \mathbf{B}\mathbf{u}^i).$$

Сравнивая эти выражения с учетом равенства (14.2) и отмеченного выше свойства, получаем равенство $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, т. е. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$.

Таким образом, доказано, что для каждого линейного оператора $\mathbf{A}$ в конечномерном евклидовом пространстве существует сопряженный ему оператор $\mathbf{A}^*$, матрица которого в любом ортонормированном базисе является транспонированной к матрице оператора $\mathbf{A}$. Единственность оператора $\mathbf{A}^*$ следует из определения сопряженного оператора и доказанного выше утверждения.

Легко убедиться в том, что оператор $\mathbf{A}^*$, сопряженный линейному оператору $\mathbf{A}$, линейным.

Итак, оператор $\mathbf{A}^*$ линеен и ему соответствует матрица A^T . Поэтому соответствующее формуле (14.1) матричное соотношение имеет вид

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^T \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \quad (14.3)$$

Сопряженные операторы обладают следующими свойствами:

- 1°. $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$.
- 2°. $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.
- 3°. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$.
- 4°. $(\alpha \mathbf{A})^* = \alpha \cdot \mathbf{A}^*$.
- 5°. $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$.
- 6°. $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$.

Справедливость свойств 1° - 6° вытекает из свойств транспонирования матриц.

Убедимся в справедливости свойства 6°. Пусть $\mathbf{A}^{-1}$ существует. Тогда из равенства $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ и свойств 1°, 5° вытекает, что $(\mathbf{AA}^{-1})^* = (\mathbf{A}^{-1})^* \mathbf{A}^* = \mathbf{E}^* = \mathbf{E}$, т. е. что $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$. Отсюда получаем еще одно важное свойство транспонирования матриц:

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (14.4)$$

Пример 1. Пусть $\mathbf{A}$ - поворот евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$ на угол φ с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

в ортонормированном базисе. Тогда матрицей сопряженного оператора в этом базисе является

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbf{A}^*$ - поворот плоскости на угол φ в противоположном направлении.

Самосопряженные операторы и симметричные матрицы. Линейный оператор $\mathbf{A}$ называется *самосопряженным*, если $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, т. е. если

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \quad (14.5)$$

Из этого определения и теоремы 14.1 следует, что в ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора совпадает со своей транспонированной: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, т. е. - *матрицей самосопряженного оператора является симметричная матрица*.

Из свойств сопряженных операторов следует, что линейные операции над самосопряженными операторами приводят к самосопряженным операторам, а тождественный оператор $\mathbf{E}$ самосопряжен.

Примерами самосопряженных операторов могут служить, очевидно, операторы проектирования, зеркального отражения, подобия, так как матрицы их симметричны.

Ортогональный оператор и его матрица. В евклидовом пространстве важную роль играют ортогональные операторы.

Линейный оператор $\mathbf{A}$, действующий в действительном n -мерном евклидовом пространстве V , называется *ортогональным*, если

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \quad (14.6)$$

Таким образом, *ортогональный оператор сохраняет скалярное*

произведение, а значит, он сохраняет длины векторов и углы между ними. В частности, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ - ортогональные векторы, то и $\mathbf{Ax}$ и $\mathbf{Ay}$ - тоже ортогональные векторы.

Отсюда можно сделать вывод, что если $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ - ортонормированный базис евклидова пространства V , то и $\mathbf{Au}^1, \mathbf{Au}^2, \dots, \mathbf{Au}^n$ тоже является ортонормированным базисом.

Верно и обратное: линейный оператор $\mathbf{A}$, переводящий один ортонормированный базис в другой ортонормированный базис, ортогонален. Действительно, пусть ортонормированный базис $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ оператором $\mathbf{A}$ переводится в ортонормированный базис $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$, т. е. $\mathbf{Au}^i = \mathbf{v}^i, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда если $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \dots + x_n\mathbf{u}^n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}^1 + y_2\mathbf{u}^2 + \dots + y_n\mathbf{u}^n$, то $\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{Au}^1 + x_2\mathbf{Au}^2 + \dots + x_n\mathbf{Au}^n = x_1\mathbf{v}^1 + x_2\mathbf{v}^2 + \dots + x_n\mathbf{v}^n$, и аналогично $\mathbf{Ay} = y_1\mathbf{v}^1 + y_2\mathbf{v}^2 + \dots + y_n\mathbf{v}^n$. Отсюда $(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, так как в ортонормированном базисе скалярное произведение равно сумме произведений их одноименных координат.

Пусть $\mathbf{A}$ - ортогональный оператор и $\mathbf{A}^*$ - ему сопряженный. Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{Ay})) = (\mathbf{x}, (\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Значит, $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Аналогично можно убедиться, что и $\mathbf{AA}^* = \mathbf{E}$.

Таким образом, для ортогонального оператора имеет место равенство

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^* = \mathbf{E}. \quad (14.7)$$

Следовательно, если $\mathbf{A}$ - ортогональный оператор, то сопряженный ему оператор $\mathbf{A}^*$ удовлетворяет равенству

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1} \quad (14.8)$$

Равенство (14.8) является необходимым и достаточным условием того, чтобы оператор $\mathbf{A}$ был ортогональным. Отсюда, в частности, следует, что ортогональный оператор всегда невырожден.

Перечислим простейшие свойства ортогонального оператора.

1°. Тожественный оператор $\mathbf{E}$ является ортогональным, так как из равенства $\mathbf{Ex} = \mathbf{x}$ и $\mathbf{Ey} = \mathbf{y}$ следует равенство $(\mathbf{Ex}, \mathbf{Ey}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

2°. Произведение ортогональных операторов является ортогональным оператором. Это следует из равенств

$$(\mathbf{ABx}, \mathbf{ABy}) = (\mathbf{A}(\mathbf{Bx}), \mathbf{A}(\mathbf{By})) = (\mathbf{Bx}, \mathbf{By}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - ортогональные операторы.

3°. Оператор, обратный ортогональному, является ортогональным оператором. В самом деле, если $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$, то в силу свойства 6° сопряженных операторов $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Другими словами, свойство 3° означает, что оператор $\mathbf{A}$ переводит произвольный ортонормированный базис $\mathbf{u}^i, i = 1, 2, \dots, n$, в ортонормированный базис $\mathbf{Au}^i, i = 1, 2, \dots, n$, а оператор $\mathbf{A}^{-1}$ восстанавливает исходный ортонормированный базис.

4°. Если $\mathbf{A}$ - ортогональный оператор, то произведение $\alpha \mathbf{A}$ будет ортогональным в том и только в том случае, если $\alpha = \pm 1$. Это следует из равенства $((\alpha \mathbf{A})\mathbf{x}, (\alpha \mathbf{A})\mathbf{y}) = \alpha^2 (\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = \alpha^2 (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Выясним теперь структуру матрицы $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ортогонального оператора $\mathbf{A}$ в некотором нормированном базисе. Очевидно, соответствующие условиям (14.7) и (14.8) матричные равенства имеют вид

$$A^T A = A A^T = E; \quad (14.9)$$

$$A^T = A^{-1} \quad (14.10)$$

Матрица A , для которой справедливо равенство (14.10), называется *ортогональной матрицей*.

Из матричного равенства (14.9) с учетом правила умножения матриц получаем

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = 0, i \neq j;$$

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

и

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = 0, i \neq j;$$

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

Таким образом, столбцы (строки) ортогональной матрицы, рассматриваемые как векторы-столбцы (векторы-строки), сами образуют ортонормированную систему.

Итак, в любом ортонормированном базисе матрица ортогонального преобразования является ортогональной.

Пример 2. Матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

является, очевидно, ортогональной, так как для ее элементов условия ортогональности выполнены. .

В заключение выясним геометрический смысл ортогонального оператора в $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$.

В случае пространства $\mathbf{R}^1$ базисный вектор $\mathbf{e}$ ортогональным оператором $\mathbf{A}$ переводится в вектор $\mathbf{Ae} \in \mathbf{R}^1$. Следовательно, $\mathbf{Ae} = \lambda \mathbf{e}$, где $\lambda = \pm 1$, т. е. $\mathbf{Ae} = \pm \mathbf{e}$. А это означает, что $\mathbf{A}$ либо тождественный оператор ($\mathbf{Ae} = \mathbf{e}$), либо центральная симметрия ($\mathbf{Ae} = -\mathbf{e}$).

В пространстве $\mathbf{R}^2$ каждый ортогональный оператор в некотором ортонормированном базисе определяется ортогональной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Тогда $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$; $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$; $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. Первые два равенства означают, что найдутся такие φ и ψ , что $a_{11} = \cos \varphi$; $a_{21} = \sin \varphi$; $a_{12} = \cos \psi$ и $a_{22} = \sin \psi$, а из третьего получаем, что $\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = \cos (\varphi - \psi) = 0$, откуда вытекает:

$$1) \psi - \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ или } 2) \psi - \varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

В первом случае $a_{12} = \cos \psi = -\sin \varphi$; $a_{22} = \sin \psi = \cos \varphi$, и тогда

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = A_1,$$

т. е. A_1 - поворот на угол φ вокруг начала координат (тождественный оператор при $\varphi = 0$ и центральная симметрия относительно начала координат при $\varphi = \pi$).

Во втором случае $a_{12} = \sin \varphi$, $a_{22} = -\cos \varphi$ и

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} = A_2,$$

Нетрудно видеть, что матрицу A_2 можно представить в виде произведения двух матриц, т. е.

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Здесь левая матрица в правой части равенства - матрица поворота плоскости на угол φ , а вторая - матрица, зеркального отражения относительно оси X . Таким образом, матрица A_2 есть матрица оператора, осуществляющего зеркальное отражение векторов относительно оси X с последующим поворотом их на угол φ вокруг начала координат.

15. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов в конечномерном пространстве. Пусть A - линейный оператор, действующий в $\mathbf{R}^n$. Всякий ненулевой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ называется *собственным вектором оператора A (матрицы A)*, если оператор A переводит вектор $\mathbf{x}$ в коллинеарный:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (15.1)$$

Число λ при этом называется *собственным значением оператора A (матрицы A)*, соответствующим собственному вектору $\mathbf{x}$.

Отметим, что если оператор A невырожден, то все его собственные значения отличны от нуля.

В самом деле, если некоторое собственное значение $\lambda = 0$, то из условия (15.1) получим $A\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = 0$, откуда в силу невырожденности оператора A следует, что собственный его вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Это противоречит определению собственного вектора. Значит, $\lambda \neq 0$.

Укажем некоторые свойства собственных векторов.

Пусть для оператора A существует обратный A^{-1} . Умножая равенства (15.1) слева на A^{-1} , получаем

$$(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda \mathbf{x})) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x},$$

т. е. λ^{-1} является собственным значением оператора $\mathbf{A}^{-1}$ с тем же собственным вектором $\mathbf{x}$.

Умножая равенство (15.1) слева на $\mathbf{A}$, получим $\mathbf{A}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}$ или $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$, т.е. λ^2 – собственное значение оператора $\mathbf{A}^2$ с тем же собственным вектором $\mathbf{x}$. Аналогично доказываем, что $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, где $k \in \mathbb{N}$.

Множество всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром*.

Следующие свойства собственных векторов сформулируем в виде теоремы.

Теорема 15.1. Собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$, соответствующие попарно-различным собственным значениям, линейно-независимы.

Доказательство. Теорему докажем индукцией по числу k . Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$ – собственные векторы, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – соответствующие им попарно-различные собственные значения линейного оператора $\mathbf{A}$.

Очевидно, при $k = 1$ теорема верна. Допустим, что теорема верна для всяких $k - 1$ собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, и покажем, что она останется верной и для любых k собственных векторов.

Предположим противное, т. е. допустим, что k собственных векторов линейно-зависимы. Следовательно, справедливо равенство

$$\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0},$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Подействуем оператором $\mathbf{A}$ на векторы, стоящие в обеих частях этого равенства, и получим

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_k \lambda_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0}.$$

Умножая первое равенство на λ_k и вычитая из второго, находим

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{x}^1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{x}^{k-1} = \mathbf{0},$$

откуда по предположению индукции все коэффициенты должны быть равны нулю, в том числе и $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k)$, что противоречит условиям $\alpha_1 \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_k$. Значит, наше предположение неверно, и векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$ линейно-независимы.

Следствие. В пространстве $\mathbf{R}^n$ линейный оператор $\mathbf{A}$ не может иметь более n собственных векторов с различными собственными значениями (так как в $\mathbf{R}^n$ всякие $n + 1$ векторов линейно-зависимы).

Теорема 15.2. Все собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$, отвечающие собственному значению λ , образуют подпространство данного линейного пространства.

Доказательство. В самом деле, если $\mathbf{Ax}^1 = \lambda_1 \mathbf{x}^1$ и $\mathbf{Ax}^2 = \lambda_2 \mathbf{x}^2$, то

$$\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2) = \alpha_1 \mathbf{Ax}^1 + \alpha_2 \mathbf{Ax}^2 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}^2 = \lambda (\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2),$$

что и доказывает теорему.

Таким образом, если $\mathbf{x}$ – собственный вектор оператора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ , то и всякий вектор $\alpha \mathbf{x}$, где $\alpha \neq 0$, тоже

является собственным вектором этого оператора, соответствующим собственному значению λ . Число α всегда можно выбрать таким, что $\|\alpha \mathbf{x}\| = 1$, т.е. $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$. Собственный вектор, для которого $\|\mathbf{x}\| = 1$, называется *нормированным*.

Характеристическое уравнение матрицы. Рассмотрим, как найти координаты собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, заданного своей матрицей A в некотором базисе $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ пространства $\mathbf{R}^n$.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_n)^T$ является собственным вектором оператора $\mathbf{A}$, соответствующим собственному значению λ . Тогда соотношение (15.1) в матричной форме переписывается в виде

$$(A - \lambda E) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

где E - единичная матрица. Если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

матрица оператора $\mathbf{A}$, то последнее равенство соответствует однородной системе n уравнений

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

относительно n величин x_1, x_2, x_n - координат собственного вектора $\mathbf{x}$. Нас интересуют только нетривиальные решения этой системы, так как вектор $\mathbf{x}$ должен быть отличен от нуля. Это возможно тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы (15.2) меньше числа неизвестных, что равносильно равенству нулю определителя матрицы этой системы, т.е.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (15.3)$$

Равенство (15.3) называется *характеристическим уравнением матрицы A* . Оно выражает условие, которому должны удовлетворять все собственные значения матрицы A . Левая часть характеристического уравнения (15.3) представляет собой многочлен степени n , называемый *характеристическим многочленом матрицы A* . Всякому его корню λ_0 отвечает собственный вектор, координаты которого определяются из системы (15.3) после подстановки в нее вместо λ величины λ_0 .

Приведем примеры нахождения собственных векторов и соответствующих собственных значений для некоторых операторов.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1) \times \\ \times (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$$

При $\lambda_1 = 1$, согласно системе (1.197), получаем систему

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -2 & 3 \\ 1 & 1-1 & 1 \\ 1 & 3 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим, что $x_1 = -x_3$ и $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 = x_3$.

Таким образом, числу λ_1 соответствует вектор $(x_1, x_2, x_3)^T = (-x_3, x_3, x_3)^T = x_3(-1, 1, 1)$, где x_3 - произвольное действительное число. В частности, при $x_3 = 1$ получим собственный вектор $(-1, 1, 1)^T$.

Аналогично для $\lambda_2 = -2$ имеем

$$\begin{bmatrix} 2+2 & -2 & 3 \\ 1 & 1+2 & 1 \\ 1 & 3 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим, что $x_3 = -14x_2$; $x_1 = 11x_2$. Таким образом, получаем собственный вектор вида $(x_1, x_2, x_3)^T = (11, 1, -14)^T$.

Для $\lambda_3 = 3$ получаем

$$\begin{bmatrix} 2-3 & -2 & 3 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 3 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = x_3$, $x_1 = x_2$ или $(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1, x_1, x_1)^T$, т.е. можно считать, что собственный вектор $(x_1, x_2, x_3)^T \parallel (1, 1, 1)^T$.

Таким образом, у данной матрицы A собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 3$, а соответствующие им нормированные собственные векторы имеют вид

$$\mathbf{x}^1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T; \mathbf{x}^2 = \left(\frac{11}{\sqrt{318}}, \frac{1}{\sqrt{318}}, -\frac{14}{\sqrt{318}}\right)^T; \mathbf{x}^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$

Собственные векторы и собственные значения самосопряженных операторов. Напомним, что самосопряженным линейным оператором в евклидовом пространстве V называется оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий соотношению $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Матрица самосопряженного оператора является симметричной.

Следующие теоремы устанавливают важные свойства собственных векторов самосопряженных операторов.

Теорема 15.3. Собственные векторы самосопряженного оператора (симметричной матрицы), соответствующие различным собственным значениям, попарно-ортогональны.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ – собственные векторы самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, а λ_1 и λ_2 , $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – соответствующие им собственные значения. Тогда $\lambda_1 \mathbf{x}^1 = \mathbf{A}\mathbf{x}^1$ и $\lambda_2 \mathbf{x}^2 = \mathbf{A}\mathbf{x}^2$. Умножим скалярно первое равенство на $\mathbf{x}^2$ и получим $\lambda_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = (\mathbf{A}\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = (\mathbf{x}^1, \mathbf{A}\mathbf{x}^2) = \lambda_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = 0$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $((\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x}^1 \perp \mathbf{x}^2)$.

Теорема 15.4 (о полноте собственных векторов). У каждого самосопряженного линейного оператора $\mathbf{A}$ в n -мерном евклидовом пространстве V существует n попарно-ортогональных собственных векторов. Соответствующие им собственные значения являются действительными числами.

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем $n = 2$. Покажем, что у симметричной матрицы собственные значения – действительные числа. В самом деле, характеристическое уравнение симметричной матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, где $a_{12} = a_{21}$, имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}^2 + a_{11} \cdot a_{22} = 0$. Корни его

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}},$$

очевидно, являются действительными числами. Если подкоренное выражение не равно нулю, то $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и по теореме 15.3 собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2 , ортогональны. Если же подкоренное выражение равно нулю, т.е. $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, то $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, т.е. матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Собственными векторами этой матрицы, как не трудно проверить, являются векторы $\mathbf{e}^1 = (1, 0)^T$ и $\mathbf{e}^2 = (0, 1)^T$.

16. ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ

Преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Пусть в $\mathbf{R}^n$ заданы два базиса $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ и $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$, которые будем называть старым и новым соответственно. Векторы нового базиса однозначно представляются своими разложениями по векторам старого базиса $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= t_{11}\mathbf{u}^1 + t_{21}\mathbf{u}^2 + \dots + t_{n1}\mathbf{u}^n; \\ \mathbf{v}^2 &= t_{12}\mathbf{u}^1 + t_{22}\mathbf{u}^2 + \dots + t_{n2}\mathbf{u}^n; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathbf{v}^n &= t_{1n}\mathbf{u}^1 + t_{2n}\mathbf{u}^2 + \dots + t_{nn}\mathbf{u}^n. \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Матрица

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad (16.2)$$

называется *матрицей перехода* от старого базиса $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ к новому базису $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$. Из соотношений (16.1) и (16.2) следует, что *столбцами матрицы перехода T являются координаты новых базисных векторов в старом базисе.*

Матрица T является невырожденной, так как в противном случае ее столбцы, а значит в силу системы (16.1) и векторы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ были бы линейно-зависимы, что противоречит их выбору в качестве базисных векторов.

Таким образом, для матрицы T существует обратная матрица T^{-1} , которая является, очевидно, матрицей перехода от нового базиса к старому.

Рассмотрим теперь, как связаны координаты одного и того же вектора в старом и новом базисах.

Пусть для вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ имеет место разложение

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \dots + x_n\mathbf{u}^n = x_1\mathbf{v}^1 + x_2\mathbf{v}^2 + \dots + x_n\mathbf{v}^n. \quad (16.3)$$

Подставив сюда разложение новых базисных векторов из системы (16.1), получим

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^n x_j' \mathbf{v}^j = \sum_{j=1}^n x_j' \left(\sum_{i=1}^n t_{ij} \mathbf{u}^i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n t_{ij} x_j' \right) \mathbf{u}^i.$$

Отсюда в силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$x_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j', \quad i=1, 2, \dots, n,$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + \dots + t_{1n}x_n'; \\ x_2 &= t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + \dots + t_{2n}x_n'; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_3 &= t_{n1}x_1' + t_{n2}x_2' + \dots + t_{nn}x_n'. \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Таким образом, старые координаты вектора $\mathbf{x}$ получаются из новых его

координат по формулам (16.4). Если $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$, то система (16.4) в матричном виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'. \quad (16.5)$$

Соотношение (16.5) можно записать и в виде

$$\mathbf{x}' = T^{-1}\mathbf{x}. \quad (16.6)$$

Формулы (16.4) - (16.6) называются *формулами преобразования координат*.

Пример 1. Пусть вектор $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ имеет координаты $(1, -2)$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{u}^1 - 2\mathbf{u}^2$. Найти координаты этого вектора в базисе $\mathbf{v}^1 = \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^2 = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2$.

Решение. Запишем матрицу перехода от базиса $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ к базису $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Искомые новые координаты x'_1, x'_2 находим по формуле (1.204):

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x'_1 = 3, x'_2 = -2$.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Выясним, как преобразуется матрица линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.

Теорема 16.1. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ и $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ - два базиса в $\mathbf{R}^n$, а T - матрица перехода от старого базиса к новому. Если A - матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$, то матрицей B этого оператора в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ является матрица

$$B = T^{-1}AT. \quad (16.7)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, где векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ рассматриваются в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$. Если $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ - новый базис и T - матрица перехода, то в силу равенства (1.203) $\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y} = T\mathbf{y}'$, где $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ - векторы в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$. Подставив $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в равенство $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, получим равенство

$$T\mathbf{y}' = AT\mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{y}' = T^{-1}(AT\mathbf{x}') = (T^{-1}AT)\mathbf{x}',$$

справедливое в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$. Отсюда и следует, что матрица линейного оператора в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ находится по формуле (16.7).

Следствие. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса пространства.

В самом деле, $|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}| \cdot |A| \cdot |T| = |T|^{-1} \cdot |A| \cdot |T| = |A|$, так как $|T^{-1}| = |T|^{-1}$.

Матрицы A и $B = T^{-1}AT$ называются *подобными*. Из теоремы 16.1 следует, что подобные матрицы являются матрицами одного и того же линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, но рассматриваемого в разных базисах с матрицей перехода T .

Пример 2. В базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ оператор $\mathbf{A}$ имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$. Написать матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{v}^1 = \mathbf{u}^1 + 2\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 = 2\mathbf{u}^1 + 3\mathbf{u}^2$.

Решение. Определяем матрицу перехода $T: T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, откуда $T^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда искомая матрица

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 16.2. Собственные значения подобных матриц совпадают.

Доказательство. В самом деле, характеристический многочлен матрицы B равен: $|B - \lambda E| = |T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| = |T^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T| = |A - \lambda E|$.

17. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Как следует из теоремы 16.1, матрица линейного оператора зависит от базиса пространства. Как подобрать этот базис, чтобы матрица линейного оператора в нем имела наиболее простой вид? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 17.1. Для того чтобы матрица линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ в некотором базисе была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы этот базис состоял из собственных векторов матрицы A .

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в некотором базисе $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ диагональная, т.е.

$$A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Тогда, очевидно, справедливы равенства $\mathbf{A}\mathbf{e}^j = \Lambda\mathbf{e}^j = \lambda_j\mathbf{e}^j, j = 1, 2, \dots, n$, из которых следует, что λ_j - собственные значения, а $\mathbf{e}^j$ соответствующие им собственные векторы оператора $\mathbf{A}$.

Достаточность. Предположим, что базис пространства состоит из собственных векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - соответствующие им собственные значения матрицы A . Тогда $A\mathbf{x}^j = \lambda_j\mathbf{x}^j, j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда и из § 13 следует, что $A = \Lambda$.

Итак, матрица A будет иметь диагональный вид Λ тогда и только тогда, когда базис пространства $\mathbf{R}^n$ образован собственными векторами оператора $\mathbf{A}$. Если собственные векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ образуют базис пространства, то столбцами матрицы перехода T к этому базису и являются, очевидно, векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$, поскольку столбцами матрицы перехода T являются координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Пусть T - матрица, столбцами которой служат собственные векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$ оператора A . Тогда, согласно теоремам 16.1 и 17.1, справедливо равенство

$$\Lambda = T^{-1}AT. \quad (17.1)$$

Таким образом, в базисе, состоящем из собственных векторов оператора A , его матрица имеет диагональный вид (17.1), называемый *каноническим*.

Пример 1. Привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для этой матрицы в примере 3 § 1.16 найдены собственные векторы $\mathbf{x}^1 = (-1, 1, 1)^T$, $\mathbf{x}^2 = (11, 1, -14)^T$ и $\mathbf{x}^3 = (1, 1, 1)^T$, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 3$. Составим матрицу перехода

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -2, 3).$$

Канонический вид матрицы самосопряженного оператора. Пусть A - самосопряженный оператор. По теореме 15.4 у него существует n попарно-ортогональных собственных векторов. Если эти векторы нормировать и взять в качестве базиса пространства, то в силу теоремы 17.1 матрица оператора A в этом базисе будет диагональной. Таким образом, для всякого самосопряженного оператора существует такой ортонормированный базис, что матрица этого оператора имеет в нем диагональный вид. Матрица перехода T к этому базису, очевидно, ортогональная, т.е. $T^{-1} = T^T$. Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 17.2. Если A - симметричная матрица, то существует ортогональная матрица T , такая, что $T^{-1}AT = T^TAT$ – диагональная матрица. Из вышеизложенного получаем следующий алгоритм приведения матрицы A к диагональному виду:

- 1) находим собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы A ;
- 2) составляем матрицу перехода T , столбцами которой служат собственные векторы матрицы A ;
- 3) находим T^{-1} и по формуле $\Lambda = T^{-1}AT$ получаем искомую диагональную

матрицу.

Если A – симметричная матрица, то собственные векторы ее необходимо нормировать, и тогда

$$\Lambda = T^T A T. \quad (17.2)$$

Пример 2. Привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Для $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 4$ находим соответствующие векторы $\mathbf{x}^1 = (1, 1, -2)^T$ и $\mathbf{x}^2 = (2, 0, 1)^T$. Поскольку $\mathbf{x}^3 \perp \mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^3 \perp \mathbf{x}^2$ в силу теоремы 1.30, то в качестве третьего собственного вектора можно взять вектор $\mathbf{x}^3 = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = (1, -5, -2)$. Пронормировав векторы $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ и $\mathbf{x}^3$, получим

$$\mathbf{u}^1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^1\|} \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^2\|} \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}^3 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^3\|} \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Эти векторы образуют столбцы матрицы T . Тогда

$$\Lambda = T^T A T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

18. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Квадратичная форма и ее матрица. Квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется выражение вида

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (18.1)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – действительные числа, называемые коэффициентами квадратичной формы.

Для записи квадратичной формы в матричном виде из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ образуем вектор-столбец $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, а из коэффициентов a_{ij} –

матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (18.2)$$

которая называется *матрицей квадратичной формы* и является в силу равенств $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, симметричной.

Учитывая правило умножения матрицы на вектор, получаем

$$A\mathbf{x} = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)^T.$$

Тогда из условия (18.1) имеем

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) x_i = x_1 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}),$$

т.е. в матричной записи квадратичная форма (1.208) имеет вид

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}. \quad (18.3)$$

Таким образом, квадратичная форма полностью определяется своей матрицей, и, наоборот, любая квадратичная форма определяет однозначно симметричную матрицу.

Пример 1. Составить матрицу квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 3x_2^2 + 5x_3^2$.

Решение. Учитывая, что в квадратичной форме коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$, получаем $a_{12} = a_{21} = -1$; $a_{23} = a_{32} = 2$; $a_{13} = a_{31} = 0$; $a_{11} = 1$; $a_{22} = -3$; $a_{33} = 5$, т.е. искомая матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q(x_1, x_2, x_3).$$

Пример 2. Найти квадратичную форму, соответствующую матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Данной матрице соответствует квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_4 - 2x_3^2 + 8x_3x_4 + 5x_4^2.$$

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Квадратичная форма называется *канонической* (или имеет *канонический вид*), если все $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Таким образом, канонический вид квадратичной формы следующий:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2. \quad (18.4)$$

Очевидно, что канонической квадратичной форме соответствует диагональная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}). \quad (18.5)$$

Нахождение канонического вида квадратичной формы называется *приведением к каноническому виду*.

Теорема 18.1. Любая квадратичная форма с помощью ортогонального преобразования может быть приведена к каноническому виду

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \quad (18.6)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы квадратичной формы.

Доказательство. Так как матрица A квадратичной формы симметрична, то в силу теоремы 17.1 для нее существует ортогональная матрица T , такая, что выполнено равенство $\Lambda = T^T A T$. Пусть $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, где $y_1, y_2, \dots, y_n$ – это координаты $\mathbf{x}$ в новом базисе, состоящем из собственных векторов матрицы A . Тогда из соотношения (18.3) имеем

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T T^T A T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \quad \mathbf{y} = T^T \mathbf{x}. \quad (18.7)$$

Таким образом, квадратичная форма в базисе, состоящем из ортонормированных собственных векторов матрицы A , приводится к каноническому виду. Алгоритм приведения ее к каноническому виду заключается, очевидно, в диагонализации симметричной матрицы формы и последующей записи формы в виде формулы (18.7).

Пример 3. Привести к каноническому виду квадратичную форму $Q = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_4^2$.

Решение. Выпишем соответствующую этой форме матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = (\lambda + 1)(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Для $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$ находим собственные векторы $\mathbf{x}^1 = (1, 1, 1, 0)^T$ и $\mathbf{x}^2 = (0, -1, 1, 0)^T$ соответственно. Собственные векторы $\mathbf{x}^3$ и $\mathbf{x}^4$, соответствующие собственному значению $\lambda = -1$, найдем из следующих соображений. По теореме 16.4 собственные векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4$ можно выбрать попарно-ортogonalными. Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – произвольный вектор, ортogonalный $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, то для определения его координат получаем систему

$$\begin{cases} (x, x^1) = x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ (x, x^2) = -x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой имеет вид

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где x_2 и x_4 - произвольные действительные числа.

Таким образом, любой вектор $\mathbf{x}$, ортогональный $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}^3 = (-2, 1, 1, 0)^T$ и $\mathbf{x}^4 = (0, 0, 0, 1)^T$. Попарная ортогональность векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4$ очевидна. Тем самым найдены все четыре попарно-ортогональных собственных вектора. Нормируя их, получим векторы

$$\mathbf{u}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые являются столбцами искомой матрицы ортогонального преобразования T , т.е.

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда в силу равенства (18.7) квадратичная форма Q в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3, \mathbf{u}^4$ производится к каноническому виду $Q = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

Знакоопределенные квадратичные формы. Квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $Q(\mathbf{x}) > 0$ ($Q(\mathbf{x}) < 0$), $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$. Квадратичная форма $Q(\mathbf{x})$ называется *неотрицательно (неположительно) определенной*, если $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ ($Q(\mathbf{x}) \leq 0$), $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Матрица A , соответствующая положительно (отрицательно) определенной форме $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$, называется *положительно (отрицательно) определенной* матрицей. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Например, квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2$ является, очевидно, положительно определенной, а форма $Q(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 5x_2 - x_3)^2 = 16x_1^2 + 25x_2^2 + x_3^2 -$

$-40x_1x_2 - 8x_1x_3 + 10x_2x_3$ - неотрицательно определенной, так как она обращается в нуль при $\mathbf{x} = (x_1, 0, 4x_1), x_1 \neq 0$.

Теорема 18.2. Для того чтобы квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A были положительными (отрицательными).

Доказательство. Необходимость. Пусть квадратичная форма положительно определена. Тогда $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) > 0$. Если λ_i собственное значение матрицы A , соответствующее собственному вектору $\mathbf{x}^i, i = 1, 2, \dots, n$, то $Q(\mathbf{x}^i) = (\mathbf{x}^i, A\mathbf{x}^i) = (\mathbf{x}^i, \lambda_i \mathbf{x}^i) = \lambda_i (\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^i) > 0$. Отсюда, так как $(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^i) > 0$, получаем, что $\lambda_i > 0$.

Достаточность. Пусть $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда из условия (18.7) следует, что $Q(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Аналогично проводится доказательство для отрицательно определенной квадратичной формы.

Следствие. Если квадратичная форма знакоопределена, то матрица ее невырожденная. Определитель матрицы положительно определенной формы больше нуля.

Доказательство. Пусть T - матрица ортогонального преобразования, приводящая квадратичную форму к каноническому виду. Тогда имеем $(\Lambda = T^{-1}AT) \Leftrightarrow (A = T\Lambda T^{-1}) \Rightarrow |A| = |T| \cdot |\Lambda| \cdot |T^{-1}| = |\Lambda| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$. Отсюда и из теоремы 18.2 вытекает справедливость данного следствия.

Теорема 18.3. (критерий Сильвестра*). Для того чтобы квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0. \quad (18.8)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть квадратичная форма положительно определена. Тогда в силу следствия из теоремы 18.2 $|A| > 0$. Для вектора $\mathbf{x} = (x_1, 0, \dots, 0)^T$ имеем $Q(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 > 0 \Rightarrow a_{11} > 0$. Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0, \dots, 0)^T$, то на основании того же следствия имеем

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Продолжая этот процесс последовательно, получим все соотношения (18.8).

Достаточность. Доказывается методом индукции.

Замечание 1. Для неотрицательно определенной квадратичной формы определители (1.215) должны быть, очевидно, больше либо равны нулю. Это же справедливо и для собственных значений матриц квадратичной формы.

Замечание 2. Умножая матрицу A на -1, из критерия Сильвестра получаем следующее утверждение: матрица A отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n |A| > 0. \quad (18.9)$$

* Дж. Дж. Сильвестр (1814 – 1897) – английский математик.

Пример 4. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму Q
 $= (x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

Р е ш е н и е . Матрица этой формы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для нее $a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0, |A| = 1 > 0$.

В соответствии с критерием Сильвестра данная квадратичная форма положительно определена.