Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО. МАГНЕТИЗМ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ОПТИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ

*Рекомендовано УМО по образованию в области
информатики и радиоэлектроники
для специальностей, закрепленных за УМО,
в качестве учебно-методического пособия*

Минск БГУИР 2013

УДК [537.8+535](076)
ББК 22.33я73+22.34я73
Э45

Авторы:

А. В. Березин, З. А. Боброва, А. А. Григорьев, Н. Р. Последович,
И. И. Сергеев

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра естественных наук Государственного учреждения образования «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь (протокол №7 от 30 января 2012 г.);

доцент кафедры физики Белорусского национального технического университета, кандидат физико-математических наук П. Г. Кужир

Э45 **Электричество**. Магнетизм. Электромагнитные волны. Оптика. Сборник задач : учеб.-метод. пособие / А. В. Березин [и др.]. – Минск : БГУИР, 2013. – 79 с. : ил.
ISBN 978-985-488-871-2.

Предназначено для самостоятельной работы студентов при изучении курса физики. По каждому разделу дан минимум теоретических сведений, приведено подробное решение пяти задач и условия задач для самостоятельного решения.

УДК [537.8+535](076)
ББК 22.33я73+22.34я73

ISBN 978-985-488-871-2

Содержание

СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Физические величины, описывающие электромагнитное поле, являются скалярами и векторами, которые заданы во всех точках пространства либо некоторой его области. Такие величины называют скалярными и векторными функциями или полями. Математические свойства полей изучают в векторном анализе. Для упрощения записи основных формул векторного анализа (соответственно электродинамики), а также работы с ними вводится векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ («набла»). В декартовых координатах он имеет вид

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ или $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов, задающих направления осей OX, OY, OZ.

Это формальное выражение приобретает смысл, если его справа умножить на скалярную или векторную функцию. При умножении на скалярную функцию φ, в полном соответствии с правилом умножения вектора на число, получаем векторную функцию

$$\vec{a} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

проекции которой на координатные оси равны

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Векторная функция $\vec{a} = \vec{\nabla}\varphi$ называется градиентом скалярной функции φ:

$$\vec{\nabla}\varphi = \operatorname{grad}\varphi\quad.$$

При исследовании свойств векторных полей и вычислении физических величин используются интегралы по замкнутым контурам (линиям) и поверхностям. Интеграл по замкнутому контуру L

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{l}\,) = \oint_L a \cdot dl \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между вектором $\vec{a}$ и элементарным участком контура $d\vec{l}$ – называется циркуляцией вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L. Равенство нулю циркуляции при произвольном выборе контура говорит о потенциальности этого поля. В этом случае его можно представить как градиент некоторого скалярного поля. Неравенство нулю циркуляции говорит о вихревом характере поля. Для детального изучения свойств поля следует перейти к рассмотрению циркуляции по бесконечно малым контурам. Каждый такой контур охватывает площадку dS, ориентация которой задается единичным вектором нормали $\vec{n}$. Полностью характеризует площадку (величину и ориентацию в пространстве) вектор

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS.$$

Существуют три линейно независимые ориентации, задаваемые, например, единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вследствие этого при вычислении циркуляции по бесконечно малому контуру в окрестности произвольной точки получают три бесконечно малые величины. Отношение этих величин к величине охватываемой площадки дает три конечные функции, образующие новое векторное поле. Его называют ротором поля $\vec{a}$ и обозначают символом $\operatorname{rot}\vec{a}$.

В декартовой системе координат

$$\operatorname{rot}\,\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}.$$

Очевидно, можно записать кратко:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right]=\vec{\nabla}\times\vec{a}\,.$$

Ротор вектора $\vec{a}$ есть формальное векторное произведение векторного оператора набла на $\vec{a}$.

Потоком вектора $\vec{a}$ через элементарную площадку dS называют скалярную величин

$$d\,\Phi = a\cdot\cos\,\alpha\cdot dS\; = (\vec{a},d\vec{S}),$$

где α – угол между вектором $\vec{a}$ и вектором нормали к площадке dS, $d\vec{S}=\vec{n}\cdot dS$. Поток через произвольную поверхность S определяется как интеграл:

$$\Phi = \int_S(\vec{a},d\vec{S})=\int_S a_n\cdot dS=\int_S a\cos\alpha\cdot dS\,.$$

При вычислении потока через замкнутую поверхность принято вектор нормали к ней направлять наружу. Поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую элементарный объем dV, отнесенный к величине этого объема, называют дивергенцией вектора $\vec{a}$. В декартовых координатах $\operatorname{div}\vec{a}$ имеет вид

$$\operatorname{div}\vec{a}=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Векторный оператор $\vec{\nabla}$ позволяет записать

$$\operatorname{div}\vec{a}=(\vec{\nabla},\vec{a})=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\,.$$

Дивергенция вектора $\vec{a}$ есть формальное скалярное произведение векторного оператора набла на векторное поле $\vec{a}$.

Теорема Остроградского–Гаусса: поток вектора $\vec{a}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен интегралу, взятому от дивергенции $\vec{a}$ по объему V, ограниченному этой поверхностью:

$$\oint_S(\vec{a},d\vec{S})=\int_V(\vec{\nabla},\vec{a})\cdot dV\,.$$

Теорема Стокса: циркуляция вектора $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру L равна потоку вектора $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ через поверхность S, ограниченную этим контуром:

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{l}) = \int_S ([\vec{\nabla}, \vec{a}], d\vec{S}).$$

1. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Заряд q является неотъемлемым свойством ряда элементарных частиц. Свойства электрического заряда:

1) существует два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются;

2) выполняется закон сохранения заряда: суммарный заряд электрически изолированной системы не может изменяться;

3) величина заряда не зависит от его скорости. Заряд является релятивистки инвариантной величиной;

4) заряд любого тела является целым кратным элементарному заряду e, т. е. $q = \pm Ne$, где $N = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2, расположенных в вакууме, прямо пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними. Силы взаимодействия лежат на соединяющей заряды прямой. В СИ величина силы взаимодействия

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где ε_0 – электрическая постоянная.

В векторном виде закон Кулона записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^3},$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2; $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор q_1 относительно q_2.

Выполняется принцип суперпозиции: сила, действующая на заряд q_0 со стороны системы зарядов $q_1, q_2, q_3, \dots$ равна векторной сумме сил, действующих на заряд q_0 со стороны всех зарядов системы, взятых по отдельности.

Заряд создает в окружающем пространстве электрическое поле, которое является одной из форм материи. Электрическое поле обнаруживается и исследуется по его силовому воздействию на точечный заряд q_0. Действующая на заряд q_0 сила $\vec{F}$, как следует из закона Кулона и принципа суперпозиции, прямо пропорциональна величине q_0. Следовательно, напряженность электрического поля, определенная выражением

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

зависит от расположения зарядов, создающих поле, выбора точки наблюдения, но не зависит от величины пробного заряда q_0. Напряженность $\vec{E}$ является силовой характеристикой электрического поля. Зная напряженность поля системы зарядов, можно определить силу, действующую на заряд q_0, находящийся в этом поле:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}.$$

Из закона Кулона следуют выражения для модуля и вектора напряженности электрического поля точечного заряда q:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ и } \vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения относительно заряда q.

Для напряженности поля системы зарядов выполняется принцип суперпозиции: напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый заряд системы, взятый по отдельности.

Сила, действующая на точечный заряд q_0 со стороны точечного заряда q, в соответствии с законом Кулона, является центральной. Следовательно, заряду q_0, находящемуся в электрическом поле заряда q, можно приписать потенциальную энергию. В силу принципа суперпозиции сил потенциальной энергией W_n будет обладать и заряд q_0, находящийся в электрическом поле системы зарядов. Очевидно, что потенциальная энергия W_n прямо пропорциональна величине q_0. Скалярную величину

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0}$$

называют потенциалом поля. Потенциал зависит только от величин и расположения зарядов, создающих поле, и выбора точки наблюдения. Потенциал является энергетической характеристикой электрического поля, так как, зная его, можно определить потенциальную энергию заряда q, находящегося в этом поле:

$$W_n = q\varphi.$$

Потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Для потенциала системы зарядов справедлив принцип суперпозиции, причем сложение потенциалов выполняется алгебраически.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. В трех вершинах прямоугольника со сторонами $a = 3$ см и $b = 4$ см расположены одинаковые заряды $q_1=q_2=q_3=q = 5$ нКл (рис. 1). Найти напряженность $\vec{E}$ электрического поля в четвертой вершине прямоугольника.

Решение:

Напряженность поля точечного заряда q в точке, заданной радиусом-вектором $\vec{r}$ относительно заряда, равна

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

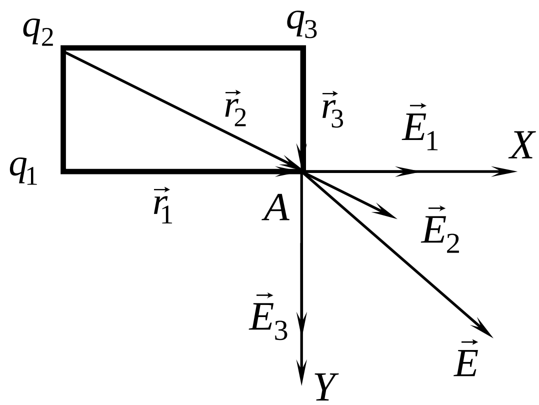

Рис. 1

Согласно принципу суперпозиции, напряженность в точке A (см. рис. 1)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{q\vec{r}_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3} + \frac{q\vec{r}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3} + \frac{q\vec{r}_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3^3},$$

где $r_1 = b, r_2 = \sqrt{a^2 + b^2}, r_3 = a$. Выбираем координатные оси вдоль сторон прямоугольника. Точка пересечения осей совпадает с четвертой вершиной прямоугольника, в которой определяется напряженность поля. Проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов:

$$E_x = \frac{qr_{1x}}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3} + \frac{qr_{2x}}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3} + \frac{qr_{3x}}{4\pi\varepsilon_0 r_3^3} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b}{b^3} + \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right) = \frac{q(b^3 + (a^2 + b^2)^{3/2})}{4\pi\varepsilon_0 b^2 (a^2 + b^2)^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{qr_{1y}}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3} + \frac{qr_{2y}}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3} + \frac{qr_{3y}}{4\pi\varepsilon_0 r_3^3} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a}{a^3} + \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right) = \frac{q(a^3 + (a^2 + b^2)^{3/2})}{4\pi\varepsilon_0 a^2 (a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Подстановка численных значений дает $E_x = 42{,}5$ кВ/м, $E_y = 60{,}8$ кВ/м.

Ответ: $E_x = \dfrac{q(b^3 + (a^2 + b^2)^{3/2})}{4\pi\varepsilon_0 b^2 (a^2 + b^2)^{3/2}} = 42{,}5$ кВ/м, $E_y = \dfrac{q(a^3 + (a^2 + b^2)^{3/2})}{4\pi\varepsilon_0 a^2 (a^2 + b^2)^{3/2}} = 60{,}8$ кВ/м.

Задача 2. Окружность радиусом $R = 60$ мм равномерно заряжена с линейной плотностью $\lambda = 50$ нКл/м. Найти напряженность и потенциал электрического поля на оси, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через ее центр в точке, отстоящей от его на расстоянии $y = 80$ мм.

<u>Решение</u>:

При решении данной задачи воспользуемся принципом суперпозиции и выражениями для напряженности и потенциала поля точечного заряда. Для определенности будем считать, что $\lambda > 0$.

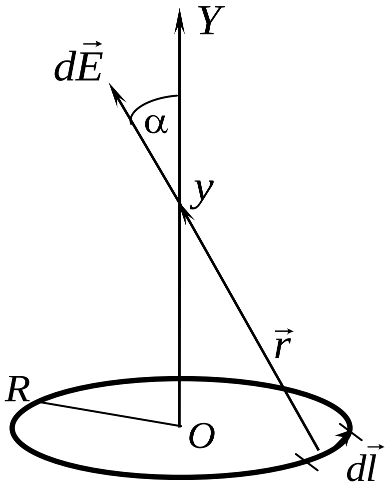

Рис. 2

Разбиваем заряженную окружность на совокупность элементарных участков $d\vec{l}$ (рис. 2). Заряд каждого из этих участков $dq = \lambda dl$ можно считать точечным. Поэтому модуль напряженности электрического поля, создаваемого каждым элементарным участком в точке на оси OY с координатой y, равен

$$\left|d\vec{E}\right| = dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + y^2)}.$$

Направление $d\vec{E}$ совпадает с направлением радиуса-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения относительно $d\vec{l}$.

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность поля, создаваемого всей заряженной окружностью, равна $\vec{E} = \oint d\vec{E}$. При интегрировании по окружности вектор $d\vec{E}$ будет менять направление, образуя конус. Соображения симметрии задачи позволяют заключить, что результирующий вектор $\vec{E}$ направлен по оси OY. Поэтому вектор напряженности определяется своей проекцией на ось OY, которая равна

$$E_y = \oint dE_y = \oint dE\cos\alpha = \oint \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + y^2)} \frac{y}{(R^2 + y^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{R\lambda y}{2\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Здесь мы учли, что

$$\cos\alpha = \frac{y}{(R^2 + y^2)^{1/2}}, \ \oint dl = 2\pi R,$$

а заряд окружности

$$q = 2\pi R\lambda.$$

Очевидно, что полученное выражение для E_y остается в силе при любых по знаку λ и y. Подстановка численных значений дает E_y =13,6 кВ/м.

При вычислении потенциала будем также использовать выражение для потенциала поля точечного заряда dq и принцип суперпозиции. Потенциал поля заряда $dq = \lambda dl$ равен

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Следовательно, потенциал поля, создаваемого всей окружностью,

$$\varphi = \oint d\varphi = \oint \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{1/2}} = 1{,}7 \text{ кВ}.$$

Ответ: Вектор напряженности $\vec{E}$ направлен вдоль оси OY. Его проекция $E_y = \dfrac{R\lambda y}{2\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}} = \dfrac{qy}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}} = 13,\ 6$ кВ/м; $\varphi = \dfrac{R\lambda}{2\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{1/2}} =$ $= 1{,}7$ кВ.

Задача 3. Найти напряженность электрического поля, создаваемого прямолинейной бесконечной тонкой нитью, заряженной с линейной плотностью λ =0,3 нКл/м на расстоянии a = 0,2 м от нити.

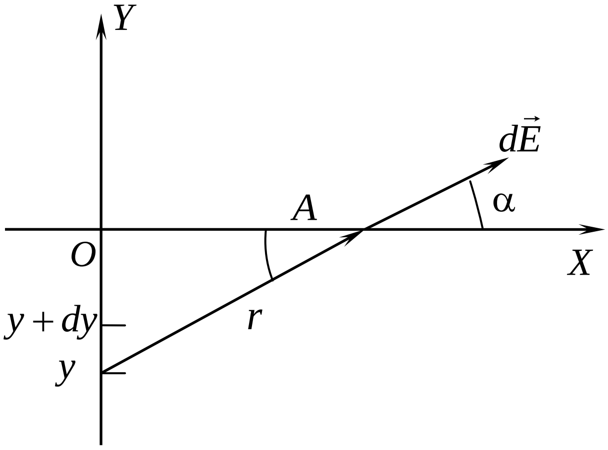

Рис. 3

Решение:

Направим вдоль нити ось OY. Ось OX, перпендикулярную OY, проведем через точку A, в которой будем вычислять напряженность (рис. 3). Как и в предыдущей задаче, разбиваем нить на элементарные участки $dl = dy$. Заряд участка $dq = \lambda \cdot dl = \lambda \cdot dy$. Напряженность поля, создаваемого этим участком, в точке A равна

$$d\vec{E} = \frac{dq \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\lambda \cdot dy \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Напряженность поля всей нити

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda \cdot dy \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Радиус-вектор $\vec{r} = a\vec{i} - y\vec{j}$. Следовательно, проекции $\vec{E}$ на координатную ось OX равна

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda a \cdot dy}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменной

$$y = a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,,\; dy = \frac{a \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Тогда

$$E_x = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a\cos^3\alpha \cdot d\alpha}{a^3\cos^2\alpha} = \frac{\lambda\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Проекция напряженности поля на ось OY равна

$$E_y = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda y \cdot dy}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{3/2}}\;.$$

Подынтегральная функция является нечетной, пределы интегрирования симметричны; следовательно, интеграл равен нулю. Таким образом, вектор напряженности поля направлен по оси OX, его модуль

$$E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} = 27 \text{ В/м}.$$

Ответ: Вектор напряженности поля направлен по оси OX, его модуль $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} = 27$ В/м.

Задача 4. Найти напряженность поля круга, равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ = 5 нКл/м, на высоте h = 6 см над центром круга. Радиус круга R = 8 см.

Решение:

Разбиваем круг на тонкие кольца радиусом r $(0 < r < R)$ и толщиной dr (рис. 4). Каждое кольцо создает электрическое поле, напряженность которого направлена по оси OY, а ее величина совпадает с результатом задачи 2. Заряд кольца

$$dq = \sigma \cdot dS = 2\pi\sigma r \cdot dr,$$

так как площадь тонкого кольца

$$dS = 2\pi r \cdot dr.$$

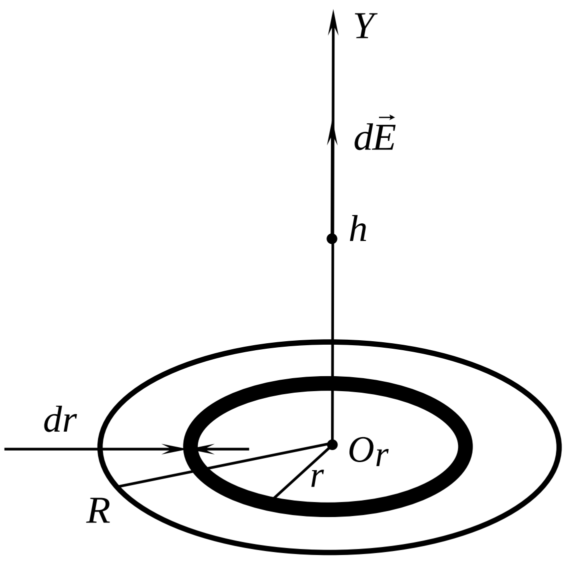

Рис. 4

Модуль вектора напряженности поля тонкого кольца на его оси на расстоянии h от центра равен

$$dE = \frac{h \cdot dq}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{h\sigma r \cdot dr}{2\varepsilon_0(r^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Модуль вектора напряженности поля, создаваемого всеми кольцами, образующими круг, равен

$$E=\int dE=\int_0^R \frac{h\sigma r\cdot dr}{2\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}=\frac{h\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{d(r^2+h^2)}{(r^2+h^2)^{3/2}}=-\left.\frac{h\sigma}{2\varepsilon_0(r^2+h^2)^{1/2}}\right|_0^R=$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0(R^2+h^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{(R^2+h^2)^{1/2}}\right).$$

Ответ: $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{h}{(R^2+h^2)^{1/2}}\right)$ = 113 В/м, вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно плоскости кольца.

Задача 5. Сфера радиусом R=10 см заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma=(\vec{a},\vec{R})$, где $\vec{a}$ постоянный вектор (a = 4 нКл/м^2), $\vec{R}$ – радиус-вектор точки сферы относительно ее центра. Найти напряженность электрического поля в центре сферы.

Решение:

Ось OX проводим через центр сферы в направлении вектора $\vec{a}$ (рис. 5). Сферу разбиваем на тонкие кольца, расположенные симметрично относительно OX. Радиус кольца $r=R\sin\alpha$, ширина кольца $dl=R\cdot d\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{R}$. Площадь кольца

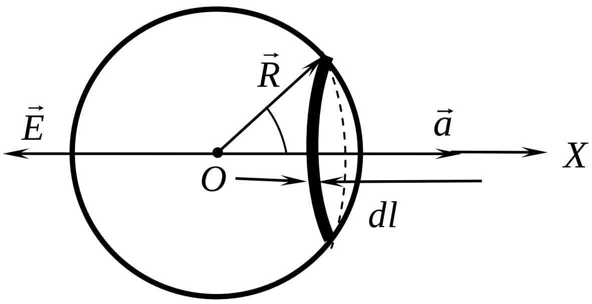

Рис. 5

$$dS=2\pi r\cdot dl=2\pi R\sin\alpha\cdot R\cdot d\alpha.$$

Плотность заряда $\sigma=(\vec{a},\vec{R})=aR\cos\alpha$. Заряд кольца равен

$$dq=aR\cos\alpha 2\pi R\sin\alpha R d\alpha.$$

Положение центра кольца на оси OX задается координатой $x=R\cos\alpha$. Из решения задачи 2 видно, что каждое кольцо $(0<\alpha<\pi)$ создает поле, напряженность которого $d\vec{E}\uparrow\downarrow OX$. Воспользовавшись результатом задачи 2, можем записать

$$dE_x=\frac{-xdq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}=-\frac{aR\cos\alpha\cdot 2\pi R\sin\alpha\cdot R\cdot d\alpha\cdot R\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=$$

$$=-\frac{aR\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot d\alpha}{2\varepsilon_0}.$$

Поле, создаваемое всей сферой, задается проекцией

$$E_x=\int_0^\pi dE_x=-\int_0^\pi \frac{aR\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot d\alpha}{2\varepsilon_0}=\int_0^\pi \frac{aR\cos^2\alpha\cdot d(\cos\alpha)}{2\varepsilon_0}=\left.\frac{aR\cos^3\alpha}{6\varepsilon_0}\right|_0^\pi=-\frac{aR}{3\varepsilon_0}.$$

В векторном виде

$$\vec{E} = -\frac{R\vec{a}}{3\varepsilon_0},\ E = 15{,}1 \text{ В/м.}$$

<u>Ответ:</u> $\vec{E} = -\frac{R\vec{a}}{3\varepsilon_0}$, E = 15,1 В/м.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В двух вершинах углов прямоугольного треугольника, примыкающих к катету длины a = 8 см, расположены одинаковые заряды $q_1 = q_2 = q$ = 6 нКл. Длина другого катета равна b = 6 см. Найти напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника.

2. Тонкий стержень длиной l = 20 см равномерно заряжен зарядом q = 20 нКл/м. Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии a = 10 см от стержня и лежащей на перпендикуляре к нему, проходящему через один из его концов.

3. Найти напряженность электрического поля в центре полуокружности радиусом R =1,5 м, заряженной равномерно зарядом q = 1,2 нКл.

4. Тонкое кольцо радиусом R = 6 см заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos\alpha$,где α – угол между осью абсцисс и радиусом, проведенным в точку кольца, λ_0 = 4,5 мкКл/м. Центр кольца находится в начале системы координат. Найти напряженность электрического поля в центре кольца.

5. Полый цилиндр радиусом R=0,2 м и высотой h=0,6 м заряжен равномерно с поверхностной плотностью заряда λ=0,2 нКл/м^2. Найти напряженность электрического поля в центре основания цилиндра.

2. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ $\vec{E}$

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Теорема Гаусса гласит: поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0:

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}.$$

В случае когда заряды внутри поверхности распределены непрерывным образом с объемной плотностью $\rho = dq/dV$, суммарный заряд внутри поверхности записывается в виде интеграла по объему V, ограниченному замкнутой поверхностью S:

$$q = \int_V \rho \cdot dV.$$

Тогда теорема Гаусса запишется в виде

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV .$$

Теорема Гаусса прежде всего является одним из фундаментальных законов электродинамики, отражающим закон Кулона и принцип суперпозиции. С помощью этой теоремы устанавливаются наиболее общие свойства электрических полей. Кроме того, при симметричном распределении зарядов теорема Гаусса может быть использована для вычисления напряженности поля. Воспользовавшись симметрией задачи, делают предположения о направлении и величине вектора напряженности $\vec{E}$. Исходя из этих предположений выбирается такая воображаемая замкнутая поверхность S, через которую можно посчитать поток вектора $\vec{E}$. Далее по известному распределению заряда находят суммарный заряд внутри выбранной поверхности, записывают равенство, выражающее теорему Гаусса, и находят модуль напряженности.

Теорема Остроградского–Гаусса позволяет перейти от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему. В силу произвольности выбора замкнутой поверхности должно выполняться равенство

$$(\vec{\nabla}, \vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

т.е.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} .$$

Полученное равенство выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме: дивергенция вектора $\vec{E}$ равна плотности заряда, деленной на ε_0.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Заряд распределен по шару радиусом R. Найти напряженность электрического поля внутри и вне шара в случаях:

а) заряд распределен равномерно по объему шара, т. е. $\rho = \text{const}$, $\rho > 0$;

б) распределение заряда имеет вид $\rho = \rho_0 r$, где r – расстояние от точки наблюдения до центра шара, $\rho_0 > 0$.

Решение:

В обоих случаях а) и б) распределение заряда сферически симметрично: любой поворот вокруг центра шара не меняет картину распределения зарядов в пространстве. Поэтому можно предположить, что поле во всем пространстве будет центрально-симметричным: направление вектора $\vec{E}$ в любой точке проходит через центр шара, а модуль $\vec{E}$ зависит только от расстояния до центра сферы. Исходя из этого, в качестве вспомогательной замкнутой поверхности выбираем сферу, содержащую точку, в которой

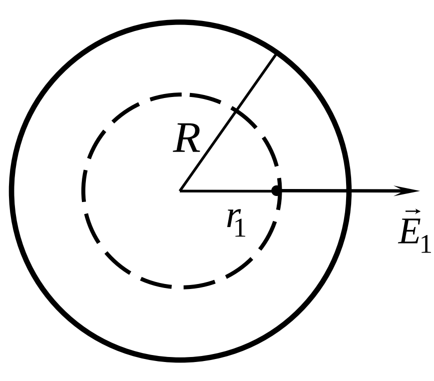

Рис. 6

вычисляется поле. Центр сферы совпадает с центром шара, направление нормали к сфере в любой ее точке совпадает с направлением напряженности в этой точке (рис. 6). Во всех точках сферы модуль напряженности одинаков, поэтому поток вектора $\vec{E}_1$ через сферу радиусом $r_1 < R$ равен

$$\oint_S (\vec{E}_1, d\vec{S}) = \oint_S E_1 \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_1 \oint_S dS = E_1 4\pi r_1^2 .$$

При вычислении учтено, что угол между вектором напряженности и вектором нормали $\alpha = 0$, а на всей поверхности сферы $E =$ const. Очевидно, что полученное выражение для потока остается справедливым и для сферы вне шара, когда $r_2 > R$: $E_2 4\pi r_2^2$.

При вычислении заряда необходимо по отдельности рассмотреть оба случая.

а) Пусть $r_1 < R$. Заряд внутри сферы радиусом r_1 равен

$$q = \int_V \rho \cdot dV = \rho \int_V dV = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r_1^3 .$$

При интегрировании учтено, что в пределах шара $\rho = \text{const}$. В соответствии с теоремой Гаусса получаем

$$E_1 4\pi r_1^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi r_1^3}{3} .$$

Следовательно, модуль и вектор напряженности поля внутри шара равны:

$$E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}; \ \vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0}, \ r_1 < R .$$

При вычислении напряженности поля вне шара на расстояниях от его центра $r_2 > R$ вспомогательная сфера охватывает весь заряд шара:

$$q = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} .$$

По теореме Гаусса

$$E_2 4\pi r_2^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} ,$$

вектор напряженности поля и его модуль вне шара равны

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}; \ \vec{E}_2 = \frac{\rho R^3 \vec{r}_2}{3\varepsilon_0 r_2^3}, \ r_2 > R .$$

б) Пусть $r_1 < R$. Как указывалось выше, выражения для потоков вектора $\vec{E}$ через вспомогательные сферы радиусами r_1 и r_2 останутся прежними. Заряд области, ограниченной сферой, вычислим, используя выражение для объемной плотности заряда (она зависит только от расстояния r до центра шара). Поэтому естественно разбить шар радиусом r_1 на концентрические с ним шаровые слои радиусом r и толщиной dr $(0 < r < r_1)$. Заряд такого слоя равен

$$dq = \rho \cdot dV = \rho_0 r \cdot 4\pi r^2 \cdot dr\,.$$

Заряд шара радиусом r_1 является суммой зарядов всех таких слоев:

$$q = \int_0^{r_1} dq = \int_0^{r_1} 4\pi\rho_0 r^3 \cdot dr = \frac{4\pi\rho_0 r_1^4}{4}.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса

$$E_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{\pi\rho_0 r_1^4}{\varepsilon_0},$$

получаем выражения для модуля и вектора напряженности:

$$E_1 = \frac{\rho_0 r_1^2}{4\varepsilon_0};\ \vec{E}_1 = \frac{\rho_0 r_1 \vec{r}_1}{4\varepsilon_0}, r_1 < R.$$

В случае $r_2 > R$ при вычислении заряда необходимо учесть, что при $r > R$ его объемная плотность обращается в ноль. Поэтому интегрирование нужно выполнить в пределах $0 < r < R$:

$$q = \int_0^{R} dq = \int_0^{R} 4\pi\rho_0 r^3 \cdot dr = \frac{4\pi\rho_0 R^4}{4}.$$

В соответствии с этим по теореме Гаусса имеем:

$$E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{\pi\rho_0 R^4}{\varepsilon_0},\ E_2 = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r_2^2};\ \vec{E}_2 = \frac{\rho_0 R^4 \vec{r}_2}{4\varepsilon_0 r_2^3}, r_2 > R.$$

<u>Ответ</u>: а) $\vec{E}_1 = \dfrac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$, $r_1 < R$; $\vec{E}_2 = \dfrac{\rho R^3 \vec{r}_2}{3\varepsilon_0 r_2^3}$, $r_2 > R$;

б) $\vec{E}_1 = \dfrac{\rho_0 r_1 \vec{r}_1}{4\varepsilon_0}, r_1 < R$; $\vec{E}_2 = \dfrac{\rho_0 R^4 \vec{r}_2}{4\varepsilon_0 r_2^3}, r_2 > R$.

Задача 2. Бесконечный цилиндр радиусом R = 10 см равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ = 5 нКл/м^3 (рис. 7). Найти модуль напряженности поля в произвольной точке пространства. Вычислить модуль напряженности поля на поверхности цилиндра.

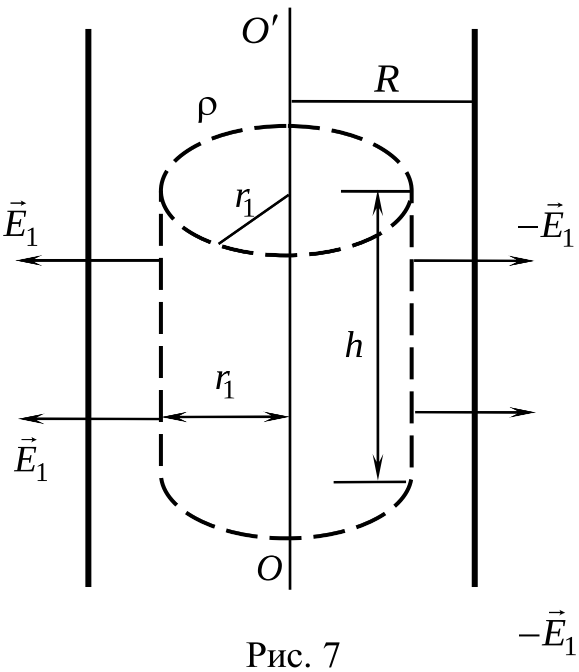

Рис. 7

<u>Решение:</u>

Распределение зарядов симметрично относительно поворотов вокруг оси цилиндра OO', сдвигов вдоль этой оси, а также при зеркальном отражении относительно плоскости, перпендикулярной оси. Поскольку при таких преобразованиях картина электрического поля не изменяется, линии напряженности должны быть перпендикулярны оси цилиндра и располагаться в одной плоскости с ней; при этом модуль напряженности зависит только от расстояния точки наблюдения до оси. Исходя из этого, в качестве замкнутой поверхности выбираем цилиндр, коаксиальный с заряженным цилиндром; его высота h, радиус $r_1 < R$ либо $r_2 > R$ в зависимости от того, где вычисляется напряженность: внутри или вне заряженного цилиндра. В обоих случаях поток вектора $\vec{E}$ через основания замкнутого цилиндра будет равен нулю, поскольку линии напряженности параллельны основаниям. Поэтому суммарный поток через выделенный цилиндр будет равен потоку через его боковую поверхность:

$$\oint_S (\vec{E}_1, d\vec{S}) = \int_{\text{бок}} (\vec{E}_1, d\vec{S}) = \int_{\text{бок}} E_1 \cdot dS = E_1 \int_{\text{бок}} dS = E_1 \cdot 2\pi r_1 h .$$

Совершенно аналогично получается выражение для потока через замкнутый цилиндр с радиусом основания $r_2 > R$:

$$\oint_S (\vec{E}_2, d\vec{S}) = E_2 \cdot 2\pi r_2 h .$$

Заряд, находящийся внутри замкнутого цилиндра с радиусом основания $r_1 < R$, равен

$$q = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot \pi r_1^2 h .$$

В соответствии с теоремой Гаусса получаем равенство:

$$E_1 \cdot 2\pi r_1 h = \frac{\rho \cdot \pi r_1^2 h}{\varepsilon_0} .$$

Следовательно, модуль напряженности поля внутри равномерно заряженного цилиндра равен

$$E_1 = \frac{\rho r_1}{2\varepsilon_0} .$$

При вычислении поля вне заряженного цилиндра следует в равенство, выражающее теорему Гаусса, подставить заряд, находящийся внутри замкнутого цилиндра радиусом $r_2 > R$:

$$q = \rho \cdot \pi R^2 h .$$

В соответствии с этим находим модуль напряженности поля вне цилиндра:

$$E_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r_2} .$$

Подставив численные значения, получаем значение модуля напряженности на поверхности: $E_{\text{пов}} = 28{,}2$ В/м.

<u>Ответ:</u> $E_1 = \dfrac{\rho r_1}{2\varepsilon_0}$, $r_1 < R$; $E_2 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r_2}$, $r_2 > R$; $E_{\text{пов}} = 28{,}2$ В/м.

Задача 3. Бесконечная пластина толщиной d = 12 см равномерно заряжена с объемной плотностью ρ = 6 нКл/м^3. Найти напряженность электрического поля внутри и вне пластины. Вычислить напряженность поля на поверхности пластины

Решение:

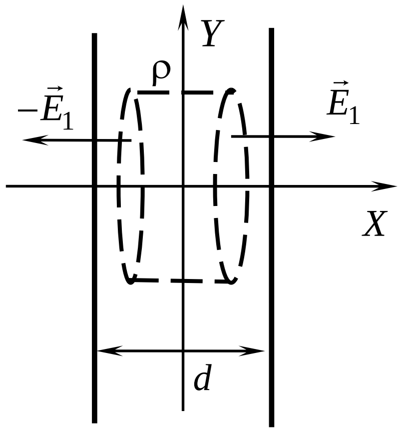

Рис. 8

Пусть пластина расположена перпендикулярно плоскости рисунка (рис. 8). Плоскость YOZ, параллельная двум граням пластины и находящаяся на одинаковом расстоянии от них, является плоскостью симметрии задачи. Распределение зарядов не меняется при зеркальном отражении относительно ее, а также при сдвигах в направлениях, лежащих в YOZ, и вращениях системы вокруг осей, параллельных OX. Поэтому: 1) электрическое поле зеркально симметрично относительно плоскости YOZ; 2) модуль вектора напряженности зависит только от расстояния точки наблюдения до плоскости YOZ; 3) вектор напряженности перпендикулярен плоскости YOZ. В качестве замкнутой поверхности можно взять цилиндр, расположенный симметрично относительно YOZ, основания которого параллельны этой плоскости.

При вычислении величины напряженности внутри пластины в точках на расстоянии $x_1 < d/2$ положения оснований цилиндра задаются координатами x_1 и $-x_1$. Высота цилиндра равна $2x_1$, площадь основания – S. В любой точке боковой поверхности цилиндра вектор $\vec{E}_1$ перпендикулярен вектору нормали к поверхности. Поэтому поток через боковую поверхность будет равен нулю. В точках на основаниях цилиндра векторы напряженности совпадают по направлению с векторами нормали к основаниям и постоянны по величине. Поэтому поток через замкнутый цилиндр равен $2E_1S$. Заряд, находящийся внутри цилиндра, равен $q = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot 2x_1S$. Записав теорему Гаусса

$$2E_1S = \frac{2\rho x_1 S}{\varepsilon_0},$$

получаем выражение для модуля напряженности внутри пластины:

$$E_1 = \frac{\rho x_1}{\varepsilon_0}.$$

При вычислении напряженности вне пластины в точках на расстоянии $x_2 > d/2$ до плоскости YOZ будем использовать замкнутый цилиндр, аналогичный предыдущему, но высотой $2x_2$. Поток через него, как и в предыдущем случае, равен $2E_2S$. Заряд внутри этого цилиндра $q = \rho dS$. Воспользовавшись теоремой Гаусса, получаем напряженность поля вне пластины:

$$E_2 = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}.$$

Ответ: $E_1 = \frac{\rho x_1}{\varepsilon_0}$ при $x_1 < d/2$: $E_2 = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$ при $x_2 > d/2$, $E_{пов}$ = 40,7 В/м. Вектор напряженности направлен перпендикулярно пластине в сторону от нее при $\rho > 0$ и к пластине при $\rho < 0$.

Задача 4. Шар заряжен с постоянной объемной плотностью ρ = 8 нКл/м^3. Внутри шара имеется пустая сферическая полость меньшего радиуса. Положение центра полости относительно центра заряженного шара определяется вектором $\vec{a}$ (рис. 9). Найти напряженность электрического поля в произвольной точке A полости. Найти модуль напряженности, полагая a = 2 см.

Решение:

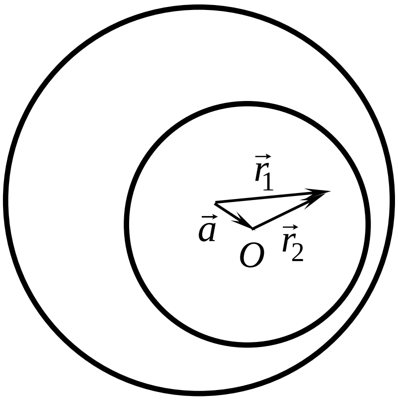

Рис. 9

Наличие полости нарушает сферическую симметрию распределения заряда. Непосредственно применить теорему Гаусса нельзя. Представим полость как шар, одновременно заряженный равномерно зарядами с плотностями ρ и $-\rho$. В результате получается задача на вычисление поля двух равномерно заряженных шаров. Точка, в которой вычисляется поле, находится внутри обоих шаров.

Выражение для напряженности поля внутри равномерно заряженного шара было получено в задаче 1. Точка A относительно центра большого шара задается радиусом-вектором $\vec{r}_1$, а относительно центра меньшего шара – радиусом-вектором $\vec{r}_2$. Воспользовавшись результатами задачи 1, запишем выражения для напряженности полей, создаваемых каждым шаром в отдельности:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0}, \quad \vec{E}_2 = \frac{-\rho \vec{r}_2}{3\varepsilon_0}.$$

По принципу суперпозиции напряженность поля в точке A будет равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0} + \frac{-\rho \vec{r}_2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho \vec{a}}{3\varepsilon_0}.$$

Таким образом, поле внутри полости является однородным, линии напряженности направлены параллельно или антипараллельно $\vec{a}$. Подстановка численных значений дает E = 6 В/м.

Ответ: $\vec{E} = \frac{\rho \vec{a}}{3\varepsilon_0}$, E = 6 В/м.

Задача 5. Система состоит из шара радиусом R, заряженного сферически симметрично, и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью $\rho = \dfrac{\rho_0}{r}$, где r – расстояние от центра шара, $\rho_0 = 8$ нКл/м^3. Найти заряд шара, при котором напряженность электрического поля вне шара не зависит от r. Найти модуль напряженности поля вне шара в этом случае.

Решение:

Найдем напряженность поля в произвольной точке A, находящейся вне шара на расстоянии r от его центра. Распределение заряда сферически симметрично. Поэтому и конфигурация поля будет сферически симметричной: направление вектора $\vec{E}$ в любой точке проходит через центр шара, а модуль вектора $\vec{E}$ зависит только от расстояния до центра шара. Выберем в качестве замкнутой поверхности концентрическую с шаром сферу радиусом r. Поток вектора $\vec{E}$ через сферу, как и в задаче 1, равен $E \cdot 4\pi r^2$. Заряд внутри сферы равен сумме заряда шара q и заряда среды, находящегося в шаровом слое, ограниченном сферами радиусом R и r:

$$q + \int_R^r \rho \cdot dV = q + \int_R^r \frac{\rho_0}{r} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = q + 4\pi\rho_0 \left.\frac{r^2}{2}\right|_R^r = q + 2\pi\rho_0 (r^2 - R^2).$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, получаем

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{2\pi\rho_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Зависимость E от r исчезнет, если будет выполняться условие $q - 2\pi\rho_0 R^2 = 0$. Следовательно, искомый заряд равен

$$q = 2\pi\rho_0 R^2.$$

Ответ: $E = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} + \dfrac{q - 2\pi\rho_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. При $q = 2\pi\rho_0 R^2$ зависимость поля от расстояния r исчезает: $E = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} = 452$ В/м.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сфера радиусом $R = 5$ см равномерно заряжена зарядом $q = 8$ пКл, а пространство вне сферы заряжено с объемной плотностью $\rho = \rho_0 / r^2$, где $\rho_0 = 0{,}2$ нКл/м^3. Найти модуль напряженности поля внутри и вне сферы. Вычисления выполнить для поверхности сферы.

2. Шар радиусом R = 6 см заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 / r^2$, где ρ_0 = 4 мкКл/м^3. Найти модуль напряженности поля внутри, вне шара и на его поверхности.

3. Бесконечный цилиндр заряжен с объемной плотностью заряда $\rho = \rho_0 (1 - r/R)$, где ρ_0 = 3 нКл/м^3, R = 10 см. Найти модуль напряженности поля внутри и вне цилиндра, а также на его поверхности.

4. Два шара равномерно заряжены с объемными плотностями заряда ρ = = 4 нКл/м^3 и $-\rho$. Шары частично накладываются друг на друга. Центр второго шара относительно первого задается вектором $\vec{a}$, модуль которого a = 6 мм . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке A, находящейся в области, принадлежащей обоим шарам.

5. Бесконечная пластина толщиной $2d$ = 4 см заряжена с объемной плотностью $\rho = \rho_0 |x|$, ρ_0 = 4 нКл/м^3. Ось $0X$ перпендикулярна поверхностям пластины. Начало системы координат лежит на одинаковом расстоянии от поверхностей пластины. Найти напряженность поля внутри и вне пластины.

3. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Основными характеристиками электростатического поля являются напряженность и потенциал. Зная напряженность $\vec{E}$, можно найти силу, действующую на заряд, помещенный в любую точку поля, вычислить работу сил поля при движении этого заряда, найти плотность энергии электрического поля:

$$\vec{F} = q\vec{E},\ A_{12} = \int_1^2 (q\vec{E}, d\vec{l}),\ w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Зная потенциал φ, можно определить потенциальную энергию заряда, находящегося в электростатическом поле, работу сил поля при движении заряда:

$$W_p = q\varphi,\ A_{12} = q\varphi_1 - q\varphi_2.$$

Между этими величинами существует связь. По известному потенциалу можно найти напряженность:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \right).$$

Напряженность $\vec{E}$ является антиградиентом потенциала φ:

$$\vec{E} = -\ \mathrm{grad}\ \varphi \text{ или, используя оператор набла, } \vec{E} = -(\vec{\nabla}, \varphi).$$

Таким образом, векторная функция, задаваемая тремя компонентами, определяется скалярной функцией, состоящей из одной компоненты.

Существует обратная связь. По известному выражению для напряженности можно найти разность потенциалов в двух произвольных точках поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}\,).$$

В силу консервативности электростатического поля интегрирование выполняется по произвольному контуру L, соединяющему точки 1 и 2.

Для замкнутого контура точки 1 и 2 совпадают, поэтому $\varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_1 = 0$. В результате получаем теорему о циркуляции для напряженности электростатического поля в интегральной форме:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}\,) = 0.$$

Формулировка в дифференциальной форме

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = 0 \text{ или } \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = 0$$

удобна для проверки потенциальности векторного поля $\vec{E}$ (векторное поле потенциально, если ротор этого поля равен нулю). Потенциальное поле представимо как градиент некоторого скалярного поля.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Найти напряженность электрического поля, если его потенциал $\varphi = ax^2 y + bxyz + cyz^2$.

Решение:

Воспользуемся связью между потенциалом и напряженностью электростатического поля:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Вычисление частных производных от заданного в условии задачи выражения для потенциала дает проекции $\vec{E}$ на координатные оси:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2axy - byz,\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ax^2 - bxz - cz^2,\ E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -bxy - 2cyz.$$

Вектор напряженности равен

$$\vec{E} = -y(2ax + bz)\vec{i} - (ax^2 + bxz + cz^2)\vec{j} - y(bx + 2cz)\vec{k}.$$

Ответ: $\vec{E} = -y(2ax + bz)\vec{i} - (ax^2 + bxz + cz^2)\vec{j} - y(bx + 2cz)\vec{k}$.

Задача 2. Найти потенциал электрического поля, если его напряженность $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$.

<u>Решение:</u>

Сравнив данное в условии задачи выражение для напряженности с формулой, устанавливающей связь между $\vec{E}$ и φ, получим систему трех дифференциальных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = -ay, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -ax - bz, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = -by. \end{array}\right.$$

Проинтегрировав каждое из них, получаем три различных выражения для потенциала:

$$\varphi = -\int ay \cdot dx = -axy + C_1(y,z),$$

$$\varphi = -\int (ax + bz) \cdot dy = -axy - byz + C_2(x,z),$$

$$\varphi = -\int by \cdot dz = -byz + C_3(x,y).$$

Ясно, что полученные выражения для потенциала должны совпадать. Чтобы добиться этого, воспользуемся произвольностью выбора функций C_1, C_2, C_3. Из условия равенства первых двух выражений получаем

$$-axy + C_1(y,z) = -axy - byz + C_2(x,z) \Rightarrow C_1(y,z) = -byz + C_2(x,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(y,z) = -byz + C_2(z).$$

Приравняв два последних выражения, имеем:

$$-axy - byz + C_2(z) = -byz + C_3(x,y) \Rightarrow -axy + C_2(z) = C_3(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = C, C_3(x,y) = -axy + C, C_1(y,z) = -byz + C$$

(здесь C – произвольная постоянная). Таким образом

$$\varphi = -axy - byz + C.$$

<u>Ответ:</u> $\varphi = -axy - byz + C$.

Задача 3. Потенциал электрического поля имеет вид $\varphi = \alpha(xy - z^2)$. Найти проекцию напряженности электрического поля на направление вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$ в точке $A(2, 1, -3)$, положив α = 10 В/м^2.

<u>Решение:</u>

По выражению для потенциала находим вектор напряженности:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\alpha y\vec{i} - \alpha x\vec{j} + 2\alpha z\vec{k}.$$

В точке $A(2, 1, -3)$

$$\vec{E} = -\alpha\vec{i} - 2\alpha\vec{j} - 6\alpha\vec{k}.$$

Проекция вектора на некоторое направление равна произведению модуля этого вектора на косинус угла между ним и заданным направлением. Воспользовавшись определением скалярного произведения

$$(\vec{E},\vec{a}) = \left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha = E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z,$$

находим, что искомая проекция

$$E_a = \left|\vec{E}\right| \cdot \cos\alpha = \frac{E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z}{\left|\vec{a}\right|}.$$

Подставив численные значения, получаем

$$E_a = \frac{-\alpha - 18\alpha}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = -\frac{-19\sqrt{10}}{10}\alpha = 60{,}1 \text{ В/м}.$$

<u>Ответ:</u> $E_a = -1{,}9\sqrt{10}\alpha = 60{,}1$ В/м.

Задача 4. Шар радиусом R = 12 см равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ = 10 нКл/м^3. Найти напряженность и потенциал внутри и вне шара. Начертить графики $E(r)$ и $\varphi(r)$. Вычислить E на поверхности шара.

<u>Решение</u>:

Повторяя рассуждения задачи 1 из раздела 2, на основании теоремы Гаусса находим напряженность поля внутри и вне шара:

$$\oint_S (\vec{E}_1, dS) = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{\rho 4\pi r_1^3}{\varepsilon_0 3} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0},\ r_1 < R,$$

$$\oint_S \left(\vec{E}_2, dS\right) = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{\varepsilon_0 3} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\rho R^3 \vec{r}_2}{3\varepsilon_0 r_2^3},\ r_2 > R.$$

Потенциал поля найдем, воспользовавшись формулой для разности потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}),$$

в которой точка 1 соответствует точке, в которой вычисляется потенциал, а точка 2 находится на бесконечности. Так как заряды на бесконечности отсутствуют, то можно положить потенциал на бесконечности равным нулю.

Для потенциала внутри шара получаем

$$\varphi(r_1) = \int_{r_1}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{r_1}^{R} \frac{\rho(\vec{r}, d\vec{l})}{3\varepsilon_0} + \int_{R}^{\infty} \frac{\rho R^3 (\vec{r}, d\vec{l})}{3\varepsilon_0 r^3} = \int_{r_1}^{R} \frac{\rho r \cdot dr}{3\varepsilon_0} +$$

$$+ \int_{R}^{\infty} \frac{\rho R^3 r \cdot dr}{3\varepsilon_0 r^3} = \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\bigg|_{r_1}^{R} - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\bigg|_{R}^{\infty} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r_1^2}{6\varepsilon_0}.$$

При интегрировании мы учли, что аналитический вид функции $E(r)$ внутри и вне шара различен. Поэтому область интегрирования разбита на две области: $r_1 < r < R$ и $R < r < \infty$. Было учтено, что

$$(\vec{r}, d\vec{l}\,) = r\left|d\vec{l}\,\right|\cos\alpha = r\cdot(d\vec{l}\,)_r = r\cdot dr\,.$$

Проекция перемещения $d\vec{l}$ на направление, задаваемое радиусом-вектором $\vec{r}$, $(d\vec{l}\,)_r$ равна приращению расстояния до центра шара dr.

Потенциал вне шара равен

$$\varphi(r_2) = \int_{r_2}^{\infty}(\vec{E}, d\vec{l}\,) = \int_{r_2}^{\infty}\frac{\rho R^3(\vec{r}, d\vec{l}\,)}{3\varepsilon_0 r^3} = \int_{r_2}^{\infty}\frac{\rho R^3 r\cdot dr}{3\varepsilon_0 r^3} = -\left.\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right|_{r_2}^{\infty} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2}\,.$$

По найденным аналитическим выражениям для $E(r)$ и $\varphi(r)$ построим их графики (рис. 10).

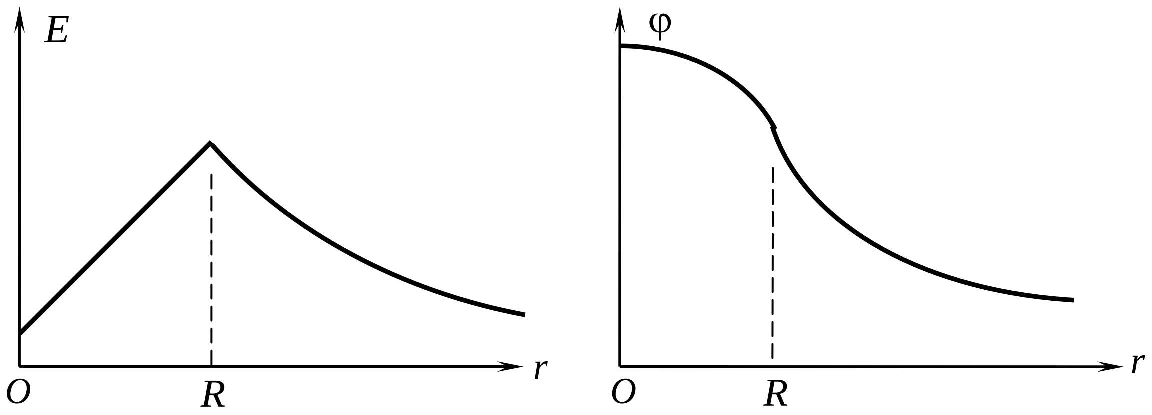

Рис. 10

<u>Ответ:</u> $\vec{E}_1 = \dfrac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$, $\vec{E}_2 = \dfrac{\rho R^3\vec{r}_2}{3\varepsilon_0 r_2^3}$, $\varphi(r_1) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho r_1^2}{6\varepsilon_0}$, $\varphi(r_2) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2}$, $E_{\text{пов}} =$ = 45,2 В/м.

Задача 5. В некоторой области пространства потенциал определяется выражением $\varphi = -ax^3 + b$, где a и b – некоторые постоянные. Найти зависимость плотности объемного заряда ρ от x.

<u>Решение:</u>

По известному потенциалу поля находим его напряженность:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = 3ax^2\vec{i}\,.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса в дифференциальной форме, получаем выражение для плотности объемного заряда:

$$\rho = \varepsilon_0(\vec{\nabla}, \vec{E}) = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \varepsilon_0 \cdot 6ax = 6\varepsilon_0 ax\,.$$

Ответ: $\rho = 6\varepsilon_0 ax$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти напряженность электрического поля, если его потенциал задан в виде $\varphi = axy + by^2 z$.

2. Найти потенциал поля, если его напряженность $\vec{E} = \alpha(y\vec{i} + x\vec{j})$.

3. Найти потенциал поля, если его напряженность $\vec{E} = \alpha(2xy\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j})$.

4. Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра по закону $\varphi = ar^2 + b$. Найти распределение объемного заряда $\rho(r)$ внутри шара.

5. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = (\vec{a}, \vec{r})$, где $\vec{a}$ – некоторый постоянный вектор.

4. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Диэлектрики – это вещества, в которых практически отсутствуют свободные заряды, способные перемещаться по всему объему тела, тем самым создавая электрический ток. При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле заряды, входящие в состав его молекул, не покидают своих молекул. Однако положительные заряды смещаются в направлении вектора напряженности, а отрицательные – в противоположном направлении. В результате дипольные моменты полярных молекул ориентируются преимущественно по полю, а у неполярных молекул появляется дипольный момент, ориентированный также по полю. Диэлектрик во внешнем поле поляризуется. Количественно степень его поляризации характеризуется поляризованностью диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum \vec{p}_i\,,$$

где $\vec{p}_i$ – дипольные моменты молекул, входящих в небольшой объем диэлектрика ΔV. Поляризованность равна дипольному моменту единицы объема вещества.

В результате поляризации диэлектрика на его поверхности и по его объему появляются связанные заряды q'. Связанные заряды – это заряды, входящие в состав молекул диэлектрика. Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P_n,$$

где P_n – проекция поляризованности на нормаль к границе диэлектрика, направленная наружу. Для поляризованности выполняется теорема Гаусса

$$\rho' = -(\vec{\nabla}, \vec{P}),$$

где ρ' – объемная плотность связанных зарядов. Связанные заряды, как и сторонние заряды, создающие поле $\vec{E}_0$, создают поле $\vec{E}'$. В соответствии с принципом суперпозиции наблюдается результирующее поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

Как показывает опыт, для изотропных диэлектриков при небольших значениях E выполняется соотношение

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E},$$

где κ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Напряженность электрического поля в присутствии диэлектриков определяется распределением сторонних и связанных зарядов. Чтобы избавиться от связанных зарядов в основных уравнениях электродинамики, вводят вспомогательный вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

где $\varepsilon = (1+\kappa)$ – диэлектрическая проницаемость вещества. Вектор $\vec{D}$ называют вектором электрического смещения. Для него теорема Гаусса записывается без использования связанных зарядов

$$(\vec{\nabla}, \vec{D}) = \rho \text{ или, в интегральной форме, } \oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \sum q_i,$$

где ρ – объемная плотность сторонних зарядов; $\sum q_i$ – суммарный сторонний заряд внутри замкнутой поверхности S. Вектор $\vec{D}$ является суммой двух различных по физическому смыслу величин: $\varepsilon_0 \vec{E}$ – характеристика электрического поля и $\vec{P}$ – характеристика вещества. Поэтому вектор $\vec{D}$ не имеет глубокого физического смысла и носит вспомогательный характер.

На границе двух диэлектриков происходит скачкообразное изменение их диэлектрической проницаемости. Поэтому при переходе границы диэлектриков происходит скачкообразное изменение векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Пусть ε_1 и ε_2 – диэлектрические проницаемости двух сред. Тангенциальные составляющие этих векторов (проекции векторов на касательную к границе раздела) удовлетворяют условиям

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}.$$

Нормальные составляющие векторов (проекции векторов на нормаль к границе раздела) удовлетворяют условиям

$$D_{1n} = D_{2n}, \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

Соотношения между проекциями векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ у границы раздела называют граничными условиями.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Плоскопараллельная пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$ помещена в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0$ (E_0 = 10 В/м) , направленное под углом $\alpha = 30^\circ$ к нормали $\vec{n}$ к поверхности диэлектрика. Найти напряженность электрического поля внутри пластины и поверхностную плотность связанных зарядов на ее поверхности. Считать, что пластина находится в вакууме.

Решение:

Чтобы не учитывать краевые эффекты, предполагаем, что пластина достаточно тонкая и широкая. Тогда поле вне пластины совпадает с внешним полем $\vec{E}_0$. Внутри пластины напряженность поля $\vec{E}$ равна сумме $\vec{E}_0$ и $\vec{E}'$ – поля, созданного связанными зарядами, возникшими на границе пластины (рис. 11):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

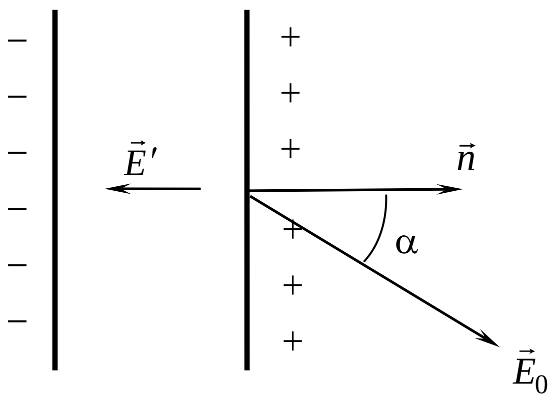

Рис. 11

Граничные условия запишутся в виде

$$E_\tau = E_{0\tau} = E_0 \sin\alpha, \; D_n = D_{0n} = D_0 \cos\alpha.$$

Воспользовавшись соотношениями $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$ и $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, получаем

$$\varepsilon E_n = E_{0n} = E_0 \cos\alpha \Rightarrow E_n = \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon}.$$

По известным взаимно перпендикулярным составляющим вектора $\vec{E}$ находим его модуль:

$$E = \sqrt{E_\tau^2 + E_n^2} = \frac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 5{,}2 \text{ В/м}.$$

Направление вектора напряженности в диэлектрике задается углом β между $\vec{E}$ и $\vec{n}$. Этот угол определяется условием

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{E_\tau}{E_n} = \varepsilon \mathrm{tg}\alpha, \ \beta = 74^\circ.$$

Поляризованность $\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}$. Ее проекция на нормальное направление $P_n = \sigma'$. Следовательно, поверхностная плотность зарядов

$$\sigma' = \varepsilon_0 \kappa \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0 \cos\alpha}{\varepsilon} = 64 \text{ пКл/м}^2.$$

<u>Ответ:</u> $E = \frac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$ 5,2 В/м, $\beta = \mathrm{arctg}(\varepsilon\,\mathrm{tg}\alpha) = 74^\circ$, $\sigma' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_0\cos\alpha}{\varepsilon} = 64$ пКл/м^2.

Задача 2. Шар радиусом R_1 =2 см равномерно заряжен зарядом q = 8,1 нКл и окружен сферическим слоем радиусом R_2= 50 см однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε = 3 (рис. 12). Найти напряженность электрического поля внутри и вне диэлектрика. Найти поверхностную плотность связанного заряда на внешней и внутренней поверхностях диэлектрика. Считать диэлектрическую проницаемость среды вне слоя диэлектрика равной единице.

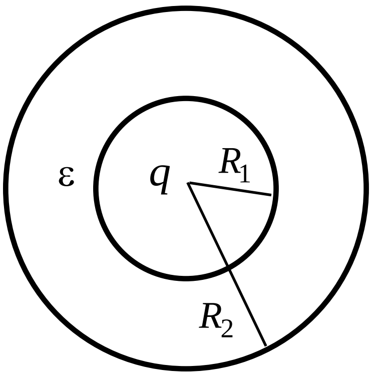

Рис. 12

Решение:

Электрическое поле создается известным сторонним зарядом q и возникшими в диэлектрике связанными зарядами, распределение которых мы не знаем. Поэтому воспользуемся теоремой Гаусса для вектора $\vec{D}$. Для вспомогательных концентрических с шаром сфер с радиусами $r > R_1$ получаем

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Внутри слоя диэлектрика

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Следовательно, напряженность поля в диэлектрике равна

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^3},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения относительно центра шара.

За пределами слоя диэлектрика и шара $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Поэтому для расстояний $r > R_2$ напряженность поля равна

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Чтобы найти связанный заряд, воспользуемся соотношениями

$$\vec{P}=\varepsilon_0\kappa\vec{E}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E} \text{ и } P_n=\sigma'.$$

Следовательно, поверхностная плотность связанного заряда на внешней поверхности диэлектрика равна

$$\sigma_2'=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_n=\frac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon R_2^2}=1{,}72 \text{ нКл/м}^2.$$

Поверхностная плотность связанного заряда на внутренней поверхности диэлектрика с учетом направления нормали к поверхности внутрь шара равна

$$\sigma_1'=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_n=-\frac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon R_1^2}=-1 \text{ мкКл/м}^2.$$

<u>Ответ:</u> $\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}$, $R_1<r<R_2$; $\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$, $r>R_2$; $\sigma_1'=-\dfrac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon R_1^2}=$ $=1$ мкКл/м^2; $\sigma_2'=\dfrac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon R_2^2}=1{,}72$ нКл/м^2.

Задача 3. Плоский воздушный конденсатор зарядили так, что напряженность электрического поля внутри его стала равной $\vec{E}_0$, и отключили от источника напряжения. Затем половину зазора заполнили однородным изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 13). Найти E и D в обеих частях зазора конденсатора. Вычисления провести, предположив E_0 = 20 кВ/м, ε = 4.

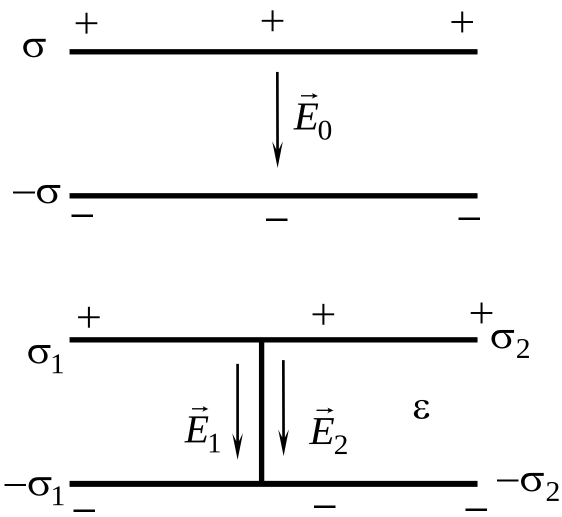

Рис. 13

Решение:

Внутри плоского воздушного конденсатора поле однородно и модуль его напряженности

$$E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда конденсатора. После заполнения половины зазора диэлектриком заряд конденсатора не изменился:

$$q=\sigma S=\sigma_1\frac{S}{2}+\sigma_2\frac{S}{2}.$$

Однако произошло перераспределение зарядов на пластинах, так как на поверхности диэлектрика возникли связанные заряды. Пластина над воздушным слоем, заряженная с поверхностной плотностью σ_1, создает поле, модуль напряженности которого

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}.$$

Поле в зазоре с диэлектриком создается как сторонними, так и связанными зарядами. Векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ перпендикулярны пластинам конденсатора. В силу граничных условий тангенциальные составляющие этих векторов у границы раздела воздух-диэлектрик равны

$$E_1 = E_2.$$

Вектор $\vec{D}$ определяется распределением только сторонних зарядов:

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 = \sigma_1,\; D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_2 = \sigma_2.$$

Следовательно, поверхностные плотности зарядов в силу равенства напряженностей связаны соотношением

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Так как $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, находим

$$\sigma_1 = \frac{2\sigma}{1+\varepsilon}, \sigma_2 = \frac{2\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon}.$$

Таким образом, получаем

$$D_1 = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{1+\varepsilon}, D_2 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon E_0}{1+\varepsilon} \text{ и } E_1 = E_2 = \frac{2E_0}{1+\varepsilon} = 8 \text{ кВ/м}.$$

Ответ: $D_1 = \dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{1+\varepsilon}$ = 70,8 нКл/м^2, $D_2 = \varepsilon D_1$ = 354 нКл/м^2, $E_1 = E_2 = \dfrac{2E_0}{1+\varepsilon}$ = 8 кВ/м.

Задача 4. У плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$ напряженность электрического поля в вакууме равна $\vec{E}_0$ (E_0 =100 В/м), причем вектор $\vec{E}_0$ составляет угол $\vartheta = 30^\circ$ с нормалью к поверхности диэлектрика (рис. 14). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найти поток вектора $\vec{E}$ через сферу радиусом R = 10 см с центром на поверхности диэлектрика.

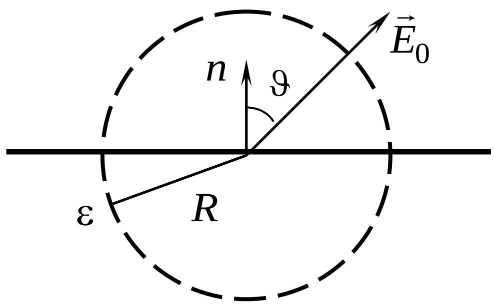

Рис. 14

Решение:

Для определения однородного поля $\vec{E}$ в диэлектрике воспользуемся граничными условиями. В результате получаем выражения для тангенциальной и нормальной составляющих вектора $\vec{E}$:

$$E_\tau = E_{0\tau}, \Rightarrow E_\tau = E_0 \sin\vartheta, D_n = D_{0n} \Rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon E_n = \varepsilon_0 E_{0n} \Rightarrow E_n = \frac{E_0 \cos\vartheta}{\varepsilon}.$$

Поток через сферу равен сумме потоков через верхнюю и нижнюю полусферы, которые разделены поверхностью диэлектрика. Замкнем эти полусферы двумя близко расположенными к поверхности диэлектрика кругами радиусом R (один из них пусть находится в вакууме, а другой – в диэлектрике). Внутри каждой из этих замкнутых поверхностей отсутствуют заряды. Поэтому в соответствии с теоремой Гаусса потоки вектора напряженности равны нулю. Следовательно, поток через верхнюю полусферу равен потоку через верхний круг, вектор нормали к которому $\vec{n}$:

$$E_0 \cdot \pi R^2 \cos\vartheta.$$

Поток через нижнюю полусферу равен потоку через нижний круг, вектор нормали к которому $-\vec{n}$:

$$-E_n \cdot \pi R^2 = -\frac{E_0 \cdot \pi R^2 \cos\vartheta}{\varepsilon}.$$

Поток через сферу равен сумме двух полученных потоков:

$$\Phi = \frac{\pi(\varepsilon - 1) R^2 E_0 \cos\vartheta}{\varepsilon} = 1{,}81 \text{ В·м.}$$

Ответ: $\frac{\pi(\varepsilon - 1) R^2 E_0 \cos\vartheta}{\varepsilon} = 1{,}81$ В·м.

Задача 5. В вакууме в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0$ (E_0 = 200 В/м) поместили шар радиусом R = 10 см из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε = 3. При этих условиях диэлектрик поляризуется однородно. Найти напряженность электрического поля в шаре и поляризованность диэлектрика.

Решение:

Однородная поляризация диэлектрика означает, что по всему объему диэлектрика поляризованность $\vec{P}$. Следовательно, ее дивергенция равна нулю. В соответствии с теоремой Гаусса для поляризованности $\vec{P}$ получаем, что объемная плотность связанных зарядов равна

$$\rho' = -(\vec{\nabla}, \vec{P}) = 0.$$

Таким образом, дополнительное электрическое поле могут создавать только связанные заряды на поверхности шара.

Поверхностная плотность связанных зарядов определяется нормальной составляющей $\vec{P}$ у границы диэлектрика: $\sigma' = P_n$. Из симметрии задачи видно, что вектор $\vec{P}$ будет направлен по вектору напряженности внешнего поля $\vec{E}_0$ (рис. 15). В точке на поверхности шара, заданной радиусом-вектором $\vec{R}$, поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P\cos\alpha .$$

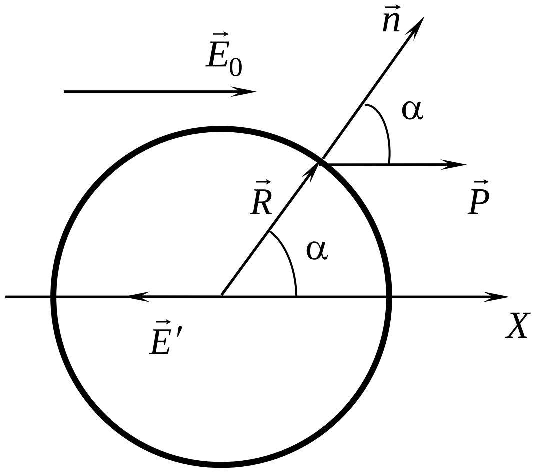

Рис. 15

Такое распределение поверхностного заряда с заменой aR на P рассматривалось в задаче 5 разд. 1. Согласно решению указанной задачи модуль напряженности поля, создаваемого связанными зарядами в центре шара, равен $E' = \dfrac{P}{3\varepsilon_0}$.

Проекция результирующего поля $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ на ось OX равна

$$E_x = E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0}.$$

Воспользовавшись соотношением $\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$, получим

$$E_x = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2},\ P_x = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0}{\varepsilon + 2}.$$

Подстановка численных значений дает E_x = 120 В/м, P_x = 2,12 нКл/м^2.

Так как шар поляризован однородно, то поляризованность во всех точках шара одинакова и дается полученным выражением. В силу связи между $\vec{P}$ и $\vec{E}$, напряженность поля также одинакова во всех точках шара и дается полученным выражением.

Ответ: Во всех точках шара напряженность поля и поляризованность определяются их проекциями на ось OX: $E_x = \dfrac{3E_0}{\varepsilon + 2}, P_x = \dfrac{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0}{\varepsilon + 2}$, E_x = =120 В/м, P_x = 2,12 нКл/м^2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вблизи точки A, на границе раздела стекло–вакуум, напряженность электрического поля в вакууме $\vec{E}_0$ (E_0 = 50 В/м) направлена под углом α_0 = = 45° к нормали. Найти напряженность $\vec{E}$ поля в стекле вблизи точки A, а также поверхностную плотность связанных зарядов в точке A. Для стекла ε = 6.

2. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho > 0$ по шару радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти модуль вектора напряженности электрического поля как функцию расстояния до центра шара r, а также объемную и поверхностную плотности связанных зарядов.

3. Напряженность электрического поля внутри воздушного конденсатора E_0 = 400 В/м . Затем конденсатор наполовину (рис. 16) заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε = 8. Найти модули векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в диэлектрике и воздушном зазоре конденсатора, если при введении диэлектрика: 1) напряжение между обкладками не менялось; 2) заряды на обкладках оставались неизменными.

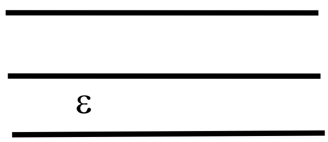

Рис. 16

4. Бесконечно большая плоскопараллельная пластина из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε толщиной $2d$ =10 см равномерно заряжена с объемной плотностью заряда ρ = 2 пКл/м^3. Найти напряженность и потенциал электрического поля, как функцию расстояния от середины пластины (потенциал в середине пластины положить равным нулю). Вычислить напряженность и потенциал на расстоянии 2 см от середины пластины.

5. Точечный заряд q = 6 нКл находится в центре диэлектрического шара радиусом R_1 =4 см проницаемостью ε_1 = 3. Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью ε_2 = 8. Найти поверхностную плотность связанного заряда на шаре и на безграничном диэлектрике.

5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Магнитное поле создается движущимися зарядами (токами). Силовой характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Точечный заряд q, движущийся с постоянной нерелятивистской скоростью $\vec{v}\,(v \ll c)$, создает в окружающем пространстве магнитное поле, вектор магнитной индукции которого

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q[\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3},$$

где μ_0 – магнитная постоянная; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения A относительно заряда (рис. 17).

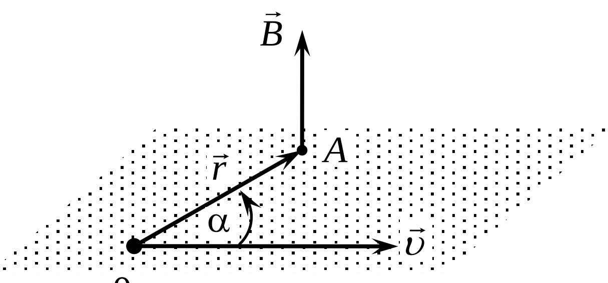

Рис. 17

Для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или токами, взятыми по отдельности: $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$.

Элементарный участок тонкого проводника $d\vec{l}$ с током I создает в окружающем пространстве магнитное поле, вектор индукции которого определяется законом Био–Савара–Лапласа:

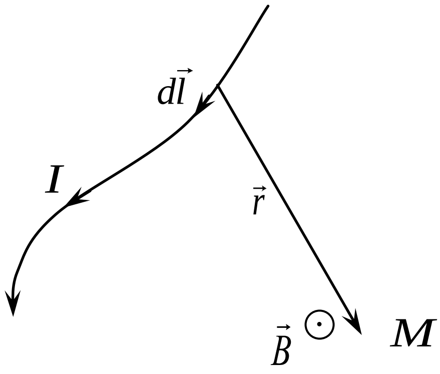

Рис. 18

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения M относительно элементарного участка $d\vec{l}$ (рис. 18). Магнитное поле, создаваемое всем тонким проводником в соответствии с принципом суперпозиции,

$$\vec{B} = \int\limits_L d\vec{B} = \int\limits_L \frac{\mu_0 I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{4\pi r^3},$$

где интегрирование проводится по всему проводнику.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Найти индукцию магнитного поля на расстоянии b = 5 см от бесконечного тонкого прямого проводника, по которому течет ток I = 1А.

Решение:

Разбиваем проводник на элементарные направленные отрезки $d\vec{l}$ с током I. Один такой отрезок создает вектор индукции магнитного поля $d\vec{B}$, который направлен перпендикулярно плоскости векторов $d\vec{l}$ и $\vec{r}$. Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор, указывающий положение точки, где определяется магнитное поле (рис. 19). Все векторы $d\vec{B}$ от произвольных элементарных участков $d\vec{l}$ одинаково направлены за плоскость рисунка. Поэтому для получения результирующего поля сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей.

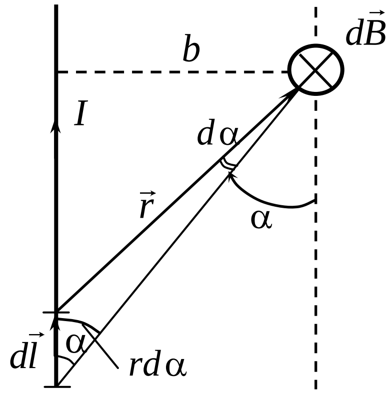

Рис. 19

Так как точка, в которой определяется магнитное поле, находится на расстоянии b от провода, то из геометрии рисунка следует, что

$$r = \frac{b}{\sin\alpha},\ dl = \frac{r\cdot d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b\cdot d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Подставив найденные значения r и dl в закон Био–Савара–Лапласа, получим

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot b\cdot d\alpha}{\sin^2\alpha\cdot b^2}\sin^3\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot\sin\alpha\cdot d\alpha.$$

Если проводник бесконечный, то угол α, который указывает положение отрезка dl на проводнике, будет изменяться в пределах от 0 до π при изменении положения отрезка на пров однике. Чтобы найти модуль магнитной индукции результирующего поля, необходимо воспользоваться принципом суперпозиции, то есть сложить модули магнитной индукции полей от всех отрезков dl:

$$B=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot\sin\alpha\cdot d\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{b}\cdot(\cos 0-\cos\pi)=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{b}=4\text{ мкТл.}$$

Ответ: $B=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{b}=4$ мкТл.

Задача 2. Найти закон изменения модуля индукции магнитного поля по высоте h над центром тонкого проволочного кольца, по которому течет ток I.

Решение:

Разобьем кольцо на элементарные отрезки $d\vec{l}$, из которых выберем два симметрично расположенных элемента тока $I\cdot d\vec{l}$ и $I\cdot d\vec{l}'$ (рис. 20). На оси OZ на высоте h данные элементы создают векторы индукции магнитного поля $d\vec{B}$ и $d\vec{B}'$, которые перпендикулярны векторам $\vec{r}$ и $\vec{r}'$. Вектор результирующего поля направлен по оси OZ так, что его модуль равен $dB_z=2\cdot dB\cdot\sin\beta$, где $\sin\beta=\frac{R}{r}=\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$, а $dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot dl}{r^2}$. Для любой пары элементов тока $I\cdot d\vec{l}$ и $I\cdot d\vec{l}'$ можно получить такой же результат. Находим, воспользовавшись принципом суперпозиции, результирующее магнитное поле, которое создает все кольцо:

$$B_z(h)=2\oint\sin\beta\cdot dB=\oint_{(2\pi R)}\frac{\mu_0\cdot Idl\cdot R}{4\pi\cdot r^2\cdot r}=\frac{\mu_0\cdot I\cdot R^2}{2\cdot(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Поле в центре витка.

В этом случае $h=0$, и мы получаем, что

$$B_z(0)=\frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R}.$$

2. Поле в дальней зоне.

В этом случае $R\ll h$, и мы получаем, что

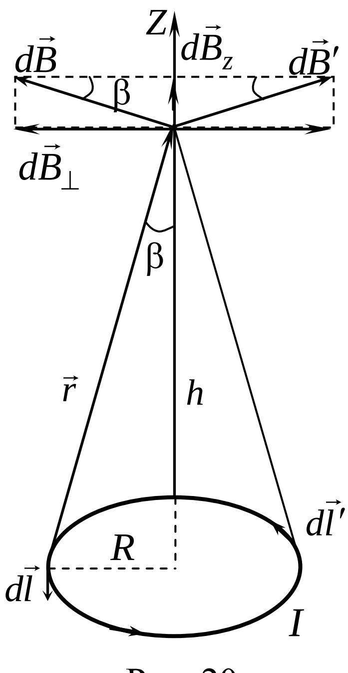

Рис. 20

$$B_z(\infty)=\lim_{\frac{R}{h}\to 0}\frac{\mu_0\cdot I\cdot R^2}{2h^3\left(\left(\frac{R}{h}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0\cdot I\cdot R^2}{2h^3}.$$

На рис. 21 представлен график функции распределения модуля индукции магнитного поля $B(h)$ по высоте h над кольцевым проводником с током.

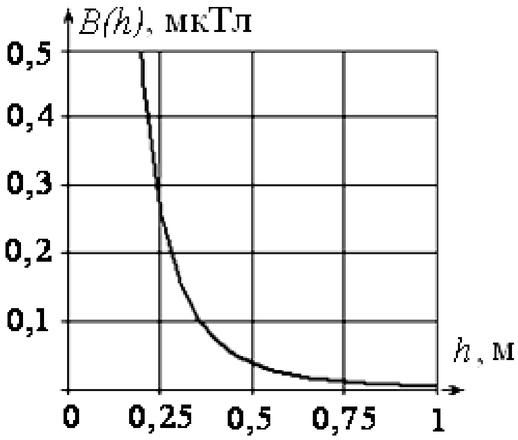

Рис. 21

<u>Ответ</u>: $B_z(h) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 3. Найти закон изменения модуля индукции магнитного поля по высоте h над центром тонкого круга, равномерно заряженным электричеством с поверхностной плотностью заряда σ. Круг вращается с постоянной угловой скоростью ω.

<u>Решение</u>:

Разобьем круг на тонкие кольцевые слои радиусом r и шириной dr (рис. 22). На площади $dS = 2\pi r dr$ находится электрический заряд $dq = \sigma dS = 2\sigma\pi r dr$. Равномерное вращение такого кольца создает постоянный круговой ток $dI = \sigma dS/T = 2\sigma\omega r dr$, где $T = 2\pi/\omega$. Из решения предыдущей задачи следует, что круговой ток dI радиусом r создает на высоте h магнитное поле, модуль индукции которого равен $dB = \dfrac{\mu_0 \cdot dI \cdot r^2}{2\cdot(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$. Для тока любого радиуса вектор магнитной индукции будет направлен вертикально вверх, поэтому результирующее магнитное поле диска можно найти по принципу суперпозиции $B(h) = \int dB = \int\limits_0^R \dfrac{\mu_0\cdot\sigma\cdot\omega\cdot r^3\cdot dr}{2\cdot(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$. Для вычисления интеграла сделаем замену переменной интегрирования $u^2 = r^2 + h^2$, откуда $udu = rdr$. После замены пределов интегрирования получаем

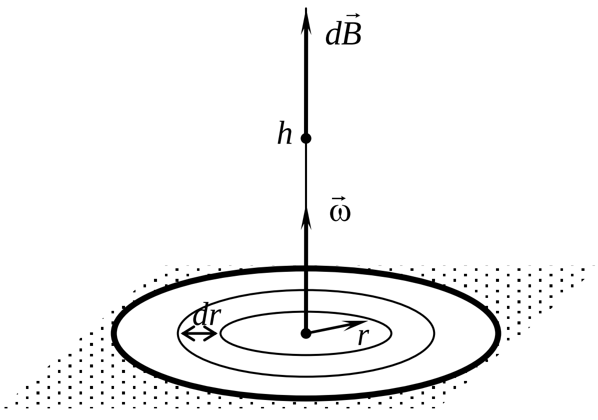

Рис. 22

$$B(h) = \frac{\mu_0}{2}\cdot\sigma\cdot\omega\int\limits_h^{\sqrt{R^2+h^2}}\left(1-h^2\cdot u^{-2}\right)du = \frac{\mu_0}{2}\cdot\sigma\cdot\omega\left(\frac{R^2+2h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2\cdot h\right).$$

Ответ: $B(h)=\frac{\mu_0}{2}\cdot\sigma\cdot\omega\left(\frac{R^2+2h^2}{\sqrt{R^2+h^2}}-2\cdot h\right).$

Задача 4. Бесконечный полый цилиндр радиусом R = 10 см заряжен электричеством с поверхностной плотностью заряда $\sigma=5\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Найти модуль индукции магнитного поля на оси цилиндра, если он приведен во вращение с угловой скоростью ω = 10 рад/с.

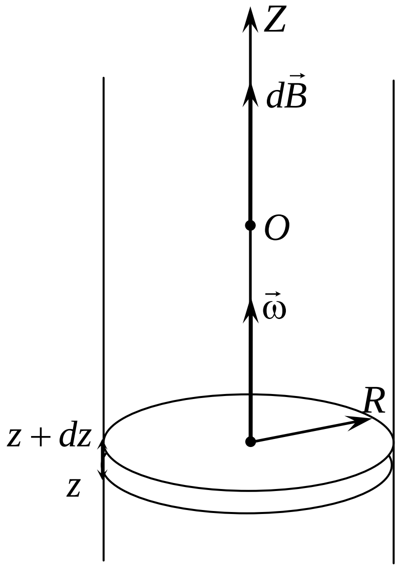

Рис. 23

Решение:

Рассмотрим тонкий цилиндр высотой dz на расстоянии Z от точки O (рис. 23). Боковая поверхность dS этого цилиндра имеет электрический заряд $dq=\sigma dS=2\sigma\pi Rdz$. Равномерное вращение создает постоянный круговой ток $dI=\sigma dS/T=\sigma\omega Rdz$, где $T=2\pi/\omega$. Воспользуемся тем, что круговой ток dI радиусом R создает на высоте z модуль индукции магнитного поля

$$dB=\frac{\mu_0\cdot dI\cdot R^2}{2\cdot\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ток любого цилиндрического слоя будет создавать вектор магнитной индукции, направленный вертикально вверх. Результирующее магнитное поле бесконечного полого цилиндра можно найти по принципу суперпозиции

$$B=\int \mathrm{d}B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0\cdot\sigma\cdot\omega\cdot R^3\cdot \mathrm{dz}}{2\cdot(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0\cdot\sigma\cdot\omega\cdot R^3}{2}\cdot\left.\frac{z}{R^2\cdot\sqrt{R^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{\infty}=$$

$$=\mu_0\cdot\sigma\cdot\omega\cdot R=6{,}28\,\text{мкТл}.$$

Ответ: $B=\mu_0\cdot\sigma\cdot\omega\cdot R=6{,}28$ мкТл.

Задача 5. Тонкий бесконечный провод изогнут в пространстве, как показано на рис. 24 . Найти модуль индукции магнитного поля в точке O, если сила постоянного тока в проводнике – I = 4,276 А, радиус дуги равен 10 см.

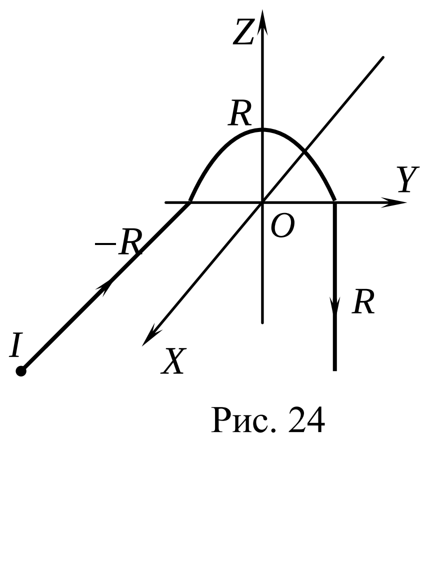

Рис. 24

Решение:

Разобьем проводник на три участка: два полубесконечных и один – половина окружности радиусом R (рис. 25).

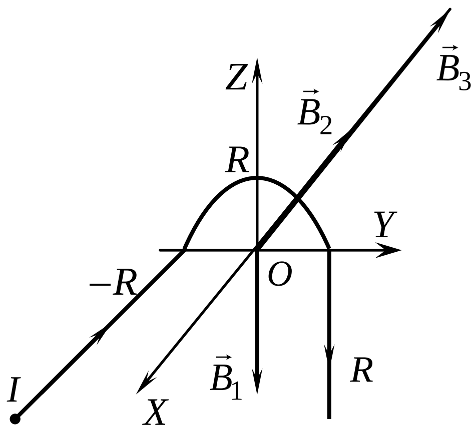

Рис. 25

Из решения задачи 1 следует, что вектор индукции магнитного поля полубесконечного проводника, который лежит в плоскости *XOY*, в точке *O* направлен в отрицательном направлении оси *OZ*, а его модуль равен $B_1 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{R}$. Второй полубесконечный проводник, который лежит в плоскости *YOZ*, в точке *O* создает вектор индукции магнитного поля, направленный в отрицательном направлении оси *OX* и равный по модулю $B_2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{R}$. Из решения задачи 2 следует, что модуль вектора индукции магнитного поля от проводника в форме половины длины окружности в точке *O* равен $B_3 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{I}{R}$. Вектор индукции магнитного поля $\vec{B}_3$ в точке *O* направлен в отрицательном направлении оси *OX*. В соответствии с принципом суперпозиции вектор результирующего поля равен $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R} + \right.$ $\left. + \frac{\mu_0}{4}\cdot\frac{I}{R}\right)\cdot\vec{j} - \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R}\vec{k}$. Соответственно, модуль этого вектора

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R} + \frac{\mu_0}{4}\cdot\frac{I}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R}\right)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R}\cdot\sqrt{\pi^2 + 2\cdot\pi + 2} = 18{,}28\ \text{мкТл}.$$

<u>Ответ</u>: $\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R}\cdot\sqrt{\pi^2 + 2\cdot\pi + 2} = 18{,}28\ \text{мкТл}$.

Задача 5. Постоянный ток равномерно распределен по плоскости *XOY* так, что модуль его линейной плотности во всех точках плоскости одинаков и равен $j = 3{,}14\,\frac{\text{А}}{\text{м}}$ (рис. 26). Определить модуль индукции магнитного поля на высоте 10 см над этой плоскостью.

Рис. 26

<u>Решение</u>:

Пусть ток течет в положительном направлении оси *OX*. Рассмотрим на оси *OY* на расстоянии от начала координат *Y* участок шириной dy, тогда каждый такой участок пересекает ток величиной $dI = jdy$.

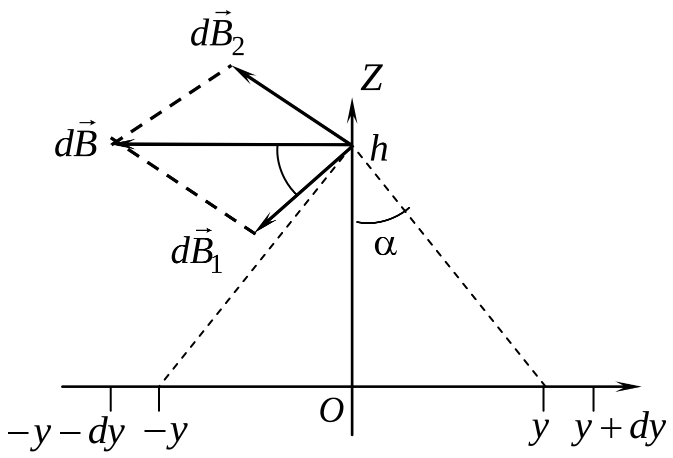

Рис. 27

Ток, проходящий через координату Y на рис. 27, создает на высоте h вектор магнитной индукции $d\vec{B}_1$. Симметрично расположенный относительно оси OZ ток создает на высоте h вектор магнитной индукции $d\vec{B}_2$. По принципу суперпозиции определяем результирующее поле как вектор $d\vec{B} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2$, направленный по построению перпендикулярно к оси OZ, так как токи текут вдоль оси OX. Модуль индукции магнитного поля от первого проводника находим по аналогии с задачей для линейного тока: $dB_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mu_0}{\pi}\cdot\dfrac{dI}{\sqrt{y^2+h^2}}$. Модуль индукции результирующего поля, создаваемого двумя токами, вычисляем как длину диагонали ромба: $dB = 2\cdot dB_1\cdot\cos\alpha$, где $\cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+y^2}}$. Чтобы найти модуль индукции результирующего поля, создаваемого всей плоскостью, вычисляем интеграл: $B = \int 2\cos\alpha dB_1 = \; = \int\limits_0^{\infty}\dfrac{\mu_0}{\pi}\dfrac{h}{\sqrt{y^2+h^2}}\dfrac{jdy}{\sqrt{y^2+h^2}} = \dfrac{\mu_0 j}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{du}{u^2+1}$.

В интеграле сделана замена переменной $y = h\cdot u$, в итоге получаем следующее выражение:
$$B = \frac{\mu_0\cdot j}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \frac{\mu_0\cdot j}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\infty - \mathrm{arctg}0\right) = \frac{\mu_0}{2}\cdot j = 18{,}28 \text{ мкТл}.$$

Отметим, что результат не зависит от высоты h.

Ответ: $B = \left(\mu_0/2\right)\cdot j = 18{,}28$ мкТл.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Бесконечный провод с током I имеет форму, указанную на рис. 28

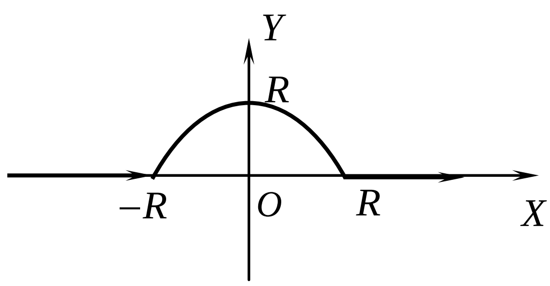

Рис. 28

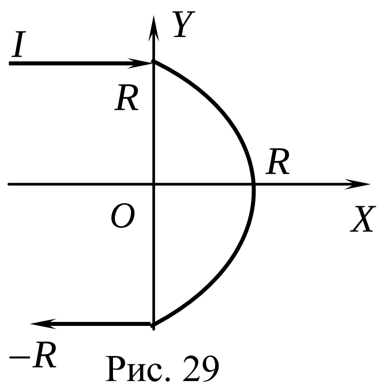

Рис. 29

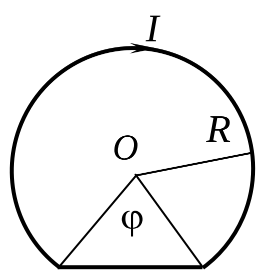

Рис. 30

(R– радиус полуокружности). Найти модуль индукции магнитного поля в точке O.

2. Бесконечный провод с током I имеет форму, указанную на рис. 29 (R– радиус полуокружности). Найти модуль индукции магнитного поля в точке O.

3. Контур с током имеет форму, указанную на рис. 30. Найти модуль индукции магнитного поля в точке O.

4. Конус с основанием радиусом R и высотой h равномерно заряжен электричеством с поверхностной плотностью электрического заряда σ по боковой поверхности. Найти модуль индукции магнитного поля в центре основания, если конус равномерно вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω.

5. Сфера радиусом R равномерно заряжена электричеством с поверхностной плотностью электрического заряда σ. Найти модуль индукции магнитного поля в центре сферы, если она равномерно вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω.

6. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА $\vec{B}$

Циркуляция вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на μ_0: $\oint\limits_{(l)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum\limits_{k=1}^{N} I_k$.

Токи входят в алгебраическую сумму со знаком плюс, если с острия тока обход контура выглядит происходящим против часовой стрелки.

Дифференциальная форма закона: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, где $\vec{j}$– плотность тока проводимости.

Теорема о циркуляции лежит в основе одного из фундаментальных уравнений современной электродинамики. С помощью теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в некоторых случаях можно относительно просто рассчитать результирующее магнитное поле от протяженных объектов. Методика расчета включает в себя следующие этапы:

1) контур проводят через точку, в которой определяется индукция магнитного поля;

2) контур выбирается с учетом симметрии силовых линий магнитного поля.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. По бесконечному цилиндру радиусом R течет ток, плотность которого является функцией расстояния от оси цилиндра: $j(r) = j_0 \cdot r$. Найти закон зависимости индукции магнитного поля $B(r)$ от расстояния.

Решение:

Рассмотрим некоторую точку внутри цилиндра на удалении r_1 от его оси (рис. 31). Проведем окружность радиусом r_1 через эту точку. Плоскость окружности перпендикулярна оси цилиндра. Данная окружность совпадает с силовой линией такого же радиуса. Поэтому в любой точке окружности вектор $\vec{B}_1 = \vec{B}(r_1)$ будет параллелен направленному элементу контура $d\vec{l}_1$, модуль вектора индукции магнитного поля будет постоянной величиной для любого элемента $d\vec{l}_1$:

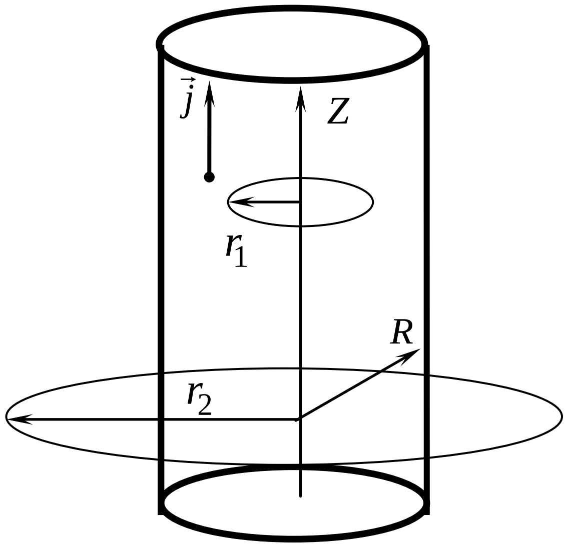

Рис. 31

$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1 \cdot dl \cdot \cos 0 = B_1 \cdot dl$. Направление обхода контура выберем против часовой стрелки. Тогда вычисление циркуляции дает следующее: $\oint\limits_{(l_1)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1 \cdot \oint\limits_{(l_1)} dl = B_1 \cdot 2\pi r_1$. Далее находим произведение суммарного тока, охватываемого контуром, на магнитную постоянную: $\mu_0 \int\limits_{(S_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int\limits_0^{r_1} j_0 \cdot r \cdot 2\pi r dr = \dfrac{2}{3}\pi\mu_0 r_1^3 j_0$. Из равенства, выражающего теорему о циркуляции, имеем: $B(r_1) = \dfrac{2}{3}\mu_0 \dfrac{\pi r_1^3 j_0}{2\pi r_1} = \dfrac{1}{3}\mu_0 r_1^2 j_0$.

Повторяем процедуру для определения индукции магнитного поля $\vec{B}(r_2)$ в некоторой точке внутри цилиндра на удалении r_2 от оси цилиндра. Отличие состоит в вычислении суммарного тока, так как ток ограничен окружностью радиусом R: $\mu_0 \int\limits_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int\limits_0^{R} j_0 \cdot r \cdot 2\pi r dr = \dfrac{2}{3}\pi\mu_0 R^3 j_0$. Вычисление циркуляции дает следующее: $\oint\limits_{(l_2)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \oint\limits_{(l_2)} dl = B \cdot 2\pi r_2$. Из равенства, выражающего теорему о циркуляции, имеем $B(r_2) = \dfrac{2}{3}\mu_0 \dfrac{\pi R^3 j_0}{2\pi r_2} = \dfrac{1}{3}\mu_0 \dfrac{R^3}{r_2} j_0$.

Ответ: $B(r_1) = \dfrac{1}{3}\mu_0 r_1^2 j_0$, $B(r_2) = \dfrac{1}{3}\mu_0 \dfrac{R^3}{r_2} j_0$.

Задача 2. Найти модуль индукции магнитного поля внутри тонкого соленоида с током $I = 1$ А и плотностью намотки $n = 3{,}14 \cdot 10^3$ м $^{-1}$.

Решение:

Магнитную индукцию поля бесконечно длинного соленоида можно вычислить, используя теорему о циркуляции. Соленоид представляет собой тонкий провод, навитый плотно виток к витку на цилиндрический каркас (рис. 32). Он эквивалентен системе одинаковых круговых токов с общей прямой осью. Бесконечно длинный соленоид симметричен относительно любой плоскости, проведенной через его ось симметрии. В любой точке внутри соленоида вектор $\vec{B}$ имеет направление, параллельное оси, магнитное поле сосредоточено внутри соленоида. Возьмем прямоугольный контур $(a-b-c-d)$, выберем обход по часовой стрелке. Циркуляцию вектора $\vec{B}$ можно представить следующим образом:

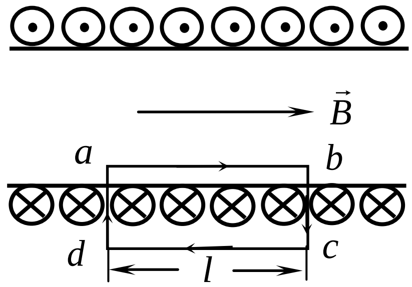

Рис. 32

$$\oint\limits_{(abcd)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_{(ab)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \oint\limits_{(bc)} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \oint\limits_{(cd)} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \oint\limits_{(da)} \vec{B}_4 \cdot d\vec{l}_4.$$

Второй и четвертый интегралы равны нулю, так как вектор $\vec{B}$ перпендикулярен участкам контура, по которым они берутся. Для этих элементов контура скалярные произведения обращаются в нуль: $\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = 0$, $\vec{B}_4 \cdot d\vec{l}_4 = 0$. На участке $(c-d)$, который является внешним для соленоида, магнитное поле равно нулю. В итоге получаем $\oint\limits_{(abcd)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_{(ab)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = B_1 \cdot \int\limits_0^l dl_1 = B_1 \cdot l$. Далее вычисляем правую сторону теоремы. Учитываем, что контур охватывает суммарный ток $\mu_0 \sum\limits_{k=1}^{N} I_k = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I$, где n – плотность намотки витков соленоида. Приравнивая обе части теоремы, получаем модуль индукции магнитного поля внутри соленоида: $B = B_1 = \mu_0 \cdot n \cdot I = 4$ мТл.

Ответ: $B = \mu_0 \cdot n \cdot I = 4$ мТл.

Задача 3. Постоянный ток равномерно распределен по плоскости *XOY* так, что модуль его линейной плотности во всех точках плоскости одинаков и равен $j = 3{,}14 \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$ (рис. 33). Определить модуль индукции магнитного поля на высоте 10 см над этой плоскостью, если ток течет в положительном направлении оси *OX*.

Решение:

Рассмотрим множество токов, которые текут перпендикулярно оси OY (рис. 33). Возьмем прямоугольный контур $(a-b-c-d)$, выберем обход против часовой стрелки. Циркуляцию вектора $\vec{B}$ можно представить следующим образом:

$$\oint\limits_{(abcd)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_{(ab)} \vec{B}_1\cdot d\vec{l}_1 + \oint\limits_{(bc)} \vec{B}_2\cdot d\vec{l}_2 + \oint\limits_{(cd)} \vec{B}_3\cdot d\vec{l}_3 + \oint\limits_{(da)} \vec{B}_4\cdot d\vec{l}_4.$$

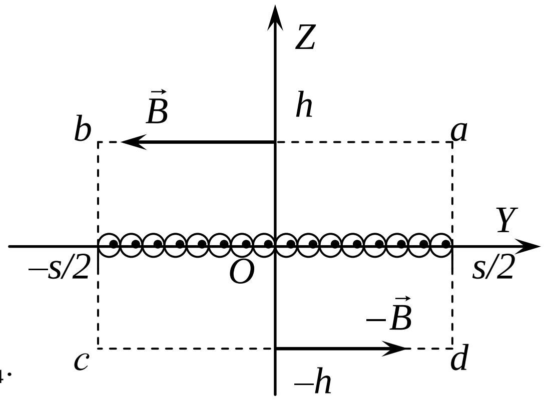

Рис. 33

Второй и четвертый интегралы равны нулю, так как в силу произвольности контура длины сторон можно выбрать: $bc = da = 0$. Для остальных элементов контура скалярные произведения имеют вид: $\vec{B}_1\cdot d\vec{l}_1 = B\cdot dl$, $\vec{B}_3\cdot d\vec{l}_3 = B\cdot dl$. В итоге для левой стороны теоремы получаем: $\oint\limits_{(abcd)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2B\cdot\int\limits_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} dl = 2B\cdot s$. Далее вычисляем правую сторону теоремы. Учитываем, что контур охватывает суммарный ток $\mu_0\sum\limits_{k=1}^{N} I_k = \mu_0\cdot j\cdot s$, где n – плотность намотки витков соленоида. Приравнивая обе части теоремы, получаем модуль индукции магнитного поля внутри соленоида: $B = (\mu_0/2)\cdot j = 18{,}28$ мкТл.

Ответ: $B = (\mu_0/2)\cdot j = 18{,}28$ мкТл.

Задача 4. По бесконечному цилиндру течет ток постоянной плотностью j. Цилиндрическая полость размещена так, что ее ось параллельна оси цилиндра и находится на расстоянии s от оси цилиндра. Найти закон изменения модуля индукции магнитного поля внутри полости (рис. 34).

Решение:

Отсутствие тока в полости можно представить как суперпозицию плотностей токов, текущих в противоположных направлениях (рис. 34). Тогда мы имеем

1) один цилиндр с осью OZ, внутри которого течет вверх постоянный ток плотностью $\vec{j}$;

2) второй цилиндр с осью OZ', внутри которого течет вниз постоянный ток плотностью $(-\vec{j})$.

Находим индукцию магнитного поля внутри полости в точке A по принципу суперпозиции полей двух цилиндров: $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$. Определим модуль индукции B_1 от большего цилиндра в точке A, выбирая обход по окружности радиусом r_1 против часовой стрелки:

$$\oint_{(l_1)} \vec{B}_1\cdot d\vec{l}=\vec{B}_1\cdot\oint_{(l_1)} d\vec{l}=B_1\cdot 2\pi r_1=\mu_0\int_0^{r_1} j2\pi r dr,\ B_1=\frac{\mu_0}{2}jr_1.$$

Определим модуль индукции B_2 от меньшего цилиндра в точке A, выбирая обход по окружности радиуса r_2 по часовой стрелке:

$$\int_{(l_2)} \vec{B}_2\cdot d\vec{l}=\vec{B}_2\cdot\int_{(l_2)} d\vec{l}=B_2\cdot 2\pi r_2=-\mu_0\int_0^{r_2} j\cdot 2\pi r dr,$$

$$B_2=\frac{\mu_0}{2}jr_2.$$

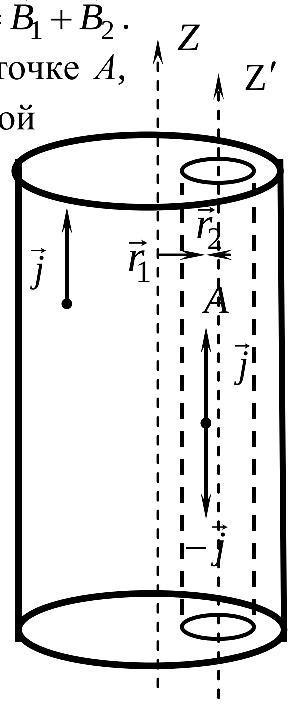

Рис. 34

В векторном виде

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0[\vec{j},\vec{r}_1]}{2}\ \text{и}\ \vec{B}_2=-\frac{\mu_0[\vec{j},\vec{r}_2]}{2}.$$

Результирующее поле в полости

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0[\vec{j},\vec{r}_1-\vec{r}_2]}{2}=\frac{\mu_0[\vec{j},\vec{s}]}{2},\ B=\frac{\mu_0}{2}j\cdot s.$$

Ответ: $B=\dfrac{\mu_0}{2}j\cdot s$.

Задача 5. Постоянный ток I течет по полубесконечному прямому проводнику, а затем растекается радиально симметрично по проводящей плоскости, перпендикулярной проводу. Найти закон изменения модуля индукции магнитного поля: 1) на высоте h над плоскостью и на расстоянии r от проводника; 2) на глубине h под плоскостью и на расстоянии r от проводника (рис. 35).

Решение:

Рассмотрим круговой контур радиусом r, плоскость которого перпендикулярна проводнику и проходит через точку A_1. Используя закон Био–Савара–Лапласа, легко доказать, что в точке A_1 поля от прямого проводника и от плоскости с током направлены по касательной к выбранному контуру. Выбирая обход контура по часовой стрелке, получаем теорему о циркуляции: $\oint_{(l_{A_1})} \vec{B}_1\cdot d\vec{l}=B_1\cdot 2\pi r=\mu_0\cdot I$. Правая сторона содержит только ток проводника, так как токи плоскости не попадают в контур. Для точки A_1 получаем следующий результат: $B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$.

Рассмотрим круговой контур радиусом r, плоскость которого перпендикулярна проводнику и проходит через точку A_2. В этом случае ни один не пересекает поверхность контура, поэтому индукция магнитного поля в этой точке равна нулю.

<u>Ответ</u>: $B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$, $B_2 = 0$.

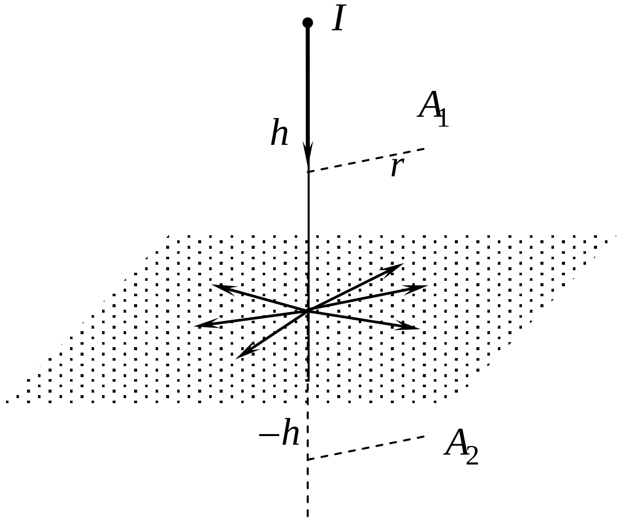

Рис. 35

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. По бесконечному цилиндру радиусом R течет ток, плотность которого является функцией расстояния от оси цилиндра: $j(r) = j_0 r^2$. Найти закон зависимости индукции магнитного поля $B(r)$ от расстояния r.

2. Бесконечный полый цилиндр радиусом R заряжен электричеством с поверхностной плотностью заряда σ. Найти модуль индукции магнитного поля как функцию расстояния r от оси цилиндра $B(r)$, если он приведен во вращение с угловой скоростью ω.

3. Магнитное поле создается токами, равномерно распределенными по двум параллельным проводящим плоскостям. Найти закон изменения модуля индукции магнитного поля между плоскостями и с внешней стороны, если плотности токов имеют одинаковый модуль j, но направлены в противоположные стороны.

4. По обмотке тороида с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2, имеющим N витков, течет ток силой I. Найти модуль индукции магнитного поля как функцию расстояния r от оси симметрии $B(r)$.

5. Постоянный ток течет по полубесконечному прямому проводнику, а затем растекается радиально симметрично по проводящей среде, плоскость которой перпендикулярна проводнику. Найти закон изменения модуля индукции магнитного поля: 1) на высоте h над средой и на расстоянии r от проводника; 2) на глубине h в среде и на расстоянии r от проводника.

7. СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ЗАКОНЫ

На элементарный участок $d\vec{l}$ тонкого проводника с током I, в месте нахождения которого создано магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, со стороны этого поля действует сила Ампера:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right].$$

Вектор $d\vec{l}$ направлен по касательной к проводнику в направлении тока.

На точечный заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в электрическом и магнитном полях, действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right].$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

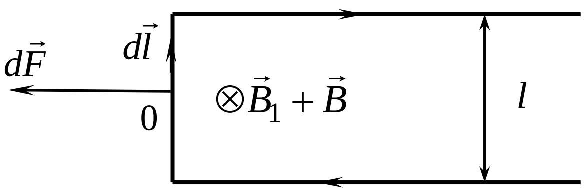

Рис. 36

Задача 1. По П-образному проводу, параллельные участки которого расположены на расстоянии $l = 1$см друг от друга, течет ток I = 10 А. Найти силу, действующую на единицу длины провода в точке O (рис. 36).

Решение:

Два параллельных участка провода в точке O создают магнитные поля, индукция которых одинакова: $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$. Оба вектора индукции направлены от нас в рисунок. Их модули равны

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot l/2}.$$

Третий участок, соединяющий параллельные участки, как видно из закона Био–Савара, магнитного поля в точке O не создает. Следовательно, индукция магнитного поля в точке O направлена в рисунок и ее модуль равен

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi l}.$$

На участок провода $d\vec{l}$ действует сила Ампера: $d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$. Модуль этой силы равен

$$dF = IB \cdot dl = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l} \cdot dl.$$

Модуль силы, действующей на единицу длины участка, равен

$$F_{\text{ед}} = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l} = 0{,}4\,\frac{\text{мН}}{\text{м}}.$$

Задача 2. Тонкий стержень массой m = 11,1 мг и длиной S = 1 см, подвешенный в горизонтальном положении на двух нитях длиной l = 1 м, находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией 1 мТл, направленном перпендикулярно стержню (рис. 37). По стержню течет ток I_0 = 1 А. Найти период малых колебаний такого стержня.

Решение:

На рис. 37 провод расположен перпендикулярно к плоскости рисунка, ток идет от нас. Воспользуемся уравнением динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_{iz}^{\text{внешн}}.$$

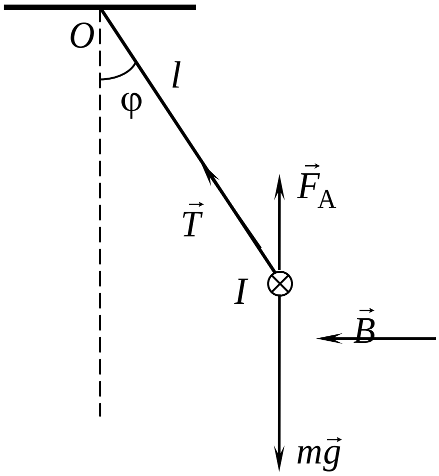

Рис. 37

Ось OZ проходит через точку подвеса O перпендикулярно рисунку и направлена на нас. Момент инерции стержня $I = ml^2$. На стержень действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила Ампера $\vec{F}_{\text{A}} = I_0\left[\vec{d},\vec{B}\right]$, сила натяжения нитей $\vec{T}$. Моменты этих сил относительно оси OZ равны

$$M_{mgz} = -\ mgl\sin\varphi,\ \ M_{F_{\text{A}}z} = I_0 SBl\sin\varphi,\ \ M_{Tz} = 0.$$

Подстановка этих выражений в уравнение динамики дает

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\ mgl\sin\varphi\ +\ I_0 SBl\sin\varphi.$$

При малых колебаниях можно заменить $\sin\varphi$ на φ. В результате получаем динамическое уравнение гармонических колебаний:

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\ \frac{(mg\ -\ I_0 SB)}{l}\varphi.$$

Решениями этого уравнения являются гармонические функции, период колебаний которых определяется выражением

$$T\ = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg\ -\ I_0 SB}} = 6{,}3\ \text{с}.$$

Ответ: $T\ = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg\ -\ I_0 SB}} = 6{,}3$ с.

Задача 3. По двум длинным тонким параллельным проводникам (рис. 38) текут постоянные токи I_1= 4 А и I_2= 8 А. Расстояние между проводниками – a = 2 мм, ширина правого проводника равна b = 4 мм. Имея в виду, что оба проводника лежат в одной плоскости, найти силу магнитного взаимодействия между ними в расчете на единицу их длины.

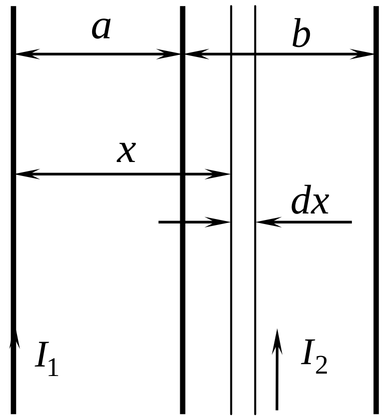

Рис. 38

Решение:

Разбиваем широкий проводник на параллельные тонкие полосы. Положение полосы задается координатой x, а ее ширина равна dx. По полосе протекает ток $dI_2 = \frac{I_2}{b}dx$. Ток I_1 создает в месте нахождения полосы магнитное поле, модуль индукции которого равен

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}.$$

Вектор $\vec{B}$ направлен в рисунок. На полосу dx длины h действует сила Ампера, направленная влево и равная по модулю

$$dF = \frac{I_2 \cdot dx}{b} \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \cdot h.$$

Сила, действующая на участок широкой полосы длиной h, равна

$$F = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi b x} \cdot dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Сила взаимодействия, приходящаяся на единицу их длины, равна

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{h} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 1{,}76\,\frac{\text{мН}}{\text{м}}.$$

Ответ: $F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 1{,}76\,\frac{\text{мН}}{\text{м}}$.

Задача 4. Из начала координат O области, где созданы однородные, параллельные оси OY электрическое и магнитное поля с напряженностью E = = 10 кВ/м и индукцией B = 1 мкТл (рис. 39), вылетает в направлении оси OX частица с удельным зарядом q/m = 10^{20} Кл/кг. Начальная скорость частицы равна v_0= = 10^7 м/с. Найти для нерелятивистского случая координату y_n частицы в момент, когда она 10 раз пересечет ось OY.

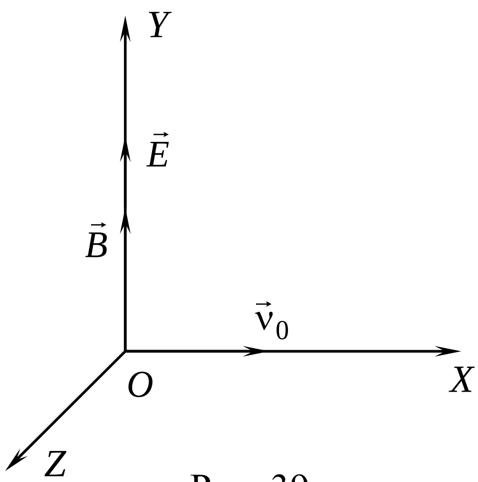

Рис. 39

Определить угол α между вектором скорости частицы и осью OY в этот момент времени.

<u>Решение:</u>

На частицу со стороны электрического поля действует сила $q\vec{E}$, направленная вдоль оси OY. Со стороны магнитного поля действует сила $q[\vec{v},\vec{B}]$, перпендикулярная оси OY. Под действием электрического поля у скорости частицы появится компонента, параллельная OY. Разобьем скорость на две составляющие: $\vec{v}_{||}$, направленную вдоль полей, и $\vec{v}_{\perp}$, лежащую в плоскости XOZ, перпендикулярной полям. Скорость частицы равна

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}.$$

Проекция уравнения движения частицы

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v},\vec{B}]$$

на ось OY

$$m\frac{dv_{||}}{dt} = qE.$$

Следовательно,

$$v_{||} = \frac{qEt}{m} \quad \text{и} \quad y = \frac{qEt^2}{2m}$$

с учетом начальных условий.

Проекция уравнения движения на плоскость XOZ имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q[\vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp},\vec{B}] \text{ или } m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q[\vec{v}_{\perp},\vec{B}].$$

Последнее уравнение формально описывает движение частицы под действием силы, перпендикулярной скорости и равной по модулю $qv_{\perp}B$. Такое движение происходит по окружности с центростремительным ускорением $v_{\perp}^2/R$ в соответствии с уравнением

$$m\frac{v_{\perp}^2}{R} = qv_{\perp}B.$$

Вследствие ортогональности силы $q[\vec{v}_{\perp},\vec{B}]$ и скорости $\vec{v}_{\perp}$ ее величина не меняется и равна $v_{\perp} = v_0$. Радиус окружности R постоянен. Частица одновременно движется с постоянной по величине скоростью $v_{\perp}$ по окружности радиусом R и возрастающей со временем скоростью $v_{||}$ вдоль оси OY. Таким образом, траектория движения представляет собой спираль на цилиндре, шаг которой возрастает. Частица будет пересекать ось OY через промежутки времени, равные времени одного оборота проекции частицы на плоскость XOZ:

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Искомая координата пересечения OY равна

$$y_n = \frac{qE(nT)^2}{2m} = \frac{2\pi^2 mEn^2}{qB^2} = 0{,}2\,\text{м}.$$

Угол между вектором скорости $\vec{v}$ и осью OY определяется соотношением

$$tg\alpha = \frac{v_\perp}{v_{||}} = \frac{v_0 B}{2\pi En} = 1{,}6\cdot 10^{-5}.$$

Ответ: $y_n = \dfrac{2\pi^2 mEn^2}{qB^2} = 0{,}2\,\text{м}$, $tg\alpha = \dfrac{v_0 B}{2\pi En} = 1{,}6\cdot 10^{-5}$.

Задача 5. С поверхности цилиндрического провода радиусом $a = 1$ см, по которому течет постоянный ток $I = 5$ А, вылетает электрон с начальной скоростью $v_0 = 10^5$ км/с, перпендикулярной поверхности провода. Найти, на какое максимальное расстояние H удалится электрон от оси провода, прежде чем повернуть обратно под действием магнитного поля тока.

Решение:

Проводник с током создает магнитное поле, модуль индукции которого равен

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y},$$

где y – расстояние от точки наблюдения до оси цилиндра. Над цилиндром вектор $\vec{B}$ направлен на нас перпендикулярно рисунку (рис. 40). На электрон действует сила, равная $(-e)\left[\vec{v},\vec{B}\right]$, которая в силу ортогональности $\vec{B}$ лежит в плоскости рисунка. Поэтому движение с учетом начальных данных будет происходить в плоскости XOY. Запишем уравнение движения:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\left[\vec{v},\vec{B}\right] = -e\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix}.$$

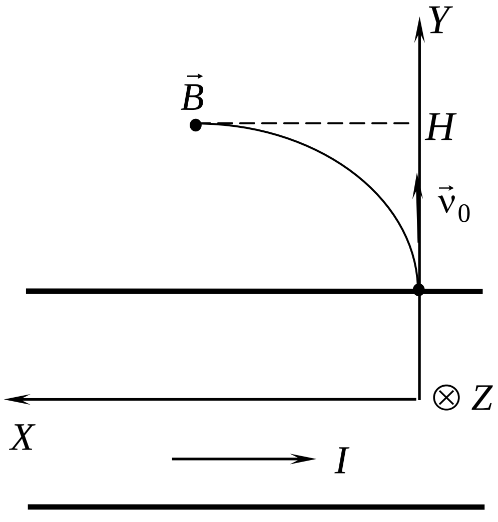

Рис. 40

Проекции на координатные оси приводят к уравнениям

$$m\frac{dv_x}{dt} = ev_y\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi y},$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -ev_x\frac{\mu_0 I}{2\pi y}.$$

Производная

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv_y}{dt}v_y = \frac{1}{2}\frac{dv_y^2}{dy}.$$

При движении частицы в магнитном поле модуль ее скорости сохраняется:

$$v_o^2 = v_x^2 + v_y^2 \text{ или } v_x = \sqrt{v_0^2 - v_y^2}\,.$$

Подставив два последних выражения в проекцию уравнения движения на ось OY, получим

$$\frac{m}{2}\frac{dv_y^2}{dy} = -e\sqrt{v_0^2 - v_y^2}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi y}.$$

После разделения переменных получаем уравнение

$$\frac{m \cdot dv_y^2}{2\sqrt{v_0^2 - v_y^2}} = -\frac{e\mu_0 I \cdot dy}{2\pi y},$$

которое легко интегрируется:

$$\int\limits_{v_y}^{0} \frac{m \cdot dv_y^2}{2\sqrt{v_0^2 - v_y^2}} = -\int\limits_{a}^{H} \frac{e\mu_0 I \cdot dy}{2\pi y}\,,$$

(при выборе пределов интегрирования мы учли, что на искомой высоте H $v_y = 0$). Выполнив интегрирование, получаем

$$m\sqrt{v_0^2 - v_y^2}\,\Bigg|_{v_0}^{0} = \frac{e\mu_0 I}{2\pi}\ln y\,\Bigg|_{a}^{H} \text{ или } mv_0 = \frac{e\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{H}{a}.$$

Отсюда находим выражение для максимальной высоты:

$$H = a\,exp\,\frac{2\pi m v_0}{e\mu_0 I} = 0{,}02\,\text{м}.$$

<u>Ответ:</u> $H = a\,exp\,\dfrac{2\pi m v_0}{e\mu_0 I} = 0{,}02\,\text{м}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Два одинаковых заряда $q = 10^{-10}$ Кл, находящихся на расстоянии $l = 10$ см друг от друга, движутся с одинаковой скоростью 10^5 м/с. Скорость $\vec{v}$ перпендикулярна прямой, проходящей через оба заряда. Найти отношение магнитной $F_{\text{м}}$ и электрической $F_{\text{э}}$ сил, действующих на один из зарядов со стороны другого.

2. Замкнутый провод имеет форму полуокружности, концы которой соединены диаметром. По проводу течет ток $I = 10$ А. Найти силу, с которой магнитное поле действует на единицу длины провода в центре диаметра.

3. Параллельно бесконечному проводу с током I = 10 А на расстоянии d = 10 см движется заряд q = 10^{-10} Кл. С какой силой провод действует на заряд?

4. На двух параллельных рельсах, расположенных под углом α к горизонту, в горизонтальном положении лежит стержень длиной l, по которому течет ток I. Найти индукцию вертикального магнитного поля, при которой стержень не скользит по перемычке. Силой трения пренебречь.

5. Квадратная рамка со стороной a лежит в одной плоскости с бесконечным длинным прямым проводом. Две стороны рамки параллельны проводу. Ближайшая из сторон находится на расстоянии d от провода. По проводу течет ток I_0, а по рамке – I. Найти силу взаимодействия провода и рамки.

8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

При помещении вещества во внешнее магнитное поле $\vec{B}_0$ магнитные моменты отдельных молекул, создаваемые молекулярными токами, стремятся ориентироваться вдоль линий индукции. В результате вещество приобретает ненулевой магнитный момент – намагничивается. Степень его намагничивания характеризуется вектором намагниченности

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum \vec{p}_m ,$$

который равен магнитному моменту единицы объема вещества. Для вектора намагниченности справедлива теорема о циркуляции:

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) = I',$$

где I' – сумма молекулярных токов, охватываемых контуром интегрирования. Молекулярные токи создают дополнительное магнитное поле $\vec{B}'$, поэтому индукция результирующего поля $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$. Теорема о циркуляции для вектора напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

включает только токи проводимости

$$\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = I.$$

При определенных условиях выполняется соотношение $\vec{J} = \chi\vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость. Тогда

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu\mu_0\vec{H},$$

где $\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость вещества.

На границе раздела двух магнетиков выполняются граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих полей:

$$B_{1n} = B_{2n},\, H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Модуль вектора индукции магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного магнетика равен 1 мТл, причем вектор $\vec{B}_0$ составляет угол $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ с нормалью к поверхности (рис. 41). Магнитная проницаемость магнетика равна μ = 141. Найти модуль вектора индукции магнитного поля в магнетике вблизи поверхности.

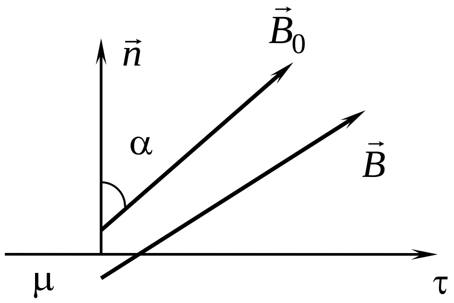

Рис. 41

Решение:

Равенство нормальных составляющих индукции магнитного поля позволяет определить

$$B_n = B_{0n} = B_0 \cos\alpha_0.$$

Тангенциальную составляющую магнитного поля определим из равенства тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля:
$H_\tau = H_{0\tau} \Rightarrow \dfrac{B_\tau}{\mu\mu_0} = \dfrac{B_{0\tau}}{\mu_0} \Rightarrow B_\tau = \mu B_{0\tau} = \mu B_0 \sin\alpha_0$. Следовательно, модуль вектора индукции магнитного поля равен

$$B = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2} = B_0\sqrt{cos^2\alpha_0 + \mu^2 sin^2\alpha_0} = 6 \text{ мТл}.$$

Ответ: $B = B_0\sqrt{cos^2\alpha_0 + \mu^2 sin^2\alpha_0} = 6$ мТл.

Задача 2. Постоянный ток I = 1 А течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом R = 5 см. Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ = 175. Найти величину поверхностного молекулярного тока $I'_{\text{пов}}$.

Решение:

В результате намагничивания возникают объемные и поверхностные молекулярные токи $I'_{\text{об}}$ и $I'_{\text{пов}}$ (рис. 42). Для их вычисления воспользуемся теоремами о циркуляции для $\vec{H}$ и $\vec{J}$. В качестве замкнутого контура L

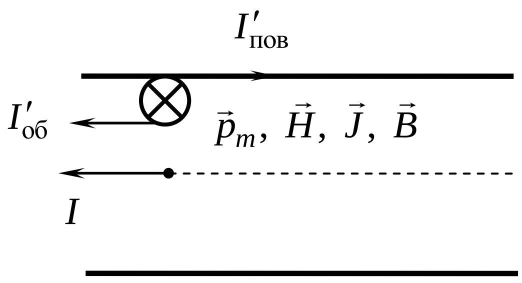

Рис. 42

выберем окружность радиусом $r < R$ с центром на оси цилиндра, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. При условии $r \to R$ получим

$$H \cdot 2\pi R = I,\ J \cdot 2\pi R = I'_{об}.$$

С учетом связи $\vec{J} = \chi\vec{H}$ получаем

$$H = I / 2\pi R,\ I'_{об} = 2\pi RJ = 2\pi R\chi H = \chi I.$$

Итак, по объему провода токи I и $I'_{об}$ протекают в одном направлении. Выделим замкнутый контур L в виде окружности радиусом $r > R, r \to R$, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра с центром на оси. Контур расположен вне магнетика, поэтому намагниченность во всех точках контура равна нулю. Следовательно, по теореме о циркуляции для $\vec{J}$ получаем

$$0 = I' = I'_{об} + I'_{пов}.$$

Поверхностный молекулярный ток равен

$$I'_{пов} = -I'_{об} = -\chi I = -175\,\text{А}.$$

Знак минус указывает на то, что этот ток течет в обратном направлении по отношению к I.

<u>Ответ:</u> $I'_{пов} = -\chi I = -175\,\text{А}$.

Задача 3. Прямой, бесконечно длинный проводник с током I = 1 А лежит в плоскости раздела двух непроводящих сред с магнитными проницаемостями μ_1= 125 и μ_2 = = 175. Найти модуль вектора индукции магнитного поля на расстояния r = 2,65 см от провода. Иметь в виду, что линии вектора $\vec{B}$ являются окружностями с центром на оси проводника (рис. 43).

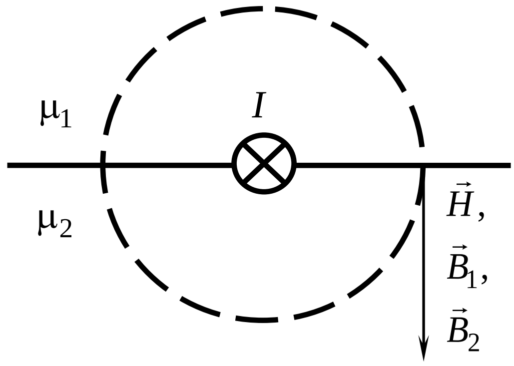

Рис. 43

<u>Решение:</u>

В силу граничных условий $B_1 = B_2$. Так как $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, то линиями $\vec{H}$ будут также окружности. По теореме о циркуляции для вектора $\vec{H}$ получаем

$$H_1 \cdot \pi r + H_2 \cdot \pi r = I.$$

Воспользовавшись соотношениями

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1\mu_0} = \frac{B}{\mu_1\mu_0},\ H_2 = \frac{B_2}{\mu_2\mu_0} = \frac{B}{\mu_2\mu_0},$$

получаем, что модуль вектора индукции равен

$$B_1 = B_2 = B = \frac{\mu_0\mu_1\mu_2 I}{\pi r(\mu_1 + \mu_2)} = 1{,}1\,\text{мТл}.$$

Ответ: $B_1 = B_2 = \dfrac{\mu_0\mu_1\mu_2 I}{\pi r(\mu_1+\mu_2)} = 1{,}1\,\text{мТл}$.

Задача 4. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Диаметр середины кольца – d = 10 см. Ширина зазора b = 1 мм, индукция магнитного поля в зазоре B= 0,8 мТл. Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, найти модуль вектора напряженности магнитного поля внутри магнита.

Решение:

Вспомогательный замкнутый контур выбираем в виде окружности диаметром d, проходящей в середине кольца. В отсутствие макроскопических токов циркуляция $\vec{H}$ по выбранному контуру равна нулю:

$$H_1(\pi d - b) + H_2 b = 0,$$

где H_1 – напряженность поля в магните, H_2 – напряженность поля в зазоре.

Так как по условию задачи нам известна индукция в зазоре B, то мы можем определить напряженность магнитного поля в зазоре $H_2 = B/\mu_0$. Подстановка этого выражения в теорему о циркуляции дает напряженность магнитного поля в магните

$$H_1 = \frac{Bb}{\pi\mu_0 d} = 2\,\frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Здесь мы опустили знак минус и учли, что $d >> b$.

Ответ: $H_1 = \dfrac{Bb}{\pi\mu_0 d} = 2\,\dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

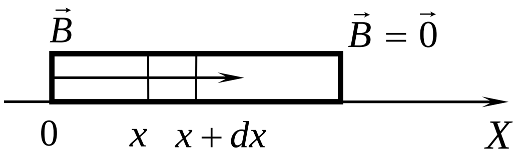

Рис. 44

Задача 5. Длинный тонкий цилиндрический стержень из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ= 175 и площадью поперечного сечения S= 1,21 мм^2 расположен вдоль оси катушки с током. Один конец стержня находится в центре катушки, где индукция магнитного поля равна B = 0,1 Тл, а другой конец – в области, где магнитное поле практически отсутствует (рис. 44). С какой силой катушка действует на стержень?

Решение:

Разбиваем цилиндр на небольшие участки длиной dx. Каждый такой участок обладает магнитным моментом

$$dp_m = J \cdot dV = JS \cdot dx.$$

Намагниченность

$$J = \chi H = \frac{\chi B}{\mu_0(1+\chi)}.$$

Магнитное поле в области расположения цилиндра неоднородно. Поэтому на каждый выделенный элемент действует сила, проекция которой равна

$$dF_x = dp_m \frac{dB}{dx} = \frac{\chi BS \cdot dx}{\mu_0(1+\chi)} \frac{dB}{dx}.$$

Проекция силы, действующей на весь цилиндр, равна

$$F_x = \int_0^l dF = \int_0^l \frac{\chi BS \cdot dx}{\mu_0(1+\chi)} \frac{dB}{dx} = \int_B^0 \frac{\chi SB \cdot dB}{\mu_0(1+\chi)} = -\frac{\chi SB^2}{2\mu_0(1+\chi)} = -1{,}5\,\text{мН}.$$

Знак минус указывает на то, что сила направлена влево.

Ответ: $F_x = -\dfrac{\chi SB^2}{2\mu_0(1+\chi)} = -1{,}5\,\text{мН}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$ помещена бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного изотропного магнетика с проницаемостью μ. Пластина расположена перпендикулярно линиям $\vec{B}_0$. Найти напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в магнетике.

2. Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом R. Материалом провода является парамагнетик с восприимчивостью χ. Найти зависимость индукции B от расстояния r до оси провода и плотность тока намагничивания j' внутри провода.

3. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика равна B, и вектор $\vec{B}$ составляет угол α с нормалью $\vec{n}$ к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика равна μ. Найти поток вектора $\vec{H}$ через поверхность сферы S радиусом R, центр которой лежит на поверхности магнетика.

4. На железном сердечнике в виде тора со средним радиусом R имеется обмотка с общим числом витков N. В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной b. При токе I через обмотку индукция магнитного поля в зазоре равна B. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти магнитную проницаемость железа при этих условиях.

5. Небольшой шарик объемом V из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ медленно переместили вдоль оси катушки с током из

точки, где индукция магнитного поля равна B, в область, где магнитное поле практически отсутствует. Какую при этом совершили работу?

9. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Явление электромагнитной индукции состоит в том, что в замкнутом проводящем контуре при любом изменении магнитного потока, который охватывается этим контуром, возникает электрический ток. Данный ток получил название индукционного, и он связан с величиной ЭДС индукции ε_i следующим образом: $I_i = \varepsilon_i / R$.

Закон Фарадея устанавливает, что ЭДС индукции ε_i равна скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, взятой со знаком минус: $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$. Знак минус – математическое выражение правила Ленца о направлении индукционного тока: индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим полем противодействовать изменению магнитного потока.

Приведенное выражение для ЭДС индукции контура является совершенно универсальным, не зависящим от способа изменения потока магнитной индукции. Магнитный поток является функцией времени, если хотя бы одна из величин является функцией времени: $B = B(t)$, $S = S(t)$, $\alpha = \alpha\ (t)$. Данный факт следует из определения потока вектора: $\Phi = \int\limits_{(S_п)} B \cdot \cos(\alpha) \mathrm{d}S$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Виток изолированного медного провода изогнут путем перекручивания в виде восьмерки. Найти направление индукционного тока в контуре, если вектор индукции однородного магнитного поля перпендикулярен плоскости контура (рис. 45), а его модуль увеличивается с течением во времени.

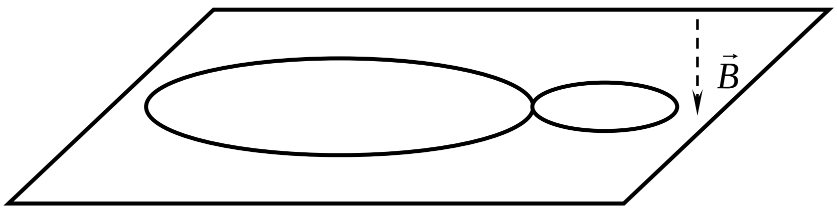

Рис. 45

Решение:

Обозначим площади контуров как S_1 и S_2 (рис. 46). Полная ЭДС определяется как алгебраическая сумма ЭДС контуров ε_{i1} и ε_{i2}. Поток вектора $\vec{B}$ с течением времени через площади контуров S_1 и S_2 растет и создает в контуре индукционный ток, направление которого указан на рис. 46. В соответствии с правилом Ленца этот ток порождает дополнительный магнитный поток, противодействующий изменению внешнего магнитного потока. Знаки ЭДС ε_{i1} и ε_{i2} будут разными, однако ток течет в направлении,совпадающем с направлением ЭДС ε_{i1}.

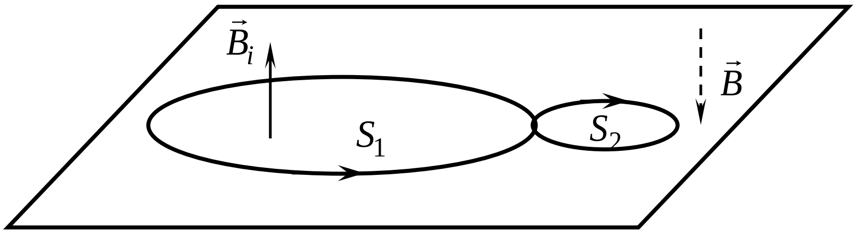

Рис. 46

Задача 2. Форма проводника описывается уравнением параболы $y = kx^2$. По проводнику движется вверх с постоянным ускорением a горизонтальная проводящая перемычка. Вся конструкция находится во внешнем магнитном поле с индукцией B. Найти зависимость ЭДС индукции от высоты подъема перемычки y, если начальная скорость перемычки равна нулю.

<u>Решение</u>:

Пусть перемычка за время dt перемещается вверх из точки с координатой y в точку с координатой $y + dy$. При этом площадь прямоугольника на рис. 47 определяется как $dS = 2xdy$. Из кинематики следует, что координата y является функцией времени $y = \frac{a}{2} \cdot t^2$. Так как магнитное поле является постоянным, то поток изменяется вследствие того, что величина площади изменяется во времени. Определим функцию $S(t)$:

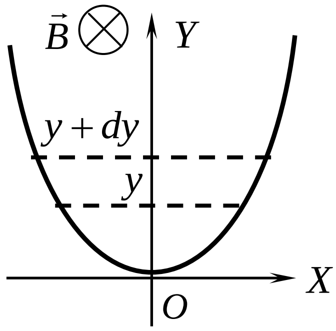

Рис. 47

$$S(y) = 2 \cdot \int \sqrt{\frac{y}{k}} \mathrm{d}y = \frac{4}{3\sqrt{k}} \cdot y^{\frac{3}{2}},$$

выполняя подстановку $y = \frac{a}{2} \cdot t^2$, получаем

$S(t) = 2 \cdot \int \sqrt{\frac{y}{k}} \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{k}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot t^3$. Находим ЭДС индукции из закона Фарадея:

$$\varepsilon_i = -B \cdot \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2}{k}} B a^{\frac{3}{2}} t^2 = -2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a}{k}} B y.$$

<u>Ответ</u>: $\varepsilon_i = -2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a}{k}} B y$.

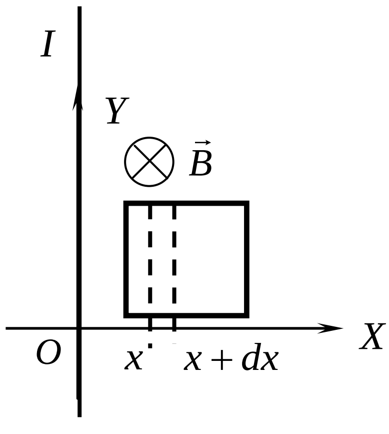

Рис. 48

Задача 3. В магнитном поле, создаваемом длинным прямым проводником с током I, находится квадратная рамка со стороной a. Найти ЭДС индукции $\varepsilon_i(r)$ как функцию расстояния r между рамкой и проводником. Проводник находится в одной плоскости с рамкой, вектор скорости рамки $\vec{v}$ перпендикулярен проводнику с током (рис. 48).

Решение:

На расстоянии x от проводника величина индукции магнитного поля определяется как $B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{\pi}\cdot\frac{I}{x}$. В пределах бесконечно малого прямоугольника площадью $dS = adx$ модуль индукции магнитного поля практически не изменяется (см. рис. 48). Находим поток через квадратную рамку, левый край которой находится на расстоянии r от проводника:

$$\Phi = \int\limits_{(S_\text{n})} B\cdot\cos 0\cdot dS = \int\limits_r^{r+a} \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{\pi}\cdot\frac{I}{x}a\cdot dx = \frac{I}{2}\frac{\mu_0\cdot a}{\pi}\cdot\ln\left(\frac{r+a}{r}\right).$$

В соответствии с законом Фарадея находим ЭДС индукции, выполнив подстановку $r = vt$,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{2}\frac{\mu_0\cdot a}{\pi}\cdot ln\left(\frac{vt+a}{vt}\right)\right) = -\frac{I}{2}\frac{\mu_0\cdot a}{\pi}\left(\frac{v}{vt+a} - \frac{v}{vt}\right) = \frac{I}{2}\frac{\mu_0\cdot a^2}{\pi\cdot r}\frac{v}{r+a}.$$

Ответ: $\varepsilon_i = \frac{I}{2}\frac{\mu_0\cdot a^2}{\pi\cdot r}\frac{v}{r+a}$.

Задача 4. Между полюсами магнита находится небольшая катушка, ось которой совпадает с направлением вектора индукции магнитного поля магнита. Площадь поперечного сечения катушки равна S = 100 см^2, число витков – N = =1000. При переворачивании катушки на 180° через подключенный к ней гальванометр протекает заряд q = 0,2 мКл. Найти модуль индукции внешнего магнитного поля, если сопротивление цепи – R = 100 Ом.

Решение:

Из закона Ома и закона Фарадея находим закон наращивания заряда при изменении потока индукции магнитного поля: $\varepsilon_i = IR = -\frac{d\Phi}{dt}$, $\frac{dq}{dt}\cdot R = -\frac{d\Phi}{dt}$, $dq = -\frac{d\Phi}{R}$. Так как при перевороте поток изменяется с Φ_1 до Φ_2, то протекший за это время заряд равен $q = \dfrac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \dfrac{BSN - (-BSN)}{R} = 2\dfrac{BSN}{R}$. Отсюда находим величину индукции внешнего магнитного поля: $B = \dfrac{qR}{2SN} = 1\,\text{мТл}$.

Ответ: $B = \dfrac{qR}{2SN} = 1\,\text{мТл}$.

Задача 5. Стержень длиной R = 20 см вращают вокруг оси, проходящей через один из его концов в плоскости, перпендикулярной вектору индукции однородного магнитного поля B = 5 мТл, с постоянной угловой скоростью ω = = 2000 рад/с. Найти разность потенциалов между концами стержня.

Решение:

Находим разность потенциалов из закона Фарадея: $\Delta\varphi = \varepsilon_i = -B \cdot \dfrac{dS}{dt}$. Определим площадь сектора, который заметает стержень за время dt из пропорции

$$\frac{\pi \cdot R^2}{2\pi} = \frac{dS}{d\alpha}.$$

Тогда получаем

$$\Delta\varphi = \varepsilon_i = B \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = B \cdot \frac{\omega \cdot R^2}{2} = 0{,}2\,\text{В}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = B \cdot \dfrac{\omega \cdot R^2}{2} = 0{,}2\,\text{В}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти направление индукционного тока в контуре, если вектор индукции однородного магнитного поля перпендикулярен плоскости контура (рис. 45), а его модуль уменьшается с течением времени.

2. Форма проводника описывается уравнением параболы $y = kx^2$. По проводнику движется вверх горизонтальная проводящая перемычка с постоянной скоростью v. Вся конструкция находится во внешнем магнитном поле с индукцией B. Найти зависимость ЭДС индукции от высоты подъема перемычки y, если начальная скорость перемычки равна нулю.

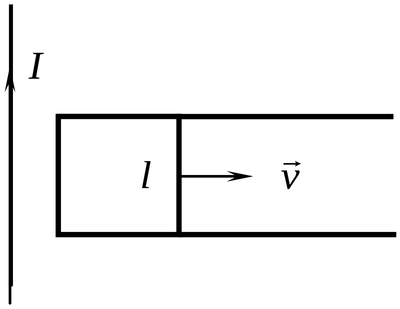

Рис. 49

3. В магнитном поле, создаваемом длинным прямым проводником с током I, находится П-образный проводник, по которому скользит проводящая перемычка длиной l (рис. 49). Найти ЭДС индукции $\varepsilon_i(x)$ как функцию расстояния x между перемычкой и проводником. Проводник

находится в одной плоскости с П-образным проводником, вектор скорости рамки $\vec{v}$ перпендикулярен проводнику.

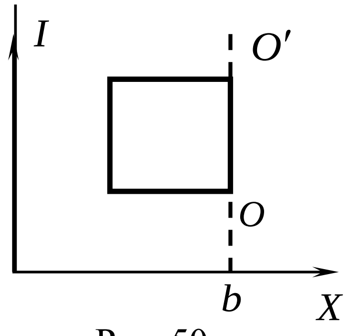

Рис. 50

4. В магнитном поле, создаваемом длинным прямым проводником с током I, находится квадратная рамка со стороной a. Рамку поворачивают вокруг оси OO' на 180° (рис. 50). Найти, какой заряд протекает через поперечное сечение проводника рамки. Проводник находится в одной плоскости с рамкой, расстояние между проводником и осью OO' равно b.

5. Квадратная рамка со стороной a перемещается в пространстве с постоянной скоростью v в областях с различными значениями модуля вектора индукции магнитного поля (рис. 51). Построить график зависимости ЭДС индукции рамки от координаты ее левой стороны x.

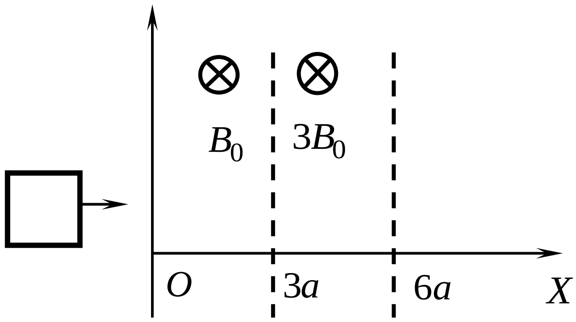

Рис. 51

10. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ \left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)=0;$$

$$\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};\ \left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)=\rho.$$

Эквивалентные им уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=-\int_S\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},d\vec{S}\right);\ \oint_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0;$$

$$\oint_L\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=-\int_S\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},d\vec{S}\right);\ \oint_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=\int_V\rho\cdot dV.$$

Величину $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ называют плотностью тока смещения. Для изотропных сред в случае достаточно слабых и медленно меняющихся полей уравнения Максвелла дополняются следующими материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E},\ \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H},\ \vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Точечный заряд q = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл движется равномерно и прямолинейно с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$ (v=10^6 м/с). Найти вектор плотности тока смещения в точке P, находящейся на расстоянии r = 10 мкм от заряда на прямой, перпендикулярной его траектории и проходящей через заряд (рис. 52).

<u>Решение:</u>

Плотность тока смещения $\vec{j}_{\text{см}} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ определяется приращением вектора $\vec{D}$ через промежуток времени dt. Выражение для вектора $\vec{D}$ в случае точечного заряда легко найти с помощью теоремы Гаусса:

$$\vec{D} = \frac{q\vec{e}_r}{4\pi r^2},$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, определяющий направление радиус-вектора точки наблюдения P относительно заряда.

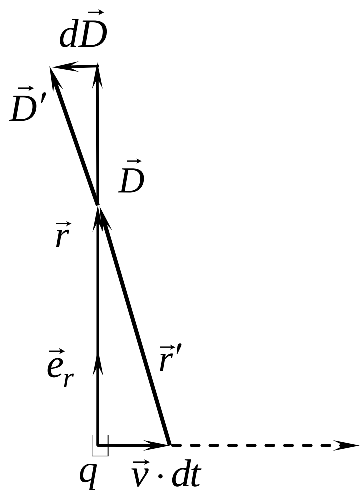

Рис. 52

За промежуток времени dt заряд совершит перемещение $\vec{v} \cdot dt$. Приращение вектора смещения равно $d\vec{D} = \vec{D}' - \vec{D}$. Модуль приращения определяется из подобия треугольников (см. рис. 52):

$$\left| d\vec{D} \right| = \frac{vD \cdot dt}{r} = \frac{vq \cdot dt}{4\pi r^3}.$$

Учитывая векторный характер величин и их направления, можем записать

$$\vec{j}_{\text{см}} = -\frac{q\vec{v}}{4\pi r^3},\ j_{\text{см}} = 12{,}7\ \text{А/м}^2.$$

<u>Ответ:</u> $\vec{j}_{\text{см}} = -\dfrac{q\vec{v}}{4\pi r^3}$, $j_{\text{см}} = 12{,}7$ А/м^2.

Задача 2. Плоский воздушный конденсатор, площадь каждой пластины которого S = 100 см^2, включен последовательно в цепь переменного тока.

Найти максимальную плотность тока смещения в конденсаторе, если амплитуда синусоидального тока в подводящих проводах I_0 = 1 мА.

Решение:

Сила тока в цепи меняется по закону $I = I_0 \cos\omega t$. Из определения силы тока $I = dq/dt$ получаем зависимость заряда на пластине конденсатора от времени:

$$q = \frac{I_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Связь между модулем вектора $\vec{D}$ и плотностью заряда пластины легко найти с помощью теоремы Гаусса:

$$D = \sigma = \frac{q}{S} = \frac{I_0 \sin\omega t}{\omega S},$$

где σ – поверхностная плотность заряда пластины конденсатора.

Отсюда находим модуль плотности тока смещения и его максимальное значение.

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{I_0 \cos\omega t}{S},\ j_{\text{см}0} = \frac{I_0}{S} = 0{,}1\ \text{А/м}^2.$$

Ответ: $j_{\text{см}0} = \dfrac{I_0}{S} = 0{,}1\ \text{А/м}^2$.

Задача 3. Пространство между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых дисков, заполнено однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между обкладками d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками на расстоянии r от их оси, если на конденсатор подано напряжение $U = U_0 \cos\omega t$.

Решение:

Проекции векторов напряженности электрического поля и смещения между обкладками на ось конденсатора равны

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0 \cos\omega t}{d},\ D = \varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{U_0 \cos\omega t}{d}.$$

Между обкладками возникают как ток проводимости, так и ток смещения, плотности которых равны

$$j = \sigma E = \frac{\sigma U_0 \cos\omega t}{d},\ j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 \omega \sin\omega t}{d}.$$

Эти токи порождают магнитное поле, напряженность которого можно вычислить, воспользовавшись уравнением Максвелла:

$$\oint(\vec{H},d\vec{l}) = -\int_S\left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},d\vec{S}\right).$$

В качестве вспомогательного замкнутого контура L, по которому выполняется интегрирование, выберем окружность радиусом r, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси конденсатора с центром на оси. В силу симметрии задачи напряженность магнитного поля $\vec{H}$ направлена по касательной к выбранной окружности и постоянна по величине. Тогда последнее выражение можно переписать:

$$H2\pi r = (j + j_{\text{см}})\cdot\pi r^2.$$

Напряженность магнитного поля равна

$$H = \frac{rU_0(\sigma\cos\omega t - \varepsilon\varepsilon_0\omega\sin\omega t)}{2d}.$$

Ответ: $H = \dfrac{rU_0(\sigma\cos\omega t - \varepsilon\varepsilon_0\omega\sin\omega t)}{2d}$.

Задача 4. Ток, текущий по длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого R = 5 см, меняют так, что магнитное поле внутри соленоида возрастает со временем по закону $B=\beta t^2$, где β = 5 Тл/с^2. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Вычислить плотность тока смещения при r = 2 см и t =4 с.

Решение:

Изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, напряженность которого вычислим воспользовавшись уравнением Максвелла:

$$\oint\left(\vec{E},d\vec{l}\right) = -\int_S\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},d\vec{S}\right).$$

В качестве вспомогательного замкнутого контура L, по которому выполняется интегрирование, выберем окружность радиусом r, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси соленоида с центром на оси. В силу симметрии задачи напряженность электрического поля $\vec{E}$ направлена по касательной к выбранной окружности и постоянна по величине. Тогда последнее выражение можно переписать:

$$2\pi rE = -\pi r^2\frac{dB}{dt} = -\pi r^2 2\beta t,\ r < R;$$

$$2\pi rE = -\pi R^2\frac{dB}{dt} = -\pi R^2 2\beta t,\ r > R.$$

Знак минус определяет направление вектора $\vec{E}$. В дальнейшем его учитывать не будем. Из полученных выражений находим E, D и $j_{\text{см}}$ внутри и вне соленоида

$$E = \beta rt,\ D = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \beta rt,\ j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \beta r,\ r < R;$$

$$E = \frac{\beta R^2 t}{r},\ D = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 \beta R^2 t}{r},\ j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \beta R^2}{r},\ r > R.$$

Ответ: $j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \beta r,\ r < R;\ j_{\text{см}} = \dfrac{\varepsilon_0 \beta R^2}{r},\ r > R$, $j_{\text{см}} = 0{,}177$ нА/м^2.

Задача 5. По жесткому непроводящему тонкому круговому кольцу массой m равномерно распределен заряд q. Кольцо может свободно вращаться вокруг оси, совпадающей с осью симметрии кольца. Вначале кольцо покоится, а магнитное поле равно нулю. Затем включается однородное магнитное поле $\vec{B}(t)$, перпендикулярное плоскости кольца и произвольно меняющееся по величине во времени. Найти зависимость от времени угловой скорости кольца.

Решение:

Изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, которое действует на заряды, распределенные по кольцу, приводя во вращение кольцо в замкнутом контуре, совпадающем с кольцом, возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \oint(\vec{E}, d\vec{l}\,) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt},$$

где R – радиус кольца. Знак минус отражает правило Ленца.

За промежуток времени dt через произвольное поперечное сечение контура пройдет заряд $dq = \dfrac{q}{2\pi}\omega \cdot dt$. Работа ЭДС за этот промежуток времени равна

$$dA = \varepsilon_i \cdot dq = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}\frac{q}{2\pi}\omega \cdot dt = -\frac{q\omega R^2 \cdot dB}{2}.$$

Эта работа идет на приращение кинетической энергии кольца:

$$dA = dT = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Линейная скорость $v = \omega R$. Таким образом, получаем

$$d\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2}\right) = -\frac{q\omega R^2}{2} \cdot dB, \text{ или } 2m \cdot d\omega = -q \cdot dB.$$

Интегрирование с учетом начальных условий дает выражение для угловой скорости:

$$\omega(t) = -\frac{q}{2m} B(t).$$

Выражение в векторном виде

$$\vec{\omega}(t) = -\frac{q}{2m} \vec{B}(t).$$

Ответ: $\vec{\omega}(t) = -\dfrac{q}{2m} \vec{B}(t)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Точечный заряд q = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл движется равномерно и прямолинейно с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$ (v=10^6 м/с). Найти вектор плотности тока смещения в точке P, находящейся на расстоянии r = 10 мкм от заряда на прямой, совпадающей с его траекторией движения.

2. Определить величину напряженности магнитного поля в плоском конденсаторе, одна из пластин которого удаляется от неподвижной другой пластины со скоростью $\vec{v}$ (v = 20 м/с), перпендикулярной пластинам. Разность потенциалов между пластинами U =20 кВ остается постоянной. Начальное расстояние между пластинами равно 0,5 м. Вычислить разность потенциалов в момент t = 0,1 с.

3. Длинный прямой соленоид имеет n витков на единицу длины. По нему течет переменный ток $I = I_0 \sin\omega t$, I_0 = 8 А, ω = 300 рад/с. Найти плотность тока смещения внутри соленоида как функцию расстояния r от оси соленоида. Радиус сечения соленоида равен 30 см. Вычислить амплитуду тока смещения при r = 10 см.

4. Плоский конденсатор образован двумя дисками, между которыми находится однородная слабопроводящая среда. Конденсатор зарядили и отключили от источника напряжения. Пренебрегая краевыми эффектами, определить магнитное поле внутри конденсатора в процессе разрядки конденсатора.

5. В некоторой области инерциальной системы отсчета имеется вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ магнитное поле, модуль индукции которого равен B. Найти $\left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]$ в этой области как функцию векторов $\vec{B}$ и $\vec{\omega}$.

11. ЭЛЕКТРОМАГНИТЫЕ ВОЛНЫ. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Уравнения Максвелла, записанные в однородной изотропной среде без токов и зарядов:

$$\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

$$(\vec{\nabla},\vec{B})=0, (\vec{\nabla},\vec{D}),$$

приводят к волновым уравнениям

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \text{ и } \vec{\nabla}^2\vec{H}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

(здесь $\vec{\nabla}^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа). Функции, которые являются их решениями, представляют собой уравнения волн для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Таким образом, электрическое и магнитное поля, образуя единое электромагнитное поле, могут существовать в отсутствие зарядов и токов в виде электромагнитных волн. Фазовая скорость их распространения, как следует из волновых уравнений, равна

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=3\cdot 10^8$ м/с совпадает со скоростью распространения света в вакууме.

Простейшим и одним из наиболее важных решений волнового уравнения является решение в виде плоской волны:

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha_0), \vec{H}=\vec{H}_0\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha_0),$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор, задающий направление распространения плоской электромагнитной волны. Модуль волнового вектора называется волновым числом. Оно определяется выражением

$$k=\left|\vec{k}\right|=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda},$$

где $\lambda=2\pi v/\omega$ – длина волны. Векторы $\vec{E},\vec{H}$ и $\vec{k}$ взаимно ортогональны и образуют правовинтовую систему. Поворот вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{H}$ дает направление $\vec{k}$. Связав с направлениями $\vec{k},\vec{E},\vec{H}$ орты прямоугольной декартовой системы координат $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ соответственно, можно получить для ненулевых проекций векторов соотношение

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu\mu_0}H_z .$$

Оно выполняется в любой момент времени в любой точке пространства, а также для амплитуд векторов. Векторы $\vec{E}, \vec{H}$ совершают колебания в одной фазе.

Электромагнитная волна, как и другие волны, переносит энергию. Плотность энергии электромагнитной волны равна сумме плотностей энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{EH}{v} .$$

Плотность потока энергии

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$$

называют вектором Пойнтинга. На практике измеряется интенсивность волны, которая равна модулю среднего по времени значения плотности потока энергии $I = \langle S \rangle = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0} E_0^2 / 2$.

Наряду с энергией электромагнитная волна обладает импульсом. Плотность импульса электромагнитной волны в вакууме дается выражением

$$\vec{p} = \frac{\left[\vec{E}, \vec{H}\right]}{c^2}.$$

При поглощении телом падающая на его поверхность электромагнитная волна передает телу импульс. В соответствии со вторым законом Ньютона на тело со стороны волны действует сила, равная скорости изменения импульса тела. Если волна падает перпендикулярно поверхности тела и происходит полное поглощение волны, то давление на поверхность тела равно $P = w$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного слоя толщиной l = 2 м из немагнитного вещества, диэлектрическая проницаемость которого экспоненциально падает от значения ε_1 = 4 на передней поверхности до ε_2 =2,25 – на задней. Найти время распространения данной фазы волны через этот слой.

Решение:

Для немагнитной среды $\mu = 1$. Тогда скорость распространения волны равна $v = c / \sqrt{\varepsilon}$. Перпендикулярно поверхности слоя проводим ось OX , начало которой совмещаем с границей слоя, на которую падает волна. Тогда зависимость диэлектрической проницаемости от координаты x будет даваться выражением

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{-kx},$$

где коэффициент k определяется из условия $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 e^{-kl}$.

Разобьем слой на тонкие слои, границы которых определяются координатами x и $x+dx$. Время прохождения такого слоя

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx \cdot \sqrt{\varepsilon}}{c} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \cdot e^{-kx/2} \cdot dx.$$

Время распространения фазы волны через весь слой равно

$$t = \int_0^l \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \cdot e^{-kx/2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \cdot \left(-\frac{2}{k}\right) \cdot e^{-kx/2} \Big|_0^l = \frac{2l(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{c \cdot \ln(\varepsilon_1 / \varepsilon_2)} = 11{,}6 \text{ нс.}$$

Ответ: $t = \dfrac{2l(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{c \cdot \ln(\varepsilon_1 / \varepsilon_2)} = 11{,}6$ нс.

Задача 2. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, которая описывается уравнениями

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Исходя из уравнений Максвелла, выразить через заданные векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{k}$ вектор $\vec{H}_0$. Для E_0 = 160 В/м и k = 0,5 м$^{-1}$ вычислить H_0.

Решение:

Поля зависят только от фазы $\varphi = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$. Поэтому частные производные полевых величин по координатам можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{d}{d\varphi} = -k_x \cdot \frac{d}{d\varphi}, \frac{\partial}{\partial y} = -k_y \cdot \frac{d}{d\varphi}, \frac{\partial}{\partial z} = -k_z \cdot \frac{d}{d\varphi}.$$

Воспользуемся уравнением Максвелла:

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

где $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Подставим в уравнение заданные выражения для полей. Ротор напряженности электрического поля вычислим через определитель, воспользовавшись его свойствами. В результате получим

$$-\mu_0 \vec{H}_0 (-\omega) \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\right) = \left[\vec{k}, \vec{E}_0\right] \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

В вакууме $\omega = kc = k / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Подстановка этого выражения дает окончательный результат:

$$\vec{H}_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}}{k}\cdot\left[\vec{k},\vec{E}_0\right],\ H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 = 0{,}42 \text{ А/м.}$$

Ответ: $\vec{H}_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}}{k}\cdot\left[\vec{k},\vec{E}_0\right].\ H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 = 0{,}42$ А/м.

Задача 3. Плоская электромагнитная волна $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - kx)$, распространяющаяся в вакууме, наводит ЭДС индукции в квадратном контуре со стороной l (рис. 53). Найти зависимость от времени ЭДС индукции в контуре по заданным E_0 = 20 мВ/м, $\omega = 2\pi\cdot 10^8$ рад/с, l = 1,5 м.

Решение:

Для вычисления ЭДС с учетом ее направления выберем обход контура по часовой стрелке. На участке контура 1–2 во всех точках напряженность поля $\vec{E} = \vec{E}_0\cos\omega t$, а на участке 3–4 $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - kl)$. С учетом определения ЭДС на некотором участке:

$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{E}, d\vec{l}\,),$$

получаем

$$\varepsilon_i = E_0 l\cos\omega t,\ \varepsilon_i = -E_0 l\cos(\omega t - \omega l/c).$$

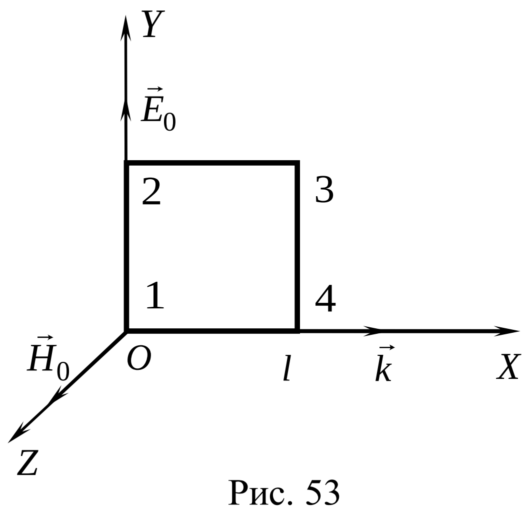

Рис. 53

На участках 2–3 и 4–1 ЭДС равна нулю, так как вектор $\vec{E}$ перпендикулярен отрезкам, задающим эти участки. Сложив ЭДС на всех участках, получаем ЭДС в контуре:

$$\varepsilon_i = E_0 l(\cos\omega t - \cos(\omega t - \omega l/c)) = 60\cos\omega t \text{ мВ.}$$

Ответ: $\varepsilon_i = E_0 l(\cos\omega t - \cos(\omega t - \omega l/c)) = 60\cos\omega t$ мВ.

Задача 4. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиусом R = 8 см, подключен к переменному синусоидальному напряжению частоты ω = 2000 рад/с. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри конденсатора.

Решение:

В соответствии с условием задачи напряжение на конденсаторе меняется по закону $U = U_0\sin\omega t$. Проекция напряженности электрического поля на направление OX, перпендикулярное обкладкам конденсатора, равна

$$E_x = \frac{U_0\sin\omega t}{b},$$

где b – расстояние между обкладками конденсатора.

Изменяющееся со временем электрическое поле приводит к появлению тока смещения, плотность которого равна

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D_x}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega \cos \omega t}{b}.$$

Ток смещения приводит к возникновению магнитного поля в пространстве между обкладками конденсатора. Для определения напряженности магнитного поля воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint(\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{d}{dt}\int_S (\vec{j}_{\text{см}}, d\vec{S}).$$

В качестве замкнутого контура выберем окружность радиусом $r < R$, лежащую в плоскости, параллельной обкладкам конденсатора. Центр окружности лежит на оси симметрии конденсатора. Тогда по теореме о циркуляции получаем

$$H \cdot 2\pi r = j_{\text{см}} \cdot \pi r^2 \Rightarrow H = \frac{\varepsilon_0 U_0 \omega r \cos \omega t}{2b}.$$

Для вычисления энергии магнитного поля разбиваем объем между пластинами конденсатора на коаксиальные с осью симметрии конденсатора цилиндрические слои толщиной dr и внутренним радиусом r. Область изменения r: $0 < r < R$. Энергия магнитного поля равна

$$W_{\text{м}} = \int_V w_{\text{м}} \cdot dV = \int_0^R \frac{\mu_0 H^2}{2} b \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^R \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 U_0^2 \omega^2 r^2 \cos^2 \omega t}{2 \cdot 4b^2} b \cdot 2\pi r \cdot dr =$$

$$= \frac{\pi \varepsilon_0^2 \mu_0 U_0^2 \omega^2 R^4 \cos^2 \omega t}{16b}.$$

Энергия электрического поля в силу однородности поля $\vec{E}$ в пространстве между обкладками равна

$$W_{\text{э}} = w_{\text{э}} \cdot V = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} b \cdot \pi R^2 = \frac{\pi \varepsilon_0 U_0^2 R^2 \sin^2 \omega t}{2b}.$$

Подставив максимальные значения энергий, получим искомое отношение:

$$\frac{W_{\text{м max}}}{W_{\text{э max}}} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 \omega^2}{8} = 3{,}6 \cdot 10^{-14}.$$

<u>Ответ:</u> $\frac{W_{\text{м max}}}{W_{\text{э max}}} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 \omega^2}{8} = 3{,}6 \cdot 10^{-14}$.

Задача 5. Сила тока в очень длинном соленоиде радиусом R =10 см медленно увеличивается от 0 до I_0 = 20 А. Число витков соленоида на единицу длины равно n = 1000 м$^{-1}$. Найти количество энергии, протекающей через замкнутый коаксиальный с соленоидом цилиндр

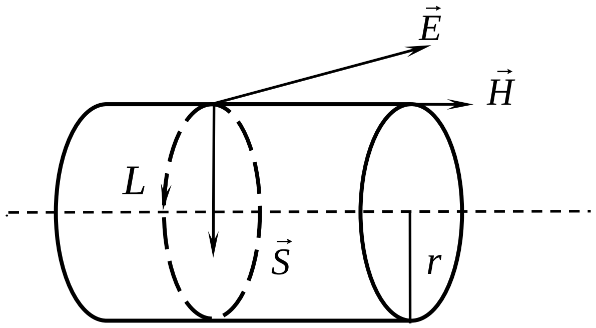

Рис. 54

длиной l = 0,5 м и радиусом основания $r=5$ см за полное время возрастания тока (рис. 54). Сравнить полученное выражение с энергией магнитного поля внутри выделенного цилиндра.

Решение:

Напряженность магнитного поля в соленоиде параллельна его оси симметрии. Ее модуль равен

$$H = nI .$$

Изменение со временем силы тока приводит к изменению со временем напряженности магнитного поля. В свою очередь это вызывает появление вихревого электрического поля, напряженность которого можно вычислить с помощью теоремы о циркуляции. В качестве замкнутого контура выберем окружность на поверхности указанного в условии задачи цилиндра. Тогда

$$\oint(\vec{E},d\vec{l}\,) = -\frac{d}{dt}\int\limits_S(\vec{B},dS) \Rightarrow E\cdot 2\pi r = -\mu_0 n\frac{dI}{dt}\cdot\pi r^2 .$$

Напряженность электрического поля определятся выражением

$$E = -\frac{\mu_0 nr}{2}\frac{dI}{dt}.$$

Знак минус указывает на то, что напряженность $\vec{E}$ направлена по касательной к окружности в соответствии с правилом левого винта. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно ортогональны. Плотность потока энергии – вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = \left[\vec{E},\vec{H}\right].$$

Во всех точках замкнутого цилиндра вектор $\vec{S}$ перпендикулярен оси цилиндра и направлен к ней. Поэтому поток энергии через основания цилиндра будет равен нулю. Модуль вектора Пойнтинга равен

$$S = EH = \frac{\mu_0 n^2 rI}{2}\frac{dI}{dt}.$$

Поток энергии, поступающий в цилиндр, равен произведению модуля вектора Пойнтинга на площадь боковой поверхности цилиндра $l2\pi r$. За промежуток времени от 0 до t в цилиндр поступит количество энергии, равное

$$W = \int\limits_0^t\frac{\mu_0 n^2 rI}{2}\frac{dI}{dt}\cdot 2\pi rl\cdot dt = \pi\mu_0 n^2 r^2 l\int\limits_0^{I_0} I\cdot dI = \frac{\pi\mu_0 n^2 r^2 l I_0^2}{2}.$$

Энергия магнитного поля внутри цилиндра равна

$$W_{\text{м}} = w_{\text{м}}\cdot V = \frac{\mu_0 H^2}{2}\pi r^2 l = \frac{\pi\mu_0 n^2 r^2 l I_0^2}{2} = W = 0{,}49 \text{ Дж}.$$

Энергия, поступившая в цилиндр через его поверхность, равна энергии созданного внутри цилиндра магнитного поля.

Ответ: $W = \dfrac{\pi\mu_0 n^2 r^2 l I_0^2}{2}$ =0,49 Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Электромагнитная волна частотой $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ рад/с переходит из вакуума в среду с $\mu = 1, \varepsilon = 3$. Найти приращение ее длины волны.

2. Плоская электромагнитная волна с $\vec{E} = E_0 \vec{j}\cos(\omega t + kx)$ распространяется в вакууме ($\vec{j}$ – единичный вектор). Считая E_0 = 80 мВ/м и k = = 0,4 м$^{-1}$ известными, найти вектор $\vec{H}$ как функцию времени и координат.

3. Плоская электромагнитная волна с частотой ν =15 МГц распространяется в слабопроводящей среде с удельной проводимостью σ = 12 мСм/м и диэлектрической проницаемостью ε = 8. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

4. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ рад/с. Амплитуда напряженности электрического поля равна E_0 = 0,8 В/м. На пути распространения волны расположен шар радиусом R = 1 м. Какая энергия падает на шар за время $t \gg T$ – периода колебаний волны?

5. По прямому проводнику круглого сечения течет ток I = 10 А. Найти поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность участка данного проводника, имеющего сопротивление R = 75 Ом.

12. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Интерференция – это явление, возникающее при наложении когерентных волн, когда происходит перераспределение интенсивности волн в пространстве: в одних местах возникают максимумы, в других минимумы интенсивности. Интерференцию света от естественных источников наблюдают по следующей схеме: волну, излучаемую одним источником, разделяют на две волны, проходящие различные оптические пути, а затем накладывают их друг на друга. Волны приобретают оптическую разность хода:

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1,$$

где n_2, n_1 – показатели преломления сред; s_2, s_1 – геометрические длины путей, проходимые волнами.

Разность фаз волн в точке наблюдения

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta,$$

где λ – длина волны света в вакууме.

Условие интерференционного максимума:

$$\Delta = \pm\, 2m\frac{\lambda}{2};\ \delta = \pm\, 2m\pi,\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Условие интерференционного минимума:

$$\Delta = \pm\,(2m+1)\frac{\lambda}{2};\ \delta = \pm\,(2m+1)\pi,\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Ширина интерференционной полосы в опыте Юнга:

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda,$$

где l – расстояние от экрана до источников света; d – расстояние между источниками.

Дифракция – это совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. Радиус k-й зоны Френеля равен

$$r_k = \sqrt{k\lambda ab/(a+b)},\ k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Условие минимумов интенсивности при падении света с длиной волны λ нормально на узкую щель шириной b:

$$b\sin\varphi = \pm\, k\lambda,\ k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Условие главных максимумов интенсивности при падении монохроматического света с длиной волны λ на дифракционную решетку:

$$d\sin\varphi = \pm\, m\lambda,\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

где d – постоянная решетки.

Интенсивность прошедшей через поляризатор волны определяется законом Малюса:

$$I = I_0\cos^2\varphi,$$

где I_0 – интенсивность падающей линейно поляризованной волны; φ – угол между плоскостью колебаний падающей волны и плоскостью поляризатора.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстояние d = 2 мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстояние l =1,2 м, образуется система интерференционных полос (опыт Юнга). На какое расстояние и в какую сторону сместятся эти полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой толщиной h =12 мкм, показатель преломления которой равен 1,5.

Решение:

До перекрытия щели, например S_1, стеклянной пластинкой условие максимума интенсивности $\Delta = s_2 - s_1 = m\lambda$ дает координату этого максимума на экране:

$$x_m = l\frac{s_2 - s_1}{d} = l\frac{m\lambda}{d}.$$

После перекрытия пластинкой щели S_1 условие максимума запишется в виде:

$$\Delta = s_2' - (s_1' - h) - nh = s_2' - s_1' - (n-1)h = m\lambda.$$

Координаты максимумов будут даваться выражением

$$x_m' = l\frac{s_2' - s_1'}{d} = l\frac{m\lambda + (n-1)h}{d}.$$

Смещение максимумов равно

$$x_m' - x_m = \frac{(n-1)lh}{d} = 3{,}6 \text{ мм.}$$

Смещение происходит в сторону перекрытой щели.

Ответ: $x_m' - x_m = \dfrac{(n-1)lh}{d}$ = 3,6 мм. Смещение происходит в сторону перекрытой щели.

Задача 2. В опыте Ллойда световая волна, исходящая из источника S, интерферирует с волной, отраженной от зеркала. В результате на экране образуется система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана l = 1,5 м. При некотором положении источника ширина интерференционной полосы на экране Δx = 0,4 мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на Δh =0,5 мм, ширина полос уменьшилась в η= 1,4 раза. Найти длину волны света.

Решение:

Пусть расстояние источника света до зеркала равно h. Интерферируют два луча от источника S и мнимого источника S', расстояние между которыми, как и в опыте Юнга, равно $2h = l\lambda/\Delta x$. После отодвигания это расстояние равно $2h + 2\Delta h = l\lambda\eta/\Delta x$. После вычитания этих двух равенств получаем

$$\lambda = 2\Delta h \cdot \Delta x / l(\eta - 1) = 667 \text{ нм.}$$

Ответ: $\lambda = 2\Delta h \cdot \Delta x / l(\eta - 1)$ = 667 нм.

Задача 3. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно менять. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны a = 0,75 м и b = 1,25 м. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при r_1 = 1,2 мм и следующий максимум при r_2 = 1,4 мм.

Решение:

Радиусы двух последующих отверстий, которые дают максимумы освещенности, равны радиусам соседних нечетных зон Френеля:

$$r_k = \sqrt{k\lambda ab/(a+b)} \text{ и } r_{k+2} = \sqrt{(k+2)\lambda ab/(a+b)},$$

где k – нечетное число.

Возведя в квадрат оба выражения и взяв их разность, получаем

$$\lambda = \frac{(r_2^2 - r_1^2)(a+b)}{2ab} = 555 \text{ мкм.}$$

Ответ: $\lambda = \dfrac{(r_2^2 - r_1^2)(a+b)}{2ab} = 555$ мкм.

Задача 4. Определить, при каком отношении $x = b/d$ (d –период дифракционной решетки, b – ширина щели) дифракционный максимум порядка $m = 5$ будет иметь интенсивность, равную нулю.

Решение:

Одновременно должны выполняться условия максимума для дифракционной решетки и минимума для щели:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda, b\sin\varphi = \pm k\lambda.$$

Следовательно, $x = b/d = k/m$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

Ответ: $x = b/d = k/m$, x = 1/5, 2/5, 3/5, 4/5.

Задача 5. Линейно поляризованный световой пучок падает на поляризатор, вращающийся вокруг оси пучка с угловой скоростью ω = 40 рад/с. Найти световую энергию, проходящую через поляризатор за один оборот, если поток энергии в падающем пучке Φ_0 = 20 мВт.

Решение:

Согласно закону Малюса интенсивность прошедшего поляризатор света равна $I = I_0\cos^2(\omega t + \varphi_0)$. За промежуток времени dt через поляризатор пройдет световая энергия, равная

$$dW = IS\cdot dt = I_0 S\cos^2(\omega t + \varphi_0)\cdot dt,$$

где S – площадь поперечного сечения светового пучка.

За время одного оборота $T = 2\pi/\omega$ через поляризатор пройдет энергия, равная

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} I_0 S\cos^2(\omega t + \varphi_0)\cdot dt = \frac{I_0 S 2\pi}{2\omega} = \frac{\Phi_0\pi}{\omega} = 1{,}57 \text{ мДж,}$$

где $\Phi_0 = I_0 S$.

Ответ: $W = \dfrac{\Phi_0 \pi}{\omega} = 1{,}57$ мДж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр (λ_1 = 0,5 мкм) заменить красным $(\lambda_2 = 0{,}65$ мкм$)$?

2. Плоская световая волна $(\lambda = 500$ нм$)$ падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 0{,}4$ см. На каком расстоянии от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало только одну зону Френеля?

3. На щель шириной $b = 0{,}1$ мм падает нормально параллельный пучок света от монохроматического источника $(\lambda = 600$ нм$)$. Определите ширину центрального максимума в дифракционной картине на экране, отстоящем от щели на расстоянии $l = 1$ м.

4. На дифракционную решетку длиной $l = 1{,}5$ мм, содержащей 3000 щелей, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите число главных максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки.

5. Два поляризатора расположены так, что угол между их плоскостями равен 30^0. Найдите, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через оба поляризатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 5 кн. / И. В. Савельев. – М. : Астрель, АСТ, 2004.

2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. В 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, МФТИ, 2002-2005.

3. Задачи по общей физике / Белонучкин В. Е. [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 328 с.

4. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики с решениями / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. – М. : Высш. шк., 2004. – 589 с.

5. Новодворская, Е. М. Сборник задач по физике для втузов с решениями / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – М. : Издательский дом «Оникс 21 век», 2005. – 367 с.

6. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 2000. – 717 с.

7. Калитеевский, Н. И. Волновая оптика. / Н. И. Калитеевский. – М. : Наука, 1971. – 376 с.

8. Калашников, С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М. : Наука, 1977. – 591 с.

Св. план 2012, поз. 36

Учебное издание

Березин Александр Васильевич
Боброва Зоя Александровна
Григорьев Александр Александрович и др.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО. МАГНЕТИЗМ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ОПТИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *И. П. Острикова*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная верстка *А. В. Бас*

Подписано в печать 22.11.2012. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,77. Уч.-изд. л. 4,4. Тираж 200 экз. Заказ 82.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6