

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЭУ

4.1. Цель работы

Цель работы: научиться применять дробный факторный эксперимент (ДФЭ) для получения математических моделей РЭУ и технологических процессов.

Для достижения цели необходимо:

- изучить основные положения планирования ДФЭ;
- выполнить планирование ДФЭ применительно к получению линейной модели исследуемого РЭУ;
- используя лабораторный макет, провести опыты в соответствии с разработанным планом ДФЭ;
- обработать на ПЭВМ результаты эксперимента и построить математическую модель.

4.2. Теоретические сведения

При числе факторов $k \leq 5$ оправданы опыты с перебором всех возможных сочетаний уровней факторов, то есть оправдан полный факторный эксперимент (ПФЭ). В ПФЭ число опытов N (без учета параллельных опытов) равно 2^k .

С увеличением k число опытов N растет очень быстро. Так, например, при $k = 10$ значение $N = 2^{10} = 1024$. При исследовании параметров РЭУ и технологических процессов число влияющих факторов может быть больше 5 – 7. Поэтому проблема сокращения числа опытов стоит достаточно остро. При этом задача заключается в том, чтобы не только уменьшить число опытов, но и получить достаточное количество информации об объекте исследования.

Уменьшить число опытов можно за счет использования избыточности ПФЭ. Число опытов в ПФЭ обычно больше, чем количество значимых (или интересующих исследователя) коэффициентов. Модель объекта в случае рассмотрения неполного квадратичного полинома имеет вид (при $k = 2$)

$$y = b_0 + b_1\hat{x}_1 + \dots + b_2\hat{x}_2 + b_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2. \quad (4.1)$$

Матрица ПФЭ для получения этого уравнения приведена в табл. 4.1 (столбцы \hat{x}_1 и \hat{x}_2).

Таблица 4.1

Предположим, из априорных сведений известно, что при выбранных интервалах варьирования поведение объекта с требуемой точностью описывается линейной моделью. В этом случае в уравнении (4.1) нелинейный член $(b_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2)$, характеризующий взаимодей-

Номер опыта	\hat{x}_1	\hat{x}_2	$\hat{x}_1\hat{x}_2 \rightarrow (\hat{x}_3)$
1	–	–	+
2	–	+	–
3	+	–	–
4	+	+	+

ствие факторов, может не учитываться. Поэтому вектор-столбец $\hat{x}_1\hat{x}_2$ может быть использован для введения в план ПФЭ какого-либо нового фактора, не увеличивая числа опытов, например фактора \hat{x}_3 , записанного в последнем столбце

матрицы (см. табл. 4.1). Нетрудно установить, что эта матрица (три фактора, четыре опыта) является половиной более крупного плана, а именно плана ПФЭ типа « 2^3 », имеющего восемь опытов.

Таким образом, для оценки влияния трех факторов можно воспользоваться половиной ПФЭ типа « 2^3 » или, как говорят, 1/2 реплики от ПФЭ типа « 2^3 ».

Если исходной является матрица ПФЭ типа « 2^3 » и за счет малозначимых взаимодействий факторов, построенных из \hat{x}_1 , \hat{x}_2 и \hat{x}_3 , вводится дополнительно три новых фактора, например \hat{x}_4 , \hat{x}_5 и \hat{x}_6 , то полученный новый план будет представлять 1/8 часть ПФЭ типа « 2^6 » (так как в новом плане всего 6 факторов). Какую именно восьмую часть представляет этот план, зависит от знаков столбцов \hat{x}_4 , \hat{x}_5 и \hat{x}_6 , определяемых знаками взаимодействий, вместо которых будут введены новые факторы \hat{x}_4 , \hat{x}_5 и \hat{x}_6 . При большом числе факторов могут использоваться реплики более высокой дробности: 1/16, 1/32 и т.д.

Эксперимент, который реализует часть опытов ПФЭ, называют дробным факторным экспериментом (ДФЭ). ДФЭ (дробные реплики) принято обозначать как « 2^{k-p} », где k – общее число факторов нового плана – плана ДФЭ, а p – число факторов, введенных в план ДФЭ вместо малозначимых взаимодействий. Так, например, ДФЭ, план которого приведен в табл. 4.1, запишется в виде « 2^{3-1} ». Для определения числа опытов ДФЭ надо число 2 возвести в степень $k-p$.

ДФЭ предусматривает проведение меньшего числа опытов по сравнению с ПФЭ, что является экономически более целесообразным.

Планирование ДФЭ

Обобщение описанной процедуры получения плана ДФЭ на матрицы любых размерностей позволяет сформулировать следующее правило: **чтобы ввести в исходный план (план ПФЭ) новый фактор, не увеличивая число опытов, этому фактору необходимо присвоить вектор-столбец взаимодействия, построенного из исходных факторов и влиянием которого можно пренебречь. Значение нового фактора, введенного в исходный план, должно изменяться в соответствии со знаками этого столбца [1].**

Правильно построенный план ДФЭ точно так же, как и план ПФЭ, должен обладать свойствами симметричности, нормировки и ортогональности (см. выражения (3.6), с. 21). Взаимодействие исходных факторов, вместо которого вводится новый фактор, принято называть генерирующим соотношением. В рассмотренном примере (см. табл. 4.1) генерирующим соотношением является $\hat{x}_1\hat{x}_2$. Если исходные факторы образуют несколько взаимодействий, то имеется несколько генерирующих соотношений, и в исходный план ПФЭ могут быть введены несколько новых факторов.

Оценки коэффициентов в ДФЭ являются смешанными, ибо знаки некоторых вектор-столбцов совпадают между собой.

Характер смешивания оценок коэффициентов можно быстро определить, не обращаясь к матрице планирования эксперимента, а используя для этой цели

так называемый определяющий контраст. Определяющий контраст получают умножением генерирующего соотношения на фактор, который вводят в план вместо взаимодействия. Для ДФЭ типа « $2^3 - 1$ » (см. табл. 4.1) определяющий контраст запишется как $(\hat{x}_1 \hat{x}_2) \hat{x}_3 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3$. Для оценки характера смешивания коэффициентов математической модели рассматривают последовательно произведения определяющего контраста на все факторы, участвующие в эксперименте. Например, для коэффициентов b_1 получим $(\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3) \hat{x}_1 = \hat{x}_2 \hat{x}_3$, то есть оценка будет такой: $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$.

При планировании ДФЭ важным является вопрос, какие из взаимодействий следует выбрать для введения вместо них новых факторов. Если информация о силе влияния эффектов взаимодействий отсутствует, то при введении в исходный план нового фактора выбирают для него вектор-столбец с большим порядком взаимодействия, так как обычно эффекты взаимодействия более высоких порядков менее значимы, чем эффекты взаимодействия низших порядков. Если же имеется информация об эффектах взаимодействия, то она должна быть использована при выборе генерирующих соотношений.

При планировании ДФЭ обычно возникает вопрос, какой план ПФЭ (следовательно, и число факторов) следует выбрать в качестве исходного. На практике сразу обычно получают линейные модели объектов исследования. В большинстве случаев они оказываются пригодными для дальнейшего инженерного анализа. Из математической статистики известно, что число опытов матрицы, необходимое для оценки коэффициентов линейной модели при k факторах, должно быть не менее чем $k + 1$ (коэффициенты при переменных \hat{x}_j и свободный член b_0). Кроме того, дополнительно хотя бы один опыт (говорят: «одну степень свободы») необходимо иметь для проверки адекватности линейной модели. Поэтому минимальное число опытов ДФЭ, необходимое для получения линейной модели и проверки ее адекватности, должно быть не менее чем $k + 2$. Определив значение величины $k + 2$, необходимо из ряда чисел 8, 16, 32, ... выбрать ближайшее большее. Оно укажет минимальное число опытов плана ПФЭ, который должен быть выбран в качестве исходного, и следовательно, число опытов плана ДФЭ. Количество исходных факторов определяется в зависимости от числа опытов исходного плана. Так, при восьми опытах оно составляет три, при 16 опытах – четыре и т.д.

Пример. Необходимо построить план ДФЭ для исследования влияния на выходной параметр у технологического процесса пяти факторов. Информация о силе эффектов взаимодействия факторов отсутствует.

Решение. Построим план ДФЭ применительно к получению линейной модели. Определим минимальное число опытов исходного плана ПФЭ. Так как $k + 2 = 7$, то минимальное число опытов исходного ПФЭ должно быть выбрано равным восьми. Следовательно, в качестве исходного должен быть выбран план ПФЭ типа « 2^3 ». Легко установить, что количество исходных факторов равно трём.

Информация о силе влияния факторов на выходной параметр технологического процес-

Таблица 4.2

Номер опыта	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	$\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_4$	$\hat{x}_1\hat{x}_2 \rightarrow \hat{x}_5$
1	–	–	–	–	+
2	–	–	+	+	+
3	–	+	–	+	–
4	–	+	+	–	–
5	+	–	–	+	–
6	+	–	+	–	–
7	+	+	–	–	+
8	+	+	+	+	+

са не приводится, поэтому в качестве исходных выбираем любые три фактора и строим ПФЭ типа « 2^3 » (табл. 4.2, столбцы \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3). При наличии информации следовало бы выбрать факторы, наиболее влияющие на y .

Для получения из исходного плана ПФЭ плана требуемого ДФЭ нужно в исходный план ПФЭ ввести факторы

\hat{x}_4 и \hat{x}_5 . Причём они должны быть введены вместо малозначимых взаимодействий, построенных только из исходных факторов \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 . Так как информация о силе эффектов взаимодействия факторов отсутствует, то фактор \hat{x}_4 лучше всего ввести вместо взаимодействия высшего порядка в исходном плане ПФЭ, то есть вместо произведения $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$. Для фактора \hat{x}_5 используем одно из произведений $\hat{x}_1\hat{x}_2$, $\hat{x}_1\hat{x}_3$ или $\hat{x}_2\hat{x}_3$, например $\hat{x}_1\hat{x}_2$. Знаки столбцов \hat{x}_4 и \hat{x}_5 (см. табл. 4.2) необходимо проставить с учетом выбранных произведений. Легко убедиться, что построенный план ДФЭ представляет собой 1/4 часть плана ПФЭ типа « 2^5 ». **Примеры планирования ДФЭ рассмотрены подробно** в [1, с. 84 – 85; 2, с. 30 – 31].

Если линейная модель, построенная по результатам опытов ДФЭ, окажется неадекватной, то в ряде случаев имеется возможность ввести в модель наиболее влияющие взаимодействия факторов и проверить адекватность новой модели. Но надо быть осторожным, чтобы не ввести в модель дважды по сути один и тот же коэффициент. Для этого следует проанализировать характер смешивания коэффициентов.

Для оценки ошибки воспроизводимости опытов в ДФЭ так же, как и в ПФЭ, выполняют серии параллельных опытов, а для исключения систематических ошибок (влияния оператора, места, и т.п.) проводят рандомизацию опытов (см. лаб. работу № 3, с. 22 – 23).

При решении практических задач матрицы планирования ДФЭ могут быть получены для числа факторов $k \geq 4$. Как было показано, исходный план ПФЭ, используемый для получения плана ДФЭ, должен иметь не менее чем $k + 2$ опытов. Для трёх факторов в качестве исходного должен быть принят план, имеющий восемь опытов, который представляет собой ПФЭ типа « 2^3 », т. е. все факторы вошли в исходный план и получение плана ДФЭ теряет смысл.

Исходный план из четырех опытов (ПФЭ типа « 2^2 ») использовался выше лишь для объяснения сущности ДФЭ.

Статистическая обработка результатов ДФЭ

Статистическая обработка результатов ДФЭ выполняется аналогично обработке результатов ПФЭ (см. лаб. работу № 3, с. 23 – 25).

При построении математической модели следует иметь в виду, что максимальное число коэффициентов, включаемых в модель, должно быть не более чем $N - 1$, где N – число опытов (строк) матрицы ДФЭ.

4.3. Описание лабораторного макета

Объектом исследования в лабораторной работе является неинвертирующий

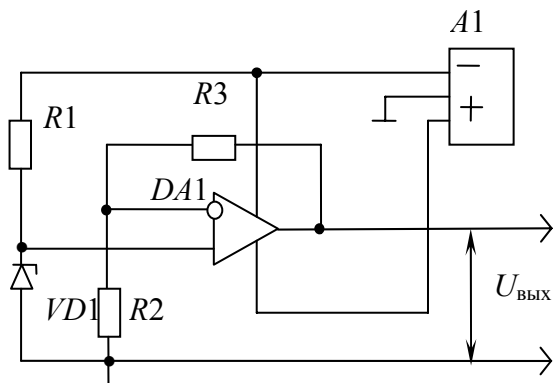


Рис. 4.1. Электрическая схема источника опорного напряжения

источник высокостабильного (опорного) напряжения, выполненный с использованием операционного усилителя серии 140 (К140). Электрическая схема источника приведена на рис. 4.1. Номинальные значения параметров элементов, тип стабилитрона и напряжение питания указаны на передней панели лабораторного макета.

С учетом ряда допущений в отношении параметров ОУ выражение для выходного напряжения источника опорного напряжения (отклика y), приводимое в литературе [3], имеет вид

$$y \rightarrow U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{СТ}} \frac{R2 + R3}{R2} = U_{\text{СТ}} K, \quad (4.2)$$

где $U_{\text{СТ}}$ – напряжение стабилизации стабилитрона;

K – коэффициент передачи неинвертирующего усилителя.

Из формулы (4.2) видно, что выходное напряжение $U_{\text{ВЫХ}}$ зависит от значений параметров элементов $R2$ и $R3$. Производственный разброс сопротивлений резисторов $R2$ и $R3$ может заметно сказаться на значении коэффициента передачи K и, следовательно, выходного напряжения $U_{\text{ВЫХ}}$. Кроме того, значение параметра $U_{\text{СТ}}$, определяемое типом стабилитрона, всегда имеет некоторый разброс и зависит от тока стабилизации $I_{\text{СТ}}$. Ток $I_{\text{СТ}}$ в свою очередь определяется напряжением источника питания $A1$ и значением сопротивления резистора $R1$, которые также могут иметь отклонения от номинальных значений. Поэтому построение математической модели для выходного напряжения источника опорного напряжения представляет практический интерес.

В макете предусмотрена возможность варьирования в пределах до $\pm 10\%$ значениями пяти факторов: сопротивлениями резисторов $R1 - R3$, напряжением стабилизации элемента $VD1$ и напряжением источника питания $A1$. Для наглядности и удобства выполнения лабораторной работы на передней панели макета в соответствующих цепях схемы установлены входные и выходные гнезда.

4.4. Задание на экспериментальную часть лабораторной работы

Рекомендуемая последовательность выполнения работы.

1. Выбрать нулевые уровни и интервалы варьирования факторами (первичными параметрами) исследуемого РЭУ согласно схеме макета и варианту (прило-

жение), указанному преподавателем. В качестве отклика $U_{\text{вых}}$ рассматривать $U_{\text{вых}}$, в качестве факторов – параметры $R1 - R3$, $U_{\text{ст}}$, напряжение питания источника $A1$.

2. Спланировать ДФЭ типа « 2^{k-p} » при $k = 5$.

3. Определиться с числом серий параллельных опытов и выполнить рандомизация опытов каждой серии.

При выполнении рандомизации следует использовать случайные числа, генерируемые ЭВМ (опция в программе **lab3-4**), или, в крайнем случае, воспользоваться табл. П.3.1 приложения лаб. работы № 3.

4. Используя лабораторный макет, выполнить опыты каждой серии ДФЭ с учетом рандомизации.

При проведении опытов для измерения постоянного напряжения $U_{\text{вых}}$ рекомендуется пользоваться цифровым измерительным прибором.

5. С помощью учебной программы для ПЭВМ **lab3-4** (папка **ТОКТИН**) выполнить статистическую обработку результатов опытов ДФЭ.

Используя результаты статистической обработки, сформировать линейную модель вида

$$y = b_0 + b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + \dots + b_5\hat{x}_5, \quad (4.3)$$

выяснить статистическую значимость рассчитанных коэффициентов этой модели, сформировать конечный вид безразмерного полинома и с помощью программы для ПЭВМ **lab3-4** проверить адекватность построенной модели результатам опытов.

7. Сделать переход к размерному полиному – модели, в которую значения x_j подставляются в своей размерности.

Для этого необходимо в построенном полиноме вида (4.3) кодированные значения факторов $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_5$ заменить соотношениями вида (3.4), приведенными в лабораторной работе № 3 (с. 20), и выполнить необходимые преобразования.

8. Проанализировать построенную модель, выполнить её сопоставление с выражением (4.2).

Для сопоставления построенной модели с выражением (4.2) необходимо для каждого опыта матрицы планирования рассчитать значения выходного напряжения $U_{\text{вых}}$ по построенной модели и по выражению (4.2), а затем сравнить полученные два результата с экспериментальным значением.

9. Написать отчёт по лабораторной работе.

4.5. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Электрическая схема исследуемого РЭУ (функционального узла).
3. Таблица с указанием, какой выходной параметр РЭУ рассматривается в качестве отклика и какому первичному параметру соответствует тот или иной номер фактора, нулевых уровней и интервалов варьирования факторами.
4. План ДФЭ (матрица планирования).
5. Результаты опытов ДФЭ.
6. Основные формулы алгоритма статистической обработки результатов ДФЭ. Приводятся только в случае указания преподавателем.

7. Рассчитанные на ПЭВМ значения величин $M(y_i)$, $D(y_i)$ и $D(y)$, ($i = 1, 2, \dots, N$).

Ответы на пп. 4, 5 и 7 дать одной таблицей вида, аналогичного табл. 3.4 лаб. работы № 3 (см. с. 27).

8. Рассчитанные на ПЭВМ значения коэффициентов b_j (при необходимости и вида b_{jl}), ошибки Δb и заключение о статистической значимости полученных коэффициентов с указанием значения доверительных интервалов и доверительной вероятности γ ; $j = 1, \dots, k$; $j \neq l$. Ответ на этот пункт дать в виде таблицы, аналогичной табл. 3.5 лаб. работы № 3 (см. с. 27).

9. Математический вид линейного безразмерного полинома (4.3) и аргументированное заключение об адекватности этой модели.

10. Результаты сопоставления полученной математической модели с выражением (4.2), представленные в виде, аналогичном табл. 3.6 лаб. работы № 3 (см. с. 28).

12. Выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков С.М. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности: Учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов. – Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 336 с.
2. Боровиков С.М., Погребняков А.В. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности. Сборник задач: Учеб. пособие для вузов. – Мн.: БГУИР, 2001. – 124 с.
3. Нестеренко Б.К. Интегральные операционные усилители: Справ. пособие по применению. – М.: Энергоиздат, 1982. – 80 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты заданий для выполнения экспериментальной части лабораторной работы № 4

Номер варианта	$\Delta R1/R1$, %	$\Delta R2/R2$, %	$\Delta R3/R3$, %	$\Delta U_{ст}/U_{ст}$, %	$\Delta U_{пит}/U_{пит}$, %
1	10	10	10	10	10
2	5	5	5	5	5
3	10	10	10	5	10
4	10	10	5	10	10
5	10	5	10	10	10
6	5	10	10	10	10
7	10	10	10	5	5
8	10	10	5	5	10
9	10	5	5	10	10
10	5	5	10	10	10
11	5	10	10	10	5
12	10	10	5	10	5
13	10	5	10	5	10
14	5	10	5	10	10
15	10	5	10	10	5
16	5	10	10	5	10
17	10	10	5	5	5
18	10	5	5	5	10
19	5	5	5	10	10
20	5	10	10	5	5

Примечание. Знаки \pm при относительных отклонениях параметров для простоты записи опущены.