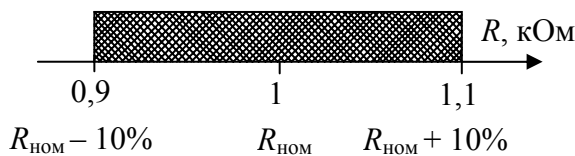


## Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

### 2.1. Случайный характер параметров и их вероятностное описание

В силу объективно действующих причин параметры элементов, технологических операций, свойства материалов, характеристики инструмента всегда имеют некоторый разброс относительно своих средних (номинальных) значений.

По сути, параметры, с которыми приходится иметь дело в конструировании и технологии РЭУ (КиТРЭУ) являются случай-



**Рис.2.1.** Диапазон изменения сопротивления нагрузки

допуска (рис.2.1).

Для анализа точности и стабильности выходных параметров надо располагать моделью (выражением) вида

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

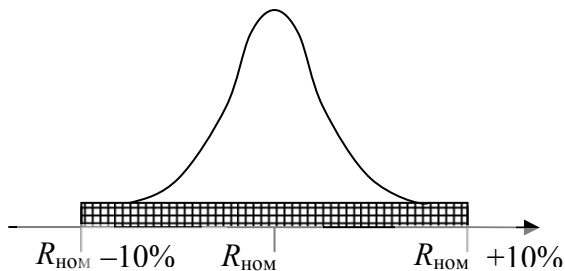
где  $y$  – выходной параметр;  
 $x_i, \dots, x_n$  – первичные параметры;  
 $n$  – число учитываемых первичных параметров.

Кроме того, надо знать вероятностное описание первичных параметров. Под вероятностным описанием будем понимать количественные характеристики, дающие представление о среднем значении параметра, степени его разброса, группировании значений параметра в той или иной области и т.д.

В качестве вероятностного описания параметров можно использовать его числовые характеристики, а именно:

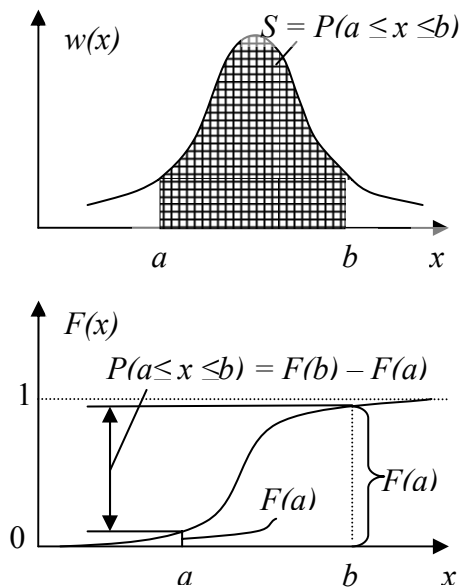
а) математическое ожидание параметра  $M(x)$ ;

б) среднее квадратическое отклонение параметра  $\sigma(x)$  или дисперсию  $D(x)$ , где  $x$  – рассматриваемый параметр.



**Рис.2.2.** Группирование значений сопротивления резистора в пределах поля допуска

Указанные характеристики хороши для инженерного использования, однако не дают ответ на вопрос, как сгруппированы значения параметра в пределах поля допуска (рис.2.2).



**Рис.2.3. Определение вероятности попадания параметра в заданный диапазон**

Для ответа на этот вопрос в инженерной практике используют закон распределения параметра в пределах поля допуска. Пользуются либо плотностью распределения параметра  $w(x)$  или функцией распределения  $F(x)$ . Функции  $w$  и  $F$  несут о рассматриваемом параметре  $x$  одну и ту же информацию, но в разной форме.

Инженера конструктора-технолога нередко интересует вопрос, какова вероятность того, что параметр  $x$  будет находиться в диапазоне от  $a$  до  $b$ . Эта вероятность с использованием функций  $w$  и  $F$  может быть определена как

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b w(x) dx, \quad (2.2)$$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a). \quad (2.3)$$

Геометрическая интерпретация выражений (2.2) и (2.3) показана на рис.2.3.

## 2.2. Модели законов распределения параметров

### 2.2.1. Общие сведения

В инженерной практике пользуются термином "модель закона распределения параметра", имея в виду, что истинный закон распределения может быть вообще нам не известен, а используем мы некоторое приближение этого закона, полученное экспериментально.

Известно более 300 видов моделей законов распределения. В конструировании и технологии РЭУ используют не более 10-20 из них. Широко используют такие, как нормальную и усеченную нормальную; равномерную; экспоненциальную; логарифмически нормальную; модель Вейбулла.

Характеристика экспоненциальной модели и модели Вейбулла, широко используемых в теории и практике надежности, приведена в разделе 5.6.

### 2.2.2. Нормальная модель

Функция  $w$  для этой модели имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.4)$$

где  $x$  – рассматриваемый параметр и его текущие значения;  
 $m, \sigma$  – параметры модели.

Функция распределения для нормальной модели может быть получена в виде

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.5)$$

Указанный интеграл нельзя выразить через элементарные функции. Для его определения используют специальные табличные функции. В инженерной практике широко используют две:

$$\text{а) } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{где } \Phi(x) \text{ – нормальная функция рас-}$$

пределения параметра со значениями  $m=0, \sigma=1$  (в дальнейшем – функция стандартного нормального распределения);

$$\text{б) } \Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{где } \Phi_1(x) \text{ – функция Лапласа.}$$

Связь между этими функциями такова

$$\Phi(x) = 0,5 + \Phi_1(x).$$

В дальнейшем будем пользоваться функцией  $\Phi(x)$ .

Тогда функция распределения параметра  $x$  в случае нормальной модели запишется как

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (2.6)$$

где  $\frac{x-m}{\sigma}$  – аргумент функции.

С учетом выражения (2.6) вероятность вида  $P(a \leq x \leq b)$  может быть определена как

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \quad (2.7)$$

С параметрами  $m$  и  $a$  нормальной модели как-то связаны числовые характеристики  $M(x)$  и  $\sigma(x)$ . Для нормальной модели, и только для нее, справедливы равенства

$$\begin{cases} m = M(x); \\ \sigma = \sigma(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

Графики функций  $w(x)$  и  $F(x)$  приведены на рис. 2.4.

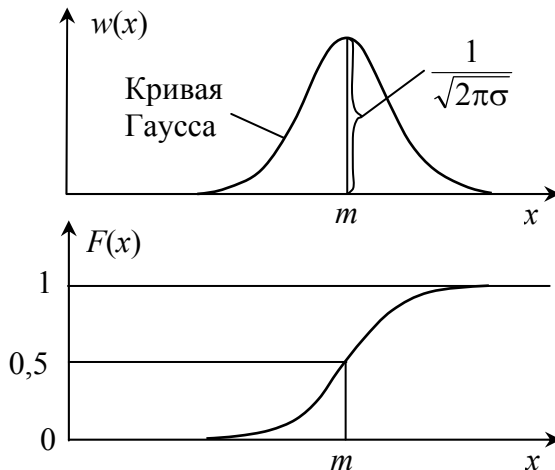


Рис.2.4. Графики функций  $w(x)$  и  $F(x)$  для нормальной модели

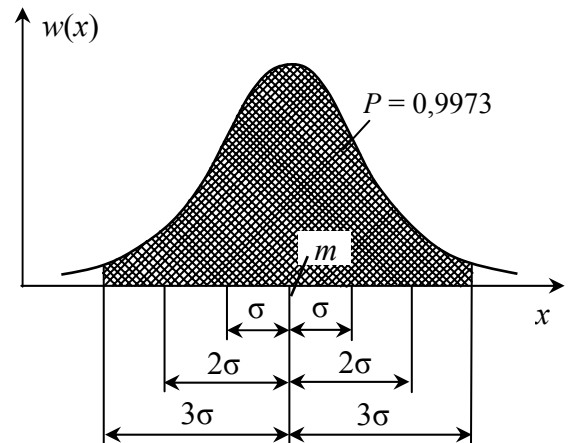


Рис.2.5. К пояснению “правила трех сигм”

Все случае нормальной модели инженера может интересовать вопрос, какова вероятность вида

$$P(m - n \cdot \sigma \leq x \leq m + n \cdot \sigma),$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – целые числа.

Применяя выражение (2.7), для  $n = 1, 2, 3$  получим значения, приведенные в табл.2.1.

Таблица 2.1

Значения вероятностей  $P(m - n \cdot \sigma \leq x \leq m + n \cdot \sigma)$  в зависимости от  $n$

$n$	1	2	3
$P(m - n \cdot \sigma \leq x \leq m + n \cdot \sigma)$	0,68	0,95	0,9973

Из табл.2.1 видно, что в диапазон  $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$  укладывается практически все рассеивание параметра (99,73% значений). Поэтому на практике, определив параметры нормальной модели, предельными значениями рассматриваемого параметра считают точки, отстоящие от величины  $m$  на  $\pm 3\sigma$  (рис.2.5). Такой способ оценки предельных отклонений параметра получил название “правила трех сигм”. Этим правилом широко пользуются при установлении допусков на параметры.

Если есть основания принять модель распределения параметра нормальной, то половина поля допуска ( $\delta$ ), устанавливается по "правилу трех сигм", т.е.

$$\delta \approx 3\sigma. \quad (2.9)$$

Примерно в 95% случаев параметры в КиТРЭУ распределены по законам близким к нормальному. Замечено, что для параметров резисторов и конденсаторов, имеющих допуск  $\pm 10\%$  и более, оправдано использование нормальной модели.

### 2.2.3. Усеченная нормальная модель

Параметры в КиТРЭУ, являясь случайными величинами, часто меняются в ограниченных пределах от  $A$  до  $B$ . Поэтому часто для их описания используют усеченную нормальную модель (распределение).

Функция  $w$  в этом случае имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < A; \\ \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } A \leq x \leq B; \\ 0 & \text{при } x > B, \end{cases}$$

где  $m$ ,  $\sigma$  – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение исходного неусеченного нормального распределения (модели).

Величину  $C$  определяют как

$$C = \frac{1}{\Phi\left(\frac{B-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right)},$$

где  $\Phi(\dots)$  – табличная функция стандартного нормального распределения (см. табл.П1.1 прил.1).

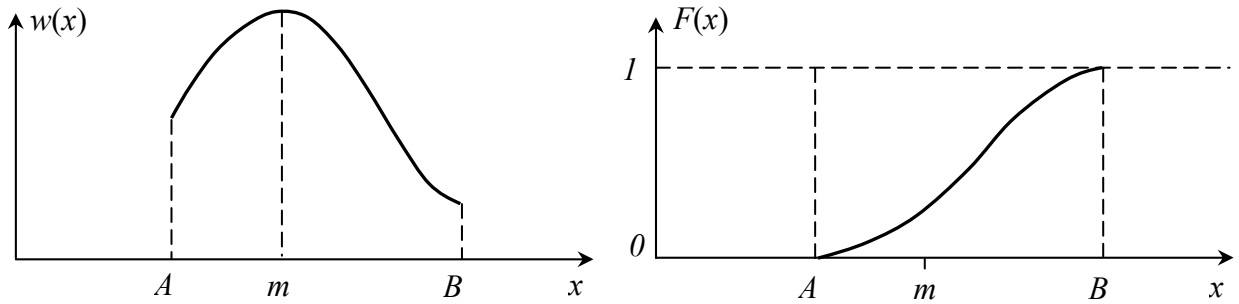
Функция распределения  $F(x)$  в случае усеченной нормальной модели может быть получена в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < A; \\ C \left[ \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right) \right] & \text{при } A \leq x \leq B; \\ 1 & \text{при } x > B. \end{cases}$$

Графики функций  $w(x)$  и  $F(x)$  показаны на рис.2.6.

Параметры усеченной нормальной модели  $A$ ,  $B$ ,  $m$  и  $\sigma$  связаны с числовыми характеристиками  $M(x)$  и  $\sigma(x)$  выражениями

$$M(x) = m + K\sigma;$$



**Рис.2.6. Графики функций  $w(x)$  и  $F(x)$  для усеченной нормальной модели**

$$\sigma(x) = \sigma \sqrt{1 - K^2 - C [t_2 \varphi(t_2) - t_1 \varphi(t_1)]};$$

$$K = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)}; \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}};$$

где  $t_1 = \frac{A-m}{\sigma}$ ;  $t_2 = \frac{B-m}{\sigma}$ .

#### **2.2.4. Логарифмически нормальная модель**

Для логарифмически нормальной модели характерно то, что по нормальному закону распределен не сам случайный параметр, а его логарифм.

Функция  $w(x)$  для логарифмически нормальной модели имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{M_1 \sigma_x x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

где  $m_x, \sigma_x$  – параметры модели;  $m_x = M(\lg x)$ ;  $\sigma_x = \sigma(\lg x)$ ;

$$M_1 = \frac{1}{\lg e} = 2,303.$$

Функция распределения  $F(x)$  может быть получена в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{\lg t - m_x}{\sigma_x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

График функции  $w(x)$  зависит от значения параметра  $\sigma_x$  (рис.2.7).

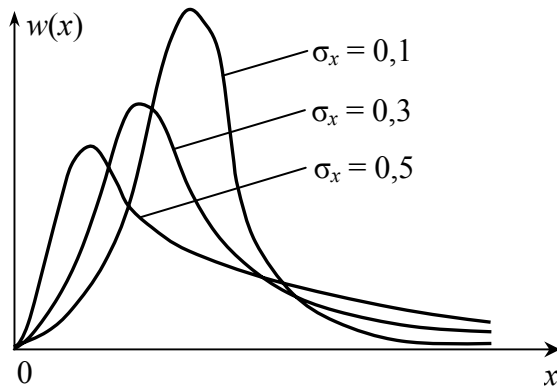


Рис.2.7. График функции  $w(x)$  для логарифмически нормальной модели

Параметры  $m_x$  и  $\sigma_x$  логарифмически нормальной модели связаны с числовыми характеристиками  $M(x)$  и  $\sigma_x$  выражениями

$$M(x) = 10^{m_x} \exp \left[ \frac{M_1^2 \sigma_x^2}{2} \right],$$

$$\sigma(x) = M(x) \sqrt{\left[ \frac{M(x)}{10^{m_x}} \right]^2 - 1}.$$

При малых значениях  $\sigma_x$  логарифмически нормальная модель близка к нормальной. Поэтому при  $\sigma_x < 0,1 \dots 0,3$  возможна приближенная замена логарифмически нормальной модели нормальной с параметрами

$$m = 10^{m_x} \exp \left[ \frac{M_1^2 \sigma_x^2}{2} \right];$$

$$\sigma = M_1 10^{m_x} \sigma_x.$$

Иногда в логарифмически нормальной модели используют натуральный логарифм рассматриваемого параметра.

### 2.2.5. Равномерная модель

Функция  $w$  имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $a, b$  — параметры равномерной модели.

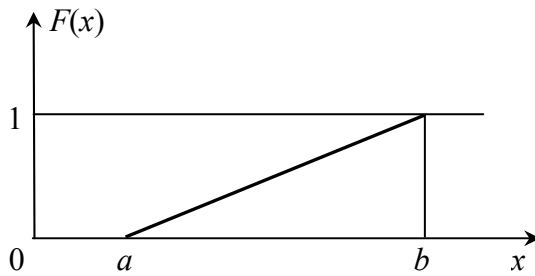
Функция распределения  $F(x)$  может быть получена в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx = \frac{x-a}{b-a}. \quad (2.11)$$

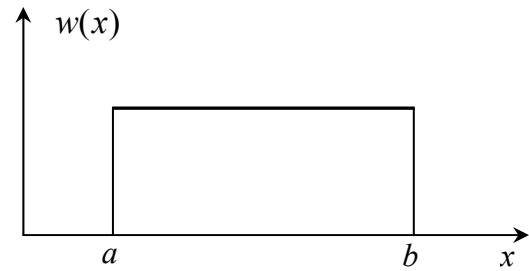
Графики функций  $F(x)$  и  $w(x)$  имеют вид, показанный соответственно на рис.2.8 и 2.9.

Параметры модели  $a$  и  $b$  связаны с числовыми характеристиками  $M(x)$  и  $\sigma(x)$  выражениями

$$M(x) = \frac{a+b}{2}; \quad (2.12)$$



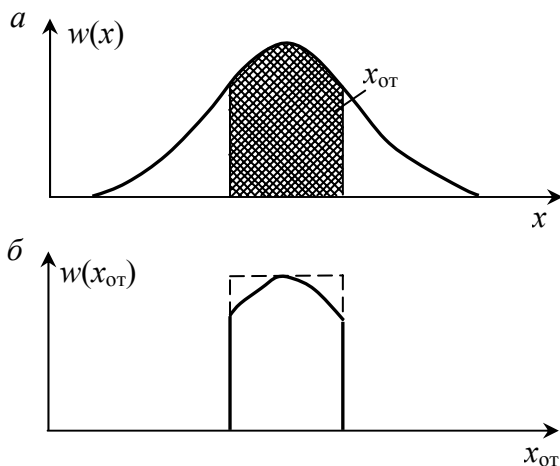
**Рис.2.8. График функции  $F(x)$  для равномерной модели**



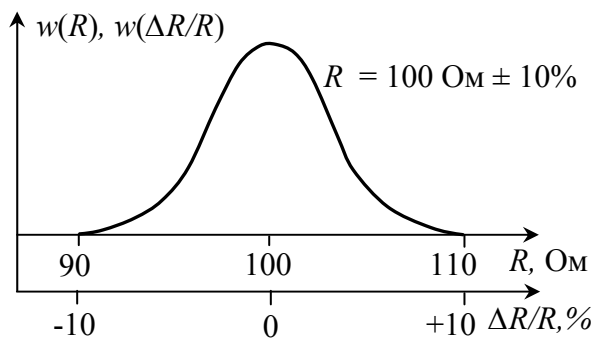
**Рис.2.9. График функции  $w(x)$  для равномерной модели**

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (2.13)$$

Равномерное распределение на практике – чаще всего следствие вмешательства человека. Например, закон распределения параметра для элементов повышенной точности, полученных путем отбора из выборки с относительно большим допуском на параметр, может быть принят равномерным. Сказанное иллюстрирует рис.2.10.



**Рис.2.10. Равномерная модель как следствие отбора элементов повышенного уровня точности параметров**



**Рис.2.11. Вероятностное описание параметров**

Неравномерностью на вершине пренебрегают и пользуются равномерной модель (см. рис.2.10, б).

Для резисторов и конденсаторов, имеющих допуск на параметры  $\pm 5\%$  и менее, в большинстве случаев оправдана гипотеза о равномерной модели, так как по всей видимости высокая точность параметра достигалась путем отбора элементов.

В случае, когда нет оснований принять гипотезу о равномерной или нормальной моделях и сложно определить закон распределения экспериментально, следует пользоваться равномерной моделью, так как она является на практике предельным (наихудшим) случаем рассеивания параметров.

Пользуются либо вероятностным описанием параметра, взятым в своей размерности,



либо вероятностным описанием его относительной погрешности (разброса, отклонения). Связь между указанными вероятностными описаниями иллюстрируется рис.2.11.

Форма закона распределения при переходе от  $R$  к  $\Delta R/R$  сохраняется, меняются только его параметры.

### 2.3. Пути вероятностного описания совокупности параметров

Ранее было показано, что для вероятностного описания параметров, рассматриваемых в отдельности, можно использовать характеристики  $M(x_i)$ ,  $\sigma(x_i)$ ,  $w(x_i)$ , где  $x_i$  –  $i$ -й первичный параметр (в случае функции  $w_i(x)$  и его текущие значения).

В конструировании и технологии РЭУ в большинстве случаев приходится иметь дело с совокупностью параметров. Они могут быть независимыми и зависимыми.

Возникает вопрос, как на практике с вероятностной точки зрения описать совокупность параметров.

Наиболее полной характеристикой такого вероятностного описания является многомерная функция плотности распределения  $w(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $n$  – число параметров рассматриваемой совокупности.

Из теории вероятностей известно, что

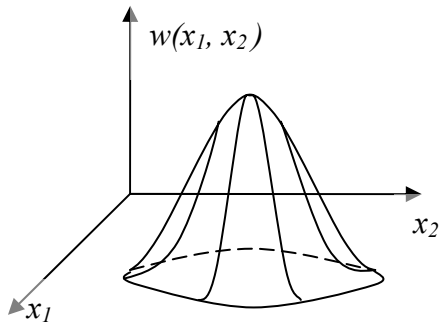
$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_1) \dots w(x_n) = \prod_{i=1}^n w(x_i). \quad (2.14)$$

Это выражение справедливо для независимых параметров. Поэтому для совокупности независимых параметров можно пользоваться вероятностным описанием этих параметров, рассматриваемых в отдельности, т.е. характеристиками  $M(x_i)$ ,  $\sigma(x_i)$ ,  $w(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

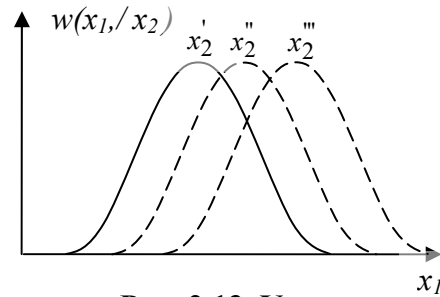
Для зависимых параметров указанное выше выражение несправедливо. Поэтому для вероятностного описания их совокупности следовало бы пользоваться многомерной функцией  $w(x_1, \dots, x_n)$ , или различными модификациями условных функций:

$$\begin{aligned} &w(x_1 / x_2, \dots, x_n); \\ &w(x_1 / x_2, x_3, \dots, x_n); \\ &\dots \\ &w(x_n / x_1, x_2, \dots, x_{n-1}); \\ &w(x_1, x_2 / x_3, \dots, x_n); \\ &\dots \end{aligned}$$

Однако даже в случае двух параметров ( $n = 2$ ) мы столкнулись бы со сложностями математического характера, так как  $w(x_1, x_2)$ , представляет собой поверхность, а условная функция  $w(x_1/x_2)$  – семейство кривых (рис.2.12, 2.13).



**Рис. 2.12. Двумерная функция распределения параметров  $x_1$  и  $x_2$**



**Рис. 2.13. Условная функция распределения**

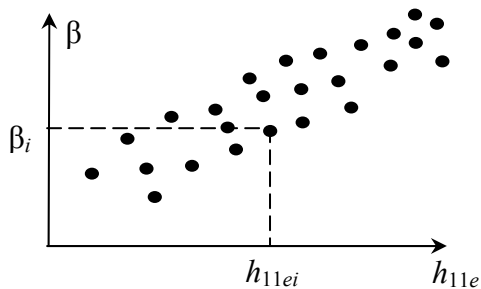
Поэтому возникает вопрос, как из многомерных или условных функций извлечь информацию о зависимости параметров в форме, удобной для инженерного использования. Выход был найден путем введения такого понятия, как коэффициент корреляции между параметрами.

## 2.4. Корреляция параметров

В технике, да и в жизни вообще, кроме жестких, т.е. функциональных связей между параметрами существует так называемый вероятностный или стохастический характер связи, при котором каждому значению одного из параметров, может соответствовать одно или несколько значений другого параметра.

Для количественной оценки силы вероятностной связи между параметрами обычно используют математический аппарат корреляционного анализа. Поэтому вероятностную связь между параметрами часто называют корреляционной связью или корреляцией.

Первое суждение о силе корреляционной связи можно получить по виду так называемого корреляционного поля параметров.



**Рис. 2.14. Корреляционное поле параметров**

*Корреляционное поле параметров* представляет собой совокупность точек, нанесенных на прямоугольную систему координат, причем каждая точка соответствует паре рассматриваемых параметров. Например, корреляционное поле параметров  $\beta$  и  $h_{11e}$  транзистора может принять вид, показанный на рис. 2.14.

В технике с каждой точкой корреляционного поля связан экземпляр объекта или реализация процесса.

Если точки корреляционного поля группируются вблизи прямой линии, мысленно проведенной в этом поле, то между параметрами имеет место тесная корреляционная связь.

Для количественной оценки тесноты или силы связи между параметрами пользуются *коэффициентом корреляции*, подсчитываемым по формуле [7]

$$r_{x,z} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(z_i - m_z)}{(n-1)\sigma_x\sigma_z}, \quad (2.15)$$

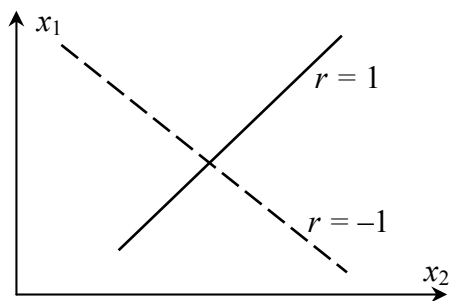
где  $x, z$  – рассматриваемые параметры;

$x_i, z_i$  –  $i$ -е значение параметра  $x$  и соответствующее ему значение параметра  $z$ ;

$m_x, m_z$  – математические ожидания параметров  $x$  и  $z$ ;

$\sigma_x, \sigma_z$  – средние квадратические отклонения параметров  $x$  и  $z$ ;

$n$  – число наблюдений пар параметров  $x$  и  $z$ .

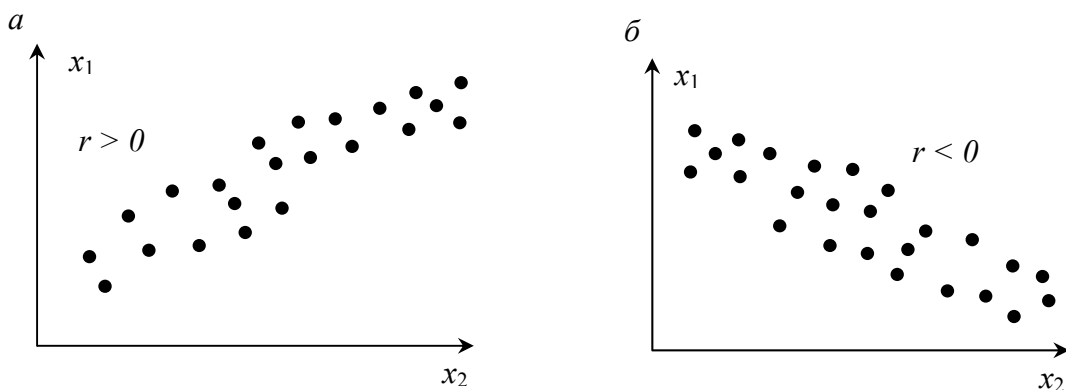


**Рис. 2.15. Линейная функциональная связь между параметрами**

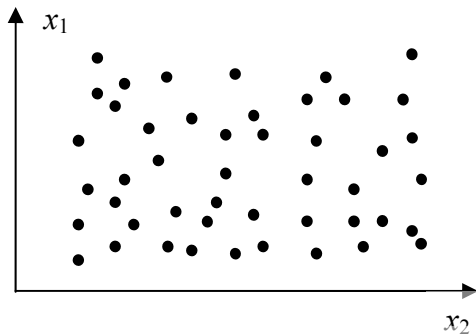
Коэффициент корреляции, подсчитываемый по формуле (2.15), лежит в пределах от  $-1$  до  $+1$ . Он характеризует близость корреляционной связи между параметрами к их линейной функциональной зависимости. Между параметрами имеет место линейная функциональная связь, если  $r = \pm 1$  (рис.2.15).

Различают отрицательную и положительную корреляцию между параметрами. Для отрицательной корреляции  $r < 0$ , для положительной  $r > 0$ . Вид корреляционного поля для этих случаев показан на рис.2.16.

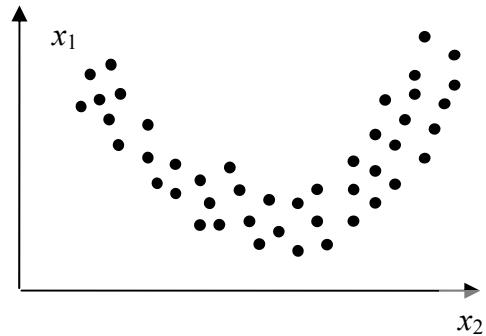
Если  $r \rightarrow 0$ , то мы имеем дело практически с независимыми параметрами. Вид корреляционного поля в этом случае близок к показанному на рис.2.17.



**Рис.2.16. Корреляционное поле параметров:**  
**а** – положительная корреляция; **б** – отрицательная корреляция



**Рис.2.17. Корреляционное поле практически независимых параметров**



**Рис.2.18. Корреляционное поле параметров при нелинейной связи**

Известны случаи, когда коэффициент корреляции, подсчитываемый по выражению (2.15), оказывается близким к нулю, но между параметрами существует тесная связь (рис.2.18).

Дело здесь в том, что коэффициент, подсчитываемый по выражению (2.15), выявляет лишь линейную составляющую вероятностной связи между параметрами. По этой причине его часто называют коэффициентом линейной корреляции (существует еще и криволинейная корреляция).

Коэффициент, определяемый по выражению (2.15), называют также коэффициентом парной корреляции, имея ввиду, что рассматривается корреляция между парой параметров. Существует также такое понятие, как множественная корреляция.

Характерным примером коррелированных параметров из жизни является масса и рост человека.

## **2.5. Вероятностное описание зависимых параметров**

В инженерной практике для вероятностного описания зависимых параметров пользуются характеристиками  $M(x_i)$ ,  $\sigma(x_i)$ ,  $w(x_i)$ ,  $r_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , где  $n$  – число параметров совокупности.

Часто для удобства записи информацию о зависимости параметров представляют в виде корреляционной матрицы. Она представляет собой таблицу, каждая ячейка которой содержит запись коэффициента парной корреляции. Например, корреляционная матрица  $h$  - параметров транзистора может быть представлена в виде табл.2.2.

Таблица 2.2

Корреляционная матрица  $h$ -параметров транзистора

Параметр	$h_{11}$	$h_{21}$	$h_{12}$	$h_{22}$
$h_{11}$	1,00			
$h_{21}$	0,80	1,00		
$h_{12}$	0,55	0,30	1,00	
$h_{22}$	0,25	0,4	0,45	1,00

Корреляционная матрица является симметричной относительно единичной диагонали, поэтому заполняют либо верхнюю, либо нижнюю ее часть.

## 2.6. Экспериментальное определение вероятностного описания

### 2.6.1. Основные задачи математической статистики

Для решения многих инженерных задач надо располагать вероятностным описанием параметров. В ряде случаев такое описание может быть получено из технической документации на элементы, устройства или процесс.

**Пример 2.1.** Пусть в паспорте на резистор указано  $R = 1 \text{ кОм} \pm 10\%$ . Так как допуск на параметр относительно велик, то оправдано использование гипотезы о нормальном распределении параметра. Далее можно указать

$$M(R) = R_{\text{ном}} = 1 \text{ кОм.}$$

С учетом "правила трех сигм" (рис.2.19)

$$\sigma(R) \approx \frac{\delta(R)}{3}.$$

Из рис.2.19 видно, что  $\delta(R) = 0,1 \text{ кОм}$ , тогда

$$\sigma(R) \approx \frac{0,1}{3} \approx 0,033 \text{ кОм} = 33 \text{ Ом.}$$

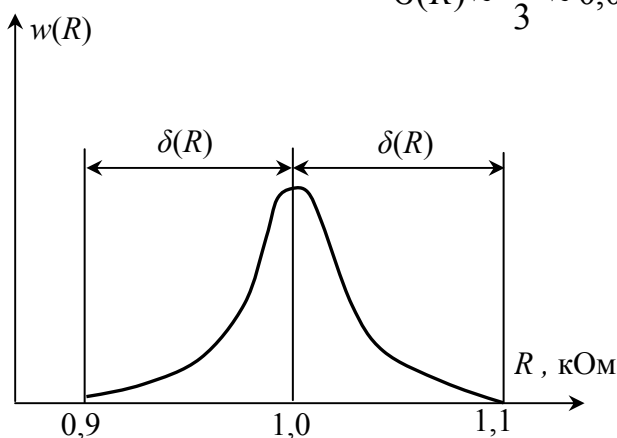


Рис.2.19. Вероятностное описание сопротивления резистора

Во многих случаях из технической документации сложно или невозможно получить характеристику параметра, необходимую для расчетов. Например, из записи "значение параметра  $h_{21e}$  не менее 20" невозможно даже примерно указать математическое ожидание  $M(h_{21e})$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma(h_{21e})$ . Затруднительно принять и гипотезу

о законе распределения параметра. В подобных случаях вероятностное описание параметров получают экспериментально с помощью статистических методов.

Используя эти методы, вероятностное описание параметров определяют на основе ограниченного числа наблюдений (опытов). Произведенные  $n$  опытов можно мысленно рассматривать как "выборку" из некоторой чисто условной "генеральной совокупности", состоящей из бесконечного числа возможных или мысленных опытов, которые можно было бы произвести над интересующим параметром. Поэтому в отношении числовых характеристик параметров, полученных на основе ограниченного числа наблюдений, употребляют термины "выборочное среднее", "выборочное среднее квадратическое отклонение", "выборочные характеристики" и т.д. В прикладной литературе указанные термины иногда заменяют терминами "статистическое среднее", "статистическое среднее квадратическое отклонение", "статистические характеристики" и т.п.

Основными задачами математической статистики, применительно к решению рассматриваемых вопросов, являются следующие:

- а) определение математических ожиданий (средних значений) параметров;
- б) нахождение характеристик разброса (рассеивания, отклонения) параметров;
- в) выявление законов распределения параметров;
- г) определение коэффициентов парной корреляции между ними.

Для определения законов распределения параметров, в соответствии с принципами математической статистики, надо иметь достаточно большое число наблюдений параметра  $n$ :  $n \geq 50 \dots 100$ . К сожалению, по экономическим и техническим соображениям не всегда удастся обеспечить указанное требование.

Следует помнить, что надо иметь не менее 20-30 наблюдений параметра, чтобы как-то можно было доверять вероятностному описанию, полученному с помощью приемов математической статистики.

С наблюдением параметра связана замена элемента, устройства или реализации технологического процесса.

### **2.6.2. Требования, предъявляемые к оценкам параметров**

Любое значение параметра, полученное на основе ограниченного числа наблюдений, называют оценкой параметра. Например, в качестве оценки математического ожидания параметра используют среднее значение.

Различают точечные и интервальные оценки. **Точечной** называют такую оценку, которая представляется одним числом, т.е. точкой на числовой оси. **Интервальной** называют оценку, представленную интервалом значений.

К оценкам предъявляются следующие основные требования:

а) с увеличением числа наблюдений оценка параметра должна приближаться к истинному его значению. Оценку, отвечающую этому свойству, называют состоятельной;

б) вычисляя оценку параметра, мы должны быть уверены в том, что заведомо не совершаем ошибку в сторону уменьшения или увеличения оценки, т.е. должны быть уверены в отсутствии систематической ошибки. Оценка, отвечающая этому свойству, называется несмещенной;

в) расхождения между оценками параметра, подсчитанными по результатам  $n$  наблюдений, взятых из любого участка теоретически возможного числа наблюдений  $N$ , должны быть минимальными. Другими словами, дисперсия оценки должна быть минимальной. Оценку, отвечающую этому свойству, называют эффективной.

### 2.6.3. Определение точечных оценок математических ожиданий и средних квадратических отклонений параметров

Пусть произведено  $n$  наблюдений параметра  $x$  и получены значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Определим точечную оценку для математического ожидания и среднего квадратического отклонения этого параметра, причем оценки должны отвечать указанным выше требованиям.

Из теории вероятностей известно, что такие оценки могут быть подсчитаны с помощью выражений

$$M^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad (2.16)$$

$$\sigma^*(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [x_i - M^*(x)]^2}{n-1}}. \quad (2.17)$$

Здесь, а при необходимости далее, оценки будут помечаться знаком \* над обозначением параметра или характеристики.

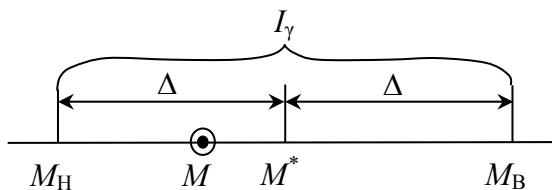
Величину  $(n - 1)$  в знаменателе формулы (2.17) называют иногда числом степеней свободы.

### 2.6.4. Определение интервальных оценок параметров

В инженерной практике нередко возникает вопрос о точности и надежности оценки. Для ответа на этот вопрос пользуются такими понятиями, как доверительный интервал и доверительная вероятность.

Под доверительным интервалом понимают диапазон значений, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение параметра. Указанную вероятность называют доверительной.

Если мы найдем доверительный интервал, то тем самым укажем интервальную оценку параметра. Покажем, как это делать, на примере математического ожидания параметра.



**Рис.2.20. К определению интервальной оценки**

Пусть получена точечная оценка математического ожидания параметра  $x$ . Обозначим эту оценку как  $M^*(x)$ .

Доверительный интервал строят обычно симметричным относительно точечной оценки  $M^*(x)$ , как показано на рис.2.20.

Здесь приняты следующие

обозначения:

$M^*$  – точечная оценка математического ожидания рассматриваемого параметра; для простоты записи знак  $x$  опущен;

$M$  – истинное значение математического ожидания;

$M_H$  – нижняя граница доверительного интервала;

$M_B$  – верхняя граница доверительного интервала;

$I_\gamma$  – доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности  $\gamma$ ;

$\Delta$  – расстояние от точечной оценки  $M^*$  до границ доверительного интервала.

Доверительный интервал  $I_\gamma$  обычно выражают как

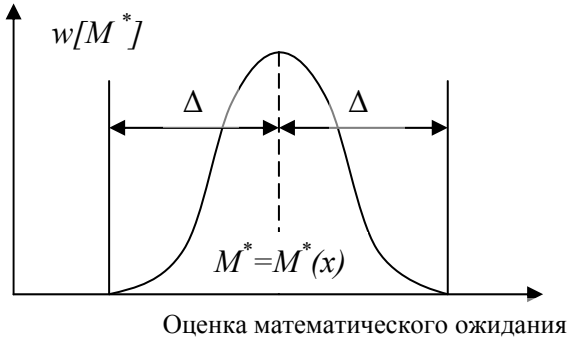
$$I_\gamma = \{M_H; M_B\} = \{M^* - \Delta; M^* + \Delta\}. \quad (2.18)$$

Если мы его найдем, то тем самым укажем интервальную оценку для математического ожидания.

Для определения доверительного интервала  $I_\gamma$  надо знать значение  $\Delta$ . Для ее нахождения воспользуемся следующим приемом.

Из теории вероятностей известно, что даже при числе наблюдений  $n$  стремящемся к 10-15, закон распределения оценки  $M^*(x)$  близок к нормальному (рис.2.21).





**Рис.2.21. Плотность распределения оценки математического ожидания**

Предельными отклонениями оценки математического ожидания будем считать точки, отстоящие от рассчитанной точечной оценки  $M^*(x)$  на значение  $\pm 3\sigma(M^*)$ , где  $\sigma(M^*)$  — среднее квадратическое отклонение оценки математического ожидания.

Поэтому можно записать

$$\Delta = 3\sigma(M^*). \quad (2.19)$$

Известно, что для  $\sigma(M^*)$ , справедливо выражение [7]

$$\sigma(M^*) \approx \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}, \quad (2.20)$$

где  $\sigma^*(x)$  — точечная оценка среднего квадратического отклонения рассматриваемого параметра  $x$ .

Заменив в выражении (2.19)  $\sigma(M^*)$  ее оценкой, определяемой формулой (2.20), получим

$$\Delta \approx 3 \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}};$$

$$I_\gamma = \left\{ M^* - 3 \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}; M^* + 3 \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}} \right\}. \quad (2.21)$$

Так как мы воспользовались "правилом трех сигм", то значение  $\Delta$ , а следовательно и доверительный интервал гарантируются с вероятностью  $\gamma = 0,9973$ . В инженерной практике могут использоваться и другие значения вероятности  $\gamma$ , а именно:  $\gamma = 0,9$ ,  $\gamma = 0,95$ . Поэтому в общем виде  $\Delta$  может быть представлена как

$$\Delta = t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}, \quad (2.22)$$

где  $t_\gamma$  — коэффициент, зависящий от доверительной вероятности  $\gamma$  (табл.2.3).

Таблица 2.3

Значение коэффициента  $t_\gamma$  в зависимости от вероятности  $\gamma$ 

$\gamma$	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,9973	0,999
$t_\gamma$	1,282	1,439	1,643	1,960	2,576	3,000	3,290

Этот коэффициент показывает, какое количество величин  $\sigma(M^*) - 1,282; 1,439$  и т.д. – надо отложить влево и вправо от точечной оценки  $M^*$ , чтобы вероятность попадания истинного значения математического ожидания в полученный диапазон была равна вероятности  $\gamma$ . В общем случае коэффициент  $t_\gamma$  определяется как

$$t_\gamma = \arg \Phi \left( \frac{1+\gamma}{2} \right), \quad (2.23)$$

где  $\arg \Phi(\dots)$  – аргумент стандартной функции  $\Phi(\dots)$  нормального распределения, для которого сама функция  $\Phi(\dots)$  принимает значения, указанные в скобках.

Например, если  $\Phi(1,64) = 0,95$ , то  $\arg \Phi(0,95) = 1,64$ .

В окончательном виде искомый доверительный интервал  $I_\gamma$ , следовательно, и интервальная оценка математического ожидания, может быть записана в виде

$$I_\gamma = \left( M^* - \Delta; M^* + \Delta \right) = \left( M^* - t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}; M^* + t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}} \right). \quad (2.24)$$

**Пример 2.2.** Произведено измерение параметра  $h_{21e}$  десяти транзисторов типа КТ602А. Результаты приведены в табл.2.4.

Таблица 2.4

Результаты измерений параметра  $h_{21e}$ 

Номер экземпляра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_{21e}$	39	32	57	38	44	34	63	46	50	47

Требуется найти точечную оценку математического ожидания величины  $h_{21e}$  и построить доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$ .

**Решение.** По формуле (2.16) имеем

$$M^*(h_{21e}) = \frac{39+32+\dots+47}{10} = 45.$$

По формуле (2.17) вычисляем несмещенную оценку  $\sigma^*(h_{21e})$ :

$$\sigma^*(h_{21e}) = \sqrt{\frac{(39-45)^2 + (32-45)^2 + \dots + (47-45)^2}{10-1}} \approx 9,85.$$

По табл.2.3 для  $\gamma = 0,95$  находим  $t_\gamma = 1,96$ . Доверительные границы:

$$M_H = M^*(h_{21e}) - t_\gamma \frac{\sigma^*(h_{21e})}{\sqrt{n}} = 45 - 1,96 \frac{9,85}{\sqrt{10}} \approx 38,9;$$

$$M_B = M^*(h_{21e}) + t_\gamma \frac{\sigma^*(h_{21e})}{\sqrt{n}} = 45 + 1,96 \frac{9,85}{\sqrt{10}} \approx 51,1.$$

Следовательно, доверительный интервал (интервальная оценка) для математического ожидания параметра  $h_{21e}$ :

$$I_\gamma = (38,9; 51,1).$$

### 2.6.5. Определение требуемого числа наблюдений параметра

На практике часто возникает вопрос, какое число наблюдений параметра  $x$  надо иметь, чтобы определить среднее значение (оценку математического ожидания  $M^*(x)$ ) с ошибкой, не превышающей заданного значения  $\varepsilon$ . Для ответа на этот вопрос примем гипотезу о нормальном распределении оценки  $M^*(x)$  и воспользуемся ранее полученной формулой (2.22).

$$\Delta = t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}.$$

Возведя обе части этого выражения в квадрат, можно получить

$$n \geq \frac{t_\gamma^2 \sigma^2(x)}{\Delta^2}. \quad (2.25)$$

В этом случае  $\Delta = \varepsilon$  — допустимая ошибка в определении среднего значения параметра, т.е. разница между оценкой  $M^*(x)$  и истинным значением математического ожидания  $M(x)$ , которая еще допускается.

На практике этой формулой следует пользоваться следующим образом:

а) если  $\sigma(x)$  известна априорно, то зная вероятность  $\gamma$  и ошибку  $\varepsilon$ , формулой можно воспользоваться сразу и определить требуемое число наблюдений;

б) если значение  $\sigma(x)$  априорно не известно, то выполняют некоторое число наблюдений параметра  $n_1$ , подсчитывают оценку  $\sigma^*(x)$  и проверяют, выполняются ли условие (2.25). Если условие выполняется, то проведенное число наблюдений  $n_1$  уже достаточно, в противном случае выполняют дополнительные наблюдения, уточняют значение  $\sigma^*(x)$  и снова проверяют условие (2.25). Так поступают до тех пор, пока это условие не будет выполнено.

**Пример 2.3.** Определим, какое число наблюдений надо иметь, чтобы гарантировать среднее значение коэффициента усиления транзистора  $\beta$  с погрешностью не более 5 единиц. По техническим условиям на транзистор данного типа  $\beta = 20 \dots 80$ .

**Решение.**

1. Задаемся доверительной вероятностью, с которой будет гарантироваться среднее значение коэффициента усиления транзистора  $\beta$ . Выбираем  $\gamma = 0,95$ ; тогда  $t_\gamma = 1,96 \approx 2$ .

2. Так как закон распределения величины  $\beta$  не известен, и без проведения эксперимента затруднительно выдвинуть гипотезу о законе распределения, будем исходить из худшего случая. Поэтому для величины  $\beta$  примем гипотезу о равномерной модели.

Из условия задачи следует  $a = 20$ ,  $b = 80$ . Определим значение  $\sigma(\beta)$ , используя формулу (2.13). Получим

$$\sigma(\beta) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{80-20}{2\sqrt{3}} = 17,3.$$

3. По условию задачи  $\varepsilon = 5$ . Применяя формулу (2.25), получим

$$n \geq \frac{2^2 \cdot 17,3^2}{5^2} \approx 48.$$

#### 2.6.6. Оценка коэффициентов парной корреляции

В технической документации на элементы, устройства и технологические процессы информация о коэффициентах корреляции, как правило, отсутствует. При решении инженерных задач их определяют экспериментально. При этом для большинства задач приемлемо использование коэффициента линейной корреляции. По результатам наблюдений оценку этому коэффициенту можно дать с помощью выражения

$$r_{xz}^* = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i - M^*(x)][z_i - M^*(z)]}{(n-1)\sigma^*(x)\sigma^*(z)}, \quad (2.26)$$

где  $x, z$

– рассматриваемые параметры;

$x_i, z_i$	– значение параметра $x$ в $i$ -м наблюдении и соответствующее этому наблюдению значение параметра $z$ ;
$M^*(x), M^*(z)$	– оценки математических ожиданий параметров $x$ и $z$ ;
$\sigma^*(x), \sigma^*(z)$	– оценки средних квадратических отклонений параметров.
$n$	– число наблюдений параметров.

С  $i$ -м наблюдением пары параметров связаны экземпляр элемента, устройства или реализация технологического процесса.

Так как число наблюдений  $n$  ограничено, то на практике возникает вопрос, насколько правомерно в дальнейших инженерных расчетах можно пользоваться полученной оценкой коэффициента корреляции.

Для ответа на него выполняют проверку статистической значимости (в дальнейшем просто значимости). Это означает выяснение, за счет чего оценка коэффициента корреляции оказалось отличной от нуля: за счет ограниченности числа наблюдений, т.е. случайных причин, либо за счет того, что это объективно имеет место.

Проверку значимости коэффициента корреляции выполняют по-разному, в зависимости от числа наблюдений пар параметров. При числе наблюдений  $n > 50$  принимают гипотезу о нормальном распределении оценки  $r^*$ , поскольку доказано, что при  $n > 50$  эта гипотеза, как правило, работает.

Затем строят доверительный интервал, симметричный относительно рассчитанной точечной оценки  $r^*$ . Для коэффициента корреляции его определяют как

$$I_\gamma = (r^* - t_\gamma \sigma_r; r^* + t_\gamma \sigma_r), \quad (2.27)$$

где  $\sigma_r$  – среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции, равное

$$\sigma_r \approx \frac{1 - (r^*)^2}{\sqrt{n}}; \quad (2.28)$$

$t_\gamma$  – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности  $\gamma$ .

Построив доверительный интервал, проверяют, попадает ли в этот интервал точка  $r = 0$ . Если да, то нет оснований оценку коэффициента корреляции считать значимой, ибо отличной от нуля с вероятностью  $\gamma$  она оказалась за счет ограниченного числа наблюдений.

Применяя формулу (2.27), необходимо помнить, что значения доверительных границ для выборочного коэффициента корреляции по абсолютной величине (модулю) ограничены единицей. Кроме того, следует знать, что приближение (2.28) при значениях  $r^*$ , близких к  $\pm 1$ , является весьма грубым [8, 9].

**Пример 2.4.** Путем обработки по формуле (2.26) результатов измерений пар параметров  $h_{11e}$  и  $\beta$  шестидесяти транзисторов типа КТ315Б получена точечная оценка коэффициента парной корреляции этих параметров  $r^* = 0,56$ . Требуется дать ответ на вопрос о статистической значимости коэффициента корреляции при значении доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$ .

Решение.

1. По табл. 2.3 для  $\gamma = 0,95$  находим  $t_\gamma = 1,96$ .

2. По формуле (2.28) определяем среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции

$$\sigma_r = \frac{1 - (r^*)^2}{\sqrt{n}} = \frac{1 - 0,56^2}{\sqrt{60}} \approx 0,09.$$

3. Пользуясь выражением (2.27), вычисляем нижнюю  $r_n$  и верхнюю  $r_v$  границы доверительного интервала для коэффициента корреляции

$$r_n = r^* - t_\gamma \sigma_\gamma = 0,56 - 1,96 \cdot 0,09 = 0,38;$$

$$r_v = r^* + t_\gamma \sigma_\gamma = 0,56 + 1,96 \cdot 0,09 = 0,74.$$

Тогда доверительный интервал

$$I_\lambda^{(r)} = (0,38; 0,74).$$

Так как полученный интервал не содержит точки  $r = 0$ , то с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$  наличие корреляционной зависимости между исследуемыми параметрами считается доказанным, и значением коэффициента корреляции  $r = 0,56$  можно пользоваться в расчетах.

При  $n < 50$  рассмотренный прием оценки значимости коэффициента корреляции оказывается достаточно грубым. Поэтому при  $n < 50$ , а также в случаях, когда  $|r^*| \rightarrow 1$  пользуются преобразованием Фишера, определяемым как

$$F = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r^*}{1 - r^*} = \text{arth}(r^*). \quad (2.29)$$

Для проверки значимости коэффициента корреляции вначале определяют доверительный интервал для  $F$ :

$$I_{\gamma}^{(F)} = \left( \underbrace{F - t_{\gamma} \sigma_F}_{F_H}; \underbrace{F + t_{\gamma} \sigma_F}_{F_B} \right), \quad (2.30)$$

где  $\sigma_F$  – среднее квадратическое отклонение  $F$ .

Фишер показал, что

$$\sigma_F = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (2.30)$$

Зная доверительный интервал  $F$ , с помощью обратного преобразования Фишера находят доверительный интервал для коэффициента корреляции

$$r_H = \text{th}(F_H);$$

$$r_B = \text{th}(F_B).$$

При решении практических задач можно пользоваться таблицей значений преобразования Фишера (табл.П1.2, прил.1).

**Пример 2.5.** Исследовалось 12 экземпляров транзисторов типа КТ603, и была определена точечная оценка коэффициента линейной корреляции между параметрами  $I_{K0}$  и временем отказа транзистора  $t_0$ . Эта оценка приняла значение  $r^* = -0,66$ . Требуется выяснить, правомерно ли в дальнейших расчетах пользоваться этой оценкой.

**Решение.**

1. Так как  $n < 50$ , то воспользуемся преобразованием Фишера. Можно получить

$$F = \text{arth}(r^*) = \text{arth}(-0,66) = -0,79.$$

2. Подсчитываем среднее квадратическое отклонение  $F$ :

$$\sigma_F = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{12-3}} \approx 0,33.$$

3. Задаемся значением доверительной вероятности. Выберем  $\gamma = 0,95$ . По табл.2.3 находим для  $\gamma = 0,95$ ;  $t_{\gamma} = 1,96$ .

4. Подсчитаем нижнюю доверительную границу

$$F_H = F - t_{\gamma} \sigma_F = -0,79 - 1,96 \cdot 0,33 \approx -1,44.$$

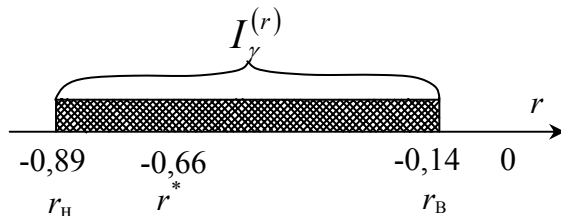
5. Для значения  $F_B$  получим

$$F_B = F + t_{\gamma} \sigma_F = -0,79 + 1,96 \cdot 0,33 \approx -0,14.$$

6. Определяем нижнюю и верхнюю доверительные границы для коэффициента корреляции

$$r_{\text{H}} = \text{th}(F_{\text{H}}) = \text{th}(-1,44) \approx -0,89;$$

$$r_{\text{B}} = \text{th}(F_{\text{B}}) = \text{th}(-0,14) \approx -0,14.$$



**Рис.2.22. К определению значимости коэффициента корреляции**

Из рис.2.22 видно, что коэффициент корреляции в данном случае значим при доверительной вероятности  $\gamma=0,95$ . Следовательно, его точечной оценкой  $r^* = -0,66$  можно пользоваться в дальнейших расчетах.

7. Проверяем, попадает ли в построенный доверительный интервал для коэффициента корреляции точка со значением  $r = 0$  (рис.2.22).

Из рис.2.22 видно, что коэффициент корреляции в данном случае значим при доверительной вероятности  $\gamma=0,95$ . Следо-

### 2.6.7. Определение законов распределения параметров на основе опытных данных

Вначале получают статистическую совокупность из  $n$  наблюдений интересующего параметра, например  $x$ , для чего у  $n$  экземпляров (выборки) однотипных элементов (изделий) измеряют значение интересующего параметра  $x$ . Желательно, чтобы  $n \geq 60-100$ . Далее, обрабатывая статистическую совокупность, определяют оценки математического ожидания  $M^*(x)$  и дисперсии  $D^*(x)$ .

Затем строят статистический ряд. Для этого весь диапазон наблюдаемых значений параметра  $x$  разбивают на  $k$  интервалов и для каждого из них определяют значение

$$p_i^* = \frac{m_i}{n}; \quad i=1, 2, \dots, k; \quad k \geq 4, \quad (2.32)$$

где  $p_i^*$  — частота, соответствующая  $i$ -му интервалу;

$m_i$  — число наблюдений параметра  $x$ , приходящихся на  $i$ -й интервал.

Иногда в литературе по прикладной математической статистике [10] словом частота называют величины  $m_i$ , а для  $p_i^*$  употребляют термин частость. В дальнейшем для величин  $p_i^*$  мы будем использовать термин частота, рассматриваемый как статистический аналог вероятности попадания параметра в  $i$ -й интервал.



Приближенное число интервалов рекомендуется определять по правилу Стёрджеса [11]

$$k = 1 + 3,32 \lg n,$$

при  $n \geq 50$  желательно обеспечить условия

$$7 \leq k \leq 20; m_i \geq 5, i = 1, 2, \dots, k.$$

Сумма частот всех интервалов должна быть равна единице.

Строят таблицу, в которой приводят интервалы в порядке их расположения (вдоль оси абсцисс) и соответствующие интервалам частоты (табл.2.5).

Таблица 2.5

Статический ряд

Интервал, $I_i$	$x_1, x_2$	$x_2, x_3$	...	$x_k, x_{k+1}$
$p_i^*$	$p_1^*$	$p_2^*$	...	$p_k^*$

Здесь  $I_i$  – обозначение  $i$ -го интервала;  $x_i, x_{i+1}$  – границы  $i$ -го интервала,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Полученную таблицу называют статистическим рядом. Далее строят гистограмму. По оси абсцисс откладываются интервалы и на каждом из них, как на основании, строится прямоугольник, высота которого

$$h_{x_i, x_{i+1}} = \frac{p_i^*}{x_{i+1} - x_i}, \quad (2.33)$$

где  $(x_{i+1} - x_i)$  – ширина  $i$ -го интервала.

Удобно выбирать равные интервалы. В этом случае высоты прямоугольников гистограммы пропорциональны соответствующим частотам  $p_i^*$  (рис.2.23). Огибающая линия гистограммы может рассмат-

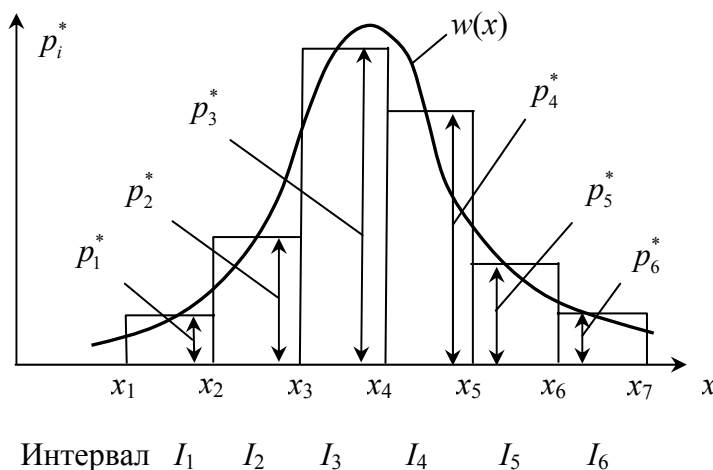


Рис.2.23. Гистограмма распределения параметра

риваться как статистический аналог плотности распределения параметра.

При увеличении  $n$  можно выбирать все более узкие интервалы. При этом гистограмма будет все ближе к графику функции плотности распределения параметра  $x$  (рис.2.23).

Если априорно известен вид закона распределения, построение гистограммы можно не выполнять.

Пользуясь данными статистического ряда (табл.2.5), можно приближенно построить и статистическую функцию распределения параметра  $x$ . Для практики обычно достаточно эту функцию построить по нескольким точкам, в качестве которых удобно использовать границы  $x_1, x_2, \dots$  интервалов.

Тогда очевидно

$$\left. \begin{aligned} F^*(x_1) &= 0, \\ F^*(x_2) &= p_1^*, \\ F^*(x_3) &= p_1^* + p_2^*, \\ &\dots \\ F^*(x_k) &= \sum_{i=1}^{k-1} p_i^*, \\ F^*(x_{k+1}) &= \sum_{i=1}^k p_i^* = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Соединяя полученные точки ломаной линией или плавной кривой, получим приближенный график статистической функции распределения (рис.2.24).

Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с ограниченным числом измерений (наблюдений). Поэтому при статистической обработке материала часто приходится решать вопрос, как подобрать теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с ограниченным объемом экспериментальных данных. Такую

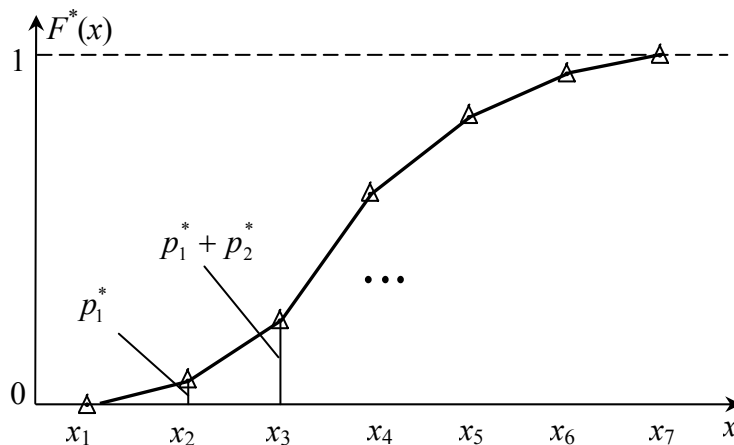


Рис.2.24. График статистической функции распределения

задачу называют задачей выравнивания или сглаживания статистических рядов [7].

В некоторых случаях вид теоретической кривой выбирается заранее, на основе анализа сущности задачи, в других случаях — по внешнему виду статистического распределения. Обычно в последнем случае пользуются

гистограммой: по графику статистической функции распределения (рис.2.24) в большинстве случаев трудно сказать что-то определенное о виде закона распределения.

Аналитическое выражение выбранной кривой зависит от некоторых параметров распределения. Задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора таких значений параметров, при которых соответствие между теоретическим и статистическим распределениями оказывается наилучшим. Одним из методов решения этой задачи является так называемый метод моментов [1, 7].

В данном случае параметры теоретического распределения выбирают так, чтобы важнейшие числовые характеристики (моменты) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Например, если теоретическая кривая  $w(x)$  зависит от двух параметров, то они принимаются так, чтобы математическое ожидание  $M(x)$  и дисперсия  $D(x)$  теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками  $M^*(x)$  и  $D^*(x)$ .

С учетом этого при выравнивании статистического распределения нормальным законом в выражении (2.4) необходимо принять

$$m = M^*(x); \quad \sigma = \sqrt{D^*(x)}. \quad (2.35)$$

В случае выравнивания законом равной вероятности параметры  $a$  и  $b$  теоретического распределения должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{a+b}{2} = M^*(x); \quad \frac{(b-a)^2}{12} = D^*(x). \quad (2.36)$$

Как бы хорошо ни была подобрана теоретическая кривая, например  $w(x)$ , между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Для ответа на вопрос, чем объясняются эти расхождения – ограниченным числом наблюдений или неудачным подбором кривой, служат так называемые "критерии согласия".

При использовании критериев согласия чаще проверяются гипотезы применительно к функциям распределения  $F(x)$ . Распространение получил критерий согласия Пирсона, называемый критерием  $\chi^2$  (хи-квадрат). Этот критерий оправдан при значении  $n > 100$  и количестве наблюдений параметра, приходящихся на  $i$ -й интервал,  $m_i > 5$ . Схема применения критерия следующая.

1. Определяется мера расхождения  $U$  по формуле

$$U = \chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (2.37)$$

где  $p_i$  – вероятность попадания параметра  $x$  в  $i$ -й интервал, подсчитанная по теоретическому закону распределения.

2. Определяется число степеней свободы

$$f = k - s, \quad (2.38)$$

где  $k$  – количество интервалов;

$s$  – число независимых условий (связей), наложенных на частоты  $p_i^*$  (часто  $s = 3$ ).

3. По значениям  $f$  и  $\chi^2$  с помощью специальных таблиц (табл. П11.3, прил.1), составленных для функции  $\chi^2$  находится вероятность того, что величина, имеющая распределение  $\chi^2$  с  $f$ -степенями свободы, превзойдет рассчитанное значение  $U$ . Если эта вероятность весьма мала (менее 0,1), гипотеза отбрасывается, как неправдоподобная. Если вероятность относительно велика, гипотезу можно признать не противоречащей опытным данным.

**Пример 2.6.** С целью исследования закона распределения емкости коллекторного перехода ( $C_k$ ) транзистора типа КТ812 было измерено значение этого параметра у 100 экземпляров. Результаты измерений представлены в виде статистического ряда (табл.2.6).

Таблица 2.6

Статистический ряд емкости коллекторного перехода транзистора

Номер интервала	1	2	3	4	5
Границы интервала, пФ	70; 76	76; 82	82; 88	88; 94	94; 100
$m_i$	5	20	42	27	6
$p_i^*$	0,05	0,20	0,42	0,27	0,06
$p_i$	0,038	0,212	0,405	0,274	0,064

Получены оценки количественных характеристик величины  $C_k$ :

$$M^*(C_k) = 85,72 \text{ пФ}; \sigma^*(C_k) = 5,58 \text{ пФ}.$$

Необходимо построить гистограмму и выровнять статистический ряд с помощью нормального закона.

**Решение.** Так как ширина интервалов одинакова, то в качестве высот прямоугольников гистограммы можно отложить соответствующие значения частот  $p_i^*$ . Построенная гистограмма показана на рис.2.25.

Нормальный закон зависит от двух параметров:  $m$  и  $\sigma$ .

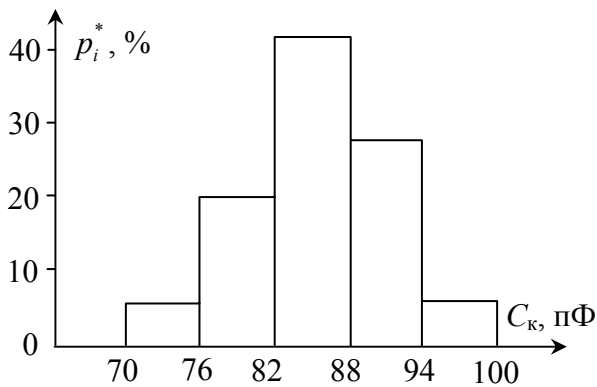


Рис.2.25. Гистограмма распределения емкости коллекторного перехода

Подберем для теоретического закона распределения эти параметры так, чтобы сохранить первые два момента статистического распределения: математическое ожидание  $M(x)$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma(x)$ . Для этого необходимо обеспечить условия

$$m = M^*(x); \sigma = \sigma^*(x).$$

Поэтому принимаем

$$m = 85,72; \sigma = 5,58.$$

Далее, пользуясь теоретическим нормальным законом с параметрами  $m = 85,72; \sigma = 5,58$ , находим теоретические значения вероятностей попадания исследуемого параметра в интервалы. Пользуемся формулой (2.7), которая применительно к данной задаче принимает вид

$$p_i = \Phi\left(\frac{C_{i+1} - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{C_i - m}{\sigma}\right).$$

Рассчитанные по этой формуле с использованием табл. П 1.1 прил.1 значения теоретических вероятностей  $p_i$  сведены в табл.2.6.

По формуле (2.37) определяем значение меры расхождения:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \approx 0,53.$$

Находим число степеней свободы. В данном случае число наложенных связей  $s = 3$ , так как на частоты  $p_i^*$  накладывается требование

$$\sum_i p_i^* = 1$$

и, кроме того, теоретическое распределение подбирается с теми условиями, чтобы совпадали теоретические и статистические средние значения и средние квадратические отклонения. Поэтому

$$f = 5 - 3 = 2.$$

По табл.П1.3 прил.1 для значений  $f = 2$  и  $\chi^2 = 0,53$  находим значение вероятности  $P \approx 0,77$ . Поэтому гипотеза о том, что исследуемый параметр распределен по нормальному закону, не противоречит опытными данным.

В конструировании и технологии РЭУ кроме критерия Пирсона находят применение и другие критерии, например критерий А.М.Колмогорова. С этим критерием можно ознакомиться в работах [1, 6, 10].

### 2.6.8. Применение вероятностных сеток (бумаги) для проверки гипотез о законах распределения параметров

Для оперативного принятия решений о законах распределения параметров используют вероятностные сетки, называемые также вероятностной бумагой [11-13].

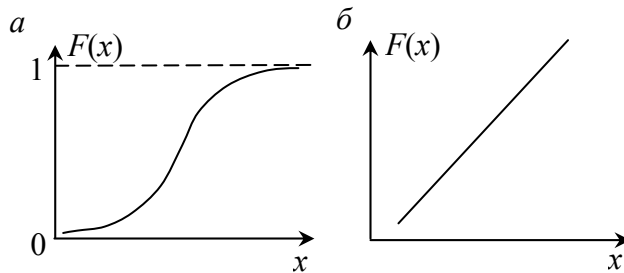


Рис.2.26. К пояснению вероятностной сетки: а – ось ординат не преобразована; б – ось ординат преобразована

Вероятностная сетка – это координатная сетка в прямоугольной системе координат, в которой масштаб по оси ординат, а иногда также и масштаб по оси абсцисс преобразованы таким образом, что функция распределения параметра, построенная на этой сетке, принимает вид прямой линии (рис.2.26).

На практике пользуются вероятностной сеткой следующим образом. Для верхних границ интервалов, на которые был разбит диапазон наблюдаемых значений параметра, подсчитывают накопленное значение частот (вероятностей). Последний интервал в рассмотрение не берется.

Пусть границами интервалов являются точки  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ; где  $k$  – число интервалов. Тогда для верхней границы  $x_2$  первого интервала можно записать (см. рис.2.23)

$$F(x_2) = p_1^*,$$

где  $p_i^*$  – частота (статистическая вероятность) попадания параметра в первый интервал.

Далее получим

$$F(x_3) = p_1^* + p_2^*,$$

$$F(x_4) = p_1^* + p_2^* + p_3^* .$$

...

Для верхней границы  $x_k$  предпоследнего интервала справедливо

$$F(x_k) = p_1^* + p_2^* + \dots + p_{k-1}^* = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^* .$$

Затем точки с координатами

$$\begin{aligned} & x_2, F(x_2); \\ & x_3, F(x_3); \\ & \dots \\ & x_k, F(x_k) \end{aligned}$$

наносят на вероятностную сетку. Если визуально они достаточно хорошо ложатся на прямую линию, то принимается гипотеза о том законе распределения, вероятностная сетка которого использовалась. В противном случае пробуют другие вероятностные сетки.

Линия, которой мысленно соединяют точки, нанесенная на вероятностную сетку, представляет собой эмпирическую функцию распределения, но полученную на координатной сетке, у которой одна или даже обе оси координат являются нелинейными.

На практике либо пользуются готовыми бланками вероятностных сеток, либо строят эти сетки с помощью шаблонов. В прил.5 приведены шаблоны для построения вероятностных сеток нормального, экспоненциального, логарифмически нормального распределений и распределения Вейбулла. Следует подчеркнуть, что приведенные шаблоны используют для построения оси ординат вероятностной сетки, на которой откладывают накопленные значения частот. Для этого на узкой полоске бумаги отмечают точками вертикальный размер (нижнюю и верхнюю границы), который будет иметь вероятностная сетка. Затем ее прикладывают к шаблону и, поддерживая параллельность его вертикальным линиям, перемещают полоску влево или вправо, до совпадения точек с крайними лучами. После чего на полоске делают отметки, совпадающие с промежуточными лучами, и проставляют цифровые значения. Полученная таким образом шкала используется для нанесения делений на вертикальную ось вероятностной сетки. Если вертикальный размер вероятностной сетки планируется большим, нежели размер крайней левой вертикальной линии шаблона, то лучи продлеваются на нужное расстояние влево.

Ось абсцисс для вероятностных сеток нормального и экспоненциального распределений принимается равномерной, а для логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла логарифмической. Для построения логарифмической шкалы в последнем случае можно пользоваться также шаблоном (см. рис.П5.4 прил.5).

Образцы вероятностных сеток нормального, экспоненциального и логарифмически нормального распределений показаны на рис.П5.5-П5.7 прил.5.

**Пример 2.7.** С помощью вероятностной сетки требуется проверить гипотезу о нормальном распределении емкости коллекторного перехода транзистора. Результаты наблюдений этого параметра в виде статистического ряда приведены в условии предыдущего примера (см. табл.2.6).

**Решение.** Из табл.2.6 видно, что верхними границами интервалов являются значения 76, 83, 88 и 94 пФ. Верхняя граница последнего интервала со значением 100 пФ, во внимание не принимается.

Накопленные значения частот, соответствующие указанным верхним границам интервалов, могут быть определены как

$$F(C_k = 76) = p_1^* = 0,05;$$

$$F(C_k = 82) = p_1^* + p_2^* = 0,05 + 0,20 = 0,25;$$

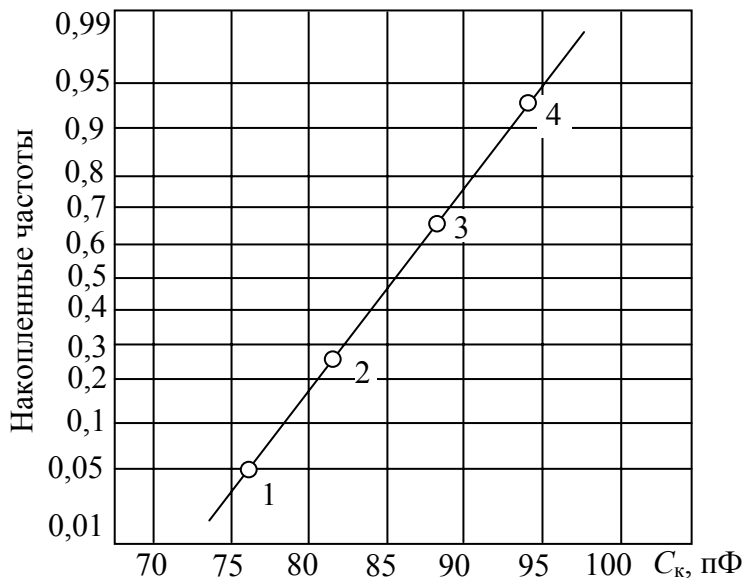
$$F(C_k = 88) = p_1^* + p_2^* + p_3^* = 0,25 + 0,42 = 0,67;$$

$$F(C_k = 94) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^* = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 0,67 + 0,27 = 0,94.$$

С помощью шаблона (рис.П5.1 прил.5) строим вероятностную сетку нормального распределения и наносим на эту сетку точки с координатами

$$(76; 0,05); (82; 0,25); (88; 0,67); (94; 0,94).$$

Вероятностная сетка с нанесенными на нее точками показана на рис.2.27.



**Рис.2.27. Эмпирическая функция распределения, построенная на вероятностной сетке нормального закона**

Можно заметить, что точки достаточно хорошо ложатся на прямую, т.е. эмпирическая функция распределения, построенная на вероятностной сетке, приближается к прямой линии. Поэтому гипотеза о нормальном распределении рассматриваемого параметра (емкости  $C_k$ ) принимается.

Заметим что номера точек на вероятностной сетке соответствуют номерам интервалов в табл.2.6.

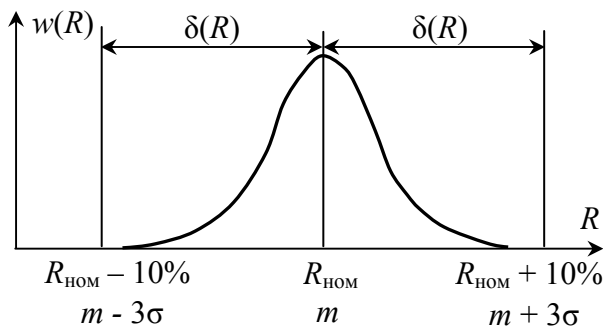


## 2.7. Применение вероятностного описания параметров для решения инженерных задач

### 2.7.1. Некоторые рекомендации по использованию моделей законов распределения параметров

Ранее давались некоторые рекомендации по использованию на практике нормальной и равномерной моделей. Обобщим и систематизируем рекомендации по применению моделей законов распределения параметров.

1. Известно, что примерно 90-95% параметров, с которыми инженеру приходится сталкиваться при проектировании конструкций РЭУ и технологии их изготовления, распределены по закону, близкому к нормальному, и тогда оправдана гипотеза о нормальной модели. Чтобы решать инженерные задачи в случае нормального закона обычно исходят из того, что предельные отклонения параметра, регламентируемые допуском на него, соответствуют точкам  $m \pm 3\sigma$  (рис.2.28).



**Рис.2.28. Предельные отклонения параметра при нормальном законе распределения:**  $m$  — среднее значение параметра (при симметричном допуске соответствует номинальному значению);  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение параметра;  $\delta(R)$  — половина поля допуска на сопротивление резистора

сигм”, используя выражение

$$\sigma(x) \approx \frac{\delta(x)}{3}, \quad (2.39)$$

где  $\delta(x)$  — половина поля допуска на параметр  $x$ .

Среднее квадратическое отклонение относительной погрешности параметра  $x$  можно определить по формуле

$$\sigma\left(\frac{\Delta x}{x}\right) \approx \frac{\delta\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{3}, \quad (2.40)$$

где  $\delta(\Delta x/x)$  — половина поля допуска параметра  $x$ , выраженная его относительным отклонением, обычно в процентах. Эту величину называют также половиной поля рассеивания относительной погрешности параметра и она всегда положительна.

С учетом сделанного предположения среднее квадратическое отклонение параметра, например  $x$ , определяют по “правилу трех

**Пример 2.8.** В электрической схеме радиоэлектронного устройства предполагается использовать резистор с сопротивлением  $R = 300 \text{ Ом} \pm 10\%$ . Требуется определить среднее квадратическое отклонение  $R$  и его относительной производственной погрешности  $\Delta R/R$  в предположении, что для  $R$  оправдана гипотеза о нормальном законе распределения.

**Решение.**

Так как допуск на параметр  $R$  симметричный, то его среднее значение (математическое ожидание) совпадает с номинальным. Следовательно

$$M(R) = R_{\text{ном}} = 300 \text{ Ом}.$$

Примерное значение среднего квадратического отклонения сопротивления  $R$  найдем, используя формулу (2.39).

Нетрудно найти

$$\delta(R) = 0,1 \cdot R_{\text{ном}} = 0,1 \cdot 300 = 30 \text{ Ом}.$$

Следовательно

$$\sigma(x) \approx \frac{\delta(x)}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ Ом}.$$

В качестве параметра  $x$  рассмотрим  $\Delta R/R$ .

Как отмечалось ранее, при переходе от  $R$  к  $\Delta R/R$  вид закона распределения сохраняется, меняются лишь его параметры. Можно убедиться, что в данном случае

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0.$$

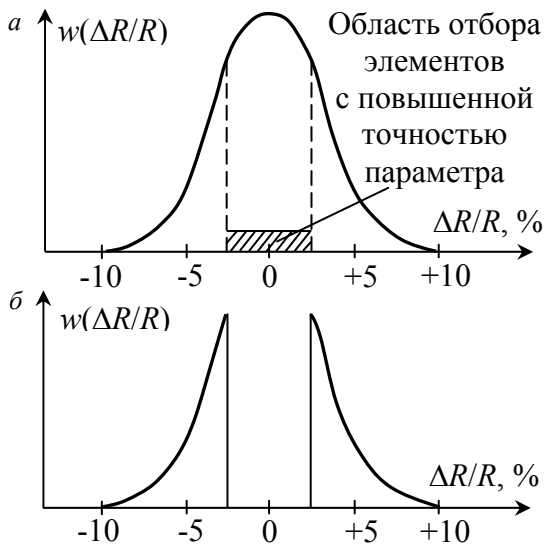
Значение  $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$  найдем по формуле (2.40). Получим

$$\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) \approx \frac{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{3} = \left| \frac{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 10\%} \right| = \frac{10}{3} \approx 3,3\%.$$

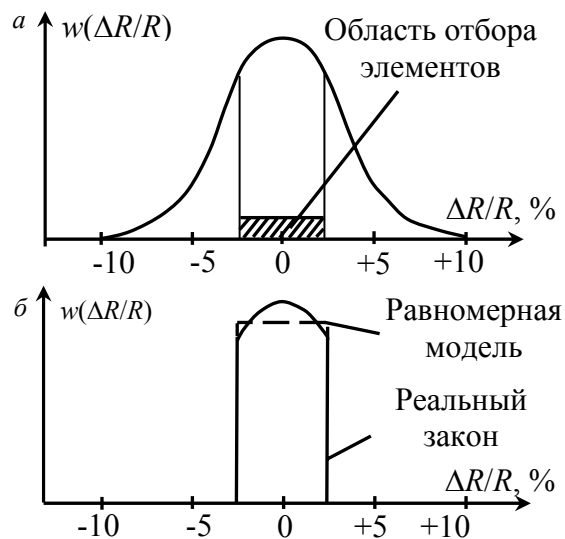
В данном случае  $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$  получена в процентах. Ее можно найти и в относительных единицах

$$\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = \left| \frac{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0,1} \right| = \frac{0,1}{3} \approx 0,033.$$

2. Для параметров резисторов и конденсаторов с большим допуском ( $\pm 10\%$  и более) в большинстве случаев оправдана гипотеза о нормальной модели. Однако, если из партии с допуском на



**Рис.2.29. Влияние отбора элементов на закон распределения параметра:**  
**а** – закон распределения сопротивления резисторов до процедуры отбора; **б** – закон распределения сопротивления резисторов исходной партии после процедуры отбора



**Рис.2.30. Равномерная модель как следствие отбора элементов:**  
**а** – закон распределения для исходной партии (до процедуры отбора);  
**б** – закон распределения для отобранных резисторов с повышенной точностью сопротивления

параметры  $\pm 10\%$  и более проводился отбор элементов с малым их разбросом, то пользоваться для исходной партии элементов гипотезой о нормальной модели будет неправильным. Подтверждением сказанному служит рис.2.29.

3. Для параметров резисторов и конденсаторов, имеющих допуск  $\pm 5\%$  и менее, в инженерных приложениях можно пользоваться гипотезой о равномерной модели, так как, по всей видимости, высокая точность параметров достигалась путем отбора из партий элементов, имеющих заметно больший разброс параметра. Оправданность такого подхода понятна из рис.2.30.

Неравномерностью на вершине распределения (см. рис.2.30, б) пренебрегают и пользуются равномерной моделью.

В случае равномерной модели характеристики  $\sigma(x)$  или  $\sigma\left(\frac{\Delta x}{x}\right)$ , необходимые для решения инженерных задач, определяют, используя формулы

$$\sigma(x) \approx \frac{\delta(x)}{\sqrt{3}}; \quad \sigma\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\delta\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{\sqrt{3}}. \quad (2.41)$$

4. Если закон распределения параметра неизвестен, и нельзя принять гипотезу о нормальной или равномерной модели, то следует либо попытаться подобрать модель закона распределения параметра экспериментально, либо пользоваться равномерной моделью, ибо эта модель на практике является предельным наихудшим случаем разброса параметра. Другими словами, при одинаковом диапазоне изменения параметра равномерная модель, по сравнению с другими, которые реально могут иметь место на практике, характеризуется максимальным средним квадратическим отклонением параметра.

### 2.7.2. Примеры применения моделей законов распределения параметров

**Пример 2.9.** Определим, какой процент резисторов с разбросом сопротивления не более чем на  $\pm 5\%$  содержится в партии элементов со значением сопротивления  $100 \text{ Ом} \pm 10\%$ .

**Решение.**

1. Так как в исходной партии резисторов допуск на сопротивление относительно велик,  $\delta(\Delta R/R) = 10\%$ , то оправдана гипотеза о нормальной модели закона распределения  $\Delta R/R$  (рис. 2.31).

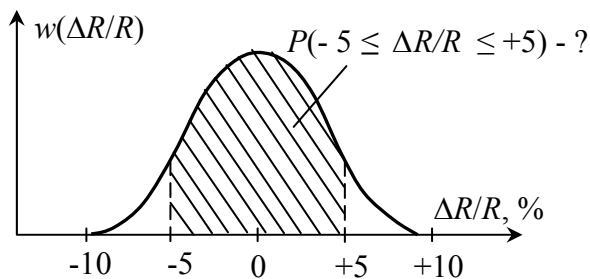


Рис.2.31. Иллюстрация к примеру 2.9

Искомый процент резисторов определяется вероятностью

Она численно равна заштрихованной площади на рис.2.31.

Для нахождения интересующей нас вероятности воспользуемся формулой (2.7). Напомним ее вид

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Применительно к рассматриваемому примеру имеем

$$x \rightarrow \frac{\Delta R}{R}; \quad a = -5\%; \quad b = +5\%.$$

2. Определим значения  $m$  и  $\sigma$ , характеризующие исходную партию резисторов.

$$m = M\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0, \text{ так как допуск симметричный.}$$

Учитывая, что  $\sigma = \sigma(\Delta R/R)$ , по "правилу трех сигм" найдем значение величины  $\sigma(\Delta R/R)$ :

$$\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) \approx \frac{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{3} = \left| \frac{\text{По условию примера}}{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)=10\%} \right| = \frac{10}{3} \approx 3,3\%.$$

3. Используя значение функции  $\Phi(x)$  (прил.1, табл.П1. 1.), находим вероятность  $P(-5\% \leq \Delta R/R \leq +5\%)$ .

$$\begin{aligned} P\left(-5 \leq \frac{\Delta R}{R} \leq +5\right) &= \Phi\left(\frac{+5-0}{3,33}\right) - \Phi\left(\frac{-5-0}{3,33}\right) = \\ &= \Phi(1,50) - \Phi(-1,50) = 0,9332 - 0,0668 \approx 0,87. \end{aligned}$$

Таким образом, в исходной партии примерно 87% резисторов будут иметь разброс сопротивления не более, чем на  $\pm 5\%$  от номинального значения  $R_{\text{ном}}=100$  Ом.

Можно рассчитать, что в исходной партии резисторов с допуском  $\pm 10\%$  содержится немалое количество элементов с разбросом сопротивления не более, чем  $\pm 2\%$ ,  $\pm 1\%$  (табл.2.7).

Таблица 2.7

Примерный процент элементов с заданным разбросом параметра  
в партии резисторов с допуском  $\pm 10\%$

Максимальный разброс сопротивления резисторов, %	Примерный процент элементов в исходной партии
$\pm 5$	87
$\pm 2$	45
$\pm 1$	24,5

**Пример 2.10.** Транзистор типа КТ203Б по техническим условиям (ТУ) имеет коэффициент усиления тока базы в режиме малого сигнала  $h_{21} = 30-100$ . Для работы в составе РЭУ пригодны лишь экземпляры со значением параметра  $h_{21} \geq 50$ . Определить, какое примерно число экземпляров пригодно для указанных целей из партии транзисторов объемом 1000 штук.

**Решение.**

1. Искомое число экземпляров можно определить, зная вероятность вида

$$P(50 \leq h_{21} \leq 100).$$

2. Примем гипотезу о нормальном распределении параметра  $h_{21}$ . Вероятность  $P(50 \leq h_{21} \leq 100)$  численно равна площади, заштрихованной на рис.2.32.

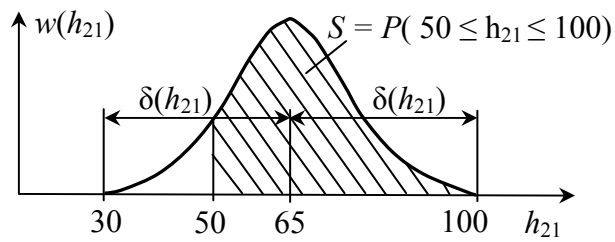


Рис.2.32. Иллюстрация к примеру 2.10

Интересующую вероятность определим по формуле (2.7). Имеем:

$$x \rightarrow h_{21}; a = 50; b = 100;$$

$$m = M(h_{21}); \sigma = \sigma(h_{21}).$$

3. Зная диапазон значений  $h_{21}$ , легко найти среднее значение  $M(h_{21})$ :

$$M(h_{21}) = \frac{30+100}{2} = 65.$$

Значение  $\sigma(h_{21})$  определим по "правилу трех сигм" (см. рис.2.32).

$$\sigma(h_{21}) \approx \frac{\delta(h_{21})}{3} = \frac{100-65}{3} \approx 11,67.$$

4. Используя значения функции  $\Phi(x)$  (прил.1, табл.П.1), находим

$$\begin{aligned} P(50 \leq h_{21} \leq 100) &= \Phi\left(\frac{100-65}{11,67}\right) - \Phi\left(\frac{50-65}{11,67}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{50-65}{11,67}\right) = 1 - \Phi(-1,29) = 1 - 0,0985 \approx 0,9. \end{aligned}$$

Таким образом из партии объемом 1000 транзисторов примерно 90%, т.е. 900 экземпляров, будут пригодны для постановки в РЭУ.