

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники»

Кафедра систем управления

А. В. Павлова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Методическое пособие
для студентов специальности 1-53 01 07 «Информационные технологии
и управление в технических системах»
заочной формы обучения

Минск БГУИР 2011

УДК 519.71(076)
ББК 22.18 я73
П12

Р е ц е н з е н т:

заведующий кафедрой «Информационные системы и технологии»
Белорусского национального технического университета,
доктор технических наук, профессор А. А. Лобатый

Павлова, А. В.

П12 Математические основы теории систем : метод. пособие для студ.
спец. 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в техниче-
ских системах» заоч. формы обуч. / А. В. Павлова. – Минск : БГУИР,
2011. – 84 с. : ил.
ISBN 978-985-488-658-9

В пособии представлены рабочая программа дисциплины и методические указания по ее изучению, а также варианты заданий для выполнения контрольной и курсовой работы и список рекомендованной литературы. Приведены требования к решению отдельных задач и пример выполнения курсовой работы.

УДК 519.71(076)
ББК 22.18я73

ISBN 978-985-488-658-9

© Павлова, А. В., 2011
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2011

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ»

1.1. Цель и задачи преподавания дисциплины

Цель преподавания дисциплины

В современных автоматических и автоматизированных системах управления широко применяются встроенные микропроцессоры, средства микроэлектроники, вычислительной техники, робототехники и другие сложные технические устройства. Важную роль в исследованиях, проектировании и эксплуатации подобных систем играют математические методы описания и исследования.

Целью преподавания дисциплины является продолжение и углубление математической подготовки студентов, формирующей систему знаний, необходимых в качестве фундамента профилирующих дисциплин специальности, таких, как «Теория автоматического управления», «Микропроцессоры в системах управления», «Основы систем автоматизированного проектирования», «Оптимальные и адаптивные системы», «Идентификация и диагностика объектов и систем управления».

Задачи изучения дисциплины

Предметом изучения дисциплины являются математические модели систем и элементов систем и основы методов их исследования. Основные задачи дисциплины «Математические основы теории систем»: приобретение студентами знаний по специальным разделам современной дискретной математики; изучение математических моделей и методов исследования линейных систем и элементов систем, описываемых обыкновенными дифференциальными и конечно-разностными уравнениями; изучение методов конечномерной оптимизации, алгоритмов математического программирования, элементов теории оптимизации управления.

В результате изучения дисциплины «Математические основы теории систем» студент должен:

знать:

- основы алгебры множеств и теории графов;
- основы математической логики и теории конечных автоматов;
- основные сведения о сигналах и их математических моделях;
- способы описания линейных непрерывных систем и их элементов;
- методы конечномерной оптимизации;
- теорию линейного и нелинейного программирования;
- методы оптимизации управления;

уметь:

- формировать математические модели объектов и систем;
- решать задачи оптимизации на транспортных сетях, задачи анализа сетей Петри;
- осуществлять синтез комбинационных схем и конечных автоматов;
- решать задачи спектрального и корреляционного анализа сигналов;
- анализировать временные и частотные характеристики линейных систем и их элементов;
- решать задачи оптимизации;

иметь представление:

- о дискретных системах и методах их описания;
- о многокритериальной оптимизации;
- о взаимной связи методов исследования систем и перспективах их развития.

1.2. Методические указания

Дисциплина «Математические основы теории систем» изучается в двух семестрах:

- часть I (темы 1 – 8) в пятом семестре на третьем курсе;
- часть II (темы 9 – 13) в шестом семестре на третьем курсе.

Учебным планом предусмотрено выполнение контрольной работы в пятом семестре и курсовой работы в шестом семестре, а в качестве формы итогового контроля предусмотрен экзамен.

Аудиторные занятия предполагается проводить по наиболее важным и сложным разделам программы, представленным в табл. 1.1.

Название тем практических занятий, их содержание и объем в часах представлены в табл. 1.2.

В задания для контрольной работы включены задачи по всем разделам рабочей программы дисциплины. Решение аналогичных задач подробно рассмотрено в лекционном курсе, который в полном объеме представлен в ЭУМКД.

Ссылки на литературные источники даны в учебно-методической карте дисциплины (табл. 1.4).

1.3. Содержание дисциплины

Название тем лекционных занятий, их содержание, объем в часах представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Название раздела, темы	Содержание темы	Всего аудит. часов по дневной форме обучения	Всего аудит. часов по заочной форме обучения	Контролируемая самостоятельная работа студентов
1	2	3	4	5
<i>Пятый семестр</i>				
Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ТЕОРИИ ГРАФОВ				
1. Введение. Общие средства математического описания систем	Определение системы. Элементы системы и их взаимодействие. Математическое описание системы. Принципы построения систем. Элементы теоретико-множественного подхода. Предмет, задачи и содержание курса	1	—	1
2. Основы теории множеств				
2.1. Операции над множествами	Упорядоченное множество. Прямое произведение множеств. Разбиение множеств. Законы и тождества алгебры множеств. Уравнения с множествами. Понятие о нечетких множествах	2	—	2
2.2. Соответствия, отображения, отношения множеств	Соответствия, взаимнооднозначное соответствие. Отображения множеств и их виды. Функция, функционал, оператор. Отношения и их свойства. Виды отношений	1	—	1
3. Элементы теории графов и ее приложения				
3.1. Основные понятия и определения	Ориентированные и неориентированные графы. Способы задания графов. Типы графов. Расстояния и пути в графах Понятие центра графа и периферийной вершины. Операции над графами. Упорядочение вершин ориентированного графа	2	—	2
3.2. Числовая функция на графе	Сигнальные графы и правила их преобразования. Правило Мэсона или правило непересекающихся контуров. Нахождение передаточной функции многоконтурной системы. Задача о кратчайшем пути связного неориентированного графа	4	—	4
3.3. Деревья	Символ дерева. Покрывающее дерево связного графа. Экстремальное дерево. Корневые деревья. Код дерева	2	—	2

1	2	3	4	5
Раздел 2. СЕТИ				
4. Транспортные сети	Основные понятия и определения. Разрез сети. Потоки в сетях. Задача о максимальном потоке между входом и выходом сети. Теорема Форда - Фалкерсона Табличный алгоритм Форда – Фалкерсона для нахождения максимального потока. Транспортная задача. Нахождение потока минимальной стоимости. Транспортная задача по критерию времени	4	2	2
5. Сети Петри				
5.1. Основные определения	Аналитический, графический и матричный способы задания сетей Петри. Маркировка сетей Петри. Понятие разрешенного перехода. Условие срабатывания перехода. Функционирование сетей Петри. Дерево достижимости	3	1	2
5.2. Свойства сетей Петри	Основные задачи анализа сетей Петри: задача достижимости и задача сохраняемости. Матричный подход к решению этих задач. Подклассы и расширения сетей Петри	2	1	1
Раздел 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ АВТОМАТОВ				
6. Математическая логика и понятие о конечных автоматах				
6.1. Основные определения алгебры логики	Булевы функции и способы их задания. Понятие фиктивного аргумента. Количество функции, существенно зависящих от n аргументов. Элементарные булевы функции. Законы и тождества алгебры логики. Понятие о нечеткой логике	2	—	2
6.2. Полнота системы булевых функций, минимизация функций алгебры логики	Базисы И–ИЛИ–НЕ, И–НЕ, ИЛИ–НЕ. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (СДНФ и СКНФ). Запись СДНФ и СКНФ по таблично заданной функции. Минимизация функций алгебры логики. Метод карт Карно и метод Квайна. Синтез комбинационных схем в заданном базисе	4	1	2
6.3. Понятие о конечных автоматах	Способы задания. Автоматы Мили и Мура. Абстрактный и структурный автоматы. Понятие элементарного автомата. Общая структурная схема конечного автомата. Основные этапы синтеза структурного автомата. Схемные реализации	4	1	3

1	2	3	4	5
Раздел 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ				
7. Основные сведения о сигналах и их математических моделях				
7.1. Математические модели сигналов	Временное представление сигналов. Классификация сигналов. Простейшие непрерывные сигналы. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье. Разложение произвольного сигнала по заданной системе функций. Представление сигналов в виде ряда Котельникова. Дискретные представления сигналов, полиномы Эрмита, Лагерра, Чебышева	4	1	3
7.2. Корреляционный и спектральный анализы	Корреляционная функция детерминированного сигнала. Основные свойства автокорреляционных функций. Понятие спектральной плотности. Связь между автокорреляционной функцией и спектральной плотностью сигнала	2	1	2
7.3. Случайные сигналы	Основные вероятностные характеристики случайных сигналов. Спектральное представление стационарных случайных процессов. Преобразование случайных процессов	2	—	2
Раздел 5. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ И ИМПУЛЬСНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ				
8. Математическое описание линейных систем и их элементов				
8.1. Линейная непрерывная система и ее представления	Классификация элементов систем. Уравнения динамики и статики. Формы представления математических моделей: дифференциальное уравнение, передаточная функция, уравнения состояния. Представление моделей в пакете MATLAB, переход от одной модели к другой. Временные характеристики систем и элементов систем. Передаточные функции и структурные схемы различных соединений звеньев. Характеристическое уравнение системы. Модели комплексной области. Понятие о частотных характеристиках систем и элементов систем	6	1	5

1	2	3	4	5
8.2. Метод пространства состояний	Понятие о переменных состояниях. Математическая модель элементов, описываемых уравнениями первого порядка, схема модели. Решение линейных уравнений состояния первого порядка. Свободная и вынужденная составляющие решения. Матричное представление линейных уравнений состояния. Каноническая и нормальная формы. Решение матричных уравнений состояния. Матрица перехода и ее свойства. Вычисление матрицы перехода с помощью теоремы Кэли–Гамильтона. Понятие об устойчивости системы	4	1	3
8.3. Математическое описание линейных импульсных систем	Дискретные сигналы и воздействия, решетчатые функции. Квантование непрерывных сигналов. Разностные дифференциальные уравнения. Дискретное преобразование Лапласа, Z-преобразование. Понятие передаточной функции стационарной импульсной системы. Уравнения состояния и моделирование импульсных систем	2	—	2
Итого: пятый семестр		51	10	41
<i>Шестой семестр</i>				
Раздел 6. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ				
9. Общая характеристика методов оптимизации в теории систем	Основные понятия и определения. Качество систем и критерии качества. Формализация задачи оптимизации систем. Ограничения и критерии оптимизации. Постановка задачи параметрической оптимизации и оптимизации управления. Классификация методов решения задач оптимизации. Общая характеристика задач математического программирования. Виды экстремума функций многих переменных. Определение выпуклости. Особенности выпуклых функций	2	—	2

1	2	3	4	5
10. Линейное программирование				
10.1. Постановка задачи и методы решения задач линейного программирования	Основные особенности задач линейного программирования. Геометрическая интерпретация. Алгебраический анализ задачи. Симплекс-метод. Симплекс-таблица. Оптимальные планы и их определение. Метод искусственного базиса. Двойственная задача линейного программирования. Связь между оптимальным решением прямой и двойственной задач	4	1	3
10.2. Целочисленное линейное программирование	Специфика задач целочисленного программирования и методы их решения. Метод отсечения. Алгоритм Гомори для полностью целочисленных и частично целочисленных задач. Вычислительные возможности методов отсечения. Метод ветвей и границ	4	1	3
11. Нелинейные задачи без ограничений				
11.1. Одномерная минимизация унимодальных функций	Методы поиска безусловного экстремума функций. Сокращение интервала неопределенности. Методы дихотомии, Фибоначчи, золотого сечения. Методы с использованием производных, метод секущих, метод Ньютона – Рафсона. Методы полиномиальной аппроксимации	4	1	3
11.2. Поиск безусловного экстремума функций многих переменных	Метод покоординатной оптимизации, метод градиента, метод наискорейшего спуска. Метод Ньютона – Рафсона для функции многих переменных. Метод Флетчера Ривса. Метод Дэвидона – Флетчера - Пауэлла	2	1	2
12. Нелинейные задачи с ограничениями	Особенности нелинейных задач. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Теорема Куна – Таккера. Квадратичное программирование. Метод Вулфа. Метод допустимых направлений Зойтендейна. Метод штрафных функций. Метод отсекающих плоскостей Кэлли. Метод линейных комбинаций. Сепарабельное программирование	10	2	8

1	2	3	4	5
13. Метод динамического программирования и принцип максимума Понтрягина	Принцип оптимальности Беллмана. Дискретное динамическое программирование. Непрерывная форма уравнений динамического программирования. Функциональное уравнение Беллмана. Оптимальное управление линейным объектом по квадратическому критерию качества. Уравнение Риккати. Принцип максимума Понтрягина. Порядок определения оптимального управления с помощью принципа максимума. Оптимальное по быстродействию управление линейными объектами. Теорема об n -интервалах. Определение моментов переключения	7	2	5
14. Заключение	Общий обзор методов исследования систем. Взаимная связь методов, перспективы развития	1	—	—
Итого: шестой семестр		34	8	26
Всего за учебный год		85	18	67

Название тем практических занятий, их содержание и объем в часах представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Название темы	Содержание темы	Всего аудит. часов по дневной форме обучения	Всего аудит. часов по заочной форме обучения	Контролируемая самостоятельная работа студентов (КСР)
1	2	3	4	5
<i>Пятый семестр</i>				
1. Основы теории множеств	Законы и тождества алгебры множеств	2	—	2
2. Элементы теории графов и ее приложения	Сигнальные графы, правило Мэзона, операции над графами. Деревья	2	1	1
3. Транспортные сети	Задача о максимальном потоке транспортной сети и потоке минимальной стоимости	2	1	1
4. Сети Петри	Анализ сетей Петри. Задачи достижимости и сохраняемости	2	1	1
5. Элементы математической логики и теории автоматов	Нормальные дизъюнктивные и конъюнктивные формы. Законы и тождества алгебры логики	2	1	1

1	2	3	4	5
6. Математическая логика и понятие о конечных автоматах	Минимизация функций алгебры логики, синтез комбинационных схем, синтез конечных автоматов	2	2	—
7. Основные сведения о сигналах и их математических моделях	Математические модели сигналов	2	1	1
8. Математическое описание линейных систем и их элементов	Формы представления моделей систем, построение частотных характеристик	3	1	2
Итого: пятый семестр		17	8	9
<i>Шестой семестр</i>				
9. Линейное программирование	Графическая интерпретация задач линейного программирования. Симплекс-метод	2	—	2
10. Линейное программирование	Двойственная задача линейного программирования	2	1	1
11. Линейное программирование	Целочисленное линейное программирование	2	1	1
12. Нелинейные задачи без ограничений	Поиск безусловного экстремума функций многих переменных	2	1	1
13. Нелинейные задачи с ограничениями	Квадратичное программирование. Теорема Куна – Таккера	2	1	1
14. Нелинейные задачи с ограничениями	Нелинейное программирование. Метод Зойтендейка	2	1	1
15. Нелинейные задачи с ограничениями	Метод отсекающих плоскостей. Метод линейных комбинаций	2	1	1
16. Методы оптимизации управления	Динамическое программирование. принцип максимума Понтрягина	3	—	3
Итого: шестой семестр		17	6	11
Всего за учебный год		34	14	20

1.4. Курсовая работа, ее характеристика

Курсовая работа включает в себя четыре задания, соответствующих изучаемым разделам дисциплины. Задания предусматривают получение аналитического решения задач, выбор эффективных методов их решения; в тех случаях, где это необходимо, используется несколько методов решения и делается их сравнительная оценка.

Задание 1. Для динамической системы, описываемой заданной передаточной функцией определить временные и частотные характеристики, записать уравнения состояния в нормальной и канонической формах. Получить анали-

тическое представление процессов в системе при указанных входных воздействиях.

Задание 2. Решить предложенную задачу линейного программирования. Составить задачу, двойственную к исходной, решить ее и сравнить решения прямой и двойственной задач. Найти целочисленное решение.

Задание 3. Исследовать на экстремум нелинейную функцию методами Хука – Дживса, методом наискорейшего спуска, методом Ньютона – Рафсона. Сравнить результаты решения.

Задание 4. Исследовать на экстремум заданную квадратичную функцию цели с учетом системы линейных ограничений на переменные методом линейных комбинаций, методом допустимых направлений Зойтендейка, используя условия теоремы Куна – Таккера.

1.5. Контрольные работы, их характеристика

В пятом семестре выполняется одна контрольная работа, которая включает задания по следующим темам, указанным в табл. 1.3

Таблица 1.3

Тема	Характеристика	Объем в часах
1	2	3
1. Элементы теории графов и ее приложения	Изучить способы задания ориентированных и неориентированных графов, выполнение операций над графами, правило нахождения передачи графа, построение покрывающих деревьев	4
2. Транспортные сети	Изучить задачи оптимизации на транспортных сетях: нахождение максимального потока и потока минимальной стоимости	4
3. Сети Петри	Изучить способы задания сетей Петри и методы решения задач достижимости и сохраняемости	4
4. Математическая логика и конечные автоматы	Изучить законы и тождества алгебры логики, методы минимизации функций алгебры логики, вопросы синтеза комбинационных схем и конечных автоматов	8
5. Корреляционный и спектральный анализ детерминированных сигналов	Изучить вопросы спектрального представления периодических и непериодических сигналов, вычисления автокорреляционных функций детерминированных сигналов	6
Итого:		26

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Горбатов, А. В. Дискретная математика : учебник для студ. вузов / А. В. Горбатов, В. А. Горбатова, М. В. Горбатова. – М. : Астраль, АСТ, 2006 с.
2. Кузнецов, В. П. Теория автоматического управления : конспект лекций. В 2 ч. ч. 1 / В. П. Кузнецов, С. В. Лукьянец, М. А. Крупская. – Минск : БГУИР, 2007.
3. Палий, И. А. Дискретная математика : курс лекций. – М. : Эксмо, 2008.
4. Волков, И. К. Исследование операций : Учеб. для вузов / И. К. Волков, Е. А. Загоруйко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
5. Тишин, В. В. Дискретная математика в примерах и задачах / В. В. Тишин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008.
6. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов. 5-е изд. / И. С. Гоноровский. – М. : Дрофа, 2006.
7. Галеев, Э. М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи : учеб. пособие / Э. М. Галеев. – М. : Эдиториал УРСС, 2010.
8. Макоха, А. Н. Дискретная математика : учебник / А. Н. Макоха, П. А. Сахнюк, Н. И. Червяков. – М. : Физматлит, 2005.
9. Ушаков, А. В. Математические основы теории систем : Элементы теории и практикум : учеб. пособие / А. В. Ушаков, В. В. Хабалов, Н. А. Дударенко. – СПб : СПб ГУ ИТМО, 2007.
10. Певзнер, Л. Д. Математические основы теории систем / Л. Д. Певзнер, Е. П. Чураков. – М. : Высш. шк., 2009.

Дополнительная

11. Ерофеев, А. А. Теория автоматического управления : учеб. для вузов / А. А. Ерофеев. – СПб. : Политехника, 2003.
12. Костевич, Л. С. Математическое программирование: информационные технологии оптимальных решений: Учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Минск : Новое знание, 2003.
13. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М. : Высш. шк., 2000.
14. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике : В 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – М. : Мир, 1986.
15. Таха, Х. Введение в исследование операций: В 2 кн. / пер. с англ. – М. : Мир, 1985.
16. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Мат. программирование : учеб. пособие /А. В. Кузнецов [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2002.

Перечень компьютерных программ, наглядных и других пособий, методических указаний, материалов и технических средств обучения

17. Павлова, А. В. Математические основы теории систем : конспект лекций для студ. спец. «Информационные технологии и управление в технических

системах». Ч. 1. [Электронный ресурс]. 2010. – Режим доступа : http://www.bsuir.by/m/12_100229_1_62553.pdf.

18. Павлова, А. В. Математические основы теории систем : конспект лекций для студ. спец. «Информационные технологии и управление в технических системах». Ч. 2. – Минск : БГУИР, 2005.

19. Павлова, А. В. Методическое пособие к практическим занятиям по курсу «Математические основы теории систем» / А. В. Павлова, Ю. В. Кушелев. – Минск : БГУИР, 1994.

20. Пакет компьютерных программ Matlab 7.8.

21. Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Математические основы теории систем» для студентов специальности 1-53 01 07 Информационные технологии и управление в технических системах. [Электронный ресурс]. 2010. – Режим доступа :

Учебно-методическая карта дисциплины представлена в табл. 1.4

Таблица 1.4

План-график учебного процесса	Номер темы (по табл. 1.1)	Название вопросов, которые изучаются на лекциях	Практические (семинарские) занятия (по табл. 1.2)	Литература (номера)	Наглядные и методические пособия (номера)	Форма контроля знаний студентов*
<i>Пятый семестр</i>						
Установочная сессия	3, 4	Элементы теории графов. Транспортные сети	2, 3	[1, 3]	[17, 21]	ТО
Лабораторно-экзаменационная	5, 6	Сети Петри. Элементы алгебры логики	4, 5	[1, 3, 8]	[17, 21]	ТО, КР
	6	Минимизация функций алгебры логики. Синтез конечных автоматов	6	[3, 5, 8]	[17, 21]	ТО, КР
	7	Математические модели сигналов	7	[6, 13]	[17, 21]	ТО, КР
	8	Математические модели линейных систем и их элементов	8	[2, 9, 10]	[17, 20]	ТО, КР
<i>Шестой семестр</i>						
Установочная сессия	10	Линейное программирование. Графическая интерпретация. Симплекс-метод	10, 11	[4, 9, 10, 12, 15, 16]	[18, 21]	ТО
Лабораторно-экзаменационная	11	Решение нелинейных задач оптимизации без ограничений	12	[1, 10, 14, 15]	[18, 21]	ТО, КР
	12	Нелинейные задачи оптимизации с ограничениями	13, 14, 15	[10, 14, 15, 16]	[18, 21]	ТО, КР
	13	Метод динамического программирования. Принцип максимума Понтрягина		[4, 7, 12, 14]	[18, 21]	ТО, КР

* ТО – текущий опрос, КР – контрольная работа

2. ЗАДАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа включает задания 1 – 5.

Задание 1. Элементы теории графов

Связный ориентированный граф $G(X, \Gamma)$ задан множеством вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и отображением $\Gamma x_i = \{x_{|I \pm K|}, x_{|I \pm L|}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Здесь i – текущий номер вершины, n – количество вершин графа. Значение индексов n , k и l взять из табл. 2.1 в соответствии с номером варианта. Индексы k и l формируют значения индексов $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ переменной x в отображении $\Gamma x_i = \{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \dots\}$. Если значения индексов $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ переменной x не соответствуют ни одному из номеров вершин графа, то эта переменная не учитывается во множестве Γx_i .

Выполнить следующие действия:

- определить исходный граф и ассоциированный с ним неориентированный граф графическим, матричным и аналитическим способами;
- установить центры и периферийные вершины графов, найти радиусы и диаметры графов;
- выделить в ориентированном графе два подграфа. Найти объединение, пересечение и разность подграфов;
- описать систему уравнений, соответствующую сигнальному графу, считая, что передача между вершинами x_i и x

$$K_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & \text{при } i \geq j, \\ \frac{1}{s+1} & \text{при } i < j. \end{cases}$$

Найти передачу между вершинами x_1 и x_n , используя правило Мезона. Построить структуру кибернетической системы, определяемой топологией графа;

- определить количество покрывающих деревьев, которые можно построить на неориентированном графе; найти эти деревья;
- для одного из деревьев записать символ дерева, представить дерево в корневой форме и записать код дерева.

Таблица 2.1

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>N</i>	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
<i>K</i>	2	3	4	1	1	1	3	5	2	4	2	3	4	5	6
<i>L</i>	1	1	1	2	3	4	2	1	3	3	1	1	1	1	1
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
<i>N</i>	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
<i>K</i>	1	1	1	1	3	2	5	5	3	3	4	5	6	5	3
<i>L</i>	2	3	4	5	2	3	2	3	4	2	3	2	1	3	5

Задание 2. Задача о максимальном потоке и потоке минимальной стоимости

На рис. 2.1 – 2.51 приведены транспортные сети в виде ориентированных графов. На каждом из ребер через черту проставлены значения пропускной способности $C(v)$ ребра v и стоимость транспортировки единицы потока $d(v)$ по этому ребру.

Для заданной сети определить:

- 1) максимальный поток φ_{\max} транспортировки груза между указанной парой вершин, считая одну из них источником, а другую – стоком;
- 2) стоимость доставки груза по путям, формирующим максимальный поток в сети;
- 3) найти поток из источника в сток заданной величины $\varphi < \varphi_{\max}$, обладающий минимальной стоимостью.

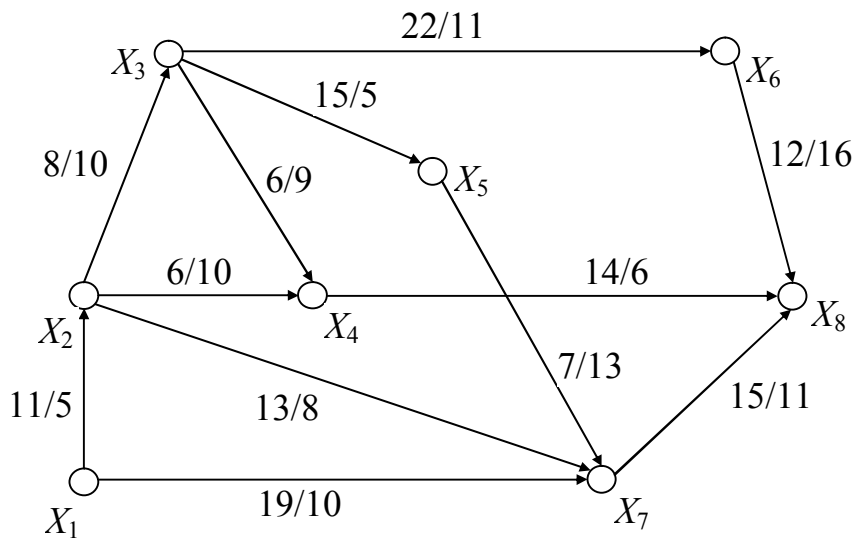


Рис. 2.1

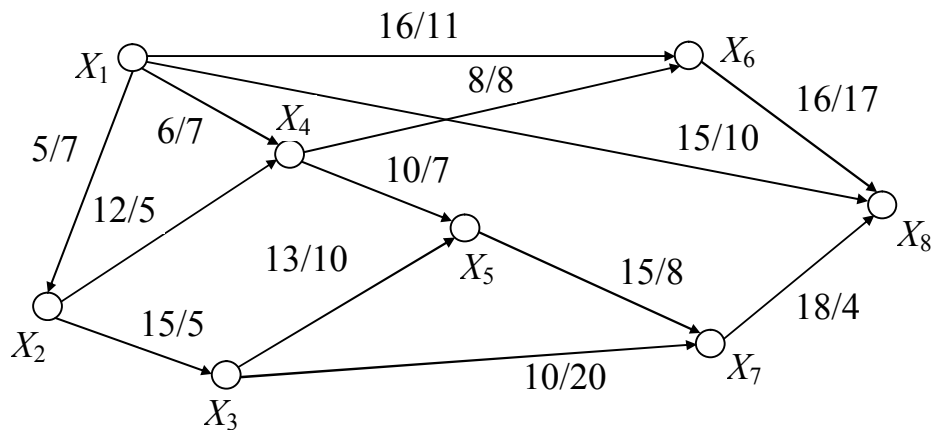


Рис. 2.2

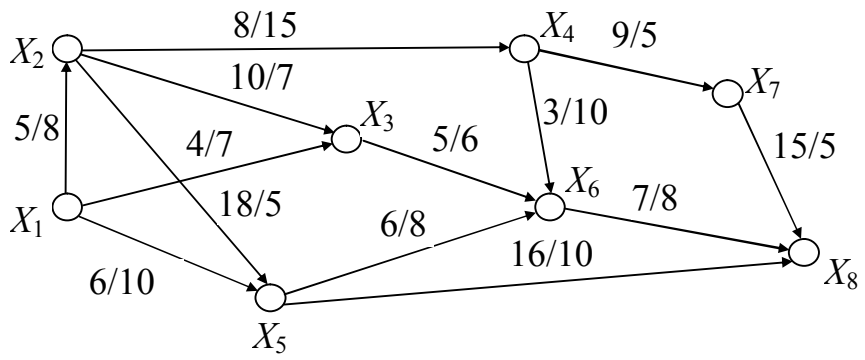


Рис. 2.3

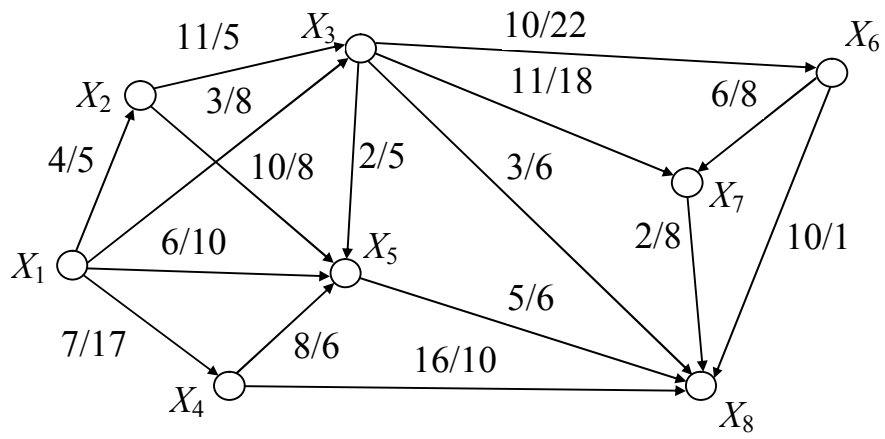


Рис. 2.4

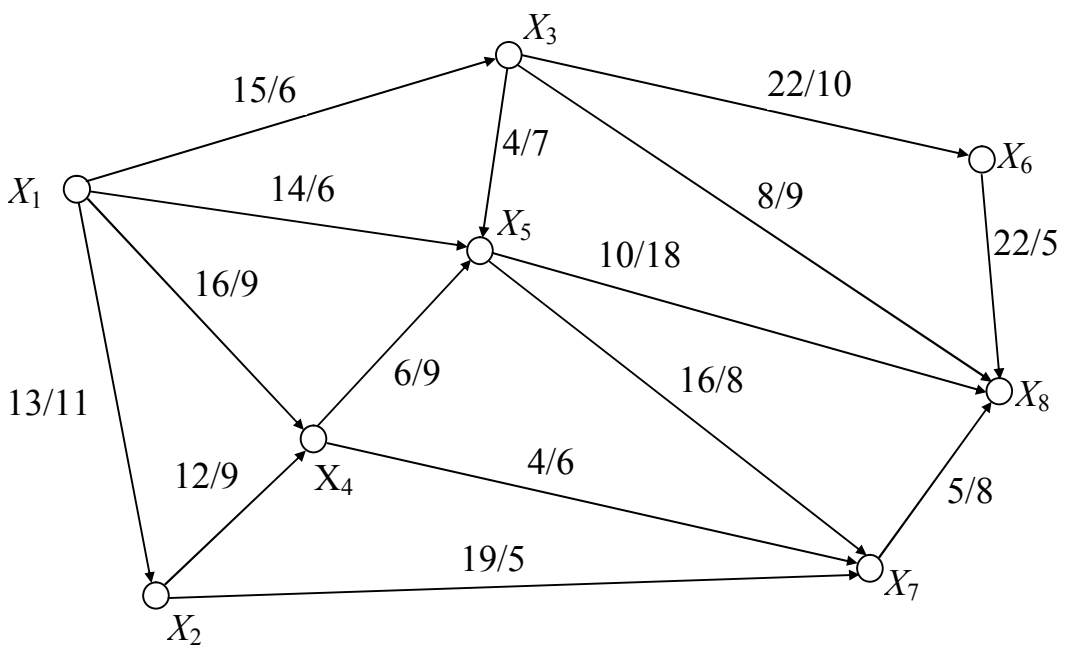


Рис. 2.5

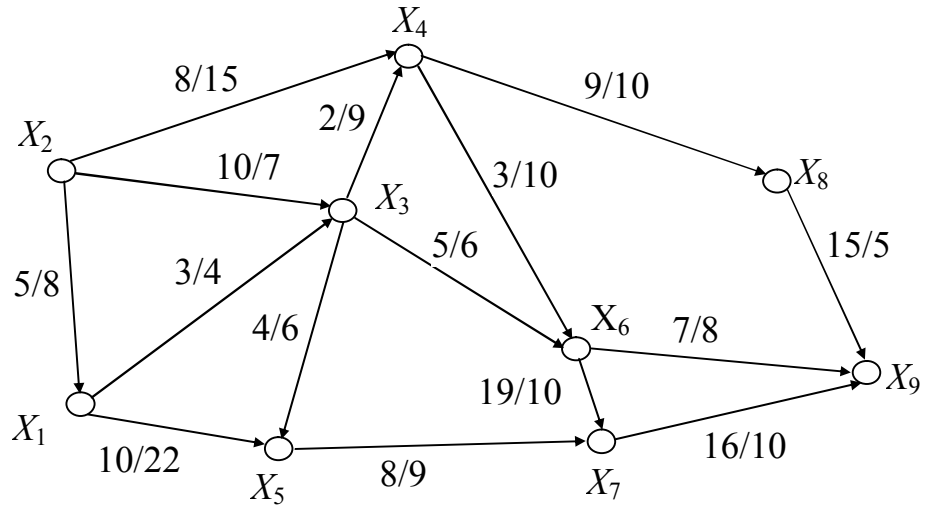


Рис. 2.6

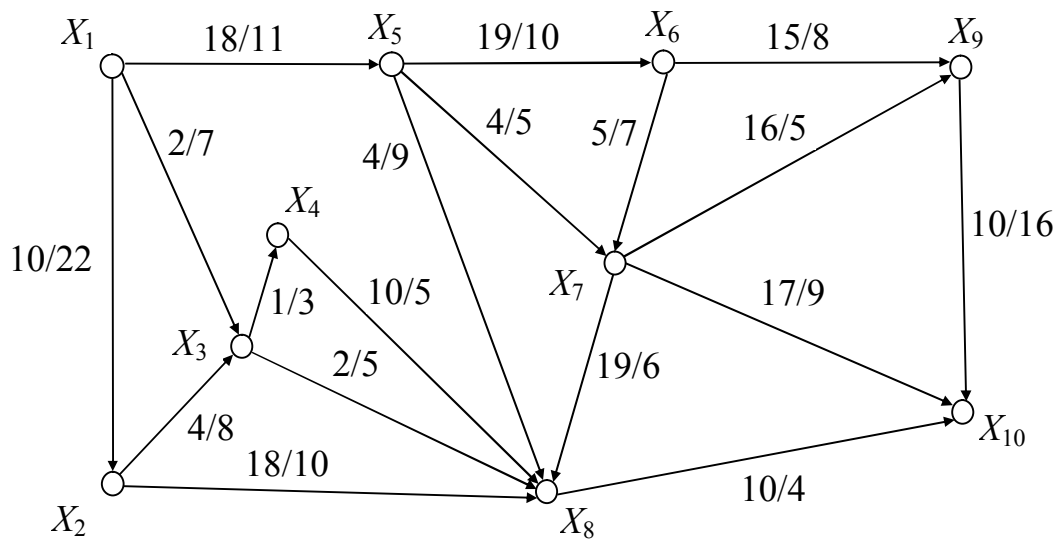


Рис. 2.7

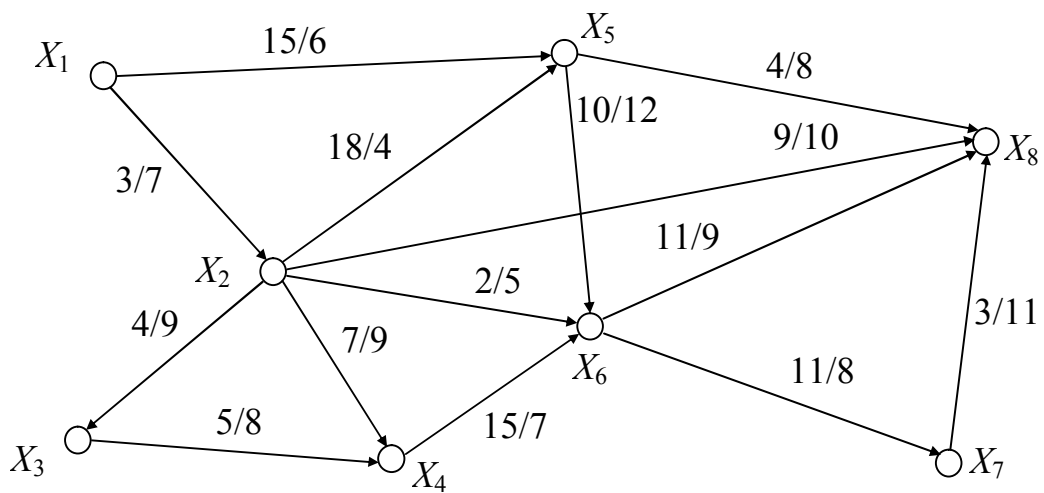


Рис. 2.8

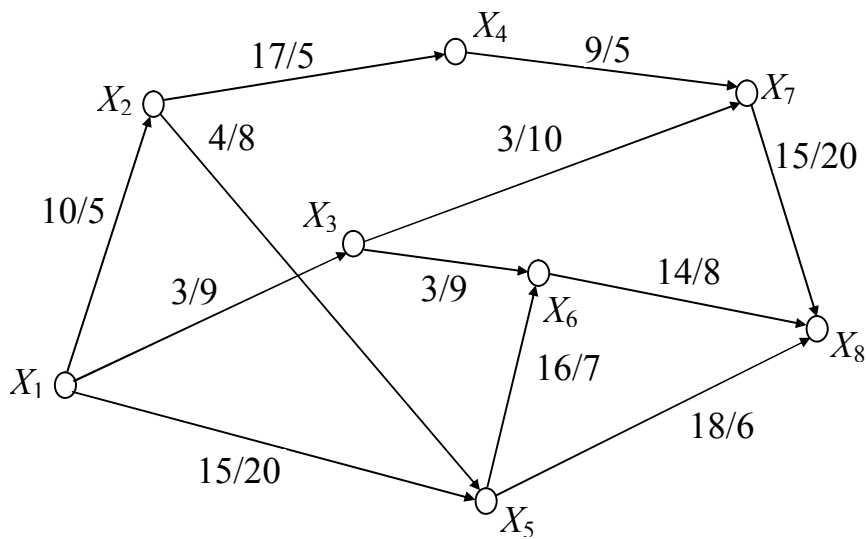


Рис. 2.9

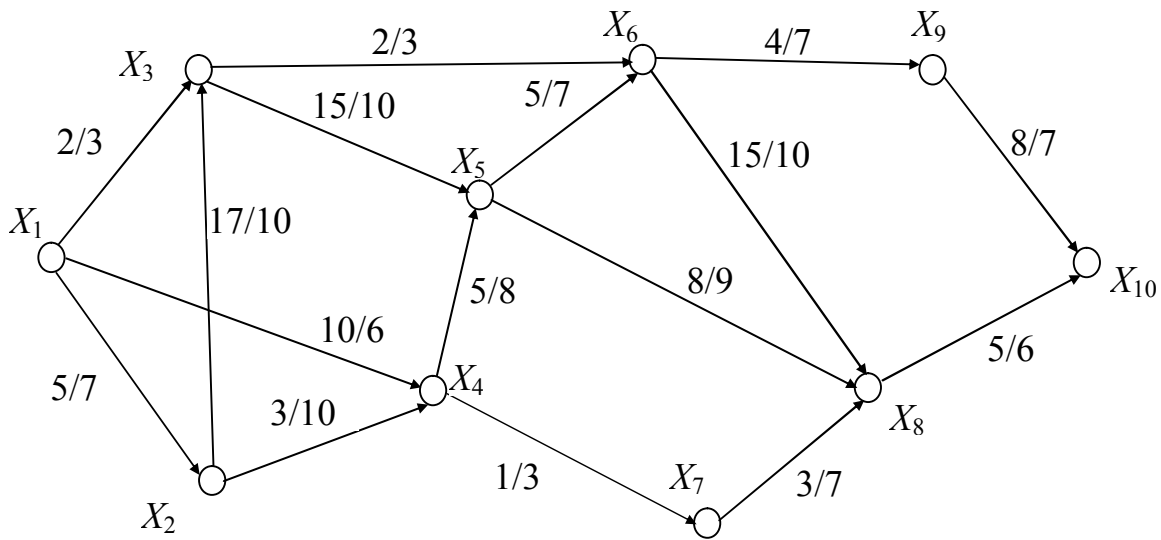


Рис. 2.10

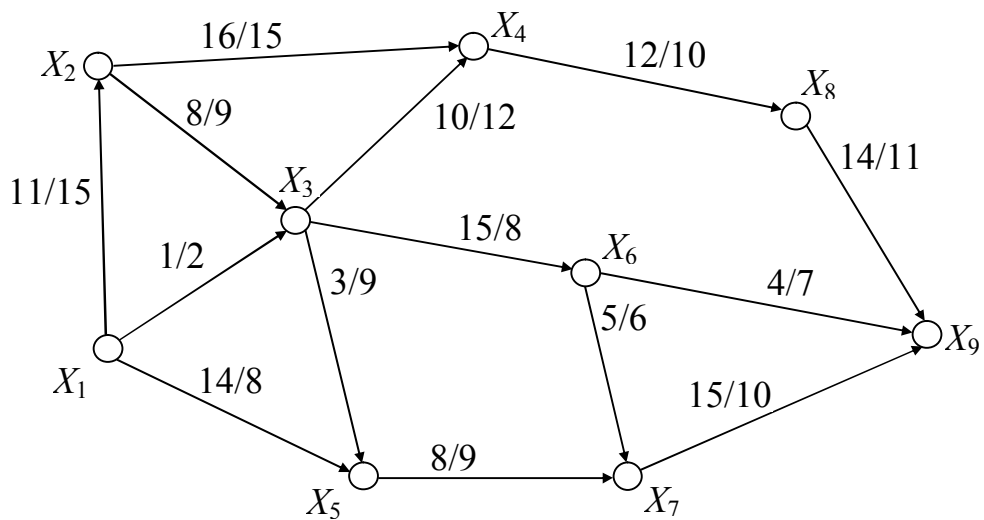


Рис. 2.11

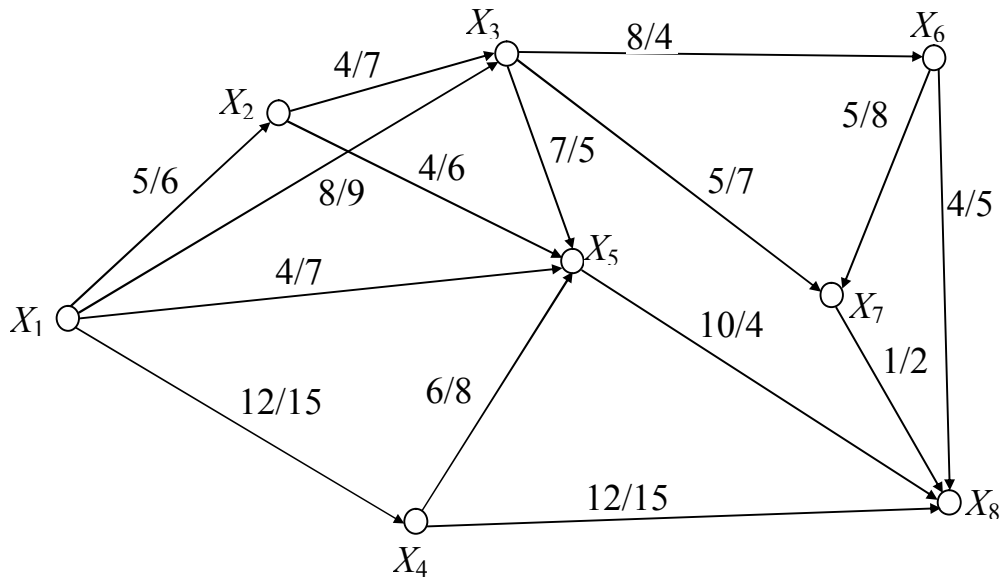


Рис. 2.12

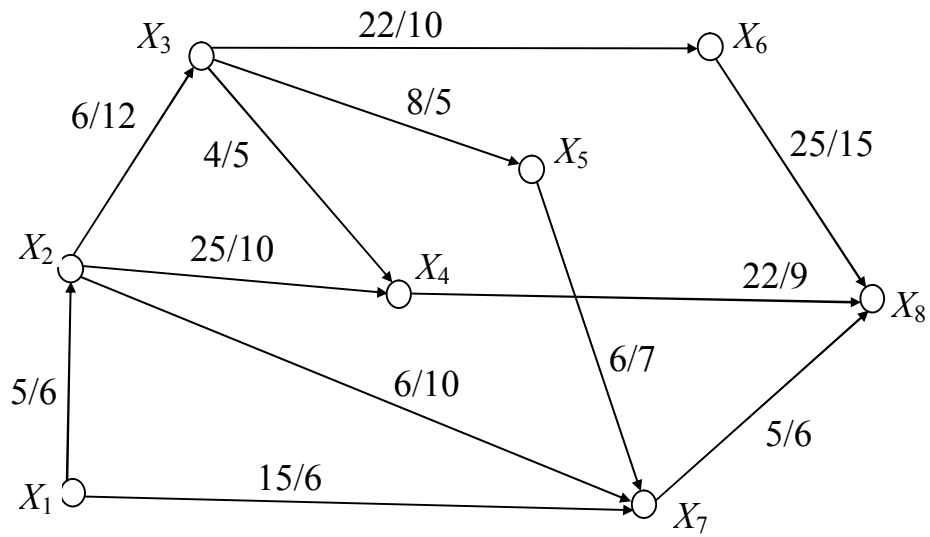


Рис. 2.13

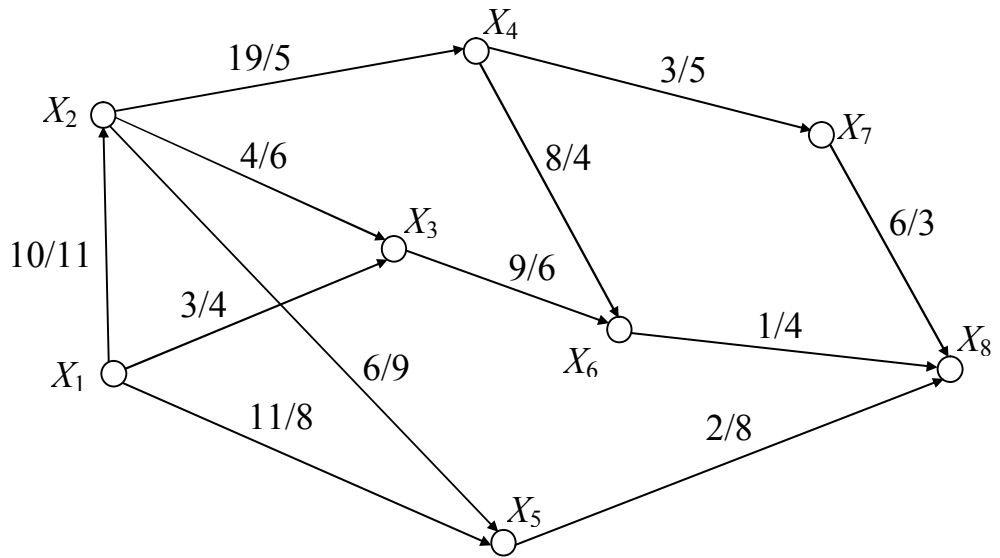


Рис. 2.14

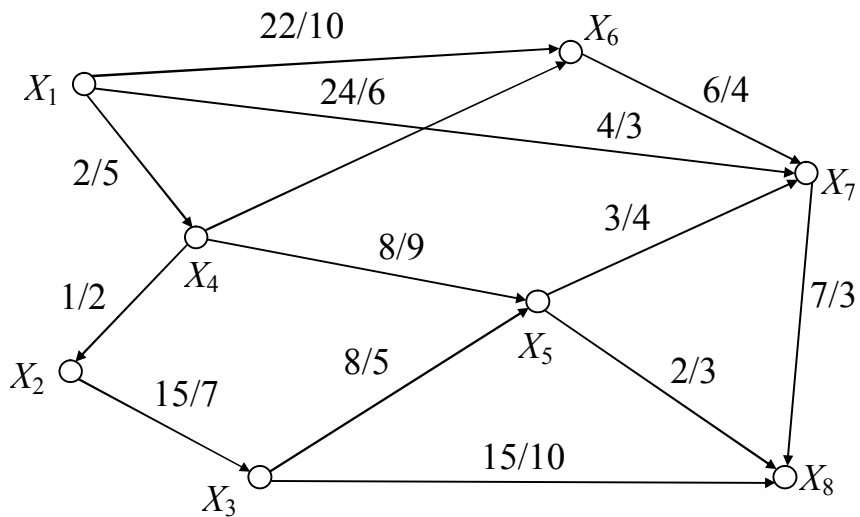


Рис. 2.15

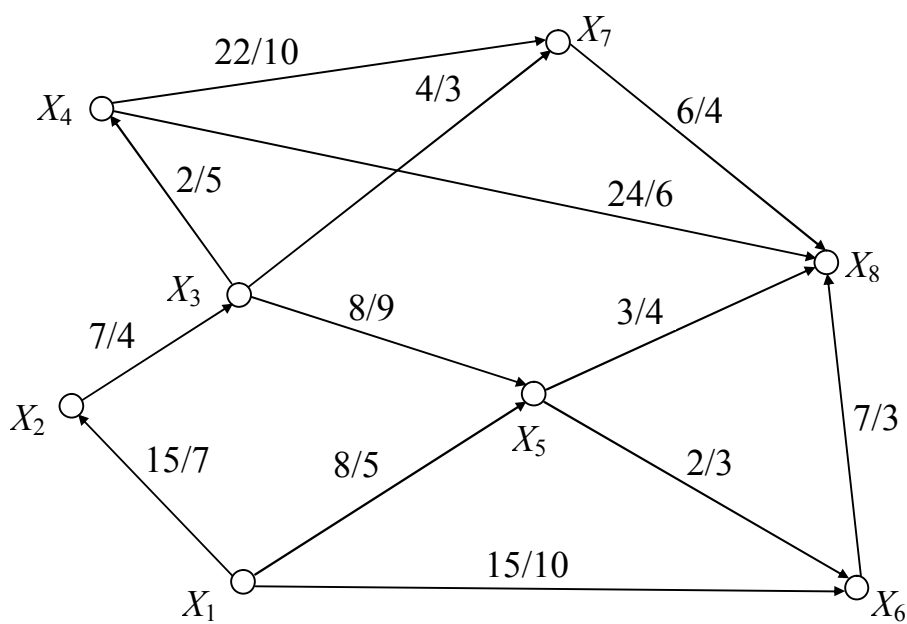


Рис. 2.16

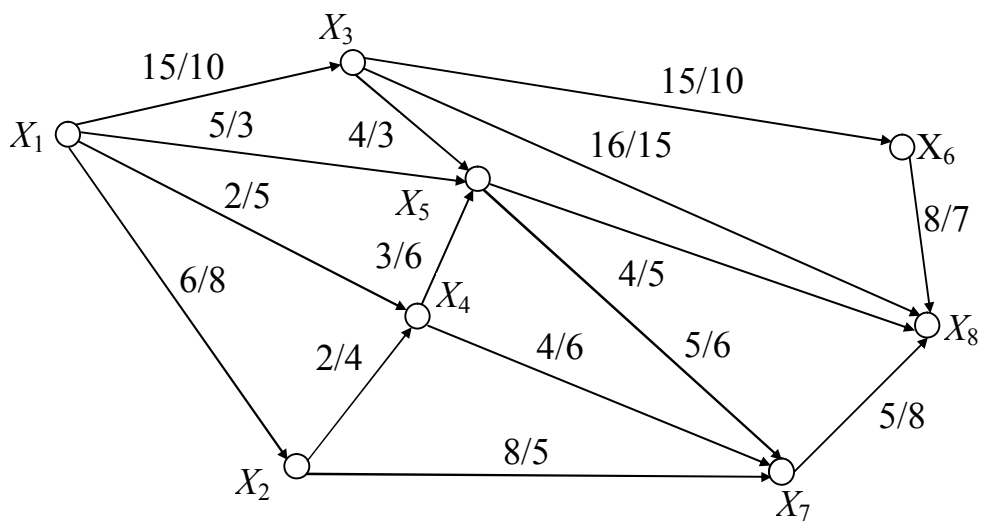


Рис. 2.17

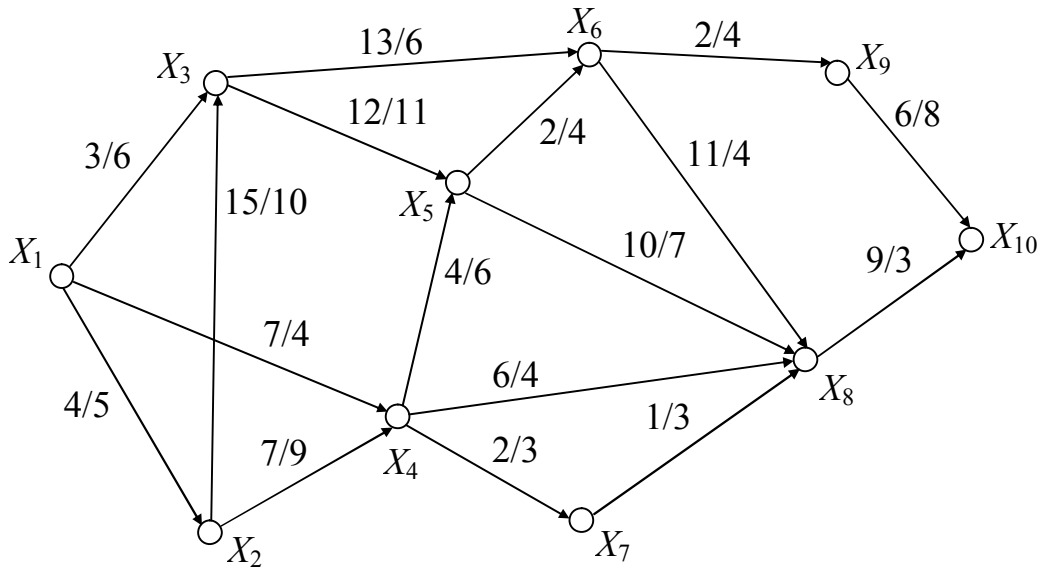


Рис. 2.18

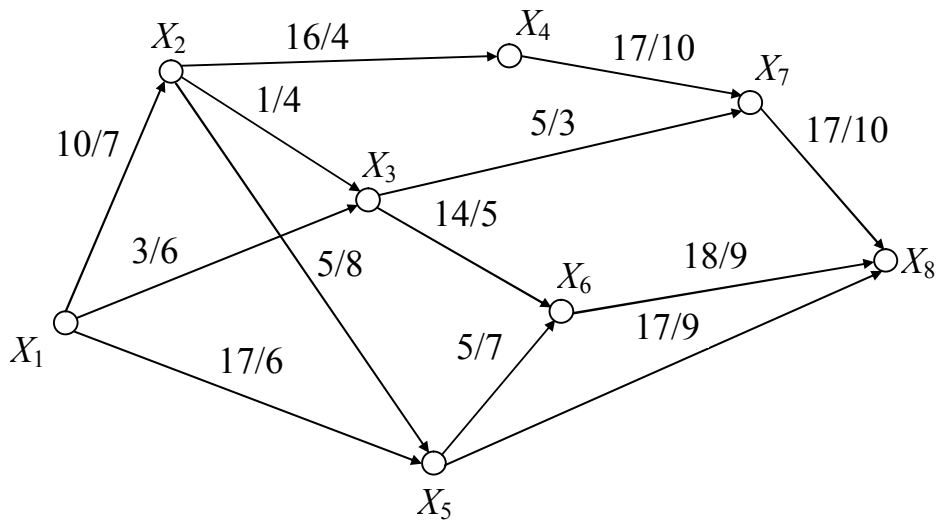


Рис. 2.19

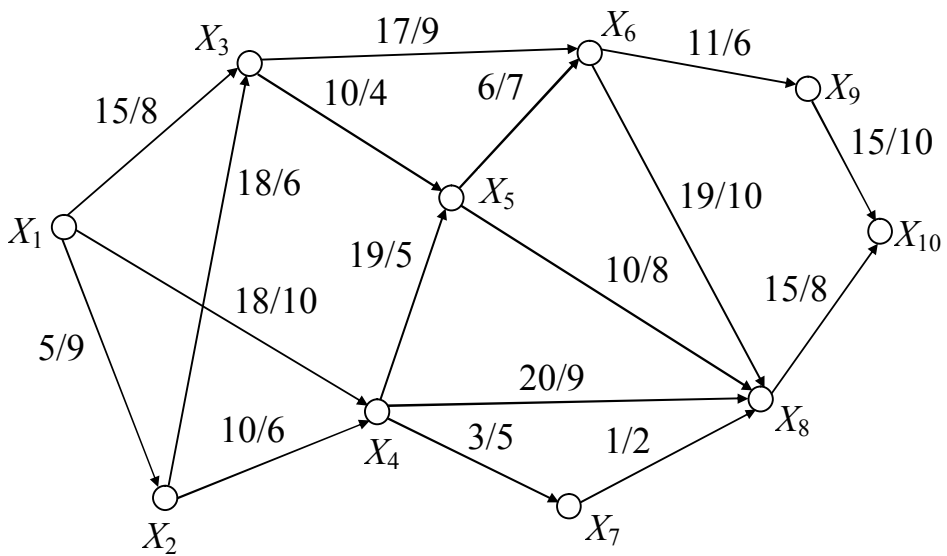


Рис. 2.20

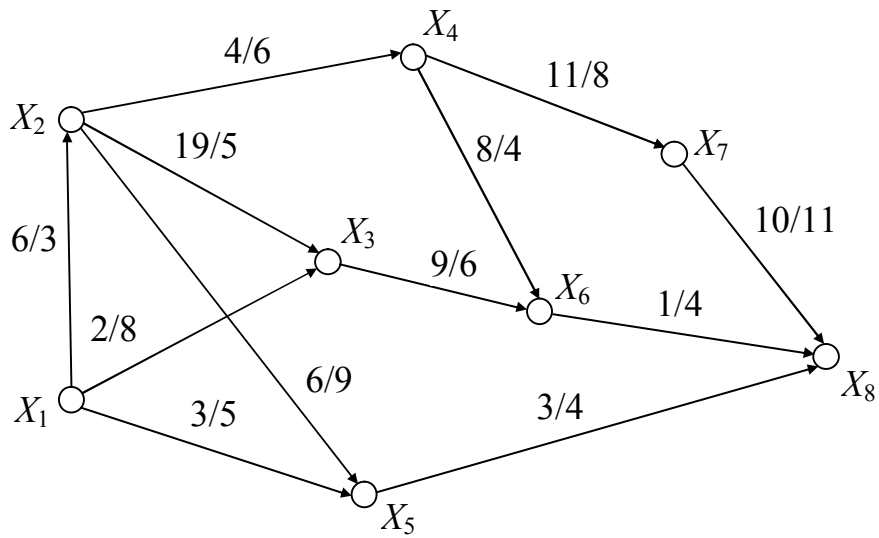


Рис. 2.21

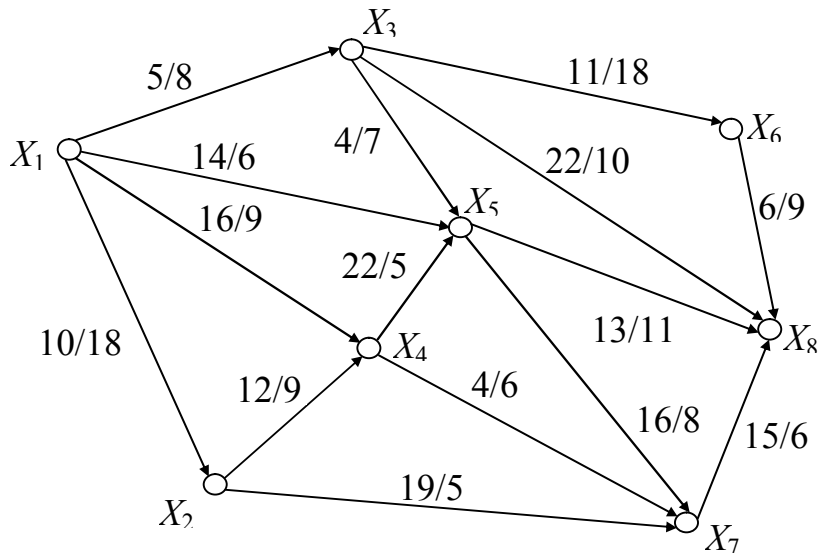


Рис. 2.22

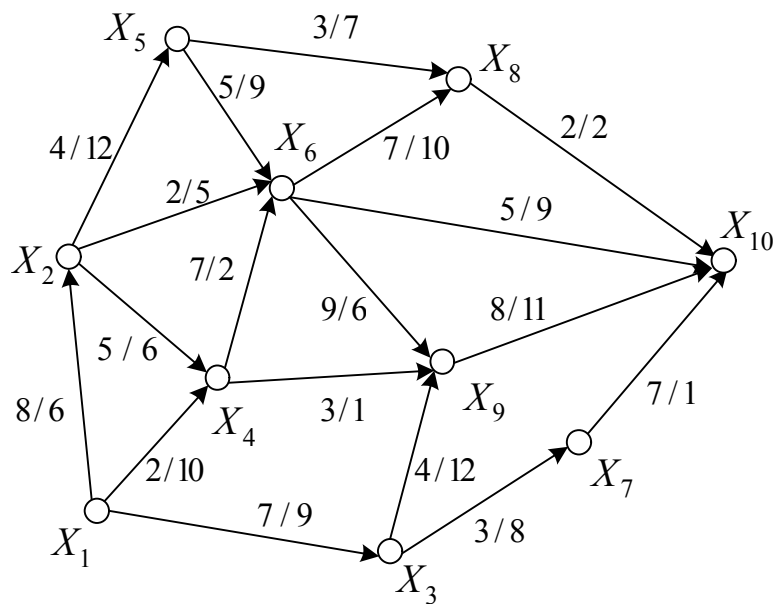


Рис. 2.23

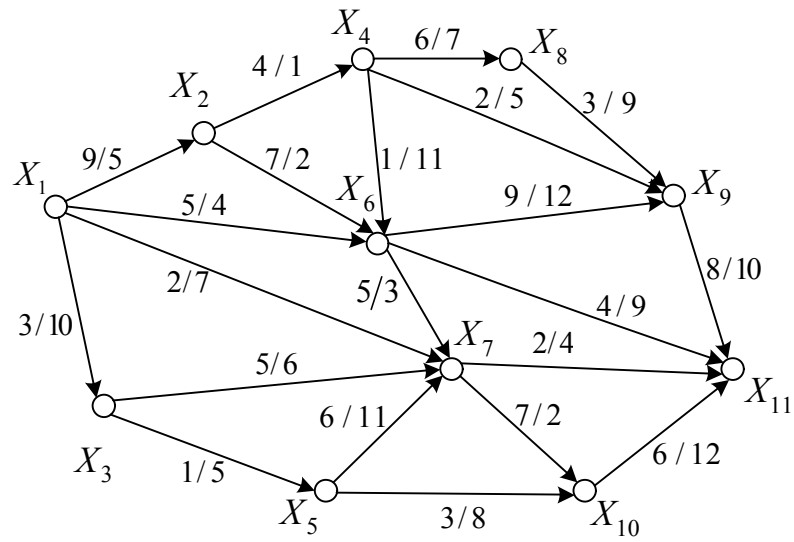


Рис. 2.24

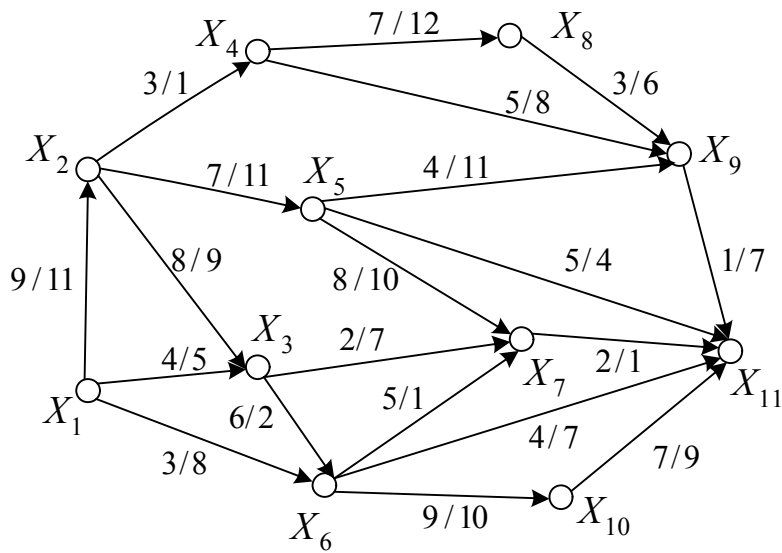


Рис. 2.25

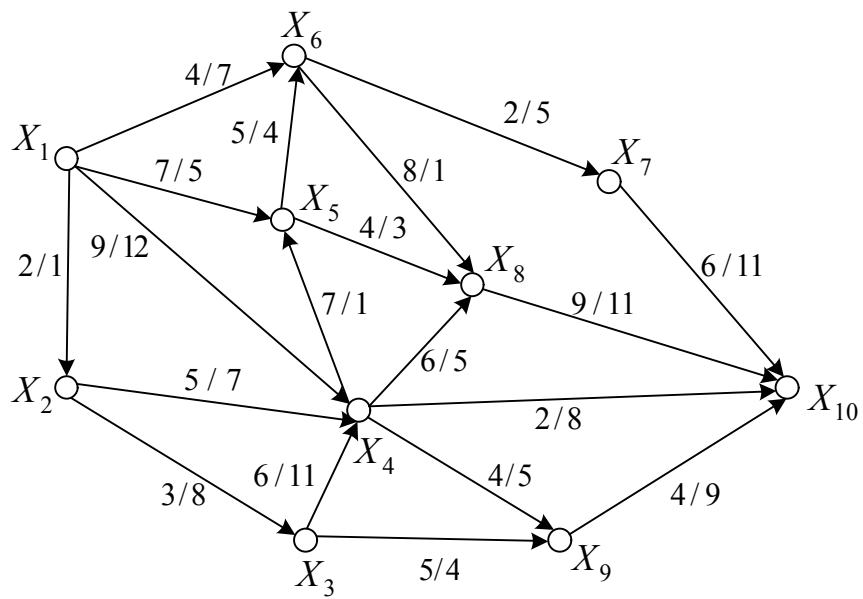


Рис. 2.26

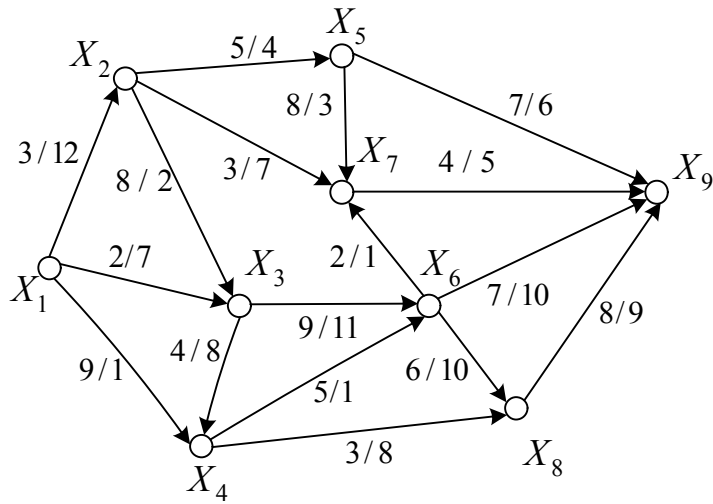


Рис. 2.27

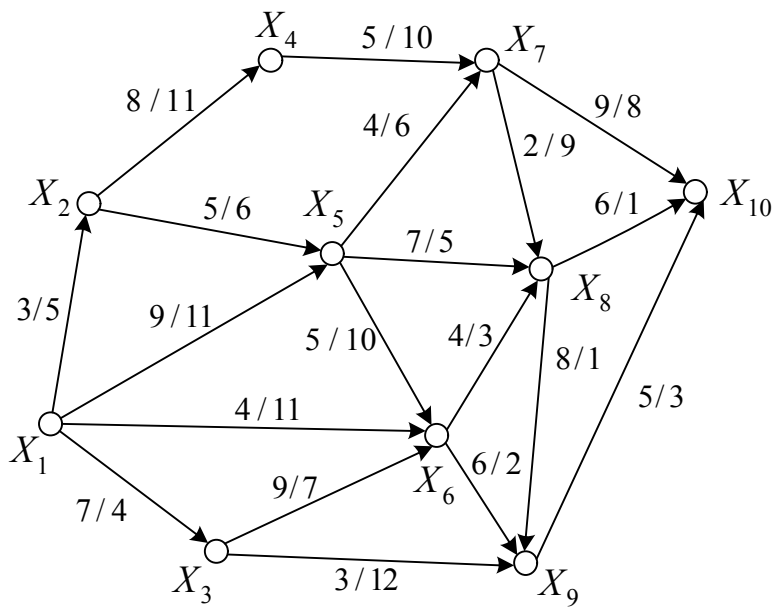


Рис. 2.28

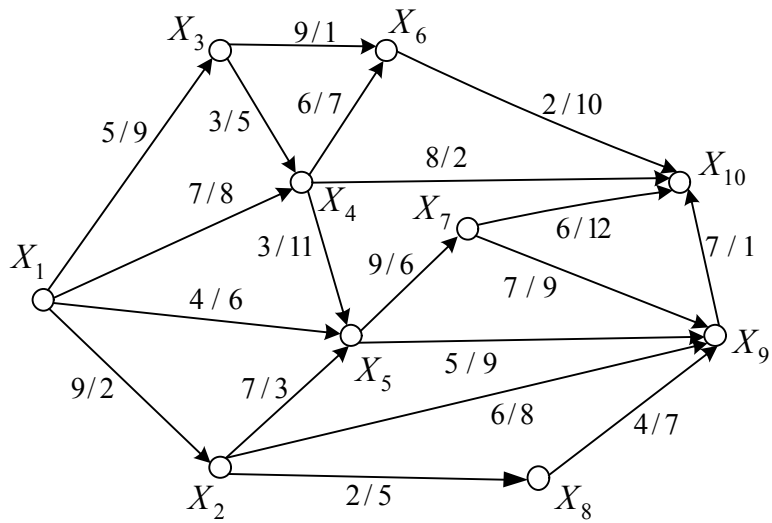


Рис. 2.29

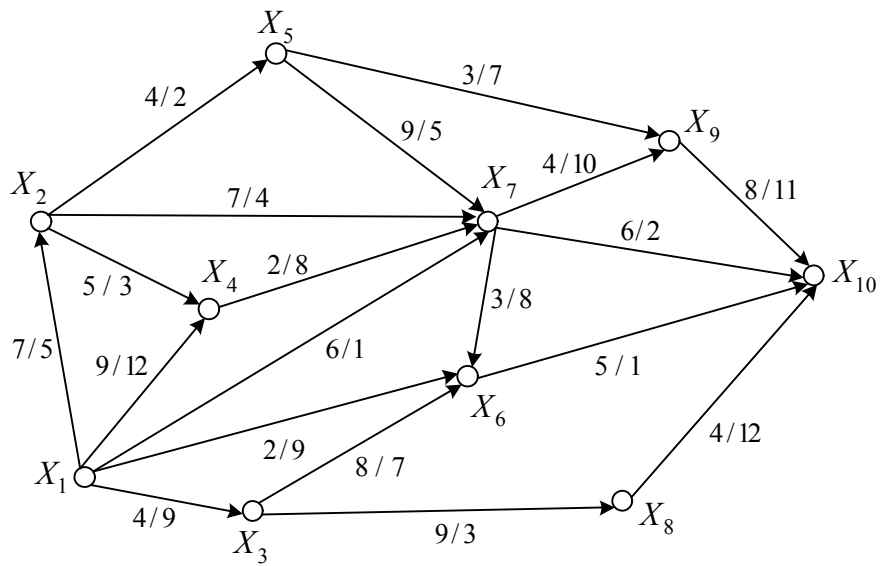


Рис. 2.30

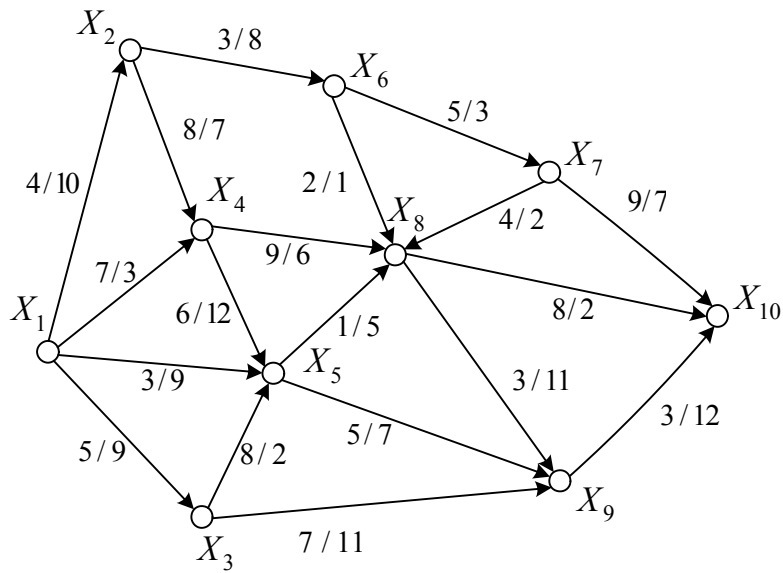


Рис. 2.31

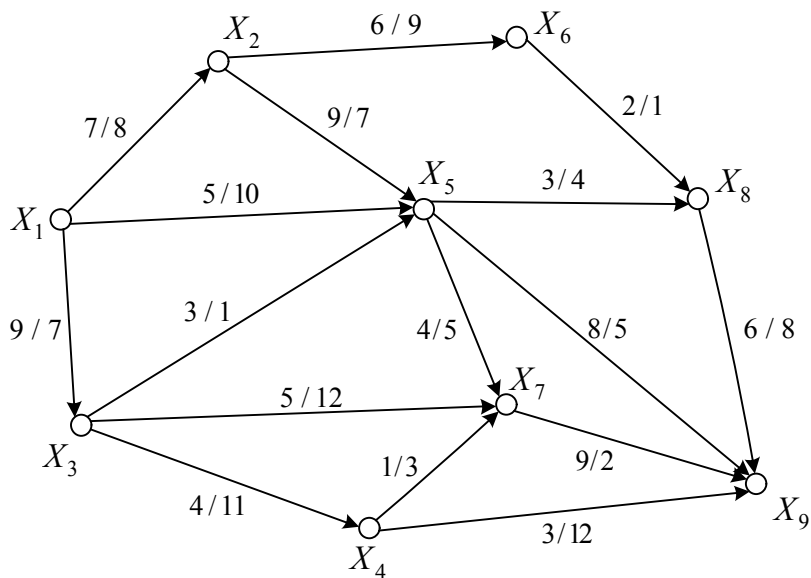


Рис. 2.32

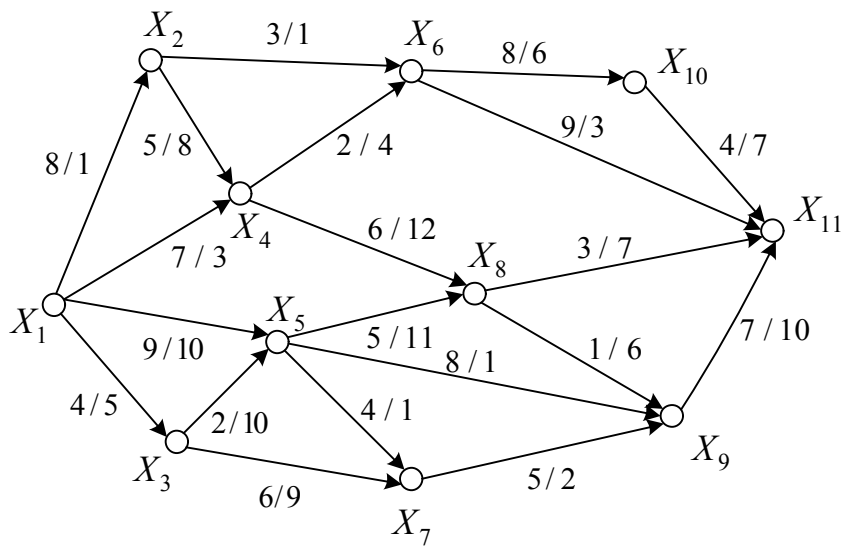


Рис. 2.33

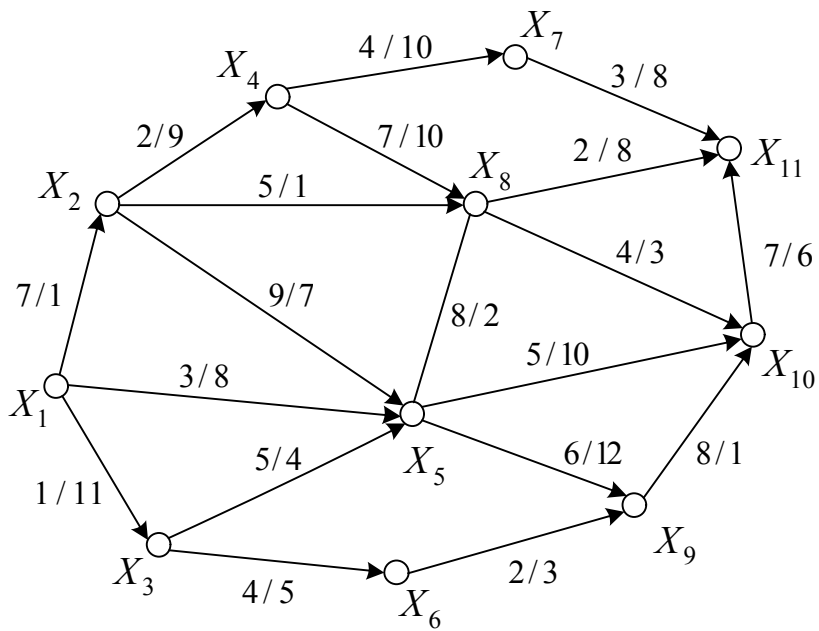


Рис. 2.34

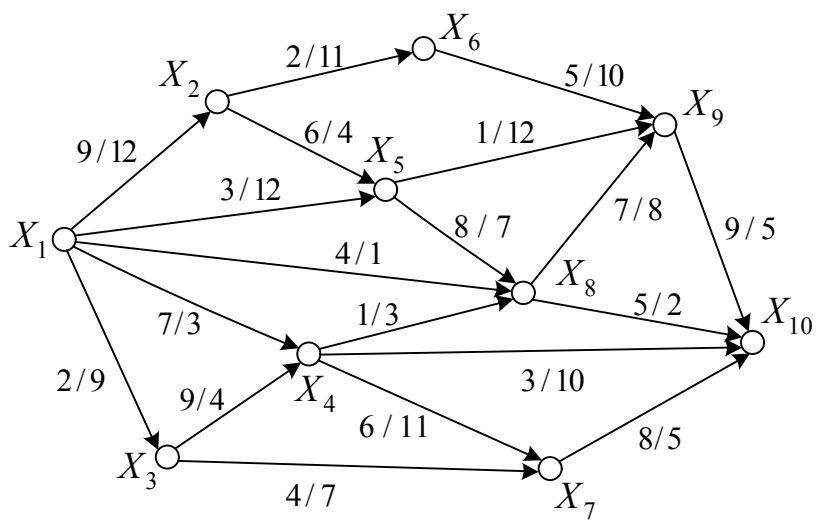


Рис. 2.35

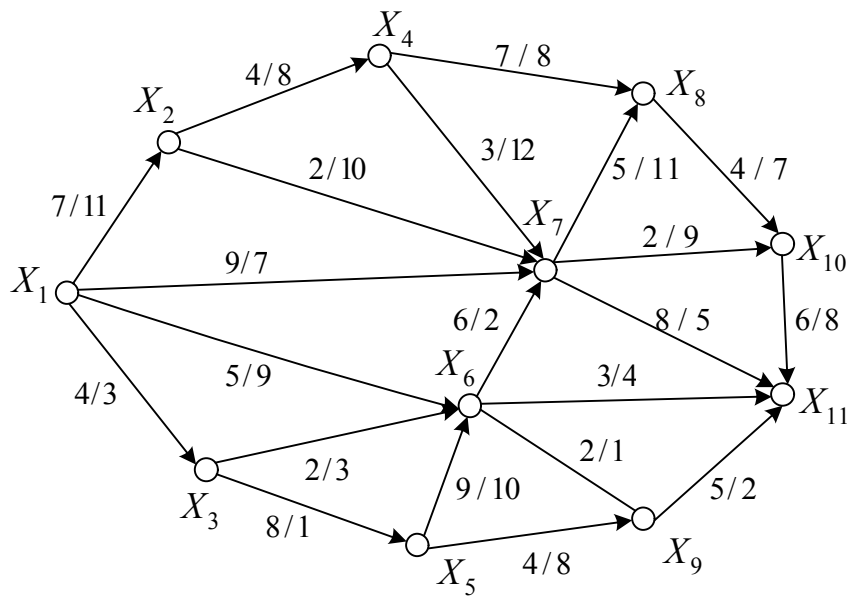


Рис. 2.36

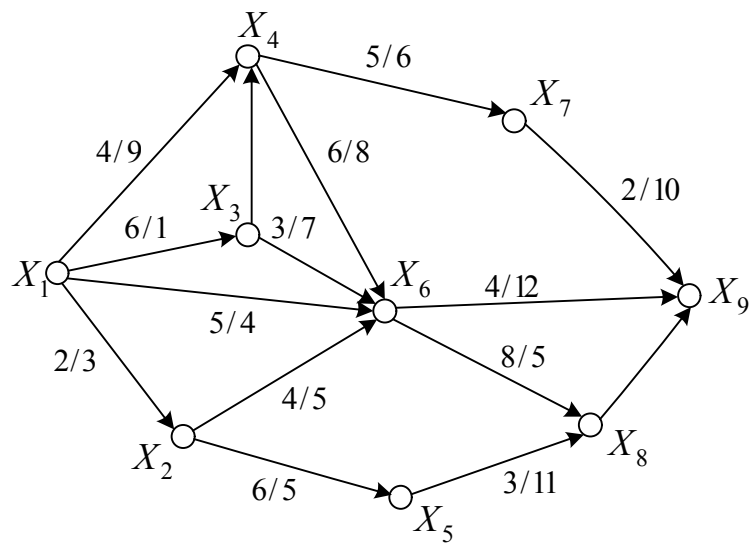


Рис. 2.37

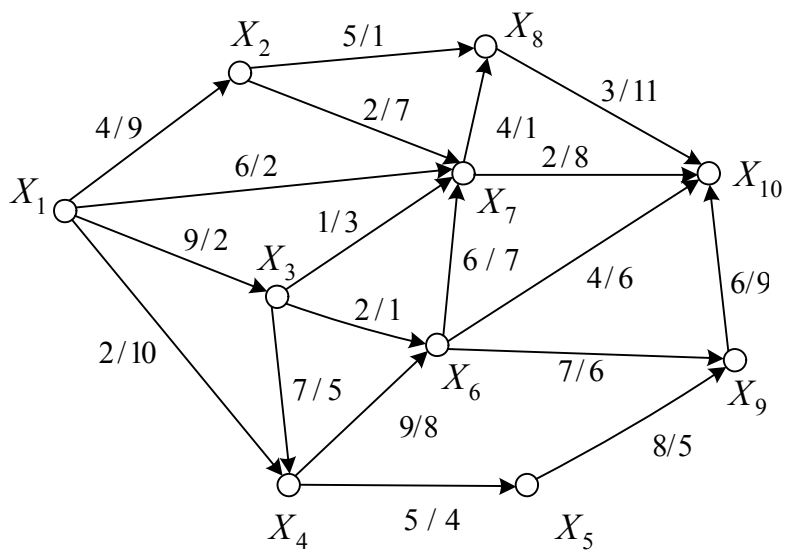


Рис. 2.38

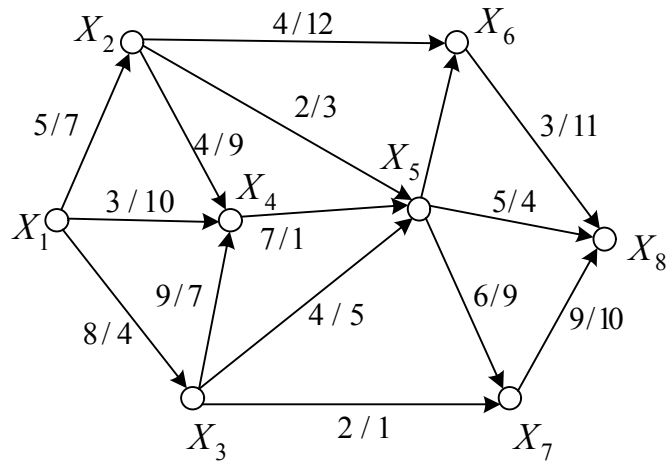


Рис. 2.39

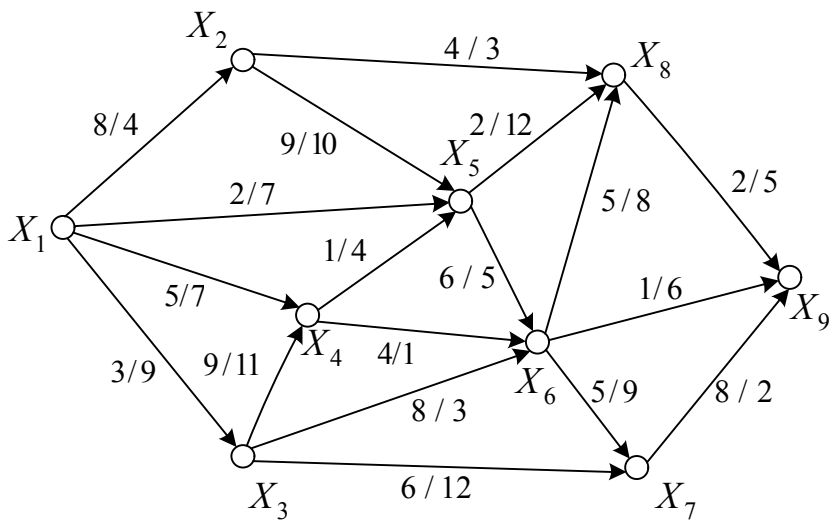


Рис. 2.40

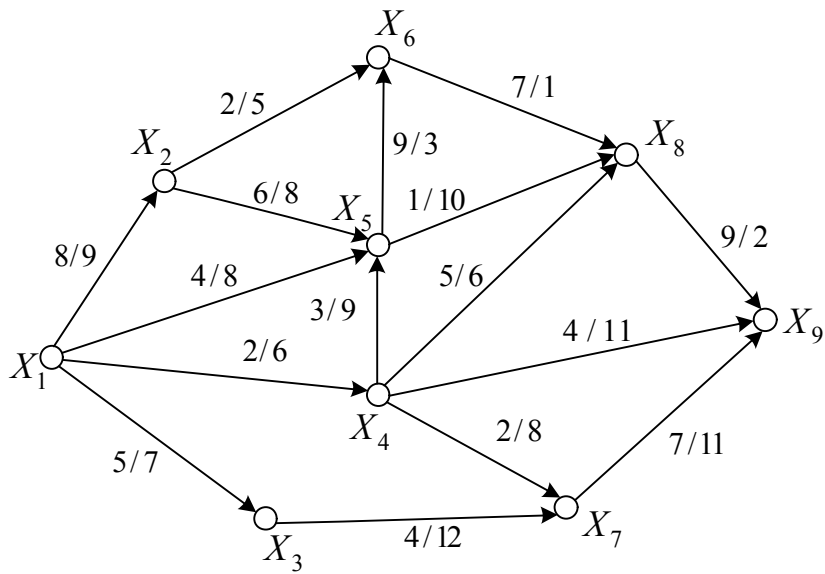


Рис. 2.41

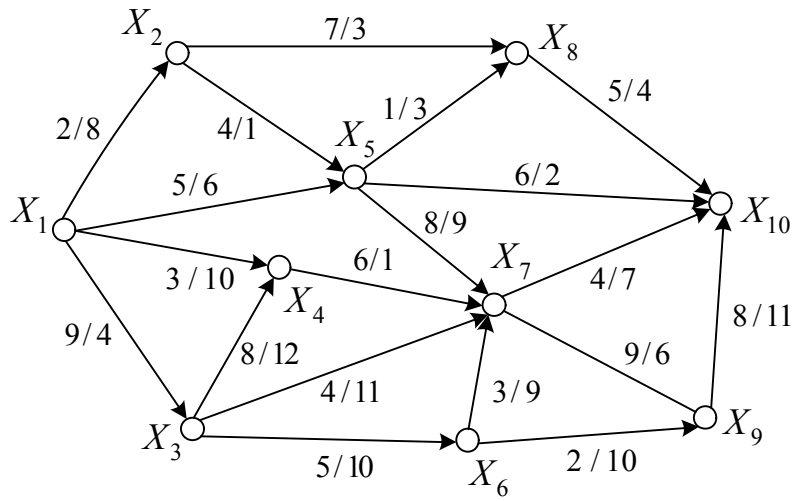


Рис. 2.42

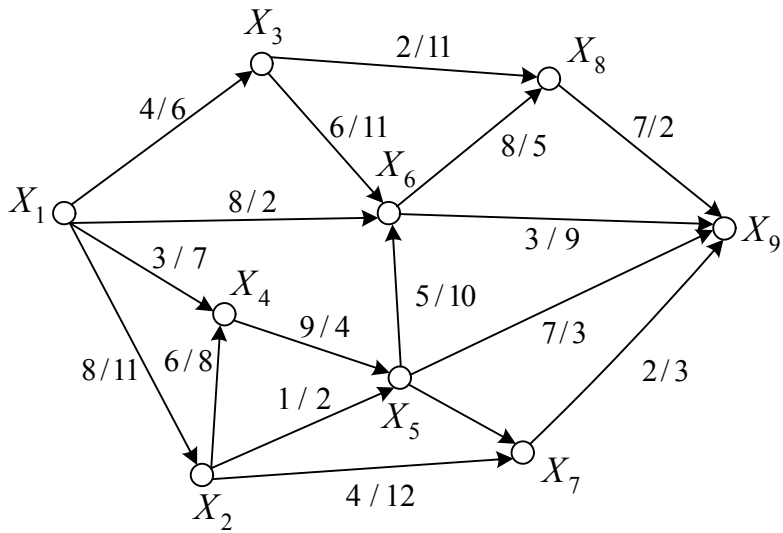


Рис. 2.43

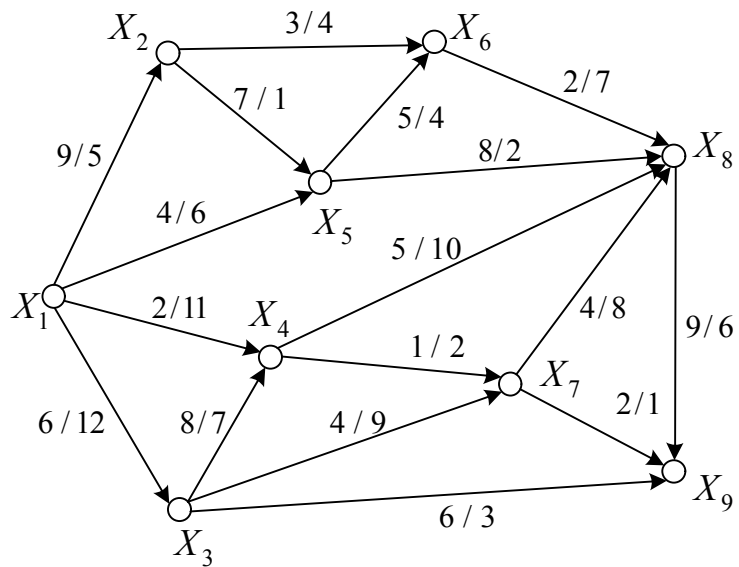


Рис. 2.44

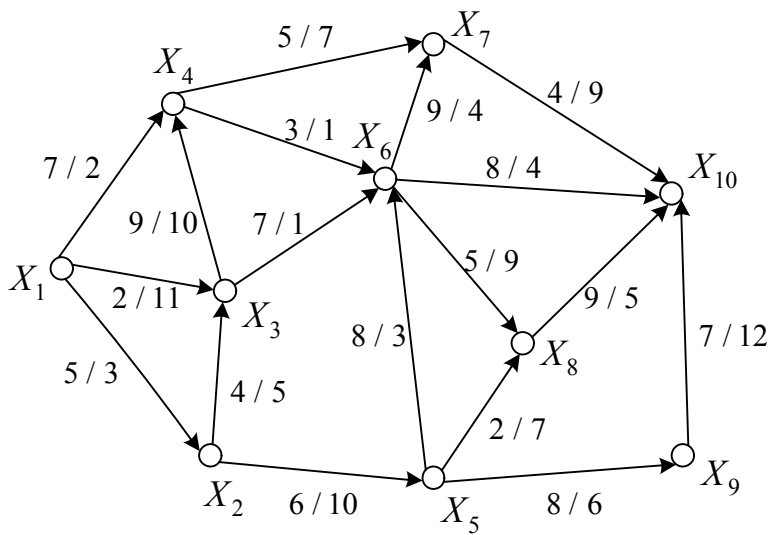


Рис. 2.45

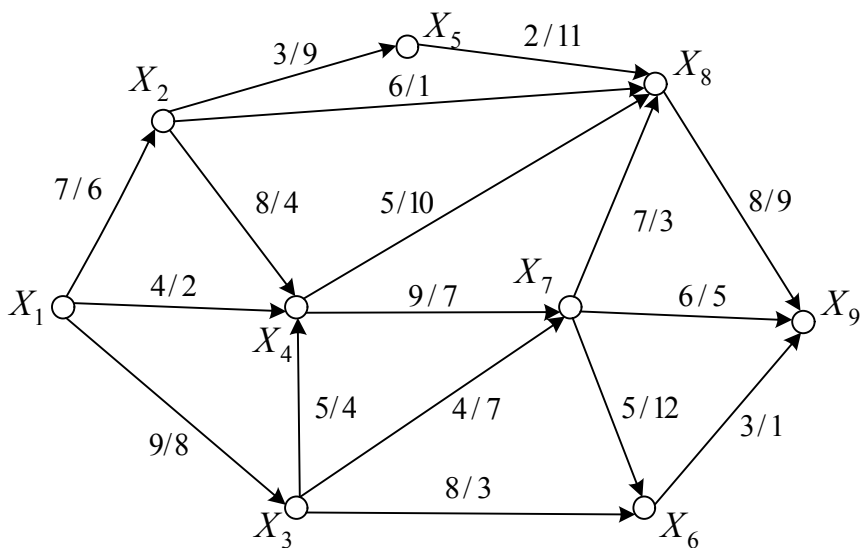


Рис. 2.46

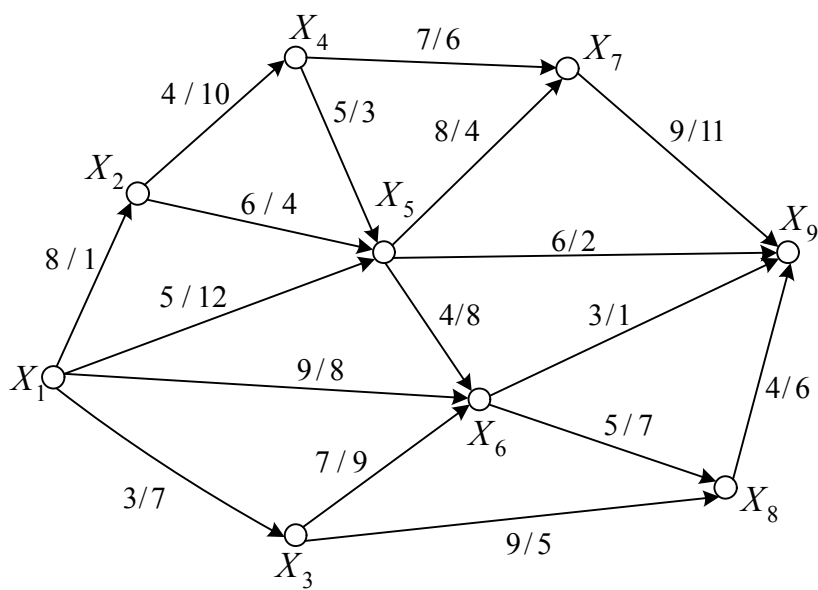


Рис. 2.47

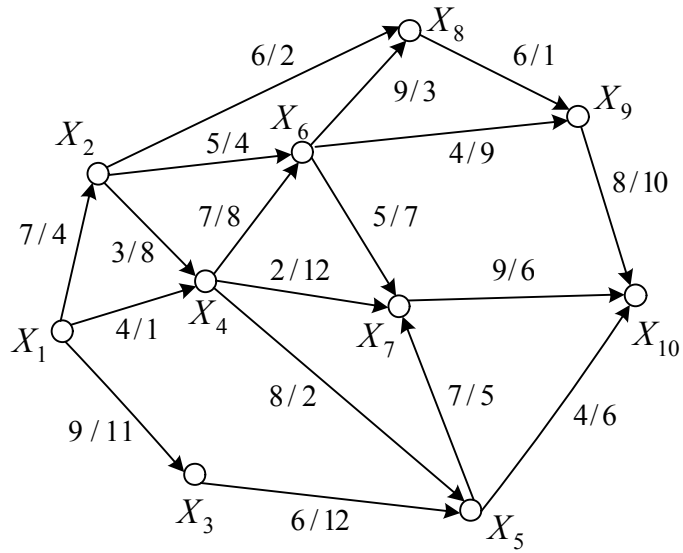


Рис. 2.48

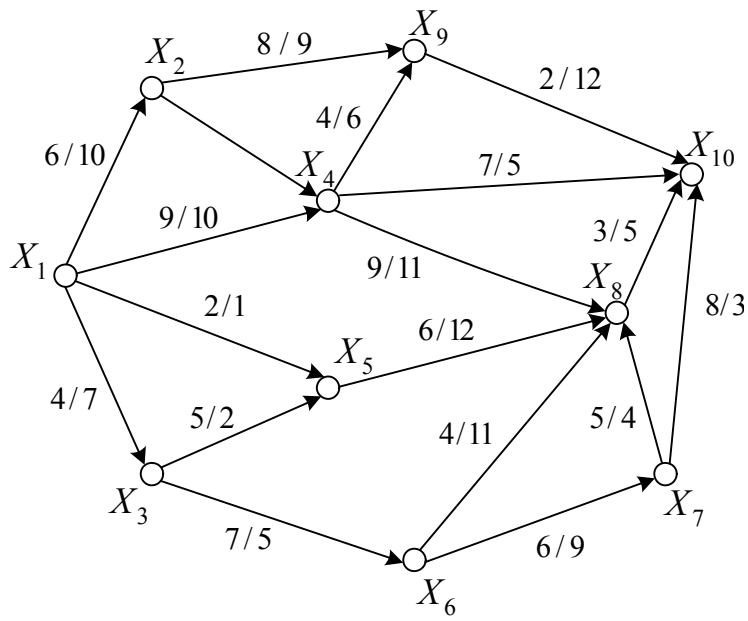


Рис. 2.49

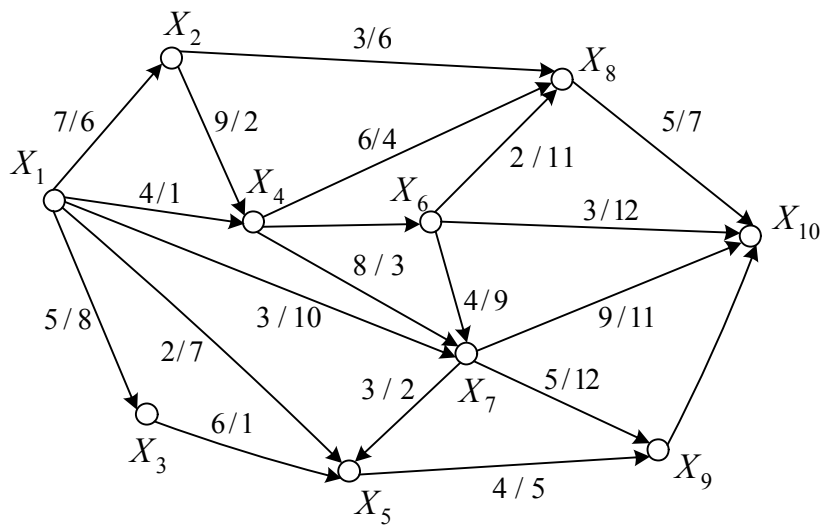


Рис. 2.50

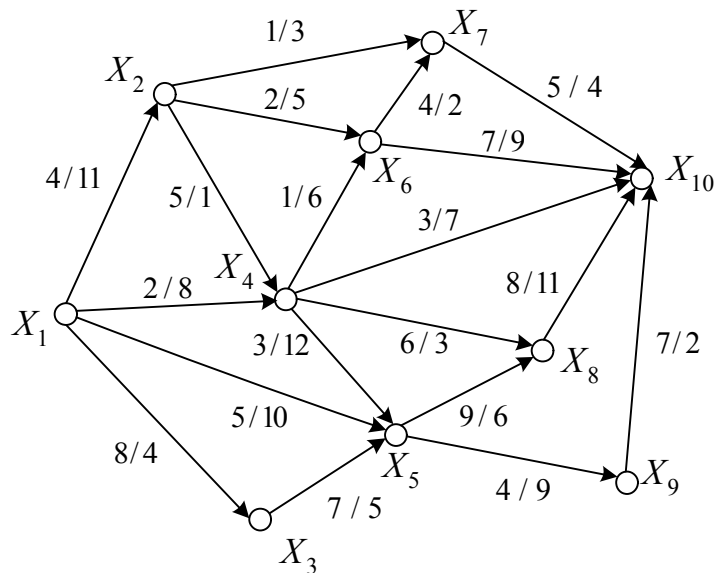


Рис. 2.51

Задание 3. Анализ сетей Петри

Сеть Петри задана графически (рис. 2.52 – 2.59). В табл. 2.2 в соответствии с вариантом и указанным номером рисунка приведены различные начальные маркировки сети.

Выполнить следующие действия:

1. Описать сеть аналитическим и матричным способами.
2. Проверить условия срабатывания каждого из переходов и найти новые маркировки, к которым приведет срабатывание соответствующих переходов, путем выполнения матричных преобразований.
3. Построить дерево достижимости заданной сети.
4. Проверить, является ли достижимой одна из маркировок, получаемых на четвертом шаге построения дерева, составив и решив матричные уравнения.

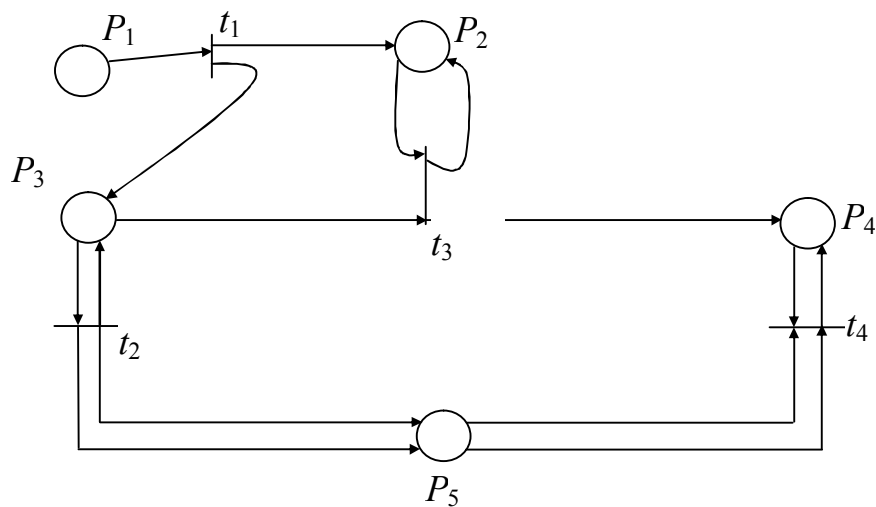


Рис. 2.52

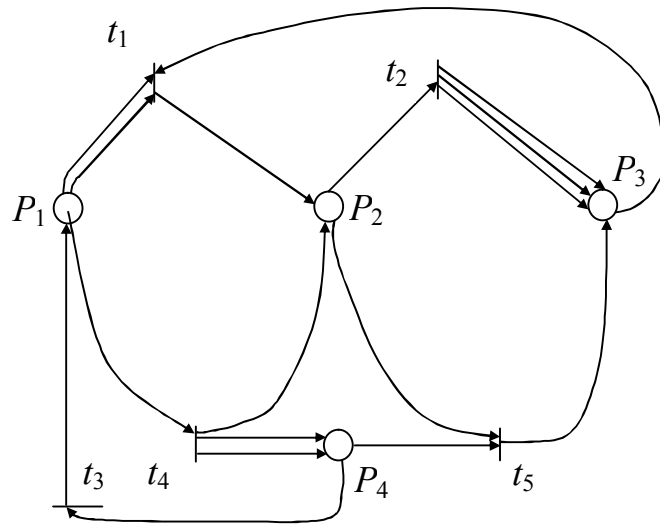


Рис. 2.53

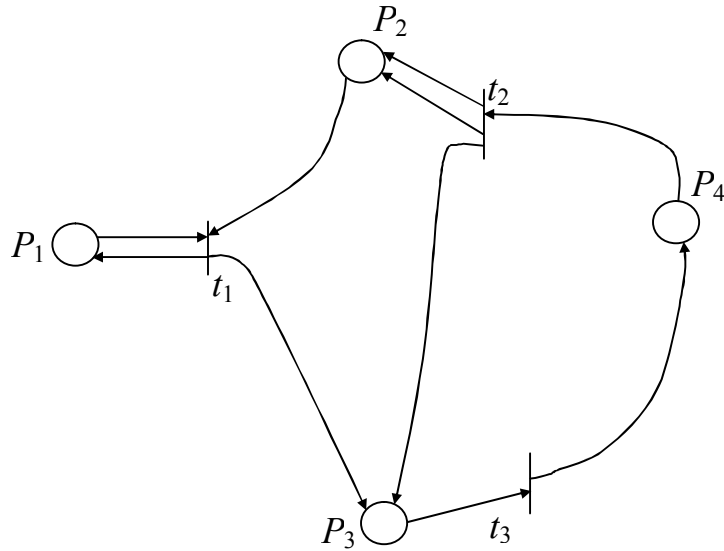


Рис. 2.54

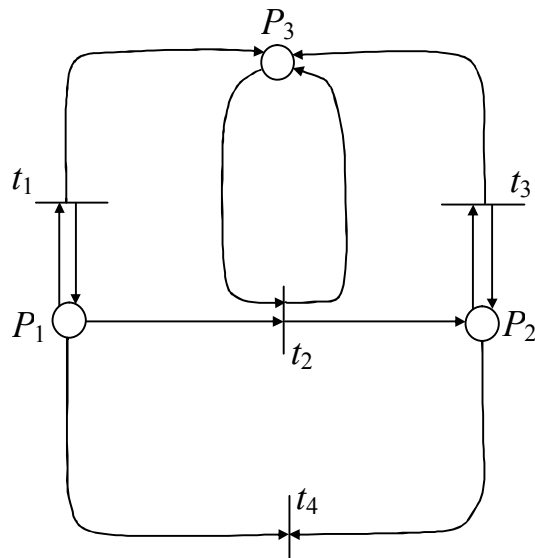


Рис. 2.55

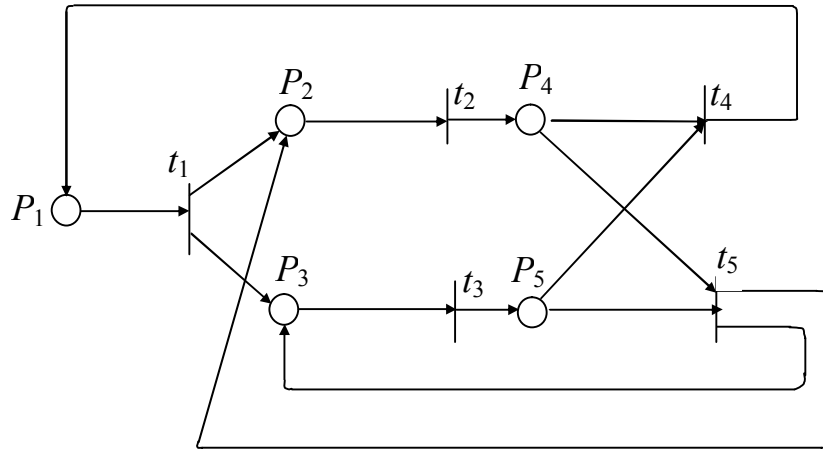


Рис. 2.56

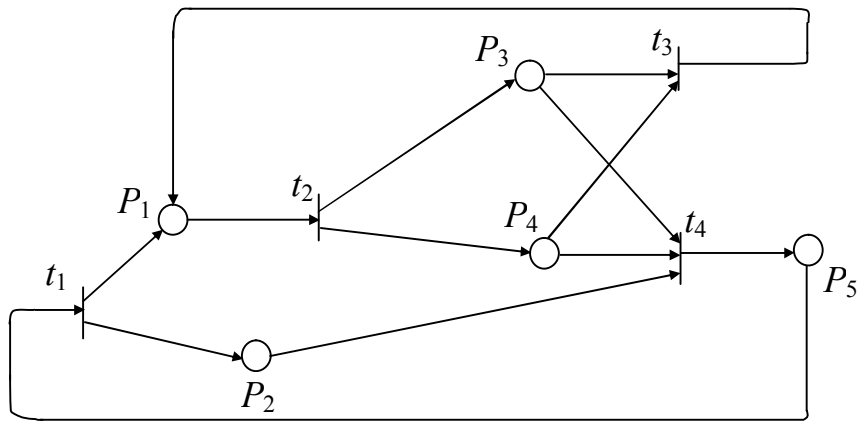


Рис. 2.57

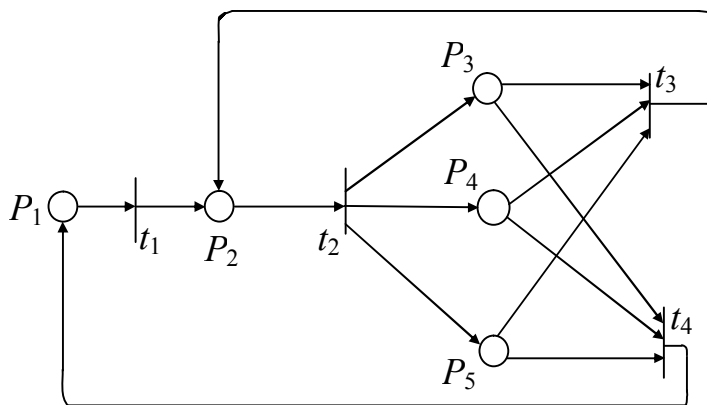


Рис. 2.58

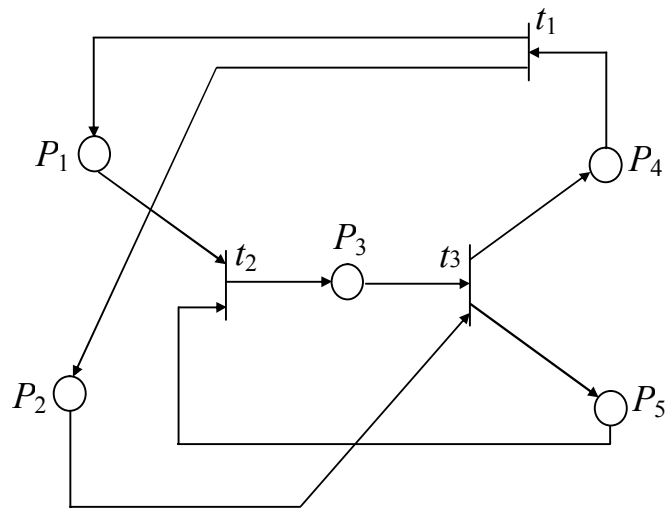


Рис. 2.59

Таблица 2.2

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
μ1	0	1	0	1	1	1	1	2	2	0	1	3	0	1	1	
μ2	1	2	2	2	3	1	2	2	1	2	3	1	1	2	0	
μ3	2	3	1	0	1	1	1	3	2	1	0	1	2	3	3	
μ4	3	1	3	4	0	2	1	1	0	1	1	2	1	1	2	
μ5	1	2	5	1	2	2	3	0	3	3	2	0	3	2	1	
№ рисунка	Рис. 2.52				Рис. 2.56				Рис. 2.57				Рис. 2.58			
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
μ1	3	2	1	0	3	1	0	2	1	3	1	3	1	3	2	
μ2	2	2	0	3	1	2	4	1	2	1	1	1	2	2	1	
μ3	2	3	2	1	0	1	1	3	4	3	2	1	3	2	3	
μ4	0	1	3	2	1	3	3	2	1	2	3	2	–	–	–	
μ5	1	0	1	1	2	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
№ рисунка	Рис. 2.58			Рис. 2.59			Рис. 2.58			Рис. 2.54			Рис. 2.55			

Задание 4. Математическая логика и теория автоматов

Конечный автомат задан графом, определенным в задании 1 контрольной работы. Вершины графа отождествляются с состояниями автомата таким образом, что множество состояний $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Переход автомата из одного состояния в другое осуществляется под воздействием множества входных сигналов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Переходы определяются законом отображения Γ вер-

шин графа, причем каждому переходу соответствует только одна из букв множества X . При задании графа эти буквы расставить произвольно.

Автомат позволяет вырабатывать выходные сигналы $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$:

y_1 – переход из состояния q_i в состояние q_i (петля);

y_2 – переход из состояния q_i в q_j при $i < j$;

y_3 – переход из состояния q_i в q_j при $i > j$.

Осуществить структурный синтез конечного автомата. Реализацию осуществить на элементах, указанных в табл. 2.3, в соответствии с номером варианта. Обязательной является минимизация реализуемых функций.

Таблица 2.3

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тип элементов	И НЕ	И ИЛИ НЕ	ИЛИ НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ	ИЛИ НЕ	ИЛИ НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ	ИЛИ НЕ
Тип триггера	RS	JK	T	RS	JK	D	RS	T	D	RS
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Тип элементов	И НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ	ИЛИ НЕ	И НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ	ИЛИ НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ
Тип триггера	D	JK	T	D	RS	RS	D	JK	T	D
№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Тип элементов	ИЛИ НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ	ИЛИ НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ	ИЛИ НЕ	И ИЛИ НЕ	И НЕ	ИЛИ НЕ
Тип триггера	RS	T	JK	RS	D	T	JK	RS	T	D

Рассмотрим пример перехода от графа, заданного аналитически, к аналитическому способу задания конечного автомата. Пусть в задаче 1 (контрольная работа №1) граф задан следующим образом:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\Gamma x_1 = \{x_2, x_3, x_5\}$, $\Gamma x_2 = \{x_1\}$, $\Gamma x_3 = \{x_2, x_4\}$, $\Gamma x_4 = \{x_1, x_3, x_5\}$, $\Gamma x_5 = \{x_1, x_5\}$.

При переходе к конечному автомату множество состояний $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$. Закон отображения состояний запишется следующим образом: $\Gamma q_1 = \{q_2(x_1/y_2), q_3(x_3/y_2), q_5(x_4/y_2)\}$, $\Gamma q_2 = \{q_1(x_3/y_3)\}$ (читается: автомат переходит из состояния q_2 в состояние q_1 , если на входе действует буква x_3 входного алфавита, при этом на выходе появляется буква y_3 выходного алфавита); $\Gamma q_3 = \{q_2(x_1/y_3), q_4(x_3/y_2)\}$; $\Gamma q_4 = \{q_1(x_2/y_3), q_3(x_1/y_3), q_5(x_4/y_2)\}$; $\Gamma q_5 = \{q_1(x_2/y_3), q_5(x_3/y_1)\}$.

Обобщенная таблица переходов и выходов соответствующего конечного автомата представлена в табл. 2.4.

Таблица 2.4

X	Q	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
X_1		q_2/y_2	—	q_2/y_3	q_3/y_3	—
X_2		—	—	—	q_1/y_3	q_1/y_3
X_3		q_3/y_2	q_1/y_3	q_4/y_2	—	q_5/y_1
X_4		q_5/y_2	—	—	q_5/y_2	—

Задание 5. Математические основы теории сигналов

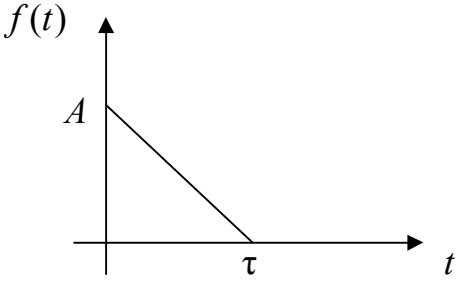
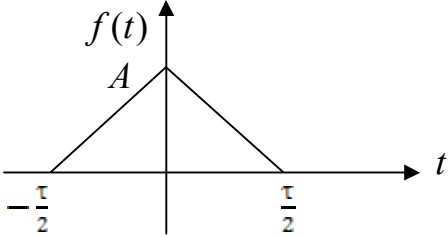
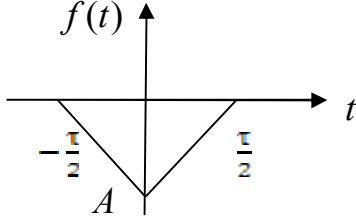
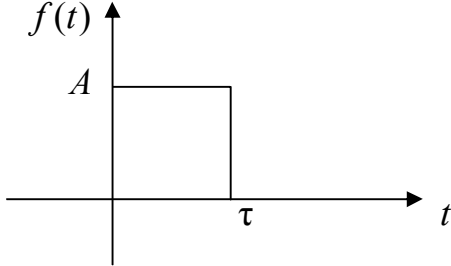
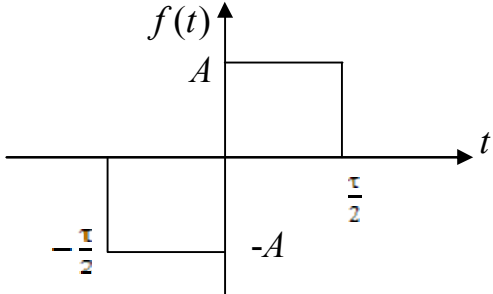
Исследование характеристик непериодических сигналов

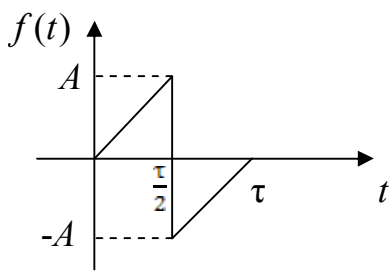
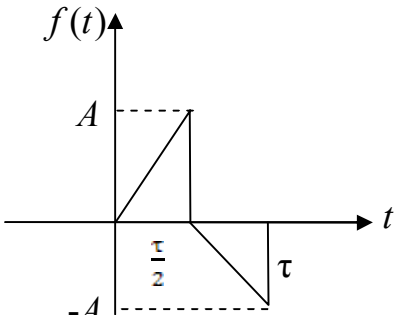
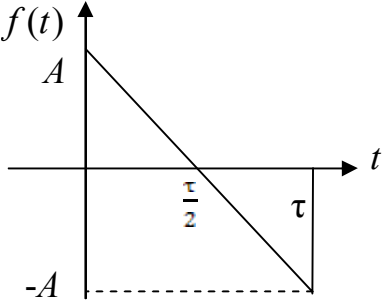
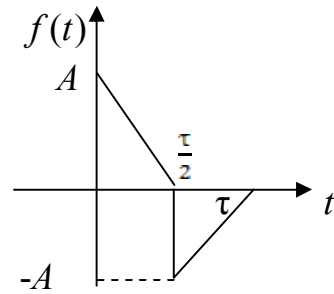
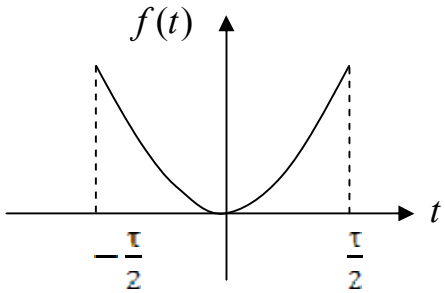
В табл. 2.5 приведены аналитическое и графическое представления разного рода непериодических сигналов $f(t)$. Для заданного варианта необходимо последовательно выполнить следующие действия:

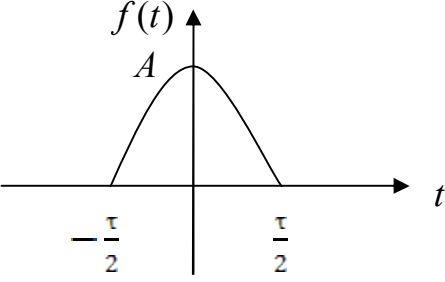
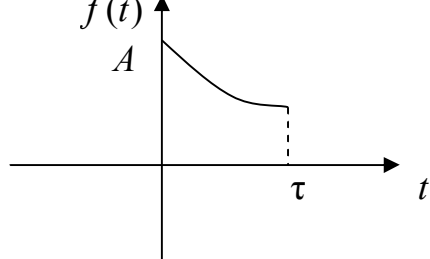
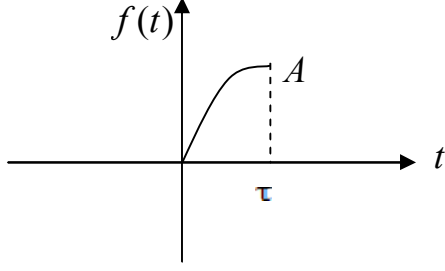
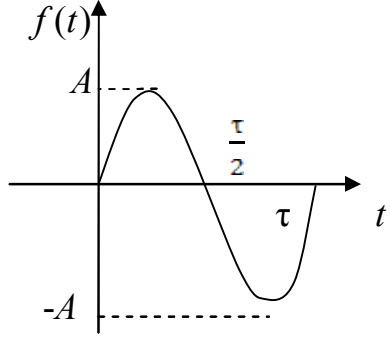
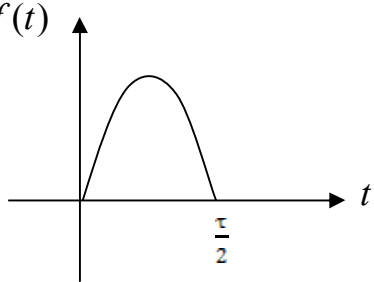
1. Рассчитать и построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала в полосе частот, ограничивающей модуль АЧХ на уровне не менее 10 % от максимального значения.
2. Вычислить автокорреляционную функцию сигнала.
3. Построить зависимость ширины спектра от длительности импульса.
4. Аппроксимировать сигнал системой ортогональных полиномов Лежандра.

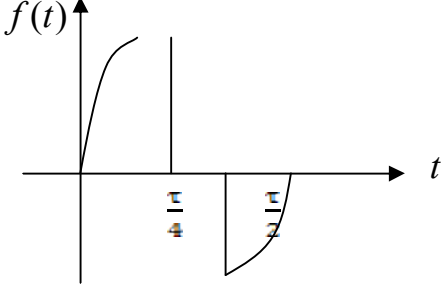
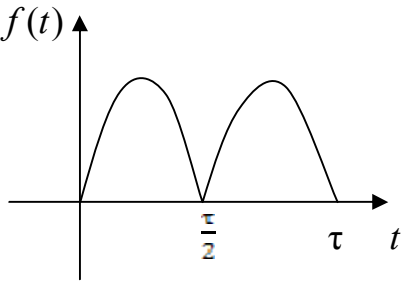
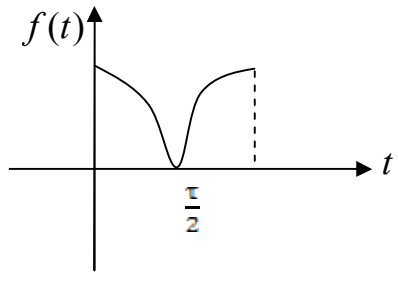
Таблица 2.5

№ варианта	Аналитическое описание сигнала	Графическое представление
1	2	3
1	$f(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau} & \text{при } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
2	$f(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau} & \text{при } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	

1	2	3
3	$f(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & \text{при } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
4	$f(t) = \begin{cases} A - t & \text{при } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
5	$f(t) = \begin{cases} t - A & \text{при } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
6	$f(t) = \begin{cases} A & \text{при } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
7	$f(t) = \begin{cases} A & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right], \\ -A & \text{при } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, 0\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	

1	2	3
8	$f(t) = \begin{cases} 2A \frac{t}{\tau} & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right], \\ 2A \left(\frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{при } t \in \left[\frac{\tau}{2}, \tau\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
9	$f(t) = \begin{cases} 2A \frac{t}{\tau} & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right], \\ 2A \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{\tau}\right) & \text{при } t \in \left[\frac{\tau}{2}, \tau\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
10	$f(t) = \begin{cases} 2A \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{\tau}\right) & \text{при } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
11	$f(t) = \begin{cases} 2A \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{\tau}\right) \frac{t}{\tau} & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right], \\ 2A \left(\frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{при } t \in \left[\frac{\tau}{2}, \tau\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
12	$f(t) = \begin{cases} At^2 & \text{при } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	

1	2	3
13	$f(t) = \begin{cases} A(1-t^2) & \text{при } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
14	$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{при } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
15	$f(t) = \begin{cases} A(1-e^{-\alpha t}) & \text{при } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
16	$f(t) = \begin{cases} A \sin \frac{2\pi t}{\tau} & \text{при } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
17	$f(t) = \begin{cases} A \sin \frac{2\pi t}{\tau} & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	

1	2	3
18	$f(t) = \begin{cases} A \sin \frac{2\pi t}{\tau} & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{4}\right], t \in \left[\frac{3\tau}{4}, \tau\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
19	$f(t) = \begin{cases} A \left \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{4}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
20	$f(t) = \begin{cases} A \left \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right & \text{при } t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right], \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	

Исследование характеристик периодических сигналов

Дополнить заданный непериодический сигнал такими же сигналами, периодически следующими через некоторый интервал времени T , приняв:

а) $T = \tau$, б) $T = 2\tau$, в) $T = 3\tau$, г) $T = 4\tau$.

Для получившейся периодической последовательности выполнить следующие задания:

1. Рассчитать и построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала.
2. Вычислить распределение мощности по гармоникам. Определить ширину спектра сигнала.
3. Построить зависимость ширины спектра сигнала от длительности импульса.

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Курсовая работа включает в себя три задания, соответствующие разделам «Математическое описание линейных систем» и «Методы оптимизации», и выполняется в шестом семестре. Решение задач должно сопровождаться подробными пояснениями. Там где это необходимо, должна быть выполнена графическая интерпретация решения.

Задание 1. Математическое описание линейных систем

Передаточная функция системы имеет вид

$$W(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}.$$

Значения коэффициентов a_i и b_j для различных вариантов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ вар.	b_2	b_1	b_0	a_3	a_2	a_1	a_0	№ вар.	b_2	b_1	b_0	a_3	a_2	a_1	a_0
1	1260	1260	0	1	19	104	140	25	0	700	0	1	18	87	70
2	0	1890	945	1	20	121	210	26	36	126	108	1	8	19	12
3	0	648	1296	1	18	99	162	27	0	840	840	1	15	71	105
4	0	27	54	1	13	39	27	28	0	72	108	1	14	49	36
5	0	1400	700	1	19	104	140	29	0	84	84	1	15	68	84
6	0	960	1440	1	16	76	96	30	0	1440	1440	1	17	92	160
7	84	126	42	1	14	61	84	31	180	450	270	1	18	101	180
8	0	800	800	1	17	80	100	32	0	144	288	1	10	27	18
9	0	3528	3528	1	24	191	504	33	2880	7200	4320	1	23	166	360
10	0	420	630	1	18	107	210	34	0	96	48	1	9	26	24
11	0	432	0	1	19	114	216	35	0	1440	1440	1	17	90	144
12	360	720	270	1	15	59	45	36	0	486	0	1	18	99	162
13	1296	3240	1944	1	19	114	216	37	0	1008	1512	1	18	101	168
14	0	3600	7200	1	22	157	360	38	0	80	160	1	19	98	80
15	0	54	27	1	16	69	54	39	0	126	126	1	18	95	126
16	0	540	0	1	19	108	180	40	0	600	0	1	21	140	300
17	0	168	84	1	11	31	21	41	0	3456	3456	1	23	174	432
18	0	1800	1800	1	21	128	180	42	0	3840	0	1	24	188	480
19	0	70	35	1	18	87	70	43	0	1120	0	1	19	104	140
20	0	540	810	1	16	69	54	44	0	2400	2400	1	21	134	240
21	192	576	432	1	15	62	48	45	0	72	0	1	7	14	8
22	240	360	120	1	12	44	48	46	0	1800	1800	1	19	110	200
23	0	540	270	1	13	52	60	47	0	24	24	1	9	26	24
24	378	945	567	1	16	81	126	48	0	180	270	1	15	56	60

№ вар.	b_2	b_1	b_0	a_3	a_2	a_1	a_0	№ вар.	b_2	b_1	b_0	a_3	a_2	a_1	a_0
49	0	1200	0	1	18	95	150	70	0	3150	4725	1	24	185	450
50	864	432	0	1	23	174	432	71	0	96	144	1	13	44	32
51	0	486	486	1	18	99	162	72	0	360	180	1	14	49	36
52	0	3200	0	1	22	152	320	73	0	224	336	1	13	44	32
53	0	672	1344	1	15	68	96	74	0	2880	1440	1	22	157	360
54	0	2160	1080	1	20	124	240	75	0	4320	4320	1	23	174	432
55	0	2160	4320	1	23	166	360	76	2400	2400	600	1	19	118	240
56	0	1344	2016	1	18	104	192	77	0	50	75	1	8	17	10
57	0	1800	1800	1	18	101	180	78	0	882	441	1	16	81	126
58	1500	3750	2250	1	18	95	150	79	960	1920	960	1	20	116	160
59	0	720	1080	1	16	73	90	80	0	5040	2520	1	27	242	720
60	1008	504	0	1	21	146	336	81	48	48	12	1	8	19	12
61	630	945	0	1	18	107	210	82	0	1120	1120	1	17	92	160
62	2430	6075	3645	1	22	147	270	83	0	1800	2700	1	24	185	450
63	0	120	120	1	9	26	24	84	0	1890	2835	1	22	147	270
64	1296	2592	972	1	23	174	432	85	0	224	336	1	17	86	112
65	0	8	12	1	7	14	8	86	0	324	648	1	16	69	54
66	0	600	300	1	21	140	300	87	0	216	432	1	13	39	27
67	0	1680	840	1	20	124	240	88	0	126	63	1	16	81	126
68	0	504	756	1	13	54	72	89	0	210	315	1	18	87	70
69	0	420	630	1	12	47	60	90	900	450	0	1	20	109	90

Выполнить следующие действия:

1. Записать дифференциальное уравнение системы. Найти характеристическое уравнение и его корни.

2. Разложить передаточную функцию на сумму простых слагаемых. Вычислить импульсную переходную характеристику $w(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа и переходную характеристику $h(t)$.

3. В пакете Matlab построить характеристики $w(t)$ и $h(t)$, сравнить с расчетными.

4. Построить асимптотические логарифмические амплитудно-частотную (ЛАЧХ) и фазочастотную (ЛФЧХ) характеристики.

5. Построить частотные характеристики в пакете Matlab, сравнить их с асимптотическими.

6. Записать уравнения состояния в нормальной форме, изобразить схему моделирования.

7. Записать уравнения состояния в канонической форме, изобразить схему моделирования.

8. Решить уравнения состояния в нормальной и канонической формах. Получить аналитическое выражение для переходного процесса $y(t)$, если на входе действует сигнал $u(t) = a_2 \cdot 1(t)$, а начальные условия имеют вид $y(0) = 0, 1a_2; \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$.

9. Проверить, одинаково ли значение коэффициента усиления по передаточной функции, переходной характеристике, моделям в пространстве состояний, аналитической записи импульсной переходной характеристики.

Задание 2. Линейное программирование

Условие задачи $\max(\min) \left\{ F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \mid \sum_{j=1}^m a_{ji} x_i \{=, \geq, \leq\} b_j, i = \overline{1, m}, x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\} = \max(\min) \left\{ F(x) = C^T x \mid Ax \{=, \geq, \leq\} B, x \geq 0 \right\}$ задается матрицей коэффициентов. Количество переменных x $n = 3$, количество ограничений $m = 4$.

Общий вид матрицы приведен на рис. 3.1.

• • • C	• F_0
• • • • A	B

Рис. 3.1

Первая строка определяет коэффициенты c_i функции цели, знак элемента F_0 определяет характер экстремума. Если $F_0 \geq 0$, то следует находить максимальное значение функции $F(x)$, если $F_0 < 0$, то находится минимальное значение функции $F(x)$. Вектор B задает правые части ограничений. Коэффициенты второй строки соответствуют равенству (=), коэффициенты третьей строки соответствуют ограничению типа \geq , коэффициенты двух последних строк соответствуют ограничениям типа \leq . Задаются также ограничения на знак всех переменных $x_i \geq 0, i = \overline{1, 3}$.

Ниже представлены матрицы коэффициентов, которые выбираются в соответствии с номером варианта (табл. 3.2).

1. Составить математическую модель задачи. Найти оптимальный план x^* и экстремальное значение функции.

2. Построить задачу, двойственную к исходной, решить ее и сравнить решения прямой и двойственной задач.

3. Если решение задачи не является целочисленным, получить целочисленное решение путем введения дополнительных ограничений по методу Гомори.

Таблица 3.2

№ вар.	Матрица коэффициентов				№ вар.	Матрица коэффициентов			
1	-5	-3	3	15	2	3	1	-2	-3
	3	-3	-2	-6		1	0	-1	9
	1	-2	-4	-27		0	0	-1	-12
	5	-4	4	30		2	1	0	-6
	0	-2	-2	3		-4	4	-1	-18

№ вар.	Матрица коэффициентов	№ вар.	Матрица коэффициентов
3	-2 2 -3 9 4 -3 0 15 -1 -4 -3 -27 -4 -1 3 -15 3 -4 -1 -3	13	-1 -2 2 -12 -4 -3 5 -15 2 -1 3 9 -5 5 1 -9 0 3 1 24
4	0 5 1 -12 -1 -2 2 0 -4 2 -1 -24 2 -5 0 -9 -5 2 5 6	14	2 -1 1 -3 0 -1 0 3 1 2 4 21 0 2 3 24 1 5 0 27
5	2 0 -2 0 5 -2 -5 -3 -3 5 4 3 3 -4 1 15 0 2 0 9	15	4 -4 2 -21 -4 4 4 3 -3 0 -2 -12 0 -4 2 -15 -2 -1 0 -15
6	-5 3 0 3 3 -4 -3 -3 -3 2 3 -6 4 0 -2 12 -4 2 -4 -27	16	-3 -3 -5 30 2 4 -5 -3 0 3 2 12 2 -1 4 15 1 -2 -1 -12
7	1 3 -5 12 2 4 -2 21 -3 0 -4 -24 5 0 -3 -6 -1 3 -2 -15	17	-3 -5 -2 27 -4 -5 -2 -36 5 -3 0 18 5 -5 -3 -3 -3 -2 -4 -18
8	-1 4 0 3 -4 -1 5 -12 -2 4 -4 -18 -1 2 2 -6 2 -4 5 9	18	-2 -3 -3 12 -2 2 3 21 -4 0 -4 -21 0 0 1 3 -4 -5 -5 -57
9	5 5 -5 -24 -2 -3 4 3 3 3 -2 3 -2 0 0 -3 4 -4 -2 -6	19.	-3 5 -2 0 -3 0 -4 -21 4 1 -4 18 0 2 0 -3 0 0 -2 -21
10	-2 -4 -1 21 -3 0 2 -3 -4 -5 0 -24 -3 2 3 3 0 5 -2 3	20	4 0 5 -27 1 -2 3 12 -1 -1 -1 -18 4 3 2 15 1 -2 3 -3
11.	0 -4 3 15 -5 -2 1 -33 -3 -5 -5 -51 -2 0 -4 -33 5 0 2 30	21	2 -2 -4 -3 2 -4 4 15 1 4 -2 -6 4 -5 0 -6 -2 4 -1 18
12	2 -1 2 -12 2 -3 5 18 2 -3 4 12 -3 5 -2 12 5 -3 0 -3	22	1 -4 -4 18 -1 3 2 21 -5 1 4 3 1 2 -3 -15 0 0 1 15

№ вар.	Матрица коэффициентов	№ вар.	Матрица коэффициентов
23	-1 -5 0 9 -4 -5 0 -39 -2 2 4 0 -4 0 -5 -42 -5 0 1 -12	33	-5 -5 0 33 1 -2 3 3 0 0 4 9 -4 -2 2 -15 -5 5 4 15
24	3 -3 -4 12 1 1 0 12 -5 2 5 9 3 2 1 18 -1 -4 5 0	34	3 -4 4 -12 3 5 -5 6 4 -4 -5 -24 -2 3 -2 -3 1 0 0 -6
25	1 -5 -3 24 1 -1 -4 -9 -2 4 5 36 0 3 1 9 4 -4 -2 -18	35	3 0 3 -6 1 1 2 24 0 -4 -5 -30 1 -1 -3 -21 1 4 -2 3
26	0 -3 0 6 0 1 3 15 -3 1 4 6 -5 -4 0 -21 3 4 2 30	36	4 4 3 -45 2 0 -4 9 -3 -2 0 -3 3 -3 3 6 2 0 0 15
27	0 3 0 6 -4 -5 -1 -33 3 -1 0 -9 0 2 0 18 -3 0 -5 -24	37	0 -5 0 15 4 -3 0 3 1 4 2 27 -1 -4 5 6 0 2 3 0
28	5 2 1 -12 3 -3 3 3 -1 -4 -5 -42 0 -3 3 0 -1 -1 0 -3	38	4 1 3 -18 -1 1 0 12 2 2 3 9 -5 0 4 -3 1 0 -2 12
29	1 0 -3 0 -5 -4 -2 -24 3 0 -1 21 -1 -4 3 -6 4 -5 -3 -15	39	-1 3 -5 15 3 -3 -1 -9 3 -1 -5 6 2 -3 -2 0 2 3 3 21
30	0 3 1 -12 -4 0 4 6 -3 3 0 0 5 -2 2 30 5 -3 -5 -9	40	-5 -5 -1 48 2 2 -1 -6 2 2 -2 6 2 4 2 24 -1 3 3 15
31	-5 -5 4 9 0 -4 -2 -18 -5 -2 4 -15 1 -5 -5 -33 3 5 -5 9	41	5 3 2 -42 -2 -1 -5 -27 -2 -1 -5 -12 -2 0 1 0 0 2 0 0
32	1 -1 1 -18 -1 -5 4 -18 2 4 5 18 2 2 4 21 -5 0 0 -9	42	1 3 5 -33 1 -3 -3 -24 3 0 4 30 -2 -2 1 6 3 -3 1 9

№ вар.	Матрица коэффициентов	№ вар.	Матрица коэффициентов
43	-2 -4 -1 21 0 4 -2 -9 -4 4 4 12 -1 5 0 3 -3 0 0 -12	53	-1 0 -4 27 2 2 -4 6 3 -4 0 -18 -4 -4 1 -36 0 -4 -4 -27
44	-4 0 -4 18 -4 1 4 12 -4 4 2 21 5 -5 -5 -21 -1 1 0 -6	54	1 5 -5 -15 0 0 -5 0 -4 4 -3 -3 0 -2 -2 -9 0 -5 -4 -18
45	4 0 5 -42 -1 -1 4 -6 -5 0 -4 -39 4 5 0 42 5 0 0 12	55	1 1 -4 6 -2 -3 5 -3 5 -3 4 12 0 4 -5 12 -1 4 5 33
46	-4 -2 0 15 0 2 3 0 -5 3 -4 -9 5 4 1 33 0 4 -2 -9	56	-4 -5 2 18 5 3 -2 27 3 3 3 30 0 0 0 -6 -2 -4 4 -18
47	5 4 5 -36 -4 1 0 -15 -2 -5 4 -9 4 -2 2 9 0 5 -1 12	57	-3 3 0 -3 -4 0 -2 -21 0 3 -2 3 5 5 -4 18 -2 -4 -5 -18
48	-5 0 -1 33 -3 5 -5 -21 0 5 3 21 -3 4 0 18 -1 1 4 12	58	5 -4 3 3 0 1 5 9 4 4 -4 18 4 4 -3 27 0 -3 5 3
49	-1 -5 -3 12 -5 4 -1 -3 -5 0 5 -9 0 -5 -4 -42 -4 5 2 9	59	5 -2 0 6 5 1 5 36 4 3 -1 33 0 -2 3 3 -3 3 3 18
50	-2 4 1 -9 1 0 4 15 -4 5 -2 -3 1 -1 -2 9 4 3 4 36	60	0 3 1 -6 1 1 1 -6 -3 -1 -3 -15 3 -1 4 9 -4 -4 3 -12
51	-5 5 -2 15 4 -1 5 24 -5 -5 2 -9 5 2 4 24 0 1 -2 3	61	-4 0 4 9 3 0 0 9 0 0 0 -12 2 1 0 -3 -4 -4 0 -39
52	2 -3 0 18 0 -3 5 3 1 -3 -4 -3 3 3 1 24 -5 1 -4 -39	62	-5 2 -4 36 -1 2 -5 0 1 -3 -3 -15 3 0 5 39 -5 3 5 -3

№ вар.	Матрица коэффициентов				№ вар.	Матрица коэффициентов			
63	-5	-1	3	3	73	4	4	-2	-21
	-2	-2	-2	-18		-1	-2	4	6
	-4	-1	1	-15		-4	-5	3	-18
	1	5	5	36		5	-1	3	15
	-1	-2	0	0		3	-2	-3	9
64	1	4	3	-15	74	4	2	-4	-6
	-5	-2	0	-12		-1	-1	-3	-18
	3	4	5	24		-5	-4	-1	-33
	-2	5	-1	-9		2	4	-1	6
	3	5	5	54		-2	3	0	6
65	-2	4	-4	3	75	5	0	-5	6
	-4	-4	2	-24		-4	1	4	-6
	5	1	4	30		-2	-1	0	-15
	-4	2	-1	-6		-1	-5	3	-15
	0	-5	2	6		-5	-1	-4	-30
66	-5	-3	3	30	76	4	-3	4	0
	1	5	4	45		0	5	0	21
	1	3	3	36		0	-1	2	-3
	2	-2	-1	-3		3	4	0	27
	3	3	3	21		-4	4	-3	-12
67	-5	0	-4	27	77	4	2	-4	-6
	4	0	-1	3		-1	-1	1	-12
	3	-3	1	9		-5	0	-3	-15
	3	2	2	24		4	3	-2	9
	2	4	4	27		-5	0	0	-21
68	2	3	-2	-9	78	1	3	-1	-6
	-5	3	4	-6		0	1	-5	-12
	5	4	0	27		0	0	-1	-12
	5	1	3	33		-4	4	0	-6
	3	5	0	24		5	1	-2	15
69	-4	0	5	12	79	0	-5	1	21
	0	-1	-1	-9		-1	-3	2	9
	3	-1	4	12		5	-5	5	6
	-3	0	3	-6		0	-4	-4	-15
	-3	-4	2	-21		4	5	1	39
70	-3	1	5	-18	80	3	1	-1	-9
	5	5	-2	24		-2	4	-5	-18
	5	-3	4	18		4	4	2	30
	3	4	4	39		4	0	1	18
	-4	-5	-3	-45		-2	0	1	-3
71.	0	-1	-4	0	81	4	5	1	-30
	5	3	-3	30		0	-5	1	-21
	-1	-5	-2	-9		5	0	-1	-3
	0	4	4	27		3	3	2	36
	1	-1	-2	-21		5	-1	-2	18
72	2	0	-2	-3	82	-3	2	1	-9
	-1	1	1	3		0	5	4	18
	-4	-3	4	-15		5	-4	0	3
	1	-4	5	-6		0	1	-2	-18
	0	0	4	27		5	5	1	33

№ вар.	Матрица коэффициентов				№ вар.	Матрица коэффициентов			
83	0	3	-4	-3	87	-1	3	-5	9
	2	3	2	18		0	3	-2	3
	4	4	-1	21		-4	-2	1	-18
	4	2	5	27		-3	0	-2	-15
	-1	1	0	9		4	-1	3	33
84	5	5	-3	-36	88	-4	0	0	12
	0	-1	-5	-27		5	4	-5	3
	1	4	4	21		-4	-2	-1	-24
	5	2	-4	18		-2	5	-5	-15
	2	5	-5	-6		-2	-3	5	-15
85	0	0	5	-6	89	-1	3	5	-30
	-2	0	5	18		2	0	-3	-15
	3	5	-4	0		1	1	0	0
	2	1	4	9		1	1	0	18
	1	-4	3	12		2	-4	5	9
86	3	-3	0	3	90	-5	2	-1	12
	4	1	0	27		-1	-3	-2	-21
	-5	5	5	24		4	0	4	36
	-3	5	-3	3		0	4	-3	3
	4	0	1	0		0	3	-3	15

Задание 3. Нелинейное программирование

Целевая функция задается выражением

$$F(x) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_1x_2 + k_4x_1 + k_5x_2.$$

Линейные ограничения неравенства имеют вид

$$q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{10} \leq 0,$$

$$q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{20} \leq 0,$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

Значения коэффициентов k_i и q_{ij} для различных вариантов заданий приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

№ вар.	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	q_{11}	q_{12}	q_{10}	q_{21}	q_{22}	q_{20}
1	3	3	-1	8	-9	-3	7	-7	13	-7	-63
2	6	5	-6	-1	2	-7	5	5	5	-1	-19
3	-6	-4	-1	6	5	2	-1	0	-2	3	-12
4	-5	-5	6	-7	9	-8	5	5	5	1	-32
5	-3	-3	-4	0	7	-1	3	-6	1	-1	-2
6	-4	-2	-5	-2	5	-1	2	-8	2	1	-9
7	-2	-2	-2	6	8	1	-1	1	5	1	-31

№ вар.	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	q_{11}	q_{12}	q_{10}	q_{21}	q_{22}	q_{20}
8	4	4	-3	0	4	4	-3	3	1	3	-18
9	6	4	-2	-4	-8	1	-2	4	7	6	-72
10	6	1	0	-5	2	8	-5	-10	-2	5	-20
11	-2	-1	-2	8	-9	7	-2	-16	-1	4	-20
12	-5	-4	-5	-8	-8	-3	2	2	7	3	-66
13	-3	-2	-3	4	3	2	-3	6	2	3	-18
14	-6	-1	-1	-9	4	-1	2	-2	23	-8	-144
15	1	6	-2	-9	3	1	-1	-1	7	6	-72
16	1	3	1	2	-9	-5	6	-6	5	-1	-24
17	-4	-4	-4	3	5	1	-1	3	1	3	-21
18	-5	-3	-5	-5	2	-1	1	1	1	1	-9
19	-3	-4	-4	0	-7	1	-1	1	-1	5	-25
20	-2	-4	-3	-8	-2	-3	4	0	5	-1	-17
21	6	5	-3	8	-8	1	-1	1	2	-1	-4
22	-6	-4	-3	-5	8	-3	8	-16	1	8	-48
23	-3	-1	0	3	8	0	1	-3	5	-3	-6
24	1	2	1	-7	-8	3	-1	-5	0	1	-7
25	-2	-3	0	-7	6	-1	1	-2	5	-1	-6
26	-4	-6	-6	-6	-4	-7	3	6	4	3	-27
27	3	4	2	-2	4	5	-2	-4	5	4	-52
28	3	4	4	3	-6	-2	3	0	31	-9	-225
29	-1	-3	-1	-8	1	-1	1	0	5	1	-24
30	-3	-3	5	-7	-8	1	-1	-2	5	1	-16
31	3	4	1	-9	-1	3	-1	-1	-2	3	-18
32	-5	-5	3	5	2	-1	7	0	4	-7	-21
33	6	4	3	-9	-9	-1	2	2	8	3	-54
34	-5	-2	-3	2	-9	1	-1	0	1	5	-30
35	-2	-1	-2	2	9	-1	6	-18	5	1	-34
36	4	4	-6	-3	-1	1	-1	0	-3	8	-40
37	-3	-6	-2	-8	6	4	-9	18	10	9	-144
38	-4	-2	-5	-8	5	-1	2	-14	11	4	-80
39	-5	-3	-1	3	0	2	-5	10	2	5	-30
40	4	6	2	8	8	-9	8	8	11	8	-152
41	2	2	-1	-1	6	4	-5	0	2	5	-30
42	4	4	1	4	6	4	-3	-3	11	6	-108
43	5	2	-1	5	6	1	-2	2	3	4	-24
44	-2	-5	-1	-7	-1	-1	1	0	7	3	-30
45	4	2	0	-8	6	-8	9	27	44	-9	-351
46	1	6	2	5	4	-5	6	-12	7	-3	-21
47	-1	-1	-1	-3	6	-2	3	-12	5	-1	-9
48	3	2	-4	-7	4	7	-5	-5	1	5	-35
49	6	6	-3	0	8	7	-4	4	1	4	-36
50	5	3	-5	-9	-5	-1	4	-8	5	1	-23

№ вар.	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	q_{11}	q_{12}	q_{10}	q_{21}	q_{22}	q_{20}
51	6	4	-4	9	-3	3	-5	5	4	5	-40
52	5	2	2	-3	-4	1	-1	2	1	3	-18
53	-1	-1	1	-1	-7	2	-1	1	5	-1	-8
54	5	5	0	-1	6	1	-3	0	10	9	-117
55	3	4	3	-2	7	5	-3	-9	11	6	-108
56	6	2	-2	3	0	1	-3	3	1	2	-12
57	-4	-5	-4	-8	7	-1	2	-2	5	1	-23
58	5	2	-1	9	7	5	-8	8	5	4	-64
59	5	2	6	3	-8	1	4	-24	3	-4	-8
60	-2	-3	0	-7	-8	3	-5	10	1	5	-30
61	1	6	1	-1	8	5	-4	0	1	4	-24
62	3	3	-1	-8	9	8	-7	-14	-4	7	-14
63	-4	-6	2	5	-6	6	-7	-7	4	7	-63
64	-3	-6	-6	-7	-3	-6	7	0	5	1	-41
65	5	1	4	-4	-2	-3	4	0	39	8	-360
66	3	5	-6	1	8	4	-5	0	4	5	-40
67	1	4	2	0	-4	-2	1	-2	2	1	-6
68	-6	-4	1	-7	-5	5	-3	0	0	1	-5
69	-4	-6	-3	-4	-2	-8	9	0	28	-9	-180
70	-3	-3	2	9	7	8	-5	-5	-3	5	-20
71	-2	-3	-3	-2	-4	-5	2	8	1	1	-10
72	-4	-3	3	4	5	-1	2	0	5	-1	-18
73	-6	-3	3	-3	-8	-7	5	5	11	5	-85
74	4	3	0	-2	6	5	-8	0	1	4	-28
75	4	4	4	8	-4	-3	5	-10	14	5	-95
76	-6	-5	-6	-6	-1	-2	3	-3	7	-3	-27
77	-1	-5	-2	-5	3	-4	7	-14	5	-1	-29
78	6	3	-5	0	4	1	-1	1	1	3	-27
79	5	3	-2	-8	-3	11	-2	-8	-1	1	-5
80	1	1	1	0	4	3	-2	-6	1	3	-24
81	-3	-4	3	-1	8	-6	5	5	1	1	-10
82	4	3	1	5	-2	-2	1	1	1	1	-8
83	-4	-2	3	-7	1	-3	1	-1	5	1	-9
84	-6	-5	0	1	-8	-1	3	3	44	-9	-378
85	-1	-3	-3	3	1	7	-2	-18	0	1	-5
86	-5	-4	6	-6	-9	-8	9	27	4	1	-41
87	1	1	-1	-8	7	3	-1	-4	1	3	-18
88	-5	-6	-1	0	1	3	-5	10	6	5	-55
89	-3	-3	-4	-9	-3	1	-1	2	5	1	-26
90	-4	-1	-2	-5	8	-1	1	-6	13	3	-66

Выполнить следующие действия:

1. Построить область допустимых значений переменных. Внутри области выбрать точку x^0 , которая в дальнейшем будет являться начальной в процессе поиска экстремума.

2. Найти максимальное значение функции $F(x)$ без учета ограничений на переменные, используя:

- а) метод наискорейшего спуска;
- б) метод Ньютона – Рафсона.

Оптимизационный процесс начинать с выбранной точки x^0 .

3. Найти максимальное значение функции $F(x)$ с учетом системы ограничений задачи, используя:

- а) метод допустимых направлений Зойтендейка;
- б) метод линейных комбинаций;
- в) условия теоремы Куна – Таккера.

Оптимизационный процесс в пунктах а) и б) начинать с выбранной точки x^0 .

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Задание 1. Математическое описание линейных систем

Пусть

$$W(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{144S + 288}{S^3 + 15S^2 + 62S + 48}. \quad (4.1)$$

Передаточная функция системы $W(s)$ – это отношение изображения по Лапласу сигнала на выходе к изображению по Лапласу сигнала на входе при нулевых начальных условиях.

Создадим стационарный линейный объект с именем w в пакете Matlab>>
>> w = tf([144 288], [1 15 62 48])

Transfer function:

$$\frac{144 s + 288}{s^3 + 15 s^2 + 62 s + 48}$$

Чтобы перейти от передаточной функции к дифференциальному уравнению системы, нужно перейти из области изображений по Лапласу во временную область. Из (4.1) следует

$$\begin{aligned}
& Y(S) \cdot (S^3 + 15S^2 + 62S + 48) = U(S) \cdot (144S + 288) \Rightarrow \\
& \Rightarrow S^3 \cdot Y(S) + 15S^2 \cdot Y(S) + 62S \cdot Y(S) + 48 \cdot Y(S) = 144S \cdot U(S) + 288 \cdot U(S).
\end{aligned}$$

Для перехода во временную область воспользуемся формальными правилами:

$$Y(S) \rightarrow y(t); \quad S \cdot Y(S) \rightarrow \frac{dy(t)}{dt}; \quad S^2 \cdot Y(S) \rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 15\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 62\frac{dy(t)}{dt} + 48y(t) = 144\frac{du(t)}{dt} + 288u(t). \quad (4.2)$$

Характеристическое уравнение системы определяется знаменателем передаточной функции:

$$D(S) = S^3 + 15S^2 + 62S + 48 = 0.$$

Один из корней уравнения можно найти подбором, это будет $\lambda_1 = 1$, а затем понизить порядок уравнения и решить его:

$$\begin{array}{r}
S^3 + 15S^2 + 62S + 48 \quad | \quad S + 1 \\
\underline{S^3 + S^2} \\
14S^2 + 62S \\
\underline{14S^2 + 14S} \\
48S + 48 \\
\underline{48S + 48} \\
0
\end{array}$$

Итак, $S^3 + 15S^2 + 62S + 48 = (S + 1)(S^2 + 14S + 48) = 0$, тогда $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = -8$, $(S + 1)(S + 6)(S + 8) = 0$.

В пакете Matlab корни многочлена можно найти с помощью команды `pole(w)`.

```

Matlab
>> pole(w)
ans =
-8.0000
-6.0000
-1.0000

```

Передаточная функция системы в форме нулей и полюсов имеет вид

$$W(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{144(S+2)}{(S+1)(S+6)(S+8)}.$$

Получим разложение передаточной функции на сумму простых слагаемых:

$$W(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{144S + 288}{S^3 + 15S^2 + 62S + 48} = \frac{a}{S+1} + \frac{b}{S+6} + \frac{c}{S+8}.$$

Найдем a, b, c :

$$\begin{aligned} \frac{a}{S+1} + \frac{b}{S+6} + \frac{c}{S+8} &= \frac{a(S+6)(S+8) + b(S+1)(S+8) + c(S+1)(S+6)}{(S+1)(S+6)(S+8)} = \\ &= \frac{144S + 288}{S^3 + 15S^2 + 62S + 48}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a(S+6)(S+8) + b(S+1)(S+8) + c(S+1)(S+6) &= \\ = a(S^2 + 14S + 48) + b(S^2 + 9S + 8) + c(S^2 + 7S + 6) &= \\ = S^2(a+b+c) + S(14a+9b+7c) + (48a+8b+6c) &= 144S + 288. \end{aligned}$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 14a + 9b + 7c = 144, \\ 48a + 8b + 6c = 288. \end{cases}$$

В результате решения данной системы уравнений получим $a = 4,114$; $b = 57,6$; $c = -61,714$.

$$W(S) = \frac{4,114}{S+1} + \frac{57,6}{S+6} - \frac{61,714}{S+8}.$$

Импульсная переходная характеристика $w(t)$ – это процесс изменения сигнала на выходе при подаче на вход δ -функции. Ее можно найти в результате обратного преобразования Лапласа, примененного к каждому слагаемому передаточной функции.

В соответствии с таблицами соответствия $L^{-1}\left\{\frac{a}{s+\alpha}\right\} = ae^{-\alpha t}$, тогда

$$W(t) = 4,114e^{-t} + 57,6e^{-6t} - 61,714e^{-8t}.$$

Matlab

```
>> ch=[144 288]
```

```
>> zn=[1 15 62 48]
```

```
>> [x]=residue(ch,zn)
```

x =

-61.7143

57.6000

4.1143

Переходная характеристика $h(t)$ – это процесс изменения сигнала на выходе системы при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия. Преобразование по Лапласу $1(t)$ это $\frac{1}{S}$, следовательно, $H(S) = \frac{1}{S}W(S)$.

Для получения аналитической формы переходной характеристики дополним систему интегратором:

$$W(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{144(S+2)}{(S+1)(S+6)(S+8)S} = \frac{a}{S+1} + \frac{b}{S+6} + \frac{c}{S+8} + \frac{d}{S}.$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов аналогично найдем $a = -4,114$; $b = -9,6$; $c = 7,714$; $d = 6$.

Matlab

```
>> ch=[144 288]
```

```
>> zn=[1 15 62 48]
```

```
>> [c]=residue(ch,[zn,0])
```

c =

7.7143

-9.6000

-4.1143

6.0000

Запишем аналитическую форму переходной характеристики:

$$h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4, \quad h(t) = 7,714 e^{(-8t)} - 9,6 e^{(-6t)} - 4,114 e^{(-t)} + 6.$$

Переходную характеристику можно также вычислить следующим образом: $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$, получим такой же результат.

Временные характеристики системы, построенные в пакете Matlab, приведены на рис. 4.1 и 4.2.

График $h(t)$

>> step(w)

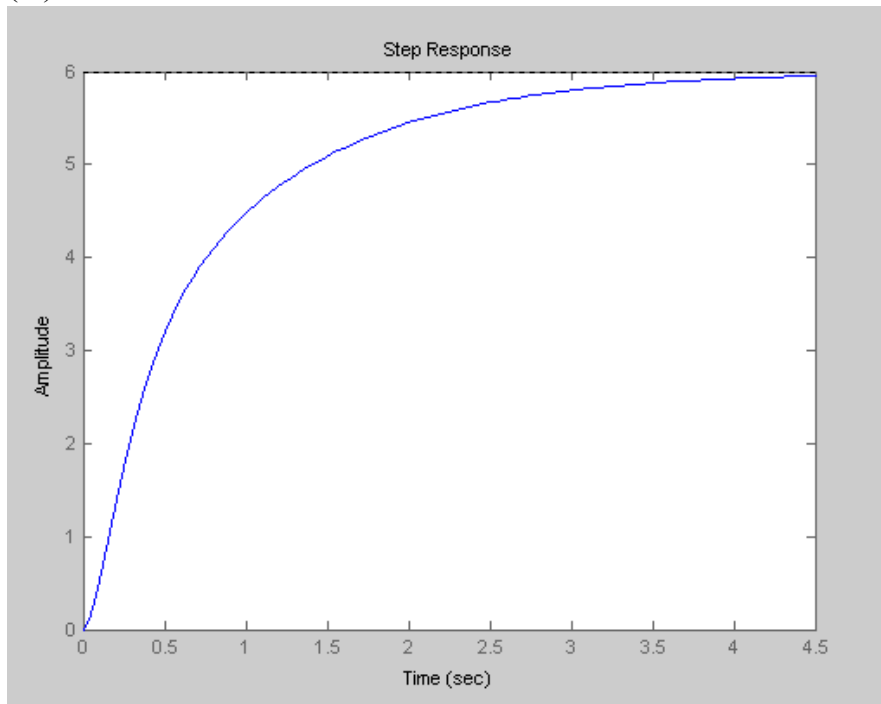


Рис. 4.1

График $w(t)$

>> impulse(w)

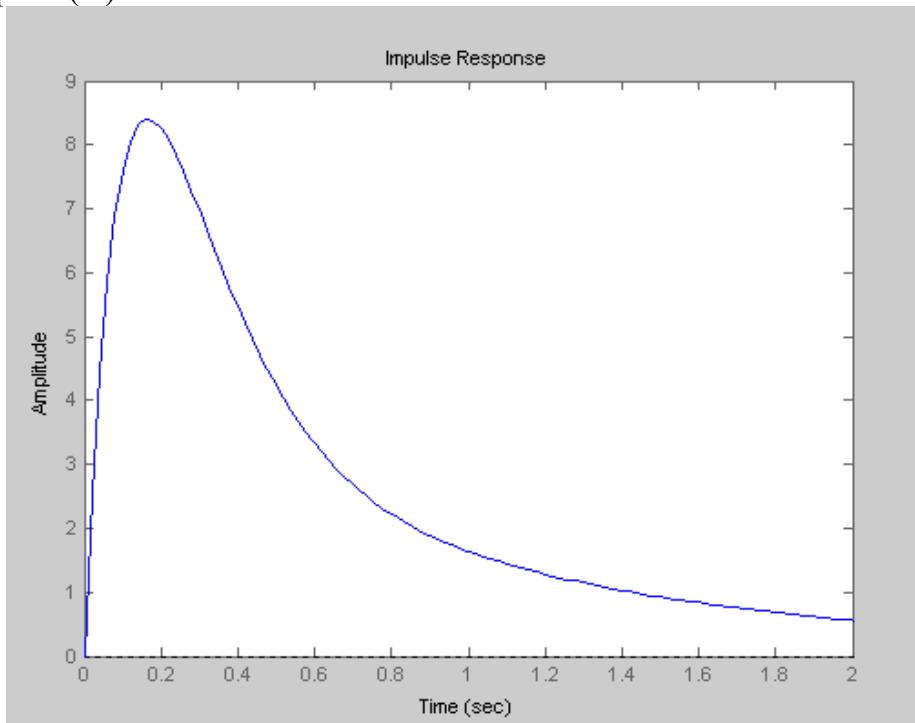


Рис. 4.2

Построение асимптотических ЛАХ и ФЧХ. При определении частотных характеристик подразумевается, что на входе и выходе системы сигналы являются гармоническими.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) показывает, как изменяется отношение выходного сигнала к входному в зависимости от частоты.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) показывает изменение сдвига фаз между входным и выходным сигналами в зависимости от частоты.

ЛАЧХ строится в двойных логарифмических шкалах. По одной логарифмической оси откладывается круговая частота ω , по другой значение $L(\omega) = 20 \lg K$, выраженное в децибелах. Асимптотическая ЛАЧХ состоит из отрезков прямых линий с наклонами кратными 20 дБ/дек.

Преобразуем передаточную функцию к следующему виду:

$$W(S) = \frac{144S + 288}{S^3 + 15S^2 + 62S + 48} = \frac{144(S + 2)}{(S + 1)(S + 6)(S + 8)} = 6 \frac{\frac{1}{2}S + 1}{(S + 1)(\frac{1}{6}S + 1)(\frac{1}{8}S + 1)}.$$

Теперь она представляет собой произведение трёх апериодических и одного форсирующего звена с постоянным времени $T_1 = 1$; $T_2 = \frac{1}{2}$; $T_3 = \frac{1}{6}$; $T_4 = \frac{1}{8}$.

Коэффициент усиления $K = 6$. Сопрягающие частоты звеньев равны $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 1$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 2$; $\omega_3 = \frac{1}{T_3} = 6$; $\omega_4 = \frac{1}{T_4} = 8$.

Далее необходимо правильно разметить оси, и отметить на оси ω сопрягающие частоты. ЛАЧХ приведена на рис. 4.3, а.

Так как интегрирующие звенья отсутствуют, то первый наклон в области низких частот будет нулевой. Он идёт параллельно оси частот на уровне $20 \lg K$ до первой сопрягающей частоты ω_1 . Эта частота относится к апериодическому звену. Следовательно, наклон изменится на -1. Этот наклон будет идти до сопрягающей частоты ω_2 . Так как эта частота относится к форсирующему звену, то наклон изменится на +1 и станет нулевым, ЛАЧХ параллельна оси частот. После частоты ω_3 наклон изменится на (-1) и будет продолжаться до ω_4 . После частоты ω_4 он изменится ещё на (-1) и станет равным (-2). Частота, при которой частотная характеристика пересечёт ось частот, называется частотой среза, $\omega_{ср} = 12$ рад/с.

Фазочастотная характеристика (рис. 4.3, б) построена в соответствии с выражением

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{2} \omega - \arctg \omega - \arctg \frac{1}{6} \omega - \arctg \frac{1}{8} \omega.$$

Значения каждого из слагаемых определяются приближенно для значений $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$, $\omega_i = \frac{1}{T_i}$. В этих точках $\text{arctg}0 = 0$; $\text{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$; $\text{arctg}\omega_i T_i = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.

В пакете Matlab для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ используется команда `bode(w)`, а для построения АФЧХ команда `nyquist(w)`. Соответствующие характеристики приведены на рис. 4.4 и 4.5.

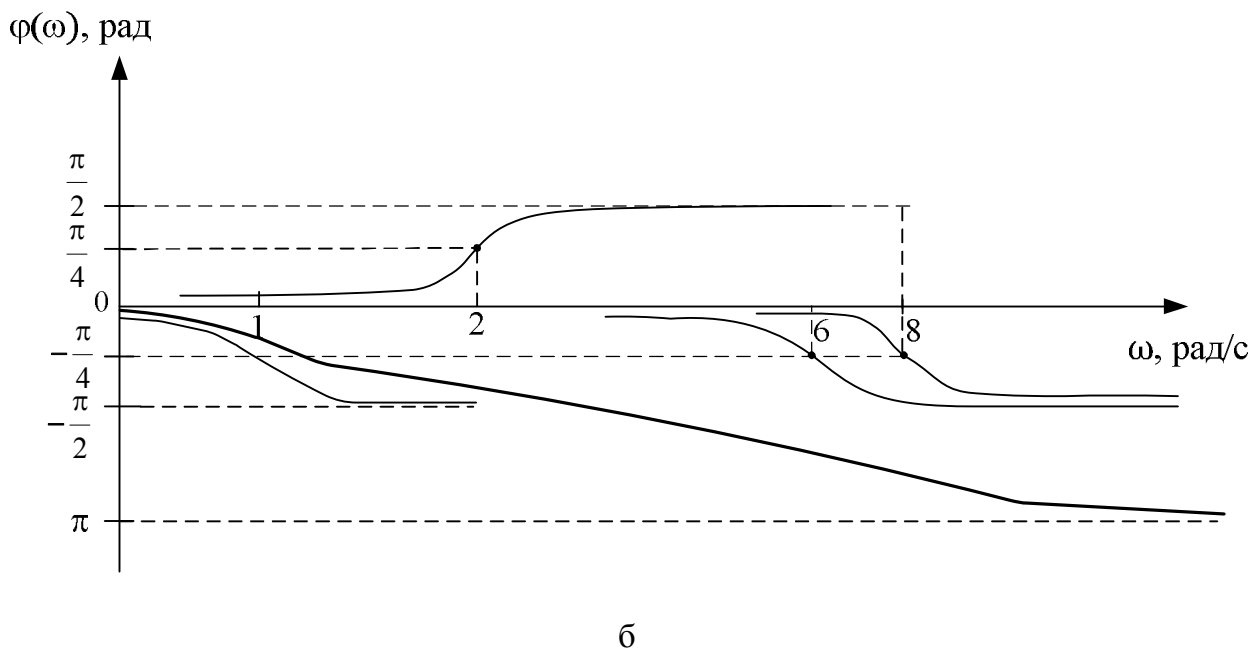
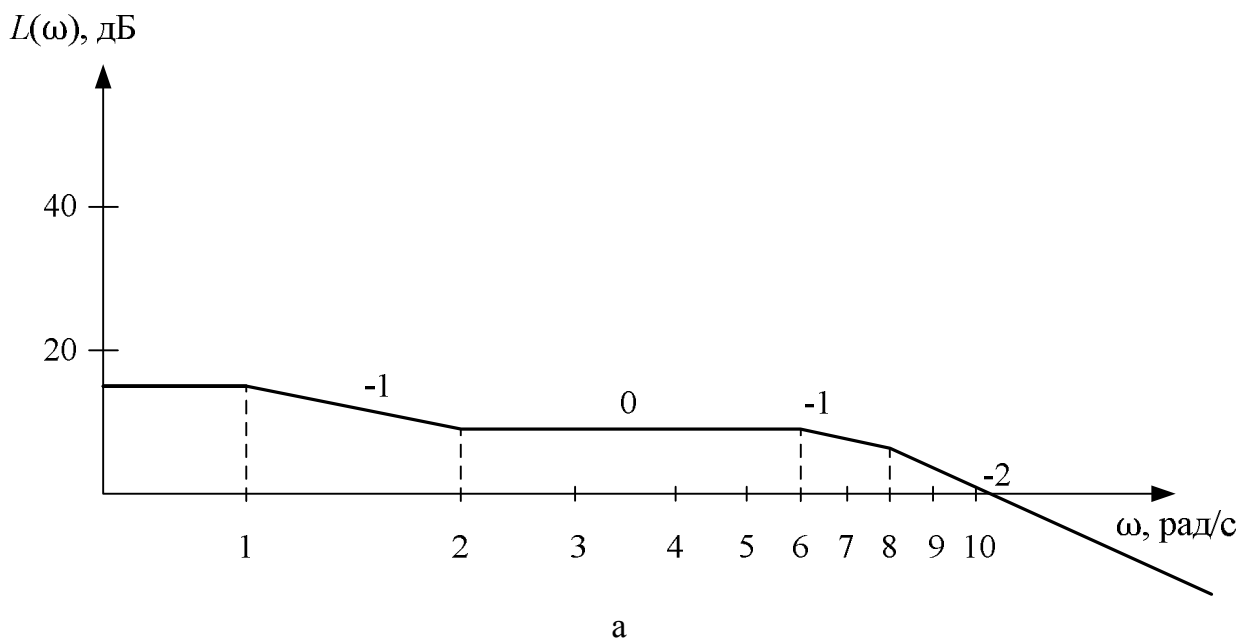


Рис. 4.3

>> margin(w)

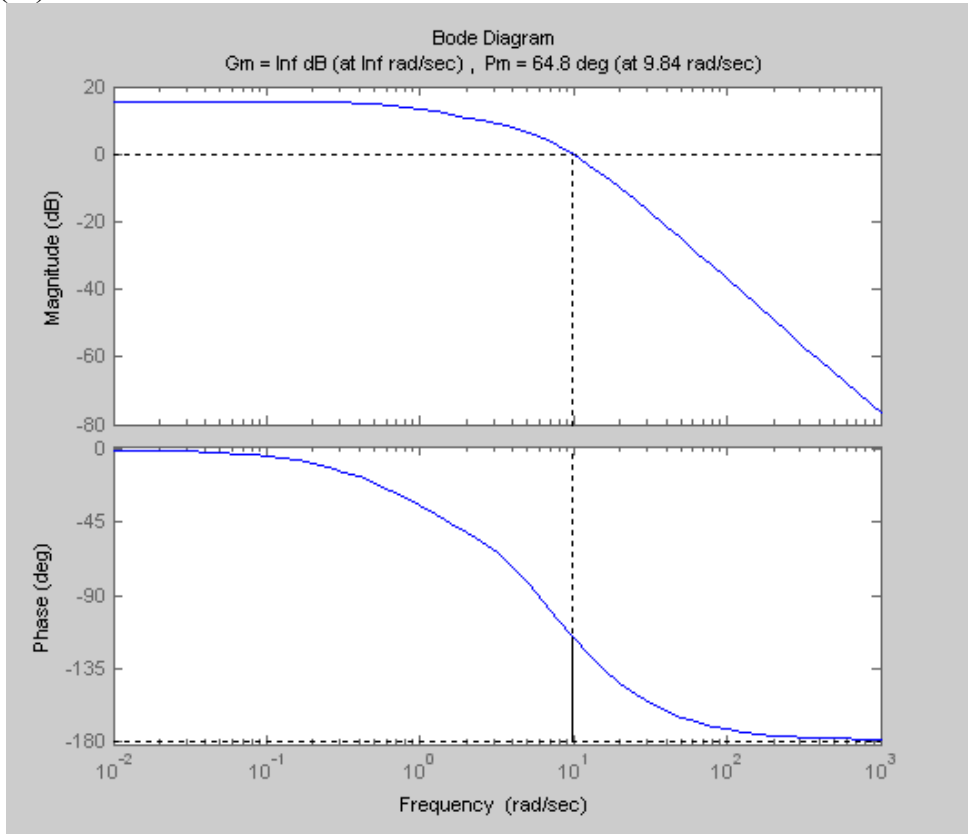


Рис. 4.4

АФЧХ системы:

>> nyquist(w)

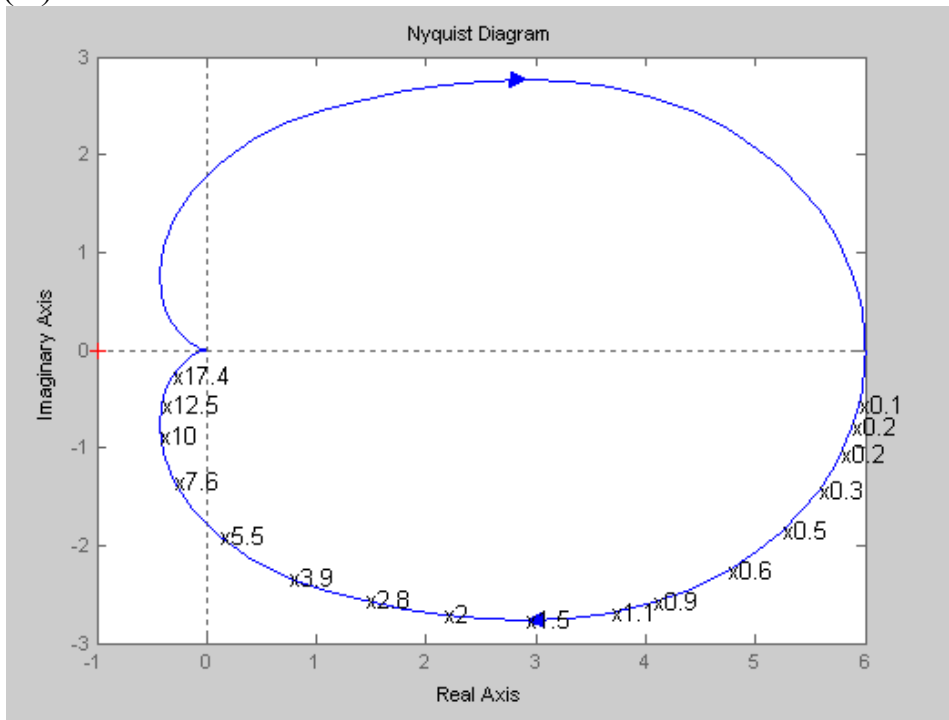


Рис. 4.5

Кроме входных и выходных переменных при описании систем выделяют переменные x , связанные с внутренней структурой устройства, – переменные состояния. Тогда систему можно описать с помощью уравнений состояния.

Нормальная форма уравнений состояния имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь A – квадратная матрица определенного вида, размер которой определяется порядком дифференциального уравнения. Элементы, стоящие над главной диагональю – единицы, элементы нижней строки – коэффициенты левой части дифференциального уравнения, взятые с противоположным знаком. Все остальные элементы – нули. Такая матрица называется матрицей Фробениуса.

Согласно (4.2) дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\ddot{y}(t) + 15\dot{y}(t) + 62y(t) = 144\dot{u}(t) + 288u(t)$$

$$\alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0 \quad \beta_1 \quad \beta_0,$$

где α_i и β_j – коэффициенты уравнения.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -48 & -62 & -15 \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц B и D вычисляются по следующим рекуррентным соотношениям: $D = \beta_0 = \beta_3 = 0$,

$$b_1 = \beta_2 - \alpha_2 b_0 = 0 - 15 \cdot 0 = 0,$$

$$b_2 = \beta_1 - \alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_0 = 144 - 15 \cdot 0 - 62 \cdot 0 = 144,$$

$$b_3 = \beta_0 - \alpha_2 b_2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_0 b_0 = 288 - 15 \cdot 144 - 62 \cdot 0 - 48 \cdot 0 = -1872,$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 144 \\ -1872 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Подставив рассчитанные матрицы в систему (4.3), получим

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -48 & -62 & -15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 144 \\ -1872 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 144u, \\ \dot{x}_3 = -48x_1 - 62x_2 - 15x_3 - 1872u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Схема модели приведена на рис. 4.6.

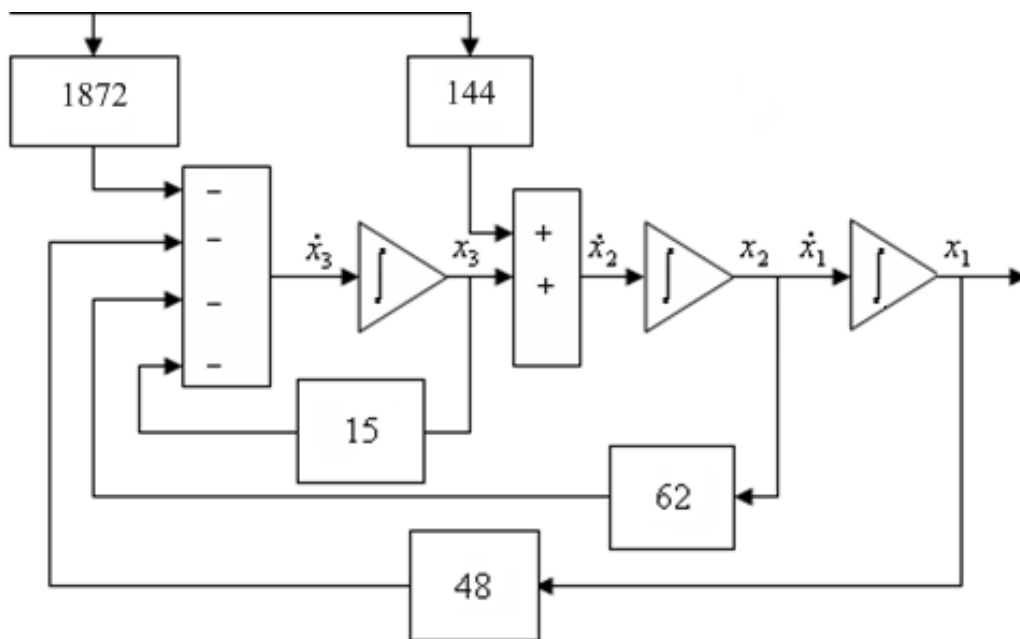


Рис. 4.6

Запишем уравнения состояния в канонической форме. Для этого введем новую переменную состояния q , которая связана с переменной состояния x следующим образом: $x = Mq$. M – это модальная матрица, которая имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -6 & -8 \\ 1 & 36 & 64 \end{bmatrix},$$

где λ_i – характеристические числа матрицы Фробениуса A .

При подстановке q вместо x в нормальную форму уравнений состояния (4.3) получим уравнения состояния системы в канонической форме:

$$\begin{cases} \dot{q} = \Lambda q + B_1 u, \\ y = C_1 q + D_1 u. \end{cases} \quad (4.4)$$

Здесь Λ – диагональная матрица:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad B_1 = M^{-1}B, \quad C_1 = CM, \quad D_1 = D,$$

где M^{-1} – матрица, обратная модальной, определяемая выражением

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \text{Adj}M.$$

Здесь $\text{Adj}M$ – матрица, присоединённая к M , т. е. транспонированная матрица алгебраических дополнений.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1,371 & 0,4 & 0,029 \\ -0,8 & -0,9 & -0,1 \\ 0,429 & 0,5 & 0,071 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 1,371 & 0,4 & 0,029 \\ -0,8 & -0,9 & -0,1 \\ 0,429 & 0,5 & 0,071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 144 \\ -1872 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,11 \\ 57,6 \\ -61,71 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = CM = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -6 & -8 \\ 1 & 36 & 64 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1],$$

$$D_1 = D = [0].$$

Matlab

```
>> M=[1 1 1;-1 -6 -8; 1 36 64]
```

M =

```
 1  1  1
-1 -6 -8
 1 36 64
```

```
inv(M)
```

ans =

```
 1.3714  0.4000  0.0286
-0.8000 -0.9000 -0.1000
 0.4286  0.5000  0.0714
```

```
B=[0;144;-1872]
```

B =

```
 0
144
-1872
```

```
M-1*B
```

ans =

```
 4.1143
57.6000
-61.7143
```

Подставив найденные значения в (4.4), получим

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4,11 \\ 57,6 \\ -61,71 \end{bmatrix} \cdot u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + [0]u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -q_1 - 4,11u, \\ \dot{q}_2 = -6q_2 + 57,6u, \\ \dot{q}_3 = -8q_3 - 61,71u, \\ y = q_1 + q_2 + q_3. \end{cases}$$

Схема модели, соответствующая полученной системе, приведена на рис. 4.7. Для нее характерно параллельное соединение интеграторов, выходы которых определяются переменными состояния q_1, q_2, q_3 .

Найдем решение $y(t)$ для системы уравнений в нормальной форме, если начальные условия имеют вид $y(0) = 2, \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$. Сигнал $u(t) = 2 \cdot 1(t)$. Переходя к начальным условиям для x , в соответствии с принятыми ранее обозначениями, получим $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$.

Решение уравнения состояния $\dot{x} = Ax + Bu$ складывается из двух составляющих $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ – свободной и вынужденной.

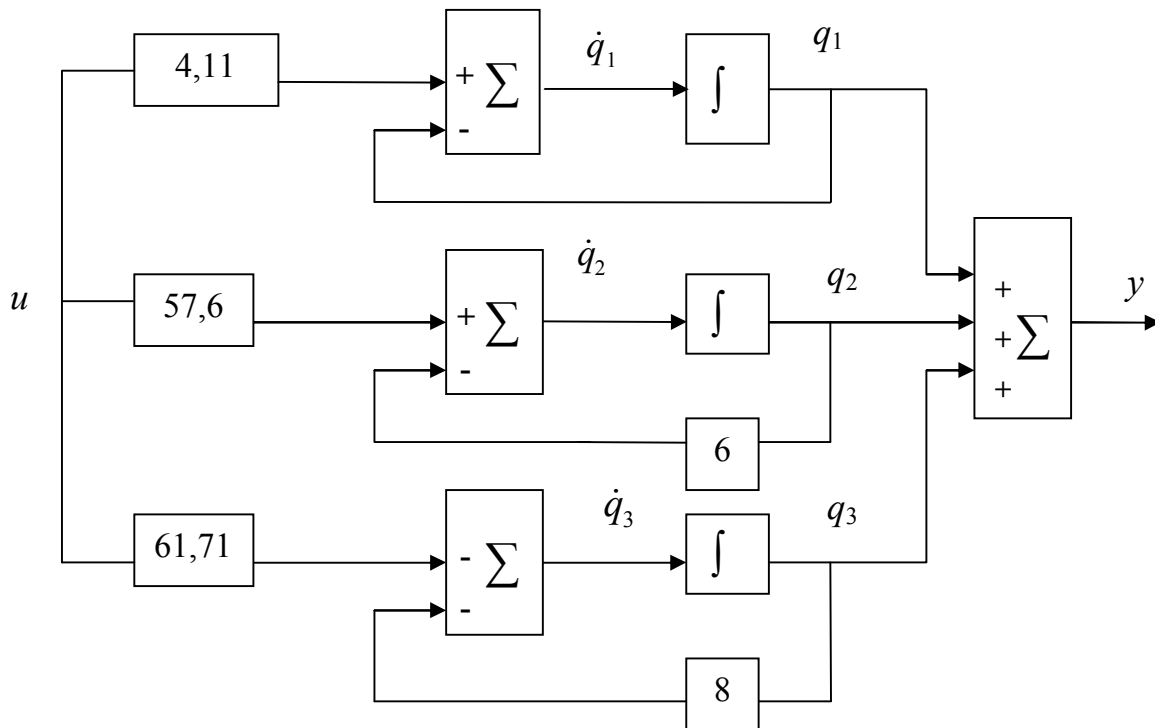


Рис. 4.7

Свободная составляющая $x_1(t)$ – это общее решение дифференциального уравнения системы с нулевой правой частью. Оно не зависит от внешнего воздействия и характеризует естественное поведение системы.

Вынужденная составляющая $x_2(t)$ – это частное решение дифференциального уравнения с ненулевой правой частью. Оно зависит от сигнала $u(t)$ и характеризует поведение системы под его воздействием.

Решение уравнения состояния $\dot{x} = Ax + Bu$ имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{A(t-t_0)} + \int_0^t B \cdot u(\tau) \cdot e^{A(t-\tau)} dt,$$

где e^{At} – фундаментальная матрица или матрица перехода.

Она вычисляется по следующей формуле:

$$e^{At} = \gamma_0 E + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2,$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – неизвестные коэффициенты.

Вычислить их можно, решая матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

Для рассматриваемого примера

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 36 \\ 1 & -8 & 64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-6t} \\ e^{-8t} \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем систему уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = e^{-t}, \\ \gamma_0 - 6\gamma_1 + 36\gamma_2 = e^{-6t}, \\ \gamma_0 - 8\gamma_1 + 64\gamma_2 = e^{-8t}. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1,371e^{-t} - 0,8e^{-6t} + 0,429e^{-8t}, \\ \gamma_1 = 0,4e^{-t} - 0,9e^{-6t} + 0,5e^{-8t}, \\ \gamma_2 = 0,029e^{-t} - 0,1e^{-6t} + 0,071e^{-8t}. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -48 & -62 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -48 & -62 & -15 \\ 720 & 882 & 163 \end{bmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 e^{At} = & \begin{bmatrix} 1,371 & 0 & 0 \\ 0 & 1,371 & 0 \\ 0 & 0 & 1,371 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -0,8 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 \end{bmatrix} e^{-6t} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0,429 & 0 & 0 \\ 0 & 0,429 & 0 \\ 0 & 0 & 0,429 \end{bmatrix} e^{-8t} + \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \\ -19,2 & -24,8 & -6 \end{bmatrix} e^{-t} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9 \\ 43,2 & 55,8 & 13,5 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ -24 & -31 & -7,5 \end{bmatrix} e^{-8t} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,029 \\ -1,4 & -1,798 & -0,44 \\ 20,9 & 25,578 & 4,727 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1 \\ 4,8 & 6,2 & 1,5 \\ -72 & -88,2 & -16,3 \end{bmatrix} e^{-6t} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,071 \\ -3,41 & -4,402 & -1,06 \\ 51,12 & 62,622 & 11,57 \end{bmatrix} e^{-8t} = \begin{bmatrix} 1,371 & 0,4 & 0,029 \\ -1,392 & -0,427 & -0,035 \\ 1,68 & 0,778 & 0,098 \end{bmatrix} e^{-t} + \\
 & + \begin{bmatrix} -0,8 & -0,9 & -0,1 \\ 4,8 & 5,4 & 0,6 \\ -28,8 & -32,4 & -3,6 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 0,429 & 0,5 & 0,071 \\ -3,41 & -3,9 & -0,57 \\ 27,12 & 31,6 & 4,502 \end{bmatrix} e^{-8t}. \\
 e^{At} x_0 = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,742 \\ -2,784 \\ 3,36 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1,6 \\ 9,6 \\ -57,6 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 0,858 \\ -6,816 \\ 54,24 \end{bmatrix} e^{-8t}.
 \end{aligned}$$

Так как $y = x_1$, то свободная составляющая выходного сигнала будет равна $2,742e^{-t} - 1,6e^{-6t} + 0,858e^{-8t}$. Определим вынужденную составляющую при входном сигнале $u(t) = 2*1(t)$. Сигнал на выходе при поступлении на вход $1(t)$ уже вычислен – это переходная характеристика системы (4.1). Чтобы получить вынужденную составляющую сигнала в нашем случае, умножим переходную характеристику на 2.

Таким образом, сигнал на выходе системы будет следующим:

$$\begin{aligned}
 y(t) = 2,742e^{-t} - 1,6e^{-6t} + 0,858e^{-8t} + 2(7,714e^{-8t} - 9,6e^{-6t} - 4,114e^{-t} + 6) = \\
 = -5,478e^{-t} - 20,8e^{-6t} + 16,287e^{-8t} + 12.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Выполним проверку:

$$y(0) = -5,478 - 20,8 + 16,287 + 12 = 2 - \text{верно};$$

$$y(\infty) = 12 - \text{верно}.$$

Найдем решение уравнений состояния, представленных в канонической форме (4.4). Каждое из дифференциальных уравнений первого порядка $\dot{q}_i = x_i q_i + b_{1i}$ зависит только от одной переменной, и его решение в общем виде имеет вид

$$q(t) = q(0)e^{\lambda t} + \int_0^t B_1 u(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau.$$

Определим начальные условия $q(0)$ для вектора $q(t)$.

Так как $q = M^{-1}x(t)$, то

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,371 & 0,4 & 0,029 \\ -0,8 & -0,9 & -0,1 \\ 0,429 & 0,5 & 0,071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,742 \\ -1,6 \\ 0,858 \end{bmatrix}.$$

Найдем выражения для $q_1(t)$, $q_2(t)$ и $q_3(t)$.

$$q_1(t) = 2,742e^{-t} + 2 \cdot 4,11 \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 2,742e^{-t} + 8,22(1 - e^{-t}) = -5,478e^{-t} + 8,22;$$

$$q_2(t) = -1,6e^{-6t} + 2 \cdot 57,6 \int_0^t e^{-6(t-\tau)} d\tau = -1,6e^{-6t} + 19,2(1 - e^{-6t}) = -20,8e^{-6t} + 19,2;$$

$$\begin{aligned} q_3(t) &= 0,858e^{-8t} + 2(-61,71) \int_0^t e^{-8(t-\tau)} d\tau = 0,858e^{-8t} - 15,428(1 - e^{-8t}) = \\ &= 16,286e^{-8t} - 15,428. \end{aligned}$$

В результате получим

$$y(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) = -5,478e^{-t} - 20,8e^{-6t} + 16,286e^{-8t} + 12.$$

Выполним проверку:

$$y(0) = -5,478 - 20,8 + 16,287 + 12 = 2 - \text{верно};$$

$$y(\infty) = 12 - \text{верно}.$$

Решения нормальных и канонических уравнений состояния совпадают.

Проверим, одинаково ли значение коэффициента усиления: по передаточной функции, переходной характеристике, моделям в пространстве состояний, аналитической записи импульсной переходной характеристики.

Проверим значение коэффициента усиления по передаточной функции:

$$W(S \rightarrow 0) = \frac{144S + 288}{S^3 + 15S^2 + 62S + 48} = \frac{288}{48} = 6.$$

По переходной характеристике:

$$h(t \rightarrow \infty) = 7,714e^{-8t} - 9,6e^{-6t} - 4,114e^{-t} + 6 = 6.$$

По моделям в пространстве состояний:

$$\text{каноническая форма: } 4,11 + \frac{57,6}{6} - \frac{61,71}{8} = 6;$$

нормальная форма (в установившемся режиме на входах интеграторов нули): $-1872 + 144 \cdot 15 - 48 \cdot k = 0$; $k = 6$;

по аналитической записи импульсной переходной характеристики:

$$W(t) = 4,114e^{-t} + 57,6e^{-6t} - 61,714e^{-8t}; \text{ проверяем: } \frac{4,11}{1} + \frac{57,6}{6} - \frac{61,71}{8} = 6.$$

Мы видим, что значение коэффициента усиления одинаково.

Задание 2. Линейное программирование

Найти минимальное значение функции $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Домножим первое из ограничений на (-1) и введем в ограничения дополнительные переменные x_4 , x_5 и искусственную переменную R следующим образом:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + R = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5. \end{cases}$$

Пусть x_4 , R и x_5 – базисные переменные, а x_1 , x_2 , x_3 – небазисные. Функция цели $F(x) = F(x) + M \cdot \sum R = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + M \cdot (4 - x_1 + x_2 - 2x_3)$.

В первой симплекс-таблице (табл. 4.1) коэффициенты при небазисных переменных в F -строке и M -строках знака не меняют, так как осуществляется минимизация функции. Свободный член в M -строке берется с противоположным знаком. Решение, соответствующее табл. 4.1, не является допустимым, так как есть отрицательный свободный член.

Выберем ведущий столбец и строку в соответствии с шагом 2 алгоритма решения [18, подразд. 3.6]. После пересчета получим табл. 4.2. Оптимизация решения (шаг 5 алгоритма) осуществляется вначале по M -строке. В результате x_3 введем в базис, а переменную R исключим из рассмотрения, сократив коли-

чество столбцов. После пересчета получим табл. 4.3, которая соответствует оптимальному решению задачи.

Таблица 4.1

БП	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
x_4	-6	-2	-1	3
R	4	1	-1	2
x_5	5	1	1	1
F	0	2	3	-1
M	-4	-1	1	-2

Таблица 4.2

БП	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_4	x_2	x_3
x_1	3	-1/2	1/2	-3/2
R	1	1/2	-3/2	7/2
x_5	2	1/2	1/2	5/2
F	-6	1	2	2
M	-1	-1/2	3/2	-7/2

Таблица 4.3

БП	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_4	x_2
x_1	24/7	-2/7	-1/7
x_3	2/7	1/7	-3/7
x_5	9/7	1/7	11/7
F	-46/7	5/7	20/7
M	0	0	0

Искомый минимум функции $F(x)$ равен свободному члену F -строки табл. 4.3, взятому с обратным знаком, так как $\min F(x) = -\max(-F(x))$;
 $x_4 = x_2 = 0$; $x_1 = \frac{24}{7}$; $x_3 = \frac{2}{7}$; $x_5 = \frac{9}{7}$;

$$F_{\min} = \frac{46}{7}.$$

Решение задачи в Matlab

```
F=[2 3 -1];
A=[-2 -1 3;1 1 1;-1 0 0;0 -1 0;0 0 -1];
>> %коэффициенты левых частей неравенств, приведенных к знаку ≤,
>> %с учетом ограничений на знак
>>
B=[-6;5;0;0;0];
%правые части ограничений неравенств
%для ограничения равенства
Aeq=[1 -1 2];
Beq=[4];
x=linprog(F,A,B,Aeq,Beq);
>> x
x =
    3.4286
    0.0000
    0.2857
>> Q=F*x
Q =
    6.5714
```

Найдем частично-целочисленное решение задачи, считая, что переменная x_3 должна быть целой. Дополнительное ограничение составим по второй строке оптимальной симплекс-таблицы, которая соответствует базисной переменной x_3 . Ограничение записывается в соответствии с выражением

$$\sum_{i \in I^+} \alpha_{ki} w_i + \frac{\{\beta_k\}}{\{\beta_k\} - 1} \sum_{i \in I^-} \alpha_{ki} w_i \geq \{\beta_k\},$$

где α_{ki} – коэффициенты при небазисных переменных w_i в рассматриваемой строке, $\{\beta_k\}$ – дробная часть свободного члена.

Тогда получим

$$\frac{1}{7}x_4 + \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7} - 1} \left(-\frac{3}{7}\right)x_2 \geq \frac{2}{7} \quad \text{или} \quad \frac{1}{7}x_4 + \frac{6}{35}x_2 \geq \frac{2}{7}.$$

Вводим дополнительную переменную x_6 и вносим ограничение в симплекс-таблицу (см. табл. 4.3 (M -строку исключаем) в результате получим табл. 4.4.

В качестве ведущего выбираем элемент в строке x_6 , после перерасчета получим табл. 4.5.

Таблица 4.4

БП	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_4	x_2
x_1	24/7	-2/7	-1/7
x_3	2/7	1/7	-3/7
x_5	9/7	1/7	11/7
x_6	-2/7	-1/7	-6/35
F	-46/7	5/7	20/7

Таблица 4.5

БП	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_6	x_2
x_1	4	-2	1/5
x_3	0	1	-3/5
x_5	1	1	7/5
x_4	2	-7	6/5
F	-8	5	2

Оптимальное целочисленное решение $x_1 = 4, x_5 = 1; x_4 = 2, x_1 = x_3 = x_6 = 0, F_{\max} = 8$.

Переход к двойственной задаче подробно рассмотрен в конспекте лекций и здесь не приведен.

Задание 3. Нелинейное программирование

3.1. Найти экстремальное значение функции $F(x) = -2x_1^2 + 18x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 12x_2$ методом наискорейшего спуска и методом Ньютона – Рафсона. Начальная точка $x^0 = [2; 1]$.

Вид функции цели можно посмотреть в пакете Matlab, используя подпрограмму:

```
[x1,x2]=meshgrid([0:0.1:6]);
F=-2*x1.^2+18*x1-2*x1.*x2-x2.^2+12*x2;
meshc(x1,x2,F);
```

На рис. 4.8 приведен вид функции F вместе с проекциями линии уровня: функция выпуклая вверх и имеет максимум.

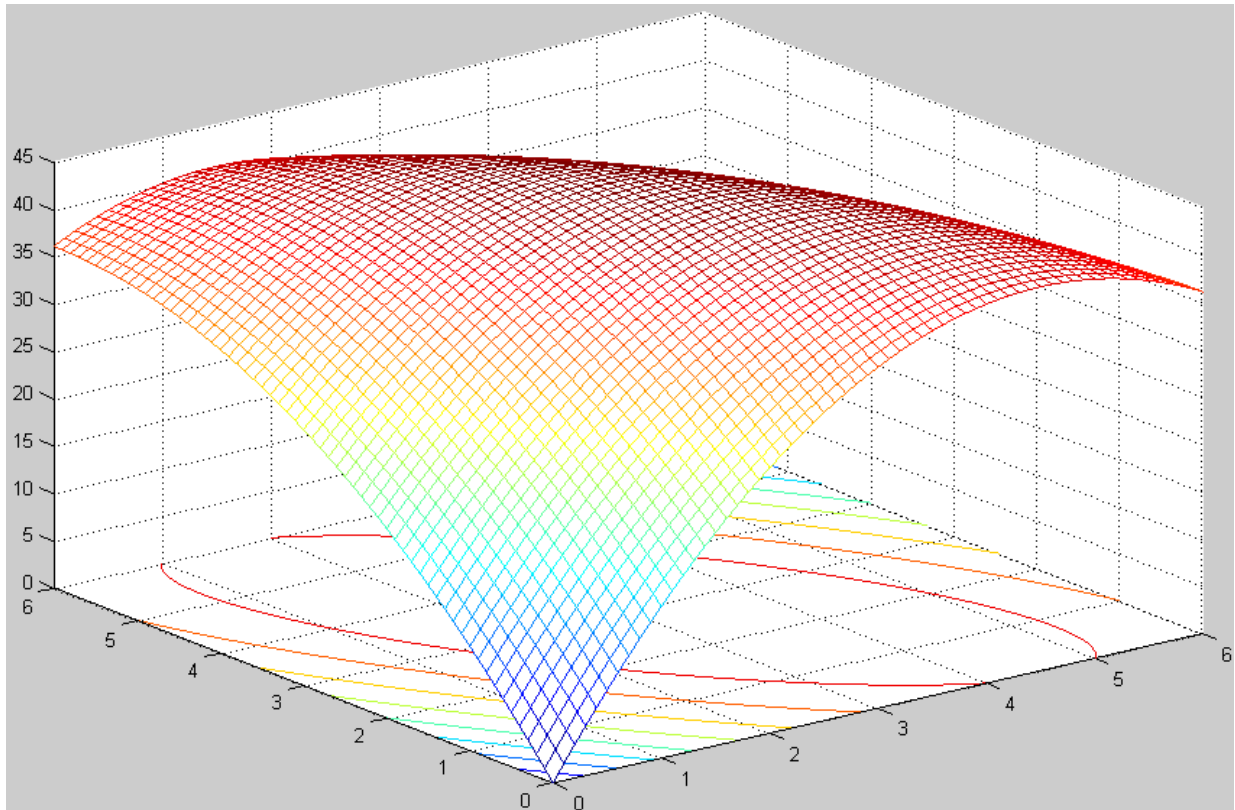


Рис. 4.8

В методе наискорейшего спуска (подъёма) очередная точка при поиске максимума функции вычисляется по формуле $x^{k+1} = x^k + \alpha^k * \nabla F(x^k)$, где направление движения задается вектором градиента $\nabla F(x)$ функции $F(x)$, вычисленном в точке x^k , а величина шага перемещения определяется числовым параметром α^k .

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [-4x_1 + 18 - 2x_2; -2x_1 - 2x_2 + 12];$$

$$\nabla F(x^0) = [8; 6].$$

На первом шаге движение осуществляется из точки x^0 вдоль вектора $\nabla F(x^0)$ в новую точку x^1 :

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} + \alpha^0 \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 8\alpha^0 \\ 1 + 6\alpha^0 \end{bmatrix}.$$

Величина шага α^k на любом шаге выбирается из условия обеспечения экстремума функции в рассматриваемом направлении. Подставляя координаты точки x^1 в функцию $F(x)$, получим

$$\begin{aligned} F(\alpha^0) &= -2(2 + 8\alpha^0)^2 + 18(2 + 8\alpha^0) - 2(2 + 8\alpha^0)(1 + 6\alpha^0) - \\ &- (1 + 6\alpha^0)^2 + 12(1 + 6\alpha^0) = -260(\alpha^0)^2 + 100\alpha^0 + 35; \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha^0} &= -520\alpha^0 + 100 = 0; \quad \alpha^0 = 0,192. \end{aligned}$$

В результате после первого шага координаты очередной точки получаются равными:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= 2 + 8\alpha^0 = 2 + 8 \cdot 0,192 = 3,54; \\ x_2^1 &= 1 + 6\alpha^0 = 1 + 6 \cdot 0,192 = 2,15. \end{aligned}$$

Вычисляется $\nabla F(x^1)$. Если $\|\nabla F(x^1)\| \leq \varepsilon$ (ε – точность решения задачи), поиск прекращается и считается, что $x^* = x^1$. Если нет, переходят к шагу 2. $\nabla F(x^1) = [-0,46; 0,62]$. Пусть $\varepsilon \leq 0,1$, тогда

$$\|\nabla F(x^1)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2} = \sqrt{(0,46)^2 + (0,62)^2} = \sqrt{0,59} = 0,768.$$

На втором шаге движение осуществляется в направлении вектора $\nabla F(x^1)$ с величиной шага α^1 :

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,54 \\ 2,15 \end{bmatrix} + \alpha^1 \begin{bmatrix} -0,46 \\ 0,62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,54 - 0,46\alpha^1 \\ 2,15 + 0,62\alpha^1 \end{bmatrix};$$

$$F(\alpha^1) = -0,24(\alpha^1)^2 + 0,6\alpha^1 + 44,8;$$

$$\frac{dF}{d\alpha^1} = -0,48\alpha^1 + 0,6 = 0; \quad \alpha^1 = 1,25;$$

$$x_1^2 = 3,54 - 0,46 \cdot 1,25 = 2,965;$$

$$x_2^2 = 2,15 + 0,62 \cdot 1,25 = 2,92;$$

$$\nabla F(x^2) = [0,32; 0,24];$$

$$\|\nabla F(x^2)\| = \sqrt{0,32^2 + 0,24^2} = \sqrt{0,16} = 0,4.$$

Заданная точность не обеспечена, следует сделать еще один шаг, в результате которого точка экстремума определится координатами $x^* = x_3 = [3; 3]$, $F_{\max} = 45$.

Рассмотрим графическую интерпретацию решения задачи.

На плоскости x_1, x_2 (рис. 4.9) приведены линии уровня функции цели F , построенные в Matlab, в соответствии с подпрограммой:

```
>> [x1,x2]=meshgrid([0:0.1:6]);  
>> F=-2*x1.^2+18*x1-2*x1.*x2-x2.^2+12*x2;  
>> figure;  
>> cl=[15 25 30 35 40 43 45];  
>> [c,h]=contour3(x1,x2,F,cl,'r');  
>> clabel(c,h);  
>> view(0,90);  
>>
```

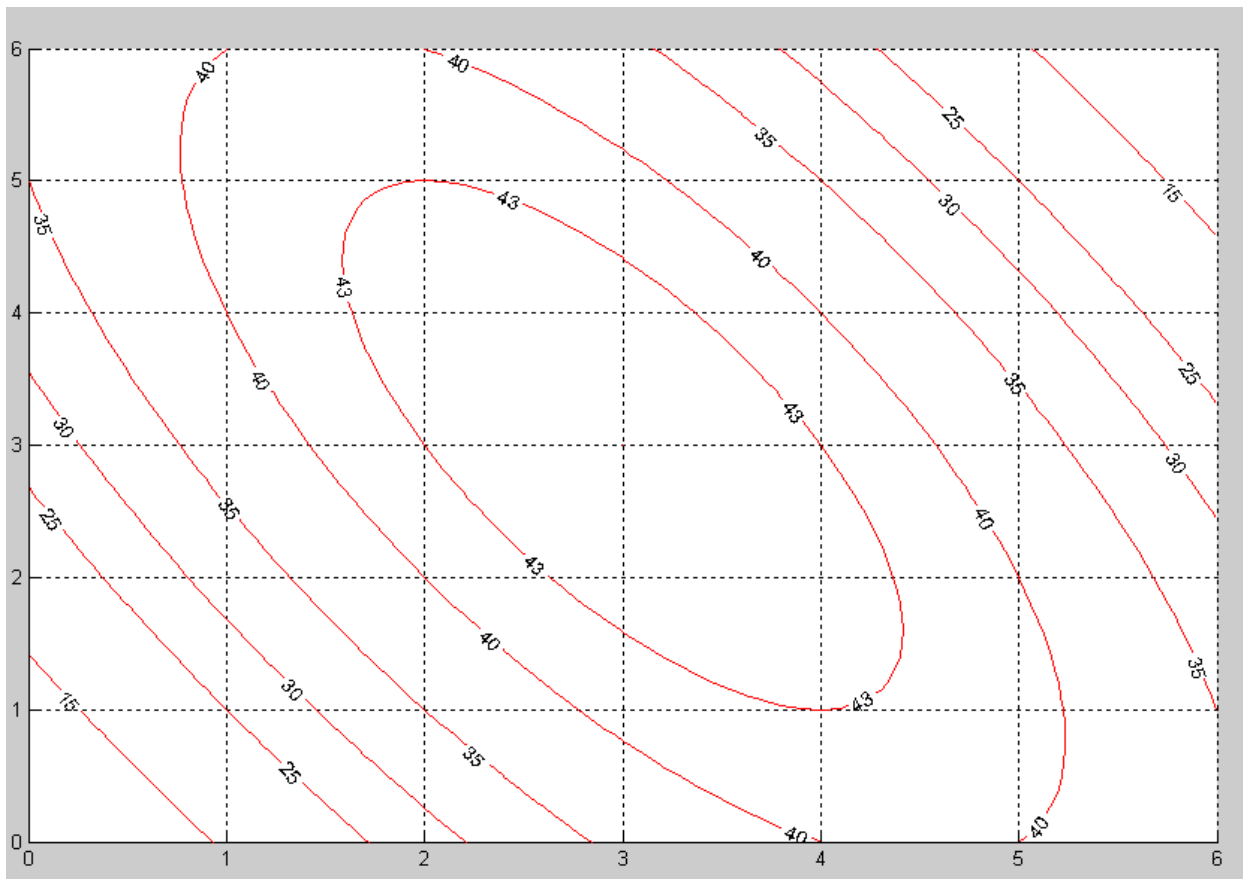


Рис. 4.9

Центр concentрических линий является точкой экстремума x^* .

В процессе поиска траектория движения должна из начальной точки x^0 привести в конечную точку x^* (рис. 4.10).

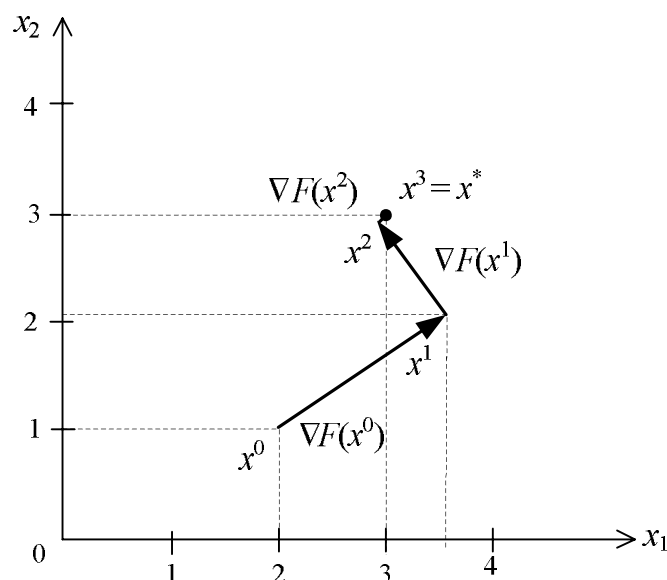


Рис. 4.10

Следует обратить внимание на то, что каждая очередная точка лежит на направлении вектора градиента, вычисленного в этой точке, и каждое последующее направление перпендикулярно предыдущему.

Решим эту же задачу методом Ньютона – Рафсона. Очередная точка поиска вычисляется в соответствии с выражением

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k)\nabla F(x^k),$$

где $H(x)$ – матрица Гессе функции $F(x)$; $H^{-1}(x)$ – обратная по отношению к $H(x)$ матрица.

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [-4x_1 - 2x_2 + 18; \quad -2x_1 - 2x_2 + 12];$$

$$\nabla F(x^0) = [8; 6];$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}; \quad H(x) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad H^{-1} = \frac{1}{\det H} \cdot AdjH,$$

где $\det H$ – определитель матрицы H ; $AdjH$ – присоединенная к H матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений).

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы H : $\nabla_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$, тогда $\Delta_{11} = -2$; $\nabla_{12} = +2$; $\nabla_{21} = +2$; $\Delta_{22} = -4$.

Соответственно

$$AdjH = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}; \det H = 4; H^{-1} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & +3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$\nabla F(x^1) = [-12 + 18 - 6; -6 - 6 + 12] = [0; 0].$$

Следовательно, в точке $x^1 = [3; 3]$ функция $F(x)$ достигает максимального значения $F_{\max} = 45$.

3.2. Найти максимальное значение функции $F(x) = -2x_1^2 + 18x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 12x_2$ при ограничениях $2x_1 + x_2 \geq 2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ методом допустимых направлений Зойтендейка.

Начальная точка $x^0 = [2; 1]$.

Область допустимых значений переменных (ОДЗП) приведена на рис. 4.11.

Последовательность решения задачи:

1. Находится направление вектора градиента в точке x^0 , $\nabla F(x^0) = [8; 6]$, тогда координаты очередной точки $x_1^1 = 2 + 8\alpha^0$; $x_2^1 = 1 + 6\alpha^0$ (см. предыдущий пример).

2. Определяем интервал допустимых значений для параметра α^0 , при котором точка x^1 будет принадлежать ОДЗП. Для этого координаты точки x^1 подставляются в ограничения задачи

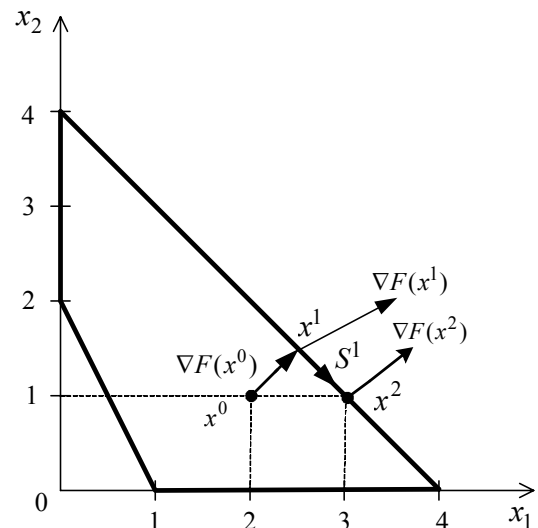


Рис. 4.11

$$\begin{cases} 2(2 + 8\alpha^0) + (1 + 6\alpha^0) \geq 2 & \alpha^0 \geq -0,136; \\ 2 + 8\alpha^0 + 1 + 6\alpha^0 \leq 4 & \alpha^0 \leq 0,071; \\ 2 + 8\alpha^0 \geq 0 & \alpha^0 \geq -0,25; \\ 1 + 6\alpha^0 \geq 0 & \alpha^0 \geq -0,167. \end{cases} \Rightarrow$$

Выбираем наиболее сильные из полученных условий, тогда

$$-0,135 \leq \alpha^0 \leq 0,071.$$

3. Находим величину α^0 , которая обеспечит максимум функции $F(x)$. Процедура полностью совпадает с первым шагом решения задачи методом наиско-

рейшего спуска, поэтому $\alpha^0 = 0,192$. Это значение α^0 не принадлежит найденному интервалу (п. 2), поэтому принимается, что $\alpha^0 = 0,071$. При этом очередная точка x^1 поисковой траектории оказывается на границе области и находится на прямой, соответствующей уравнению $x_1 + x_2 = 4$. Координаты точки x^1 и значения градиента функции в этой точке $\nabla F(x^1)$ определяются выражениями:

$$x_1^1 = 2 + 8\alpha^0 = 2 + 0,568 = 2,568;$$

$$x_2^1 = 1 + 6\alpha^0 = 1 + 0,425 = 1,425;$$

$$\nabla F(x^1) = [5,12; 4,01].$$

4. Движение в направлении $\nabla F(x^1)$ выводит за пределы ОДЗП, поэтому очередная точка поиска вычисляем по выражению $\alpha^{k+1} = x^k + \alpha^k S^k$, где S^k – новое направление движения, которое составляет минимальный острый угол с вектором градиента и направлено либо внутрь, либо по границе ОДЗП. При этом очередная точка должна принадлежать ОДЗП, а функция цели при переходе к очередной точке должна увеличиваться максимальным образом.

Направление S^k находим, как решение задачи:

$$\max \{ \nabla F^T(x^k) \cdot S^k \mid a_j^T S^k \leq 0, \|S^k\| \leq 1 \}.$$

Направление S^1 очередного шага определяем из условия

$$a_j^T S^1 = [1 \ 1] \begin{bmatrix} S_1^1 \\ S_2^1 \end{bmatrix} = S_1^1 + S_2^1 = 0,$$

где a_j^T – вектор коэффициентов при переменных во втором ограничении, на котором находится точка x^1 .

Отсюда следует, что $S_2^1 = -S_1^1$, тогда $\|S^1\| = \sqrt{(S_1^1)^2 + (S_2^1)^2} = 1$; $\sqrt{2(S_1^1)^2} = 1$; $S_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,41} = 0,71$; $S_2^1 = -0,71$. Таким образом, $\max \nabla F^T(x_1) \cdot S_1$ достигается при $S_1^1 = 0,71$; $S_2^1 = -0,71$.

При движении из точки x^1 в точку x^2 следует двигаться по граничной прямой в направлении S^1 , как показано на рис. 4.11.

5. Координаты точки x^2 определяются выражением

$$x^2 = x^1 + \alpha^1 S^1$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,568 \\ 1,426 \end{bmatrix} + \alpha^1 \begin{bmatrix} 0,71 \\ -0,71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,568 + 0,71\alpha^1 \\ 1,426 - 0,71\alpha^1 \end{bmatrix}.$$

Находим интервал изменения α^1 , при котором x^2 принадлежит ОДЗП:

$$\begin{cases} 2(2,568 + 0,71\alpha^1) + 1,426 - 0,071\alpha^1 \geq 2, \\ 2,568 + \alpha^1 \geq 0, \\ 1,426 - 0,71\alpha^1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^1 \geq -6,42, \\ \alpha^1 \geq -3,62, \\ \alpha^1 \geq 2,01. \end{cases}$$

Второе ограничение опущено, так как точка x^2 принадлежит соответствующей ему прямой, тогда $-3,62 \leq \alpha^0 \leq 2,01$.

6. Находим α^1 , которое обеспечит максимум функции $F(x)$ в направлении S^1 .

Для этого координаты точки x^2 подставляются в функцию $F(x)$, тогда

$$F(\alpha^1) = 29,58 - 1,01(\alpha^1)^2 + 1,22\alpha^1;$$

$$\frac{dF}{d\alpha^1} = -2,02\alpha^1 + 1,22 = 0, \quad \alpha^1 = 0,6,$$

Значение α^1 принадлежит интервалу, найденному в п. 5, поэтому для расчета координат точки x^2 принимается $\alpha^1 = 0,6$:

$$x_1^2 = 2,568 + 0,71 \cdot 0,6 = 2,994 \approx 3;$$

$$x_2^2 = 1,425 - 0,71 \cdot 0,6 = 0,999 \approx 1.$$

Вычисляются составляющие вектора градиента в точке x^2 :

$$\nabla F(x^2) = [-4 \cdot 3 + 18 - 2 \cdot 1; -2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 12] = [4; 4].$$

Направление вектора $\nabla F(x^2)$ перпендикулярно направлению S^1 , следовательно, найденная точка $x^2 = [3; 1]$ обеспечивает максимум функции $F(x)$ с учетом ограничений на переменные: $F_{\max} = 41$.

3.3. Найти максимальное значение функции $F(x) = -2x_1^2 + 18x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 12x_2$ при ограничениях $2x_1 + x_2 \geq 2$; $x_1 + x_2 \leq 4$; $x_{1,2} \geq 0$, используя условия теоремы Куна – Таккера.

Последовательность решения задачи:

1. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T g(x) = F(x) + \sum_j \lambda_j \cdot g_j(x).$$

Здесь $g_j(x)$ – левые части ограничений, приведенных к нулевой правой части; λ_j – неопределенные множители Лагранжа:

$$g_1(x) = -2 + 2x_1 + x_2 \geq 0; \quad g_2(x) = 4 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

Точка экстремума является седловой точкой с максимумом по x и минимумом по λ , поэтому ограничения приведены к виду $g_j(x) \geq 0$:

$$L(x, \lambda) = -2x_1^2 + 18x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 12x_2 + \lambda_1(-2 + 2x_1 + x_2) + \lambda_2(4 - x_1 - x_2).$$

2. Условия теоремы Куна – Таккера записываем следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_i} \Big|_{x^*, \lambda^*} \leq 0, \\ x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i} \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ x_i^* \geq 0, \quad i = 1, n. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \Big|_{x^*, \lambda^*} \geq 0, \\ \lambda_j^* \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ x_j^* \geq 0, \quad j = 1, n. \end{array} \right.$$

Частные производные функции Лагранжа определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -4x_1 + 18 - 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -2x_1 - 2x_2 + 12 + \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= -2 + 2x_1 + x_2 \geq 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 4 - x_1 - x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Для приведения неравенств к виду равенств вводятся дополнительные неотрицательные переменные V и W . Одновременно свободные члены переносятся в правую часть, тогда

$$\begin{aligned} -4x_1 + 18 - 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 + V_1 &= -18, & -2x_1 - 2x_2 + 12 + \lambda_1 - \lambda_2 + V_2 &= -12, \\ 2x_1 + x_2 - W_1 &= 2, & -x_1 - x_2 - W_2 &= -4. \end{aligned}$$

Решение этой системы из четырех алгебраических уравнений, содержащих восемь неизвестных, можно найти с помощью симплекс – процедуры. На первом шаге в базис включаются все введенные дополнительные переменные, тогда первая симплекс-таблица соответствует табл. 4.6. Строка для функции цели отсутствует. Процедура решения иллюстрируется симплекс – таблицами (табл. 4.6 – 4.9).

В каждой из таблиц выделен ведущий элемент. Решение, определяемое табл. 4.9, соответствует допустимому базисному решению $x_1=3$; $x_2=1$; $W_1=5$; $\lambda_2=4$; $V_1=V_2=\lambda_1=W_2=0$. Кроме того, выполняется условие $x_1v_1=x_2v_2=$
 $=\lambda_1\omega_1=\lambda_2\omega_2=0$, поэтому $x_1^*=3$, $x_2^*=1$ является оптимальным решением задачи $F_{\max}=41$.

Таблица 4.6

БП.	Св. чл.	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	λ_1	λ_2
v_1	-18	-4	-2	2	-1
v_2	-12	-2	-2	1	-1
ω_1	-2	-2	-1	0	0
ω_2	4	1	1	0	0

Таблица 4.7

БП.	Св. чл.	Небазисные переменные			
		x_1	v_2	λ_1	λ_2
v_1	-6	-2	-1	1	0
x_2	6	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ω_1	4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ω_2	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Таблица 4.8

БП.	Св. чл.	Небазисные переменные			
		v_1	v_2	λ_1	λ_2
x_1	3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
ω_1	7	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$
ω_2	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Таблица 4.9

БП.	Св. чл.	Небазисные переменные			
		v_1	v_2	λ_1	ω_2
x_1	3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
ω_1	5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
λ_2	4	0	-1	-1	-1

3.4. Найти максимальное значение функции $F(x) = -2x_1^2 + 18x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 12x_2$ при ограничениях $2x_1 + x_2 \geq 2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ методом линейных комбинаций. Начальная точка $x^0 = [2; 1]$.

Область допустимых значений переменных (ОДЗП) приведена на рис. 4.12.

Суть метода линейных комбинаций заключается в линеаризации функции $F(x)$ и замене ее линейной функцией $w(x)$ в соответствии с выражением

$$w(x) = \nabla F(x)^T \cdot x.$$

Последовательность решения задачи:

1. Находим направление вектора градиента в точке x^0 ; $\nabla F(x^0) = [8, 6]$, в соответствии с этим

$$w(x^0) = [8, 6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 8x_1 + 6x_2.$$

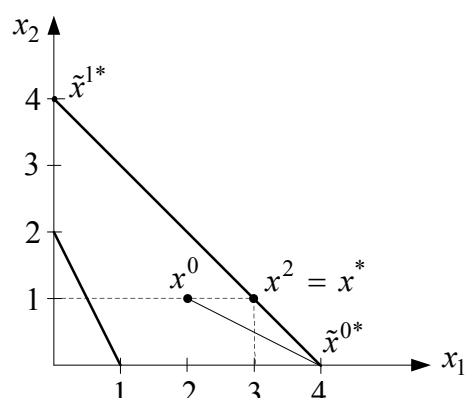


Рис. 4.12

2. Решаем задачу линейного программирования $w(x^0) = 8x_1 + 6x_2$ (max) при ограничениях $2x_1 + x_2 \geq 2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_{12} \geq 0$.

В результате получаем одну из вершин ОДЗП $\tilde{x}^{0*} = [4, 0]$. Это оптимальное решение линейаризованной задачи (см. рис. 4.12).

3. Произведем корректировку найденного решения в соответствии с выражением

$$x^1 = x^0 + \alpha^0(\tilde{x}^{0*} - x^0)$$

или
$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha^0 \begin{bmatrix} 4 - 2 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2\alpha^0 \\ 1 - \alpha^0 \end{bmatrix}.$$

4. Находим значение α^0 , которое максимизирует $F(x^1)$. Подставляя x_1^1 и x_2^1 в $F(x)$, получим

$$F(\alpha^0) = -2(2 + 2\alpha^0)^2 + 18(2 + 2\alpha^0) - 2(2 + 2\alpha^0)(1 - \alpha^0) - (1 - \alpha^0)^2 + 12(1 - \alpha^0) = -5(\alpha^0)^2 + 10\alpha^0 + 35.$$

Тогда $\frac{\partial F}{\partial \alpha^0} = -10\alpha^0 + 10 = 0$, отсюда $\alpha^0 = 1$.

Координаты точки x^1 определяются следующим образом: $x_1^1 = 2 + 2\alpha^0 = 4$; $x_2^1 = 1 - \alpha^0 = 0$. В рассматриваемом случае точка x^1 совпала с точкой \tilde{x}^{0*} , но в общем случае она должна принадлежать прямой, соединяющей точки x^0 и \tilde{x}^{0*} .

5. Осуществляем линейаризацию $F(x)$ относительно найденной точки x^1 . $\nabla F(x^1) = [2, 4]$, тогда $w(x^1) = 2x_1 + 4x_2$.

6. Решаем задачу линейного программирования $w(x^1) = 2x_1 + 4x_2$ (max) при ограничениях $2x_1 + x_2 \geq 2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_{12} \geq 0$.

Оптимальное решение достигается в вершине ОДЗП $\tilde{x}^{1*} = [0, 4]$.

7. Точка x^2 , соответствующая скорректированному решению, должна принадлежать прямой, соединяющей x^1 и \tilde{x}^{1*} (в нашем случае это правая граница ОДЗП) $x^2 = x^1 + \alpha^1(\tilde{x}^{1*} - x^1)$ или

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha^1 \begin{bmatrix} 0 - 4 \\ 4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 4\alpha^1 \\ 0 + 4\alpha^1 \end{bmatrix}.$$

8. Находим значение α^1 , которое максимизирует $F(x^2)$. Подставляя x_1^2 и x_2^2 в $F(x)$, получим

$$F(\alpha^1) = -2(4 - 4\alpha^1)^2 + 18(4 - 4\alpha^1) - 2(4 - 4\alpha^1)(0 + 4\alpha^1) - (0 + 4\alpha^1)^2 + \\ + 12(0 + 4\alpha^1) = -16(\alpha^1)^2 + 8\alpha^1 + 40.$$

Тогда $\frac{\partial F}{\partial \alpha^0} = -32\alpha^1 + 8 = 0$ и $\alpha^1 = 0,25$.

Координаты точки x^2 будут равны $x_1^2 = 4 - 4\alpha^1 = 3$; $x_2^2 = 4\alpha^1 = 1$. Это и есть точка экстремума, полученные данные совпадают с результатом, полученным предыдущими методами.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Рабочая программа по дисциплине «математические основы теории систем».....	3
1.1. Цель и задачи преподавания дисциплины.....	3
1.2. Методические указания.....	4
1.3. Содержание дисциплины	4
1.4. Курсовая работа, ее характеристика	11
1.5. Контрольные работы, их характеристика.....	12
Литература.....	13
2. Задания по выполнению контрольной работы.....	16
3. Варианты заданий по курсовой работе	44
4. Методические указания и примеры выполнения заданий по курсовой работе.....	54

Учебное издание

Павлова Анна Валентиновна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Методическое пособие
для студентов специальности 1-53 01 07 «Информационные технологии
и управление в технических системах»
заочной формы обучения

Редактор Н. В. Гриневич

Подписано в печать
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 5,0.

Формат 60×84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л.
Заказ 814.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/000494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П.Бровки, 6.