**Олимпиада по высшей математике (БГУИР, 2011).**
**Задачи и решения.**
**1 курс**

1. Изобразите кривую, заданную уравнением
$\max((144-25x^2-9y^2-54y), \quad \min(y, 25-5y-x^2)) = 0.$
Дайте обоснование построению.

2. Найдите порядок определителя, при котором уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} = 2011$$

имеет корень $x = 6$.

**Решение.**
Обозначим заданный определитель $\Delta_n$ и разложим его по первой строке:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} = 2\cdot\Delta_{n-1} - 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} = 2\cdot\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Итак, $\Delta_1 = 6;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\Delta_3 = 2\cdot 11 - 6 = 16.$$

Докажем методом математической индукции, что $\Delta_n = 5n+1$.
Предположим, что $\Delta_k = 5k+1, \quad \Delta_{k-1} = 5k-4$.
Тогда $\Delta_{k+1} = 2\Delta_k - \Delta_{k-1} = 2(5k+1)-(5k-4) = 10k+2-5k+4 = 5k+6 = 5(k+1)+1$.
Итак, в соответствии с методом математической индукции

$$\Delta_n = 5n+1.$$

Тогда $5n+1=2011$; $\quad 5n=2010$; $\quad n=402$.
Порядок определителя $\quad n=402$.

3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left((1+x)(1+2x)^{1/2}(1+3x)^{1/3}\dots(1+2011x)^{1/2011} - 1\right)$.

**Решение.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left((1+x)(1+2x)^{1/2}\dots(1+2011x)^{1/2011}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\underbrace{\left((1+x)\cdot(1+x+o(x))\cdot\ldots(1+x+o(x))-1\right)}_{2011\ \text{множителей}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(1 + 2011x + o(x) - 1) = 2011.$$

4. Решите уравнение $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$. Найденные комплексные корни запишите в алгебраической форме.

**Решение.**

$$z_{1,2} = \frac{z + i + \sqrt{(2+i)^2 - 4(-1+7i)}}{2} = \frac{2 + i + \sqrt{7 - 24i}}{2};$$

$$\sqrt{7 - 24i} = x + iy;$$

$$7 - 24i = x^2 + 2xyi - y^2;$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm 4 \\ y = \mp 3 \end{matrix};$$

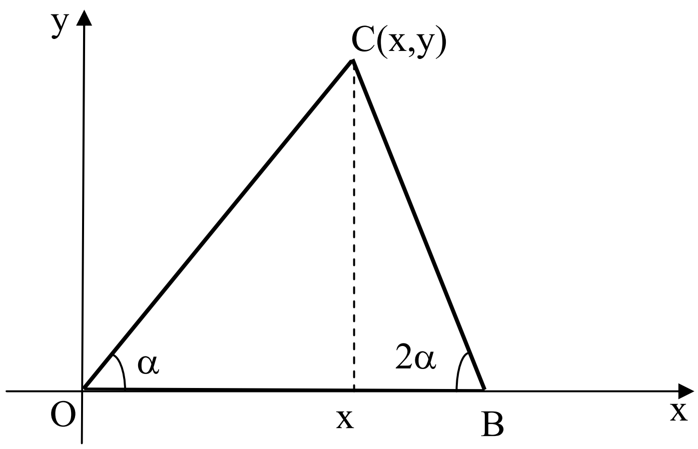
Тогда

$$z_1 = \frac{2 + i + 4 - 3i}{2} = 3 - i;$$

$$z_2 = \frac{2 + i - 4 + 3i}{2} = -1 + 2i.$$

4. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина?

**Решение.**




Пусть вершины O и B зафиксированы. Выберем систему координат так, как показано на рисунке.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$; $|OB| = a.$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{y}{a - x}.$$

Но $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y}{a-x} = \dfrac{2\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y^2}{x^2}} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

$$\frac{y}{a-x} = \frac{2xy}{x^2-y^2};$$

$$x^2-y^2 = 2x(a-x);$$

$$x^2-y^2 = 2ax-2x^2;$$

$$3x^2-2ax-y^2=0;$$

$$3(x^2-\frac{2}{3}ax+\frac{a^2}{9})-y^2=\frac{a^2}{3}.$$

$$3(x-\frac{a}{3})^2-y^2=\frac{a^2}{3};$$

$(x-\dfrac{a}{3})^2-\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{a^2}{9}$ – это уравнение гиперболы.

Замечание. Уравнение гиперболы может быть выражено другой формулой, если система координат выбрана другим образом.

6. Пусть $f:[a;b]\to R$ – непрерывная функция, дифференцируемая на $(a;b)$, где $a$ и $b$ – положительные числа. Докажите, что найдется такая точка $c\in(a;b)$, что $\dfrac{1}{a-b}(a\,f(b)-b\,f(a)) = f(c)-c\,f'(c)\cdot$

**Решение.**

Функции $\dfrac{f(x)}{x}$ и $\dfrac{1}{x}$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$ и $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\neq 0$ для $\forall x\in(a;b)$. Тогда по теореме Коши найдется по крайней мере одна точка $c\in(a;b)$, такая, что

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}} = \frac{\dfrac{f'(c)\cdot c-f(c)}{c^2}}{-\dfrac{1}{c^2}};$$

$$\frac{\dfrac{af(b)-bf(a)}{ab}}{\dfrac{a-b}{ab}} = -(f'(c)\cdot c-f(c));$$

$$\frac{1}{a-b}(af(b)-bf(a)) = f(c)-c\cdot f'(c).$$

## 2 – 5 курсы

**1.** Изобразите кривую, заданную уравнением

$$\max((144-25x^2-9y^2-54y),\quad \min(y,25-5y-x^2))=0.$$

Дайте обоснование построению.

**2.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

**Решение.**

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}=\frac{\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}}{4n^2}=\frac{1}{4n^{3/2}}.$$

$\alpha=\frac{3}{2}>1 \quad\Rightarrow\quad$ ряд сходится.

3. Найдите $f^{(42)}(0)$, если $f(x)=\sin(x^2)$.

**Решение.**

Заметим, что в разложении функции $f(x)$ в ряд Маклорена $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ коэффициент при $x^n$ равен $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. С другой стороны, разложение функции $\sin(x^2)$ в степенной ряд имеет вид:

$$\sin(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots+\frac{x^{42}}{21!}-\ldots$$

Таким образом, $\frac{1}{21!}=\left.\frac{(\sin(x^2))^{(42)}}{42!}\right|_{x=0}$.

Отсюда, $\left.(\sin(x^2))^{(42)}\right|_{x=0}=\frac{42!}{21!}$.

4. Задана последовательность чисел Фибоначчи:

$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\ n>2$.

Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}$.

**Решение.**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_n\cdot F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}\cdot F_n\cdot F_{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{n-1}\cdot F_n}-\frac{1}{F_n\cdot F_{n+1}}\right)=$$

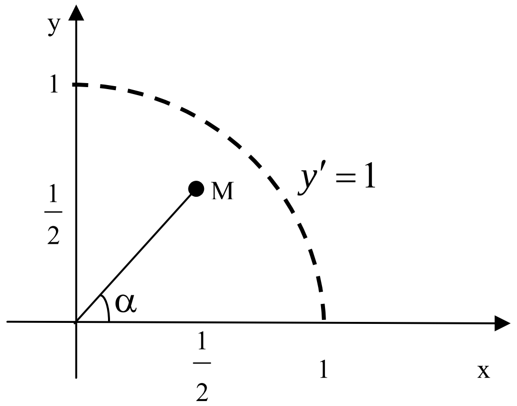
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_2F_3}+\frac{1}{F_2F_3}-\frac{1}{F_3F_4}+\ldots+\frac{1}{F_{n-1}F_n}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_1F_2}-\frac{1}{F_nF_{n+1}}\right)=\frac{1}{F_1F_2}=1.$$

5. Проходит ли интегральная кривая дифференциального уравнения $y'=x^2+y^2,\quad y(0)=0$ через точку $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$?

**Решение.**

$y'>0$, кроме (0; 0). Чтобы решение проходило через точку М по теореме Лагранжа о среднем на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ должна быть точка «С», в которой производная должна быть равна $tg\,\alpha$, т.е. единице. Строим изоклину $y'=1$. $x^2+y^2=1$.

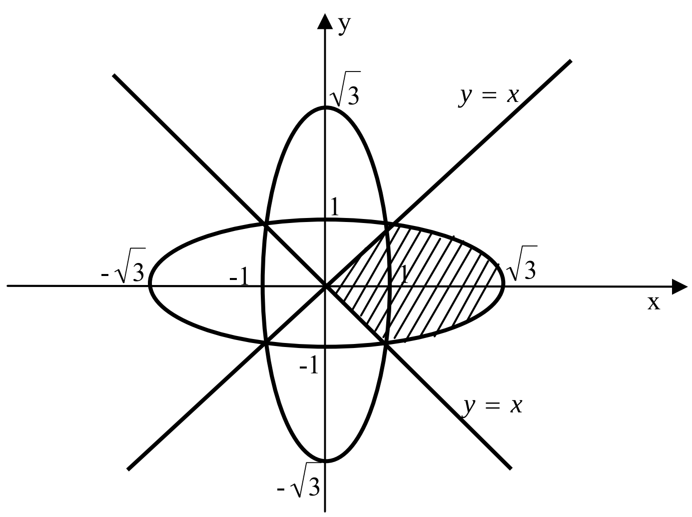



Из условия $y'>0$, поэтому очевидно, что ни одна монотонно возрастающая интегральная кривая, удовлетворяющая $y(0)=0$, не может проходить через точку М.

Ответ: нет.

6. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют хотя бы одному из неравенств $\frac{x^2}{3}+y^2\le 1$ или $x^2+\frac{y^2}{3}\le 1$.

Решение.



Прямые $y = x$ и $y = -x$ делят рассматриваемую фигуру на 4 равных по площади части. $S = 4S_1$.

$$S_1 = \iint\limits_D dxdy = \begin{bmatrix} x = \sqrt{3}\, r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ I = \sqrt{3}\, r \\ r\sin\varphi = \sqrt{3}\, r\cos\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \end{bmatrix} = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{3}\, rdr = \sqrt{3}\,\varphi \Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^1 = \sqrt{3}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$S = 4\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$