

С. В. Лукьянец, А. Т. Доманов, В. П. Кузнецов, М. А. Крупская

Конспект лекций

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 2

**Дискретные, нелинейные,
оптимальные и адаптивные системы**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	7
1. Общие сведения.....	7
1.1. Основные понятия.....	7
1.2. Классификация импульсных систем.....	8
1.3. Примеры дискретных систем.....	10
2. Математическое описание дискретных систем.....	13
2.1. Понятие систем с дискретным временем.....	13
2.2. Решетчатые функции и разностные уравнения.....	14
2.3. Дискретное преобразование Лапласа и его свойства.....	15
2.4. Решение разностных уравнений.....	21
2.5. Передаточные функции и схемы моделирования дискретных систем.....	22
2.6. Представление данных в импульсной системе.....	24
2.7. Частотные свойства дискретного преобразования.....	25
2.8. Восстановление данных.....	27
2.9. Импульсная передаточная функция разомкнутой системы.....	29
2.10. Импульсная передаточная функция замкнутой системы.....	32
2.11. Процессы в импульсных системах.....	34
3. Анализ устойчивости дискретных систем.....	37
3.1. Условия устойчивости.....	38
3.2. Билинейное преобразование.....	40
3.3. Критерий Рауса-Гурвица.....	41
3.4. Критерий Найквиста.....	42
3.5. Логарифмический критерий Найквиста.....	43
3.6 Критерий Михайлова.....	46
4. Точность дискретных систем.....	47
5. Синтез дискретных систем.....	49
5.1. Замена дискретной системы эквивалентной непрерывной системой.....	50
W	
5.3. Синтез регулятора с отставанием по фазе.....	54
5.4 Синтез регулятора с опережением по фазе.....	57
5.5. Цифровые ПИД-регуляторы.....	58
5.6. Особенности реализации дискретной коррекции.....	59
6. Математическое описание линейных дискретных систем в пространстве состояния.....	60
6.1. Уравнения состояния дискретных систем и схемы моделирования.....	60
6.2. Решение уравнений состояния.....	62
6.3. Основные формы уравнений состояния импульсных систем.....	65
6.4. Преобразование уравнений состояния.....	67
6.5 Управляемость и наблюдаемость дискретных систем.....	69
НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	71
1. Общие сведения о нелинейных системах.....	71
1.1. Основные понятия и особенности нелинейных систем.....	71
1.2. Характеристики типовых нелинейностей и их соединений.....	72
1.3. Классификация и примеры нелинейных систем.....	77
1.4. Методы исследования нелинейных систем.....	79

2. Метод фазового пространства	80
2.1. Фазовое пространство	80
2.2. Методы построения фазовых портретов	85
2.3. Анализ нелинейной системы с насыщением	89
2.4. Анализ нелинейной системы с насыщением и местной ОС по скорости	91
2.5. Исследование динамики релейной системы с идеальным двигателем	95
3. Анализ нелинейных систем на основе методов А.М. Ляпунова и В.М. Попова	100
3.1. Исследование устойчивости нелинейных систем по линейному приближению	100
3.2. Применение второго метода Ляпунова к анализу устойчивости нелинейных систем	101
3.3. Анализ устойчивости нелинейных систем методом В. М. Попова	102
4. Метод гармонической линеаризации	104
4.1. Сущность метода гармонической линеаризации	104
4.2. Определение амплитуды и частоты автоколебаний	107
5. Вынужденные колебания в нелинейных системах	110
5.1. Определение параметров и устойчивости вынужденных колебаний (задача Дуффинга)	110
5.2. Метод эллипса	113
5.3. Метод Гольдфарба	114
6. Временные характеристики нелинейных систем	117
6.1. Построение переходного процесса методом фазовой плоскости	117
6.2. Построение переходного процесса методом гармонической линеаризации	118
6.3. Компьютерное моделирование переходного процесса	120
7. Коррекция нелинейных систем	122
7.1. Коррекция нелинейной системы с помощью обратной связи	122
7.2. Синтез компенсационных моделей	123
7.3. Метод вибрационной линеаризации	124
ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ	127
1. Общие сведения	127
2. Оптимизация параметров	128
3. Оценка точности настройки оптимальных параметров	131
4. Влияние разброса параметров на динамику системы	133
5. Учет физических ограничений	134
6. Синтез оптимальных регуляторов по квадратичному критерию качества	137
7. Методика синтеза оптимальной передаточной функции регулятора	140
8. Выбор весовых коэффициентов	141
9. Синтез оптимальных регуляторов по условиям быстродействия	142
10. Адаптивные системы. Принципы построения	155

ВВЕДЕНИЕ

К концу первой половины двадцатого столетия в основном завершилось формирование классической теории автоматического управления, которая рассмотрена в первой части данного пособия, посвященного изучению линейных непрерывных систем.

Во второй половине двадцатого века производство выдвинуло ряд задач оптимизации и адаптации процессов управления, первоначально при их рассмотрении «в малом», т.е. при незначительных отклонениях параметров от заданных значений. В дальнейшем появилась необходимость управления процессами при оптимизации «в большом». Наконец в последней четверти прошлого столетия создались благоприятные условия для реализации оптимального и адаптивного управления в реальном времени с появлением микроконтроллеров и микроЭВМ. В этот период развивается теория дискретных систем и современный математический аппарат пространства состояния.

Вторая часть пособия посвящена последовательному краткому изложению теории дискретных, нелинейных, оптимальных и адаптивных систем. Более полные сведения можно найти в приведенном списке использованной литературы.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Основные понятия

Дискретной называется система, в состав которой помимо непрерывных динамических звеньев входит хотя бы один элемент, производящий квантование непрерывного сигнала в дискретный.

Если сигнал определен лишь в некоторые, чаще всего равностоящие, дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots, t_k , то такой сигнал будем называть квантованным (дискретным) по времени и обозначать $f(t_k)$. Существенно, что между моментами квантования сигнал не определен. Величину $T = t_k - t_{k-1}$ называют периодом или шагом квантования. Такую систему называют импульсной.

Примерами импульсных систем могут служить системы радио- и оптической локации, системы с частотными датчиками.

Если сигнал принимает строго определенные значения (уровни) f_0, f_1, \dots, f_i , то такой сигнал называется квантованным по уровню. Величину $\Delta_I = f_i - f_{i-1}$ называют шагом квантования по уровню. Систему в этом случае называют релейной.

Благодаря простоте реализации и приемлемому качеству работы релейные системы получили широкое распространение в бытовой технике, например, системы регулирования температуры в холодильных и электронагревательных приборах.

Наконец, возможен случай сигнала, квантованного по времени и уровню одновременно, т. е. сигнал определен в дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots, t_k и может принимать только определенные значения f_0, f_1, \dots, f_i . Такая система называется цифровой.

К цифровым системам относятся системы автоматического управления, в замкнутый контур которых включается цифровое вычислительное устройство, что позволяет реализовать сложные алгоритмы управления. Включение цифрового вычислительного устройства в контур системы управления сопряжено с преобразованием непрерывных величин в дискретные на входе и с обратным преобразованием на выходе.

Развитие дискретных систем обусловлено постоянно повышающимися конструктивными, эксплуатационными и метрологическими требованиями к управлению. Например, в современных электромеханических системах требуется обеспечивать перемещение со скоростью достигающей 0,5 м/с, поддерживать эту скорость с погрешностью около 1%. Погрешность позиционирования при этом не должна превышать 1–2 мкм. Аналоговая система управления не может обеспечить таких показателей из-за инерционности и дрейфа нуля

операционных усилителей, на которых, как правило, реализуются устройства управления. Кроме того, при изменении режима работы системы необходимо перестраивать параметры регулятора, а возможно и менять саму структуру системы управления. Эта операция требует значительных затрат времени, а, следовательно, ведет к снижению производительности оборудования.

В дискретных системах отсутствует дрейф нуля, они обладают более высокой помехозащищенностью и устойчивостью к возмущениям, имеют меньшие габариты и вес. Закон управления в них реализуется программно, что позволяет быстро перестраивать параметры регуляторов, а при необходимости и их структуру. Применение микропроцессоров в дискретных системах также позволяет расширить функции управления, например, организовать тестовый контроль за работой элементов системы, своевременно обнаружить тенденцию к нарушению работоспособности элементов системы, указать место «отказа» системы, учесть физические ограничения элементов.

В то же время расчет и проектирование цифровых дискретных систем требуют более четкой постановки ряда задач: тщательной разработки алгоритмов управления, грамотного выбора аппаратных средств для их реализации, создания собственных систем команд и архитектуры вычислительных средств, проектирования средств программного обеспечения.

1.2. Классификация импульсных систем

Как было отмечено, характерной особенностью импульсных систем автоматического управления (ИСАУ) является то, что хотя бы одна из переменных является квантованной по времени. Эти квантованные по времени величины при помощи импульсной модуляции преобразуются в последовательность импульсов, которые в дальнейшем воздействуют на непрерывную часть системы. Процесс квантования и импульсной модуляции осуществляется импульсным элементом. Импульсную систему в общем случае можно представить в виде импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НЧ) (рис. 1.1).

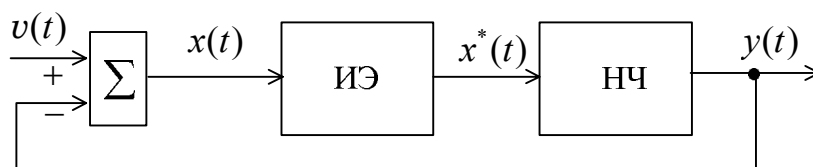


Рис. 1.1. Типовая структурная схема ИСАУ: $v(t)$ – входной сигнал; $x(t)$ – сигнал рассогласования, входной сигнал ИЭ; $x^*(t)$ – импульсный сигнал с выхода ИЭ; $y(t)$ – выходной сигнал

Импульсный элемент преобразует непрерывно изменяющуюся величину $x(t)$ в последовательность модулированных импульсов $x^*(t)$, осуществляя при этом квантование сигнала (рис. 1.2, а) и модуляцию (рис. 1.2, б).

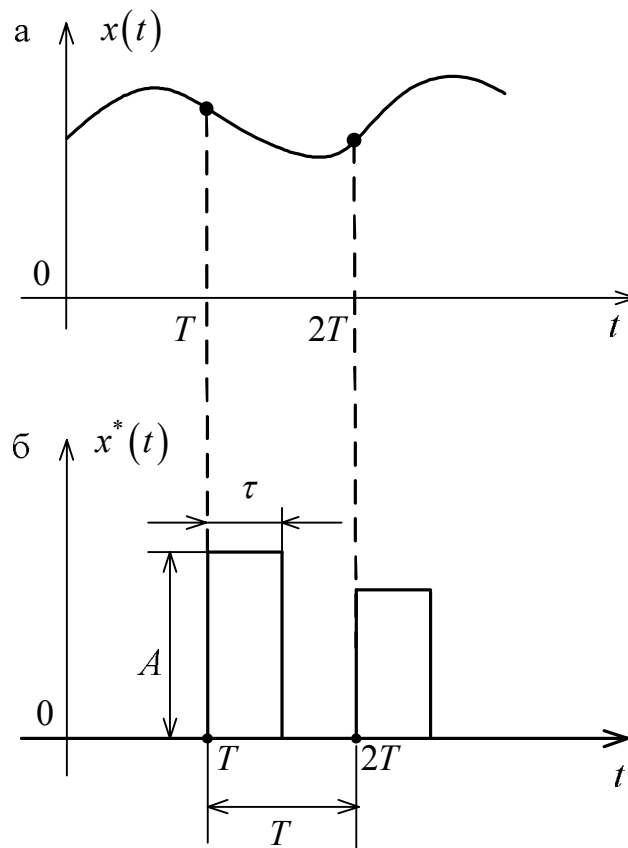


Рис. 1.2. Временные диаграммы работы ИЭ

Процесс импульсной модуляции состоит в изменении по определенному закону какого-либо параметра периодически повторяющихся импульсов.

Величина, определяющая закон модуляции, называется модулирующей величиной.

Основными параметрами импульсной последовательности являются:

A – амплитуда (высота) импульса;

τ – длительность (ширина) импульса;

T – период квантования (повторения, дискретности);

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – частота повторения.

В зависимости от того, какой параметр последовательности импульсов изменяется, различают следующие виды импульсной модуляции:

1. Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ), при которой амплитуда импульса пропорциональна входному сигналу;

2. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ), при которой длительность импульса пропорциональна входному сигналу;

3. Время-импульсная модуляция (ВИМ), включающая в себя фазо-импульсную модуляцию ФИМ, когда фаза или временной сдвиг импульса относительно начала периода дискретности T пропорциональна входному сигналу, и частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ) – частота дискретности пропорциональна входному сигналу.

Кроме того, различают два рода импульсной модуляции. Если параметры последовательности импульсов изменяются в зависимости от значений модулирующей величины в фиксированные равноотстоящие друг от друга моменты времени, то такой вид модуляции называется импульсной модуляцией первого рода. Если же параметры последовательности импульсов изменяются в соответствии с текущим значением модулирующей величины, то такой вид модуляции называется импульсной модуляцией второго рода.

Нетрудно показать, что только ИСАУ с АИМ-I являются линейными, поскольку амплитуда выходных импульсов ИЭ пропорциональна значению входного сигнала в дискретные моменты времени (рис. 1.3).

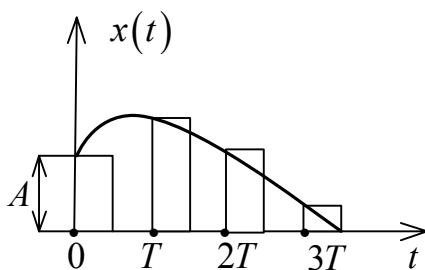


Рис. 1.3. Выходной сигнал ИЭ с АИМ-I

При других видах модуляции из-за ограниченности ширины импульса τ при ШИМ или его сдвига при ВИМ в пределах периода дискретизации T наступает насыщение ИЭ, что свидетельствует о его нелинейности.

1.3. Примеры дискретных систем

Существуют разнообразные виды дискретных систем, которые на практике отличаются друг от друга прежде всего структурой блока сравнения сигнала в цепи обратной связи с задающим воздействием (рис. 1.4.).

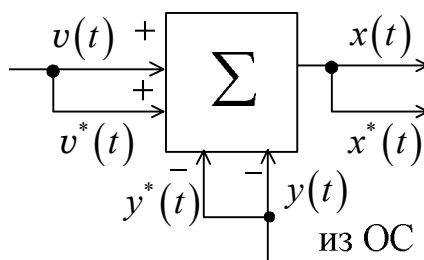


Рис. 1.4. Блок сравнения

В свою очередь, структура блока сравнения зависит от датчиков в цепи ОС. Выбор датчика осуществляется в зависимости от типа исполнительного устройства, преобразующих и корректирующих элементов. Наиболее характерный пример – система с цифровым приводом, которая может применяться для шаговых и электрогидравлических двигателей.

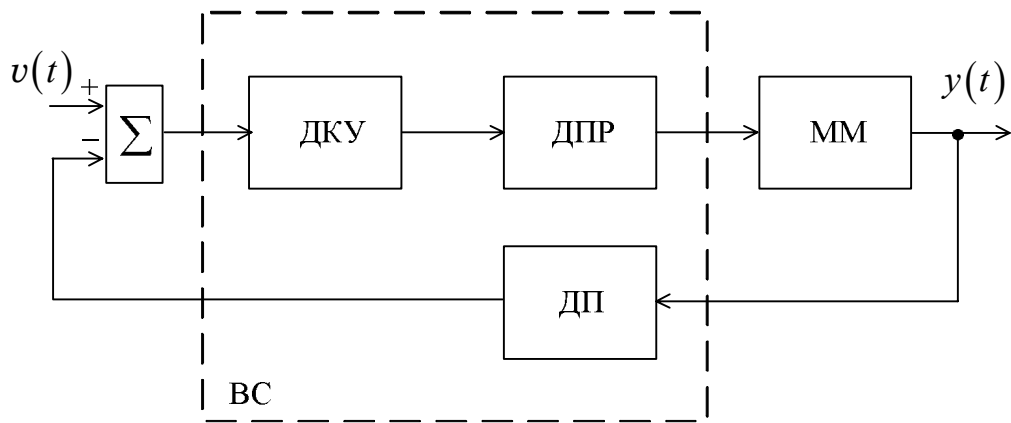


Рис. 1.5. Структурная схема дискретной системы с цифровым приводом: ДКУ – дискретное корректирующее устройство, ДПР – дискретный привод, ММ – механизм машины, ДП – датчик положения (цифровой), ВС – вычислительное средство

Достоинство такой системы заключается в том, что отпадает необходимость в декодировании сигналов управления. Если в системе используется обычный привод, то дискретная система приобретает следующий вид:

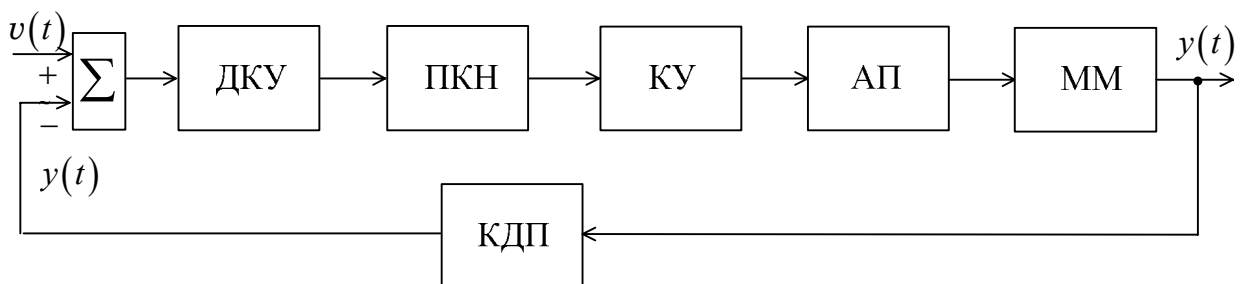


Рис. 1.6. Структурная схема дискретной системы с аналоговым приводом: ПКН – преобразователь код-напряжение, КУ – корректирующее устройство (аналоговое), АП – аналоговый привод, КДП – кодер датчика положений

В современных системах широкое распространение получили импульсные датчики в обратной связи, которые формируют последовательность импульсов по положению механизма машин. Если для коррекции параметров таких систем используются вычислительные средства, то эти последовательности преобразуются в код.

Дискретная система с импульсным приводом представлена на рис. 1.7.

Характерной особенностью системы является наличие ИЭ (МДИ и ГОН), который преобразует непрерывный сигнал управления в последовательность высокочастотных знакопеременных импульсов.

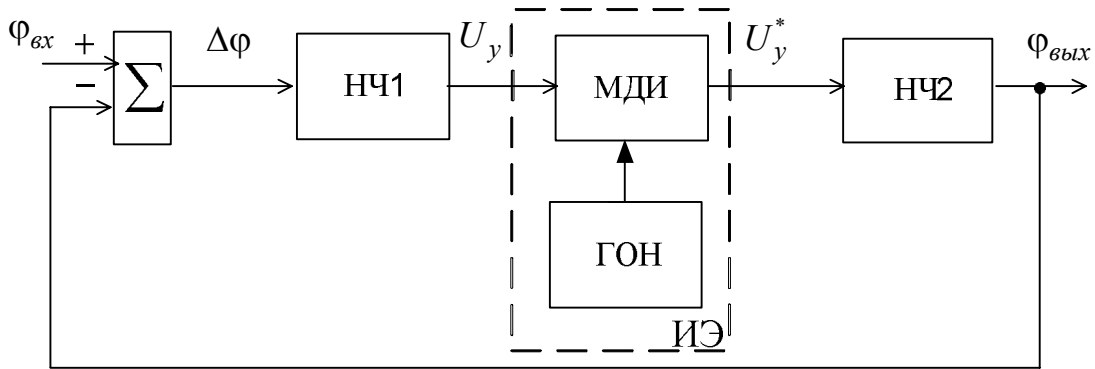
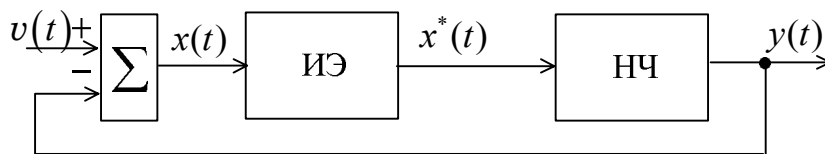


Рис. 1.7. Дискретная система с импульсным приводом: НЧ1 – непрерывная часть, которая состоит из измерителя-преобразователя, предварительного усилителя, звена коррекции и формирует сигнал управления U_y , МДИ – модулятор длительности импульсов, на выходе которого формируется импульсный сигнал управления U_y^* , ГОН – генератор опорного напряжения, НЧ2 – непрерывная часть, которая описывает свойства силового канала (усилитель мощности, двигатель, механическая передача)

Несмотря на большое разнообразие, все импульсные системы по виду структурных систем можно свести к двум типам (рис. 1.8):

а



б

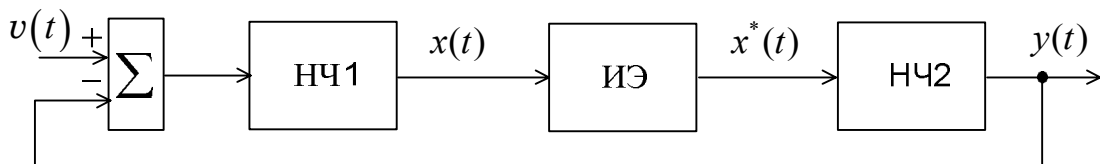


Рис. 1.8. Обобщенная структурная схема ИСАУ: а – система с неразделенной непрерывной частью, б – система с разделенной непрерывной частью

Наконец цифровую систему можно представить в виде, изображенном на (рис. 1.9).

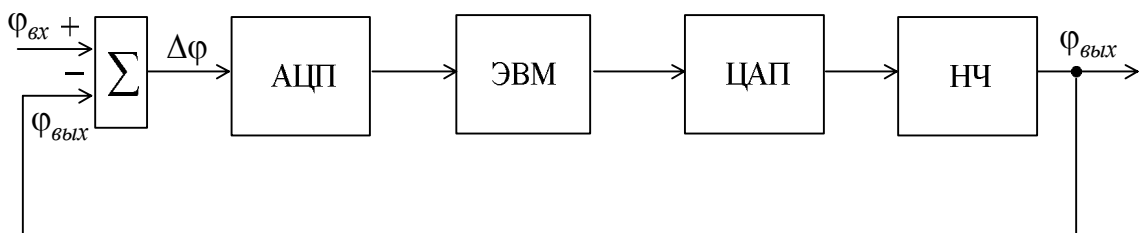


Рис. 1.9. Структурная схема цифровой системы: АЦП – аналого-цифровой преобразователь, ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь

Такое представление позволяет избежать ряда трудностей, связанных с анализом дискретных систем, так как обратная связь является непрерывной.

Приведенный обзор различных дискретных систем показывает что, дискретная система в целом отличается от непрерывной наличием следующих элементов: ИЭ, ЦАП, АЦП.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

2.1. Понятие систем с дискретным временем

Рассмотренные в первой части пособия системы работают в непрерывном времени. Их динамика описывается дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. При изучении дискретных систем будем рассматривать процессы, протекающие в дискретном времени, которые описываются разностными уравнениями.

Пусть цифровая САУ имеет структуру (рис. 2.1.)

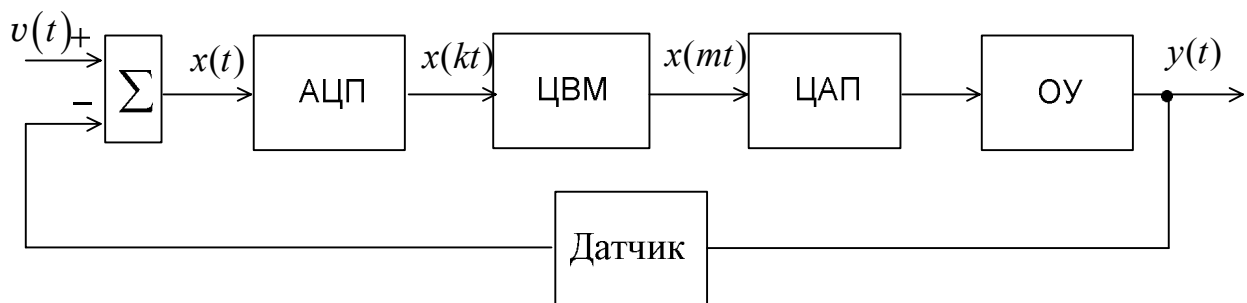


Рис. 2.1. Цифровая система управления

Здесь ЦВМ выполняет роль регулятора, причем время выполнения им операций ничтожно мало по сравнению с T .

Пусть при $t=0$ вход ЦВМ $x(0)$, а выход $m(0)$. Поскольку ЦВМ выполняет линейные операции, то $m(0) = b_0x(0)$, где $b_0 = \text{const}$. В таком случае $m(T)$ есть функция $x(0)$, $m(0)$, $x(T)$:

$$m(T) = b_0x(T) + b_1x(0) - a_1m(0),$$

$$m(2T) = b_0x(2T) + b_1x(T) + b_2x(0) - a_1m(T) - a_2m(0),$$

.....

$$m(kT) = b_0x(kT) + b_1x[(k-1)T] + \dots + b_nx[(k-n)T] - a_1m[(k-1)T] - \dots - a_nm[(k-n)T],$$

и если опустить T , то получим

$$m(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_nx(k-n) - a_1m(k-1) - \dots - a_nm(k-n). \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) является разностным уравнением дискретного фильтра.

Для исследования систем с дискретным временем используется соответствующий математический аппарат, включающий решетчатые функции, разностные уравнения, дискретное преобразование Лапласа и его разновидности.

2.2. Решетчатые функции и разностные уравнения

Под решетчатыми (рис. 2.2) понимают функции дискретного аргумента, определяемые в дискретные промежутки времени kT , где $k=0, 1, 2, 3, \dots$, а T – период дискретизации:

$$f(kT) = f(t)|_{t=kT} \text{ или } f(k) = f(t)|_{t=k, T=1}. \quad (2.2)$$

Значения дискретной функции в моменты $t = kT$ называют дискретами.

Употребляют и смещенные решетчатые функции $f(kT, T)$ или $f(k, \varepsilon)$, где

$$\varepsilon = \frac{\Delta T}{T} \leq 1.$$

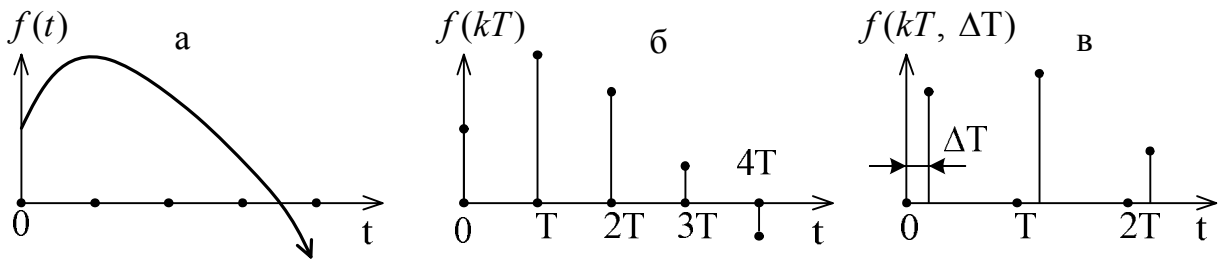


Рис. 2.2. Непрерывная функция – а, решетчатая функция – б, смещенная решетчатая функция – в

Надо иметь в виду, что по непрерывной функции легко находится решетчатая. Обратная же задача, т.е. формирование по решетчатой функции непрерывной – неоднозначна, т.к. неизвестны промежуточные значения решетчатой функции.

Аналог первой производной непрерывной функции для решетчатой функции есть первая разность (разность 1-го порядка) (рис. 2.3.):

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k). \quad (2.3)$$

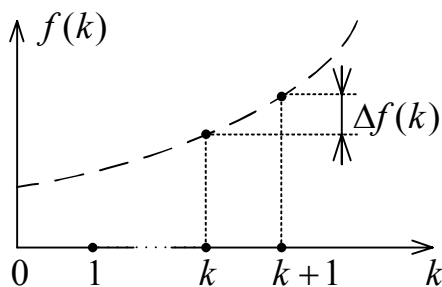


Рис. 2.3. Определение разности решетчатой функции

Вторая разность представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(k) &= \Delta f(k+1) - \Delta f(k) = f(k+2) - f(k+1) - \{f(k+1) - f(k)\} = \\ &= f(k+2) - 2f(k+1) + f(k),\end{aligned}$$

n -ая разность

$$\Delta^n f(k) = \Delta^{n-1} f(k+1) - \Delta^{n-1} f(k) = \sum_{i=0}^n C_n^i f(k+n-i) (-1)^i, \quad (2.4)$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ (число сочетаний).

Аналогом интеграла является сумма

$$F_{\Sigma}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f(i) = f(0) + f(1) + \dots + f(k-1). \quad (2.5)$$

Разность от суммы вычисляется по формуле

$$\Delta F_{\Sigma}(k) = F_{\Sigma}(k+1) - F_{\Sigma}(k) = f(k). \quad (2.6)$$

Выражение, связывающее решетчатую функцию и ее разности на выходе дискретного устройства и на его входе, называют уравнением в конечных разностях. Для устройства n -го порядка это уравнение в общем виде может быть записано так:

$$\alpha_0 \Delta^n y(k) + \alpha_1 \Delta^{n-1} y(k) + \dots + \alpha_n y(k) = \beta_0 \Delta^m v(k) + \beta_1 \Delta^{m-1} v(k) + \dots + \beta_m v(k), \quad (2.7)$$

где $m < n$, $y(k)$ – сигнал выхода, $v(k)$ – сигнал входа устройства.

В рекуррентном виде (при переходе от конечных разностей к значениям решетчатых функций) получают разностные уравнения вида (2.8):

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 v(k+m) + b_1 v(k+m-1) + \dots + b_m v(k), \quad (2.8)$$

где $a_l = \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \alpha_i c_{n-i}^{l-i}$, а $c_{n-i}^{l-i} = \frac{(n-i)!}{(l-i)!(n-l)!}$;

$b_l = \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \beta_i c_{m-i}^{l-i}$, а $c_{m-i}^{l-i} = \frac{(m-i)!}{(l-i)!(m-l)!}$.

2.3. Дискретное преобразование Лапласа и его свойства

Аналогом преобразования Лапласа для непрерывных функций $f(t)$ является дискретное преобразование Лапласа для решетчатых функций $f(k)$.

Прямое дискретное преобразование

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-skT}, \quad (2.9)$$

обратное дискретное преобразование

$$f(k) = \frac{1}{j\omega_0} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} F^*(s) e^{skT} ds. \quad (2.10)$$

где $F^*(s)$ называют изображением решетчатой функции $f(k)$, а функцию $f(k)$ – оригиналом.

В выражениях (2.9), (2.10) s – комплексная переменная, c – абсцисса абсолютной сходимости, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – частота дискретизации.

В символической записи формулы (2.9), (2.10) представляют в виде:

$$F^*(s) = D\{f(k)\}, \quad (2.11)$$

$$f(k) = D^{-1}\{F^*(s)\}. \quad (2.12)$$

Чтобы избавиться от нерациональности функции $F^*(s)$ из-за наличия множителя e^{sT} , её преобразуют в рациональную путём замены переменных по формуле

$$e^{sT} = z; \quad s = \frac{1}{T} \ln z. \quad (2.13)$$

Таким образом,

$$F(z) = Z\{f(k)\} = F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}, \quad (2.14)$$

$$f(k) = Z^{-1}\{F^*(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint F^*(z) z^{k-1} dz. \quad (2.15)$$

При использовании в теории дискретных систем z -преобразования следует помнить, что z -преобразование выходного сигнала линейной системы определяет значения временной функции только в момент квантования (т.е. не содержит информацию о значениях функции между моментами квантования).

Кроме того, передаточная функция непрерывной системы должна иметь количество полюсов, по крайней мере, на один большее, чем количество нулей, что в реальных системах практически всегда выполняется.

Для перехода к z -преобразованию используют специальные таблицы. Приведем наиболее часто используемые преобразования (табл. 2.1.).

Таблица 2.1 – Преобразование Лапласа и z -преобразование

Непрерывная функция		Решетчатая функция	
Оригинал	Преобразование Лапласа	Оригинал	z -преобразование
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{Tz}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin bkT$	$\frac{z \sin bt}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bkT$	$\frac{z(z - \cos bT)}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$

Отметим основные свойства z -преобразования.

Свойство линейности

$$af(k) \rightarrow aF(z); f_1(k) + f_2(k) \rightarrow F_1(z) + F_2(z). \quad (2.16)$$

Теоремы сдвига (упреждения и запаздывания)

Упреждение иллюстрируется рис. 2.4. и вычисляется по формуле:

$$Z\{f(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} = f(1)z^{-0} + f(2)z^{-1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f[k]z^{-(k-1)} = z \sum_{k=1}^{\infty} f(k)z^{-k}.$$

Прибавив и вычтя в правой части $f(0)$, получим

$$Z\{f(k+1)\} = z[F(z) - f(0)]. \quad (2.17)$$

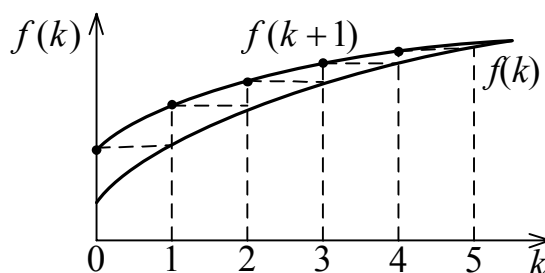


Рис. 2.4. К теореме об упреждении

При нулевых начальных условиях $f(0) = 0$ и

$$Z\{f(n+1)\} = zF(z) \quad (2.18)$$

При упреждении на 2 такта и нулевых начальных условиях

$$Z\{f(k+2)\} = z^2F(z).$$

При упреждении на m тактов получают

$$Z\{f(k+m)\} = z^mF(z). \quad (2.19)$$

Аналогично получают формулы для вычисления запаздывания (рис. 2.5).

$$\begin{aligned} Z\{f(k-1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} = 0 \cdot z^{-0} + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-(k+1)} = z^{-1}F(z), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Z\{f[k-2]\} &= z^{-2}F(z), \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$Z\{f[k-m]\} = z^{-m}F(z).$$

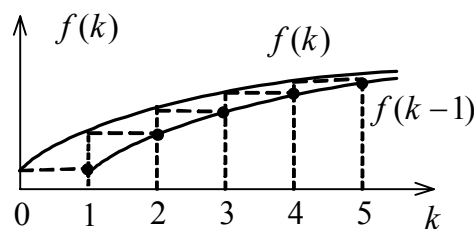


Рис. 2.5. К теореме запаздывания

Изображение разностей

При нулевых начальных условиях

$$Z\{\Delta f(k)\} = Z\{f(k+1)\} - Z\{f(k)\} = zF(z) - F(z) = (z-1)F(z). \quad (2.22)$$

$$\dots\dots\dots Z\{\Delta^m f(k)\} = (z-1)^m F(z). \quad (2.23)$$

Изображение сумм

Так как разность от суммы $\Delta F_{\Sigma}(k) = f(k)$, то изображение будет $Z\{\Delta F_{\Sigma}(k)\} = F(z)$. В силу (2.22) $Z\{\Delta F_{\Sigma}(k)\} = (z-1)Z\{F_{\Sigma}(k)\}$ и окончательно получим

$$Z\{F_{\Sigma}(k)\} = \frac{F(z)}{z-1}. \quad (2.24)$$

Для суммы m -го порядка

$$Z \{ F_{\Sigma}^m(k) \} = \frac{F(z)}{(z-1)^m}. \quad (2.25)$$

Конечное значение решетчатой функции

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z). \quad (2.26)$$

Начальное значение решетчатой функции

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Свёртка решетчатых функций

Если $Z \{ f_1(k) \} = F_1(z)$ и $Z \{ f_2(k) \} = F_2(z)$, то

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = Z \left\{ \sum_{v=0}^k f_1(v) f_2(k-v) \right\} = Z \left\{ \sum_{v=0}^k f_2(v) f_1(k-v) \right\}. \quad (2.27)$$

Формула обращения

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz = \sum_{v=1}^l \operatorname{Res}_{z_v} F(z) z^{k-1}. \quad (2.28)$$

Интегрирование ведется по окружности радиуса $R > |z_v|_{\max}$, где z_v – полюсы функции $F(z)$, а $z = z_v$ – вычет в точке для простых полюсов

$$\operatorname{Res}_{z_v} F(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow z_v} (z - z_v) F(z) z^{k-1}. \quad (2.29)$$

Формула разложения

а) Пусть $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{zA_0(z)}{B(z)}$, корни знаменателя простые, степень числителя меньше степени знаменателя, тогда

$$f(k) = \sum_{v=1}^n \frac{A_0(z_v)}{B'(z_v)} z_v^k, \quad (2.30)$$

где z_v – корни знаменателя.

б) Пусть $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, нулевого корня числителя нет, степень числителя меньше степени знаменателя, тогда

$$f(k) = \sum_{v=1}^n \frac{A(z_v)}{B'(z_v)} z_v^{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (2.31)$$

в) Пусть $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ степень числителя равна степени знаменателя, тогда разделив $A(z)$ на $B(z)$ получим

$$F(z) = f(0) + \frac{A_0(z)}{B(z)},$$

т.е. приходим к случаю б).

В общем случае (в том числе при кратных корнях) можно воспользоваться методом разложения $F(z)$ на простые дроби.

Разложение в ряд Лорана

Так как $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$, то разложив $F(z)$ в ряд Лорана по убывающим степеням z путем деления числителя $F(z)$ на знаменатель, получим $F(z) = c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots$. Сравнив два ряда, имеем

$$f(0) = c_0, f(1) = c_1, f(2) = c_2, \dots \quad (2.32)$$

Пример 2.1. Пусть $F(z) = \frac{z}{z-1}$, необходимо найти $f(k)$. Путем деления получим

$$\begin{array}{r} z \\ z-1 \quad \Big| \quad \frac{z-1}{1+z^{-1}+z^{-2}+\dots} \\ \hline -1 \\ \frac{1-z^{-1}}{z^{-1}} \\ \hline -z^{-1}-z^{-2} \\ \dots \end{array}$$

График функции представлен на рис. 2.6.

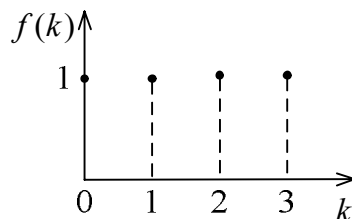


Рис.2.6. Оригинал, соответствующий изображению $F(z) = \frac{z}{z-1}$

В импульсных системах часть информации является квантованной, а часть непрерывной (между моментами съёма). Применение быстродействующей вычислительной техники в качестве корректирующих устройств или устройств управления привело к тому, что информацию можно оценить в любой момент времени. Вообще, импульсную характеристику вычислительного

средства или ее программу можно получить правильно только тогда, когда переменные описываются непрерывными функциями. Поэтому разработано несколько методов получения информации между съемами. Один из них – модифицированное z -преобразование. Его суть заключается в том, что вводится запаздывание на съём информации εT , где $0 \leq \varepsilon T \leq 1$, $t = kT + \varepsilon T$. Формула модифицированного z -преобразования имеет вид:

$$F(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + \varepsilon T) z^{-k}. \quad (2.33)$$

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ оно вырождается в обычное z -преобразование.

2.4. Решение разностных уравнений

Назовем три основных метода решения линейных разностных уравнений.

Первый состоит в нахождении свободной и вынужденной составляющих при классическом решении линейных уравнений. Он будет применён при исследовании процессов в дискретных системах.

Второй метод – рекуррентный. Он непосредственно следует из разностных уравнений системы.

Третий метод основан на нахождении оригинала (решетчатой функции) по z -преобразованию путем разложения последнего в ряд Лорана.

Проиллюстрируем два последних метода на примере.

Пример 2.2. Пусть $u(k) = x(k) - x(k-1) - u(k-1)$, $k \geq 0$, $x(-1) = u(-1) = 0$
 $x(k) = \begin{cases} 1, & \text{для четных } k, \\ 0, & \text{для нечетных } k. \end{cases}$ Найти значения $u(k)$ для $k = 0, \dots, 4$.

$$\begin{aligned} u(0) &= x(0) - x(-1) - u(-1) = 1 - 0 - 0 = 1, \\ u(1) &= x(1) - x(0) - u(0) = 0 - 1 - 1 = -2, \\ u(2) &= x(2) - x(1) - u(1) = 1 - 0 - (-2) = 3, \\ u(3) &= x(3) - x(2) - u(2) = 0 - 1 - 3 = -4, \\ u(4) &= x(4) - x(3) - u(3) = 1 - 0 - (-4) = 5. \end{aligned}$$

Для получения большего числа значений k можно использовать программу MATLAB:

```
ukminus1=0; xkminus1=0; xk=1;
for k=0:4
    uk=xk-xkminus1-ukminus1;
    [k xk uk]
    ukminus1=uk;
    xkminus1=xk;
    xk=1-xk;
end
```

В результате выполнения этой программы получена матрица коэффициентов:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 5 \end{array}$$

Рассмотрим третий метод, воспользовавшись таблицами z -преобразования. Для условия предыдущего примера найдем z -преобразование с учётом теоремы запаздывания:

$$U(z) = X(z) - z^{-1}X(z) - z^{-1}U(z), \text{ откуда } U(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}X(z).$$

В силу того, что $x(k) = \begin{cases} 1, & \text{для четных } k \\ 0, & \text{для нечетных } k \end{cases}$ и используя формулу из теории рядов:

$$X(z) = 1 + 0 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4} + \dots = \frac{1}{1 - x} \Big|_{x=z^{-2}} = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1},$$

находим $U(z) = \frac{z-1}{z+1} \frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z^2}{z^2+2z+1}$.

Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\begin{array}{r} \frac{z^2}{z^2+2z+1} \quad \left| \frac{z^2+2z+1}{1-2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+5z^{-4}-\dots} \right. \\ \underline{-2z-1} \\ -2z-4-2z^{-1} \\ \underline{3+2z^{-1}} \\ -3+6z^{-1}+3z^2 \\ \underline{-4z^{-1}-3z^{-2}} \\ -4z^{-1}-8z^{-2}-4z^{-3} \\ \underline{5z^{-4}+4z^{-3}} \end{array}$$

$U(z) = 1 - 2z^{-2} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 5z^{-4}$, т.е. $u(k)$ имеет те же значения, что и полученные предыдущим способом.

2.5. Передаточные функции и схемы моделирования дискретных систем

Пусть дискретная система описывается разностным уравнением n -го порядка общего вида

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 v(k) + b_1 v(k-1) + \dots + b_m v(k-m). \quad (2.34)$$

Подвергнув его z -преобразованию, получим при нулевых начальных условиях

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 V(z) + b_1 z^{-1} V(z) + \dots + b_m z^{-m} V(z). \quad (2.35)$$

Откуда

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.36)$$

Выражение (2.36) является дискретной передаточной функцией.

Дискретную передаточную функцию можно получить и из разностного уравнения (2.8), подвергнув его z -преобразованию, в виде:

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.37)$$

Моделирование дискретных систем производится по аналогии с непрерывными. Вместо интегратора используется регистр сдвига

$$\xrightarrow{f(k)} \boxed{T} \xrightarrow{f(k-1)},$$

осуществляющий задержку на период дискретизации T . В остальном принцип составления модели такой же, как и в непрерывной системе. Схема модели разностного уравнения (2.34) или передаточной функции (2.36) изображена на рис. 2.7. Отметим, что эта схема не единственная, возможны и другие конфигурации.

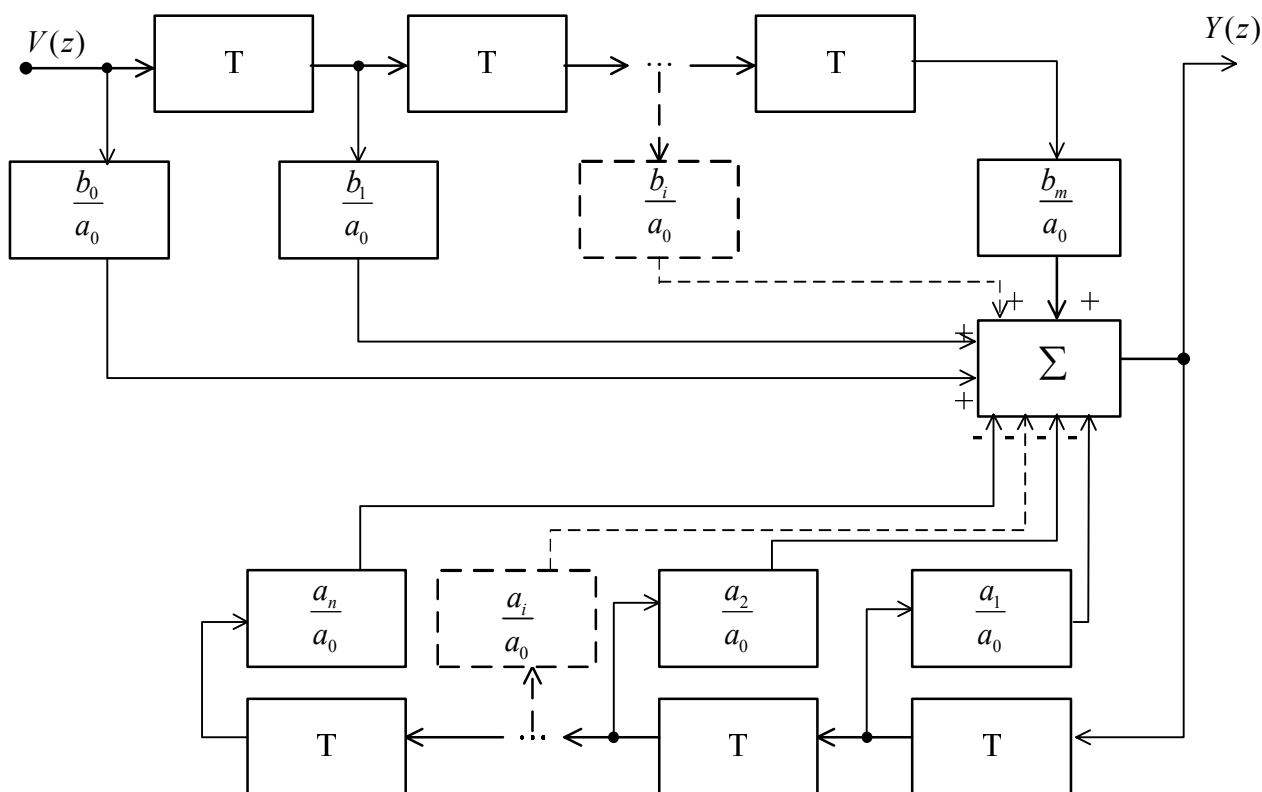


Рис. 2.7. Схема моделирования (2.34) или (2.36)

2.6. Представление данных в импульсной системе

Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.1. В этой структуре импульсный элемент (ИЭ), как отмечалось ранее, осуществляет квантование сигнала и модуляцию. Естественно, при квантовании непрерывного сигнала происходит потеря информации, поскольку значения квантованного сигнала известны только для дискретных моментов времени. Для уменьшения потери информации после квантователя вводят устройство восстановления данных, называемое фиксатором. Его назначение – преобразовать квантованный сигнал в непрерывный, близкий исходному. Наиболее распространен фиксатор нулевого порядка, запоминающий квантованный сигнал на весь период квантования T .

Реальный импульсный элемент объединяет квантователь и фиксатор, которые отдельно не существуют. Сигналы ИЭ и его схематическое изображение показаны на рис. 2.8.

Сигнал на выходе ИЭ можно представить выражением:

$$\bar{x}(t) = x(0)[1(t) - 1(t - T)] + x(T)[1(t - T) - 1(t - 2T)] + x(2T)[1(t - 2T) - 1(t - 3T)] + \dots$$

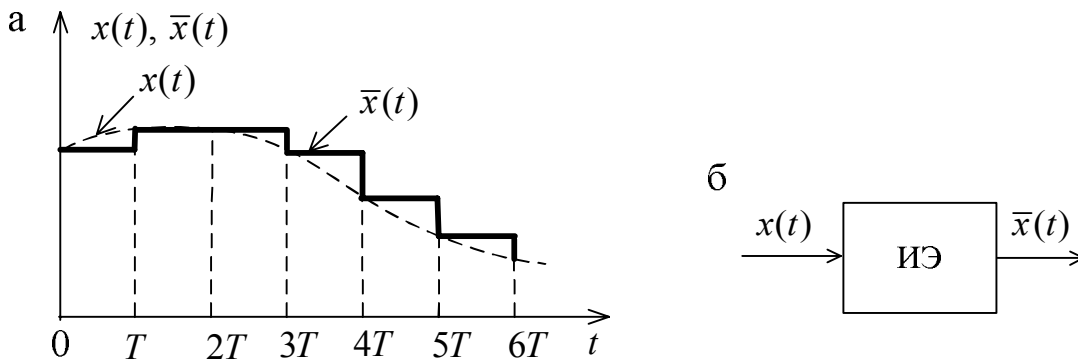


Рис. 2.8. Сигнал ИЭ (а), изображение ИЭ (б)

Подвергнув это выражение преобразованию Лапласа, получим

$$\begin{aligned} \bar{X}(s) &= x(0) \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right] + x(T) \left[\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-2Ts}}{s} \right] + x(2T) \left[\frac{e^{-2Ts}}{s} - \frac{e^{-3Ts}}{s} \right] + \dots = \\ &= [x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \dots] \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \right] \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Выражение в квадратных скобках описывает операцию квантования непрерывного сигнала, а второй множитель – фиксацию (восстановление), что эквивалентно изображению ИЭ на рис. 2.9. Другими словами: импульсный элемент состоит из идеального импульсного элемента (квантователя) – ключа и фиксатора с передаточной функцией $\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$.

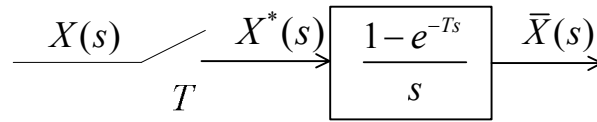


Рис. 2.9. Изображение ИЭ

Рассмотрим математическую модель идеального импульсного элемента, в котором $X^*(s)$ (назовем дискретным преобразованием Лапласа сигнала $x(t)$) определяется выражением

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}. \quad (2.39)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа от (2.39), получаем математическую модель идеального импульсного элемента во временной плоскости:

$$x^*(t) = L^{-1}\{X^*(s)\} = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots \quad (2.40)$$

Здесь $\delta(t-kT)$ – единичная импульсная функция, существующая в моменты времени $t=kT$, а $x^*(t)$ – последовательности δ -функций с весами, равными значениям исходного непрерывного сигнала в дискретные моменты времени kT . Однако (2.39) и (2.40) – это лишь модели идеального ИЭ. Реальный ИЭ – это совокупность квантователя (идеального импульсного элемента) и фиксатора (формирующего устройства).

Пример 2.3. Определить $X^*(s)$ для единичного ступенчатого сигнала $x(t) = 1(t)$.

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} = x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \dots = 1 + 1 \cdot e^{-Ts} + 1 \cdot e^{-2Ts} + \dots$$

Это соответствует ряду $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, $|x| < 1$. Тогда $X^*(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$, $|e^{-Ts}| < 1$. Так как $|e^{-Ts}| = z^{-1}$, то $X^*(s) = E(z)|_{z=e^{Ts}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$

2.7. Частотные свойства дискретного преобразования

Дискретное преобразование (преобразование со звездочкой) представляются и в других формах.

Полезно следующие представление:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk\omega_s) + \frac{f(0)}{2} \quad (2.41)$$

или

$$F^*(s) = \frac{1}{T} [F(s) + F(s + j\omega_s) + F(s + j2\omega_s) + F(s - j\omega_s) + F(s - j2\omega_s) + \dots] + \frac{f(0)}{2},$$

где $\omega_s = 2\pi / T$ – частота квантования в рад./с.

Отметим основные свойства этого преобразования.

1. $F^*(s)$ – периодическая функция переменной s с периодом $j\omega_s$, т. е.

$$F^*(s) = F^*(s + j\omega_s). \quad (2.42)$$

В силу (2.39) $F^*(s + j\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kT(s+j\omega_s)}$.

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$; $e^{-j\omega_s kT} = e^{-j\frac{2\pi}{T}kT} = e^{-jk2\pi} = 1$ на основании формулы Эйлера, поскольку $e^{j2\pi k} = \cos 2k\pi - j\sin 2k\pi = 1$.

Значит, $F^*(s + j\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} e^{-jkT\omega_s} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} = F^*(s)$, что и требовалось доказать.

бывалось доказать.

2. Если функция $F(s)$ имеет полюс $s = s_1$, то $F^*(s)$ имеет полюсы $s = s_1 + jm\omega_s$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Положение нулей $F^*(s)$ также обладает периодичностью с периодом $j\omega_s$ (рис. 2.10). На рисунке нули обозначены кружками, а полюсы – крестиками. Из рисунка видно, что нули и полюсы присутствуют в основной и дополнительных полосах бесконечное число раз. От этого недостатка можно избавиться заменой $e^{sT} = z$, тогда отрезок мнимой оси плоскости s от $-\frac{\omega_s}{2}$ до $\frac{\omega_s}{2}$ перейдет в окружность единичного радиуса на плоскости z (рис. 2.11).

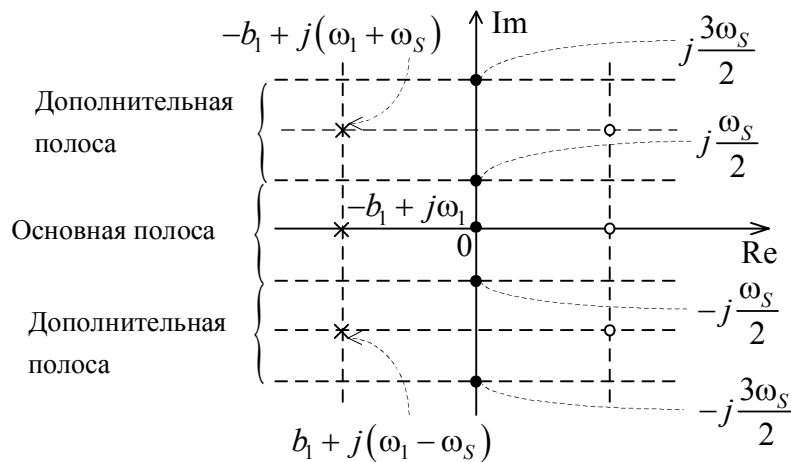


Рис. 2.10. Расположение полюсов и нулей $F^*(s)$

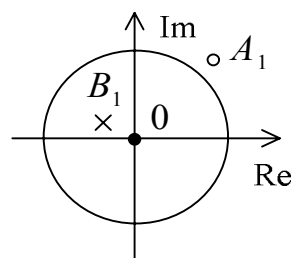


Рис. 2.11. Расположение полюсов и нулей $F(z)$

При этом все точки левой полуплоскости плоскости s , соответствующие периодически повторяющимся, например, полюсам, переходят в одну точку внутри круга плоскости z (точка B_1), а все точки правой полуплоскости, соответствующие также периодически повторяющимся, например, нулям, переходят в одну точку вне круга плоскости z (точка A_1).

3. Если сигналы с амплитудными спектрами, приведенными на рис. 2.12, а подвергаются квантованию, то амплитудный спектр $F_1^*(j\omega)$ будет такой, как на рис. 2.12, б и $F_2^*(j\omega)$ как на рис. 2.12, в. Другими словами, при идеальном фильтре восстановление сигнала возможно, при неидеальном – невозможно. Под идеальным фильтром понимается фильтр с единичным коэффициентом усиления в полосе пропускания и с нулевым коэффициентом усиления – за ее пределами.

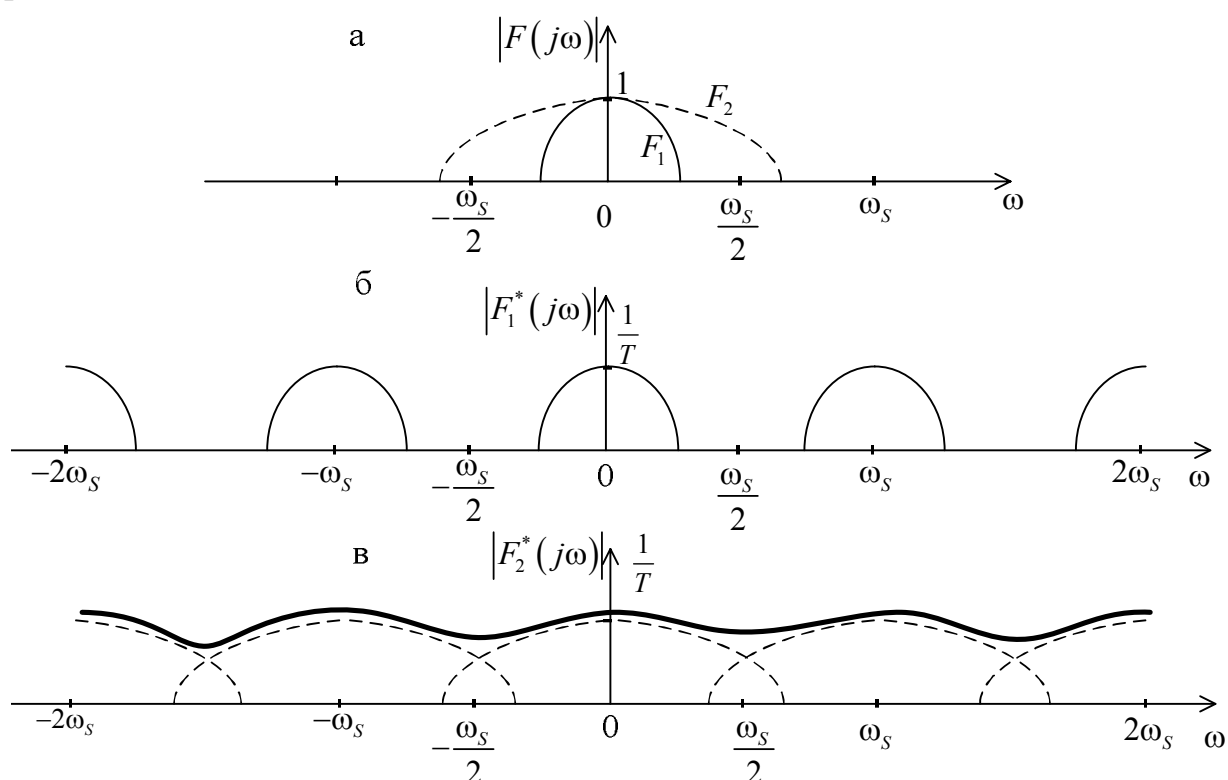


Рис. 2.12. Частотные спектры сигналов $F(j\omega)$ и $F^*(j\omega)$

2.8. Восстановление данных

Рассмотрим частотные характеристики второй части ИЭ – экстраполятора нулевого порядка, передаточная функция которого

$$K_{\Phi y}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (2.43)$$

$$K_{\Phi y}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} e^{j\omega T/2} e^{-j\omega T/2} = \frac{2e^{j\omega T/2} \cdot e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{\omega \cdot 2j} = T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega T/2}.$$

Так как $\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega 2\pi}{2 \omega_s} = \frac{\pi\omega}{\omega_s}$, то окончательно получим

$$K_{\Phi Y}(j\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_s}}. \quad (2.44)$$

Амплитудно-частотная характеристика экстраполятора нулевого порядка

$$A_{\Phi Y}(\omega) = |K_{\Phi Y}(j\omega)| = T \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}}. \quad (2.45)$$

Фазово-частотная характеристика этого экстраполятора

$$\varphi_{\Phi Y}(\omega) = \arg K_{\Phi Y}(j\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \pi, & \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) < 0 \\ -\frac{\pi\omega}{\omega_s}, & \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) > 0 \end{cases}. \quad (2.46)$$

Характеристики $A_{\Phi Y}(\omega)$ и $\varphi_{\Phi Y}(\omega)$ приведены на рис. 2.13.

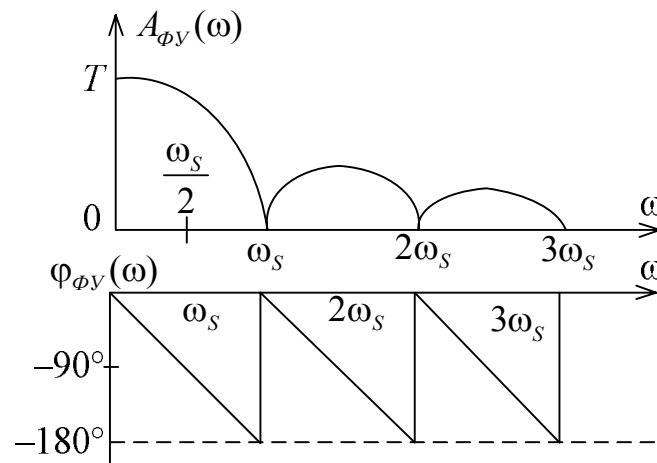


Рис. 2.13. Частотные характеристики экстраполятора нулевого порядка

Как следует из приведенного рисунка, при $\omega \ll \frac{\omega_s}{2}$ амплитудные и фазовые искажения сигнала на выходе экстраполяторы минимальны.

На рис. 2.14 представлены сигналы на входе квантователя и на выходе экстраполятора, точнее – на входе ИЭ и на его выходе.

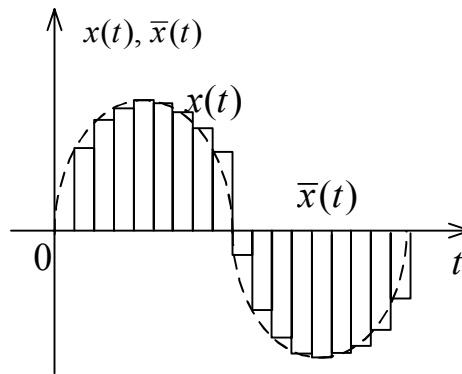


Рис. 2.14. Входной $x(t)$ и выходной $\bar{x}(t)$ сигналы ИЭ

2.9. Импульсная передаточная функция разомкнутой системы

Рассмотрим ИСАУ, изображенную на рис. 2.15.

Передаточную функцию экстраполятора объединяют с передаточной функцией непрерывной части:

$$K_{ЭНЧ}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} K_{НЧ}(s),$$

где $K_{ЭНЧ}(s)$ – передаточная функция эквивалентной непрерывной части.

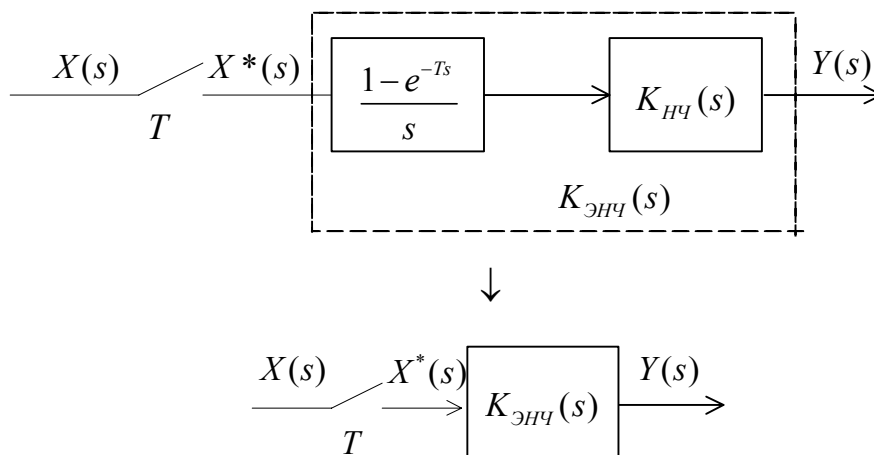


Рис. 2.15. Структура ИСАУ

Полагая начальные условия нулевыми, можно получить:

$$Y^*(s) = [K_{ЭНЧ}(s)X^*(s)]^* = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega_s), \quad (2.47)$$

откуда $Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{\text{ЭНЧ}}(s + jk\omega_s) X^*(s + jk\omega_s)$, а так как $X^*(s)$ – периодическая функция, то $X^*(s + jk\omega_s) = X^*(s)$ и

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{\text{ЭНЧ}}(s + jk\omega_s) X^*(s). \quad (2.48)$$

Сделав в (2.48) подстановку $z = e^{Ts}$, получим $Y(z) = K_{\text{ЭНЧ}}(z)X(z)$.

$K_{\text{ЭНЧ}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ называется импульсной передаточной функцией разомкнутой САУ.

Рассмотрим ИСАУ различных конфигураций, непрерывная часть которых состоит из двух передаточных функций (рис. 2.16).

Для структуры ИСАУ, каждой непрерывной части которой предшествует ИЭ (рис. 2.16, а) передаточная функция системы равна произведению импульсных передаточных функций отдельных частей:

$$K(z) = K_{\text{ЭНЧ1}}(z)K_{\text{ЭНЧ2}}(z). \quad (2.49)$$

Для структуры ИСАУ, в которой перед второй непрерывной частью нет ИЭ, общая передаточная функция системы

$$K(z) = K_{\text{ЭНЧ}}(z), \quad (2.50)$$

где $K_{\text{ЭНЧ}}(z) = Z\{K_{\text{ФУ}}(s)K_{\text{НЧ1}}(s)K_{\text{НЧ2}}(s)\}$.

Структура ИСАУ, приведенная на рис. 2.16, в, не имеет импульсной передаточной функции, поскольку входной сигнал не квантуется.

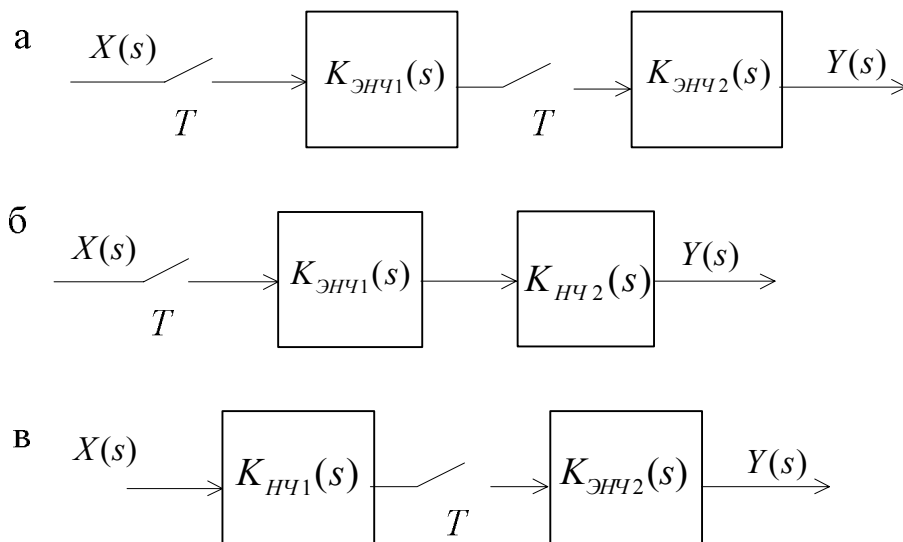


Рис. 2.16. Структуры ИСАУ

Рассмотрим цифровую систему (рис. 2.17).

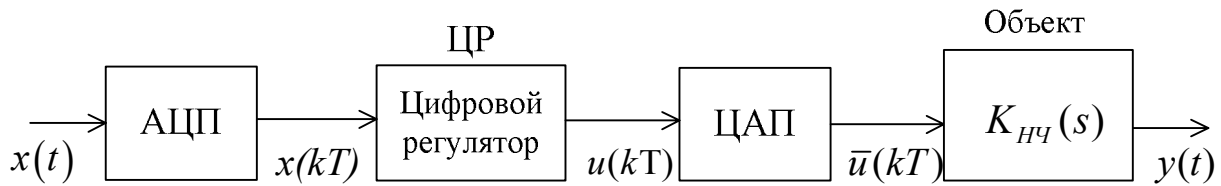


Рис. 2.17. Цифровая САУ

Коэффициент передачи АЦП $\delta_{\text{АЦП}} = \frac{1}{2^\alpha - 1}$, где α – число разрядов, а коэффициент передачи ЦАП $\delta_{\text{ЦАП}} = 2^\alpha - 1$. При одинаковом числе разрядов АЦП и ЦАП их общий коэффициент передачи равен единице. Обычно $\alpha \geq 10$, тогда $2^\alpha - 1 = 1023$ и статическую характеристику АЦП и ЦАП можно считать линейной.

При расчетах дискретных систем АЦП, цифровой регулятор и ЦАП заменяют моделью, как показано на рис. 2.18, а, всю систему окончательно – моделью рис. 2.18, б.

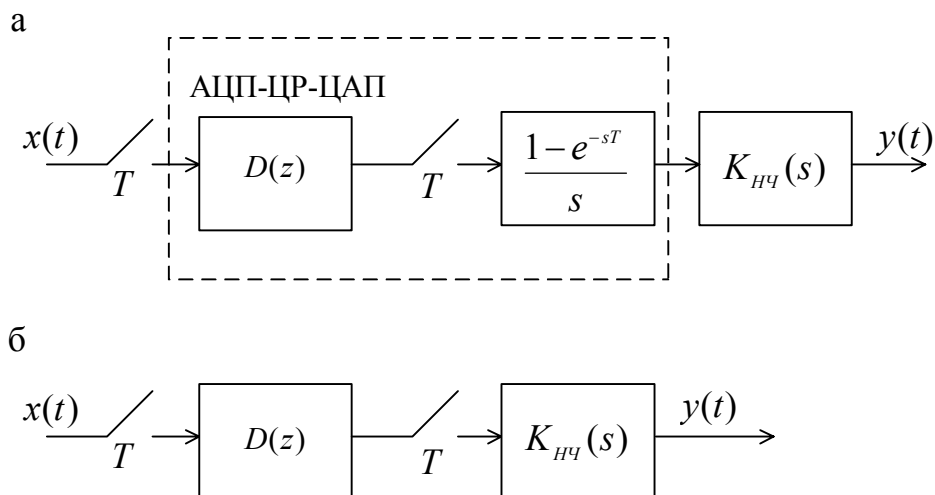


Рис. 2.18. Модель цифровой системы

Тогда $K(z) = Z\{K_{\text{ЭНЧ}}(s)\}D(z)$, где $D(z)$ – дискретная передаточная функция цифрового регулятора.

Пример 2.5. Найти дискретную передаточную функцию разомкнутой ИСАУ, если $K_{\text{НЧ}}(s) = \frac{1}{s+1}$, а $K_{\text{ФУ}}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$.

Запишем $K_{\text{ЭНЧ}}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1} = (1 - e^{-Ts}) \frac{1}{s(s+1)}$. Обозначим $e^{Ts} = z$, тогда

$$K_{\text{ЭНЧ}}(s) = (1 - z^{-1}) \frac{1}{s(s+1)} = \frac{z-1}{z} \frac{M(s)}{N(s)}.$$

Разложим $\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$ на простые дроби $\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{\beta_1}{s-s_1} + \frac{\beta_2}{s-s_2}$, причем $s_1=0; s_2=-1$.

$$\beta_1 = (s-s_1) \frac{M(s)}{N(s)} \Big|_{s=s_1} = \frac{(s-s_1)}{(s-s_1)(s-s_2)} \Big|_{s=s_1} = \frac{1}{0-(-1)} = 1.$$

$$\beta_2 = (s-s_2) \frac{M(s)}{N(s)} \Big|_{s=s_2} = \frac{(s-s_2)}{(s-s_1)(s-s_2)} \Big|_{s=s_2} = \frac{1}{-1-0} = -1.$$

Тогда $K_{ЭНЧ}(s) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right)$.

По таблице соответствий находим: $\frac{1}{s} \xrightarrow{\cdot} \frac{z}{z-1}$; $\frac{1}{s+1} \xrightarrow{\cdot} \frac{z}{z-e^{-T}}$. Окончательно $K(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-T}} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$.

2.10. Импульсная передаточная функция замкнутой системы

Рассмотрим замкнутую ИСАУ, изображенную на рис. 2.19.

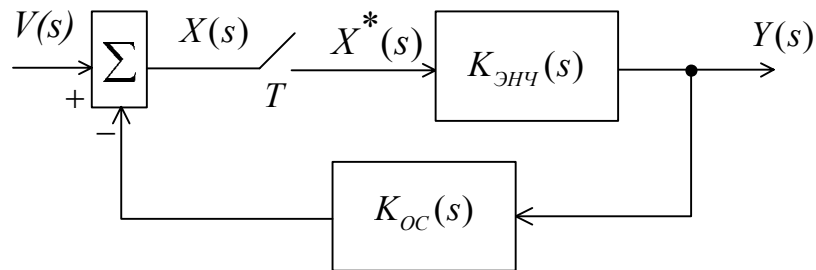


Рис. 2.19. Структура замкнутой ИСАУ

$$Y(s) = K_{ЭНЧ}(s)X^*(s),$$

$$X(s) = V(s) - K_{ОС}(s)Y(s) = V(s) - K_{ЭНЧ}(s)K_{ОС}(s)X^*(s).$$

Если найти дискретные преобразования левой и правой частей последнего равенства, то получим $X^*(s) = V^*(s) - (K_{ЭНЧ}K_{ОС})^*(s)X^*(s)$, откуда

$$X^*(s) = \frac{V^*(s)}{1 + (K_{ЭНЧ}K_{ОС})^*(s)}, \quad X(z) = \frac{V(z)}{1 + (K_{ЭНЧ}K_{ОС})(z)}.$$

Таким образом, замкнутая импульсная САУ имеет передаточную функцию по ошибке

$$K_x(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + (K_{ЭНЧ} K_{ОС})(z)} \quad (2.51)$$

и главную передаточную функцию

$$K_3(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{K_{ЭНЧ}(z)}{1 + (K_{ЭНЧ} K_{ОС})(z)}. \quad (2.52)$$

В этих выражениях записи $(\cdot)^*(s)$ и $(\cdot)^*(z)$ показывают, что до осуществления операции дискретного преобразования Лапласа и z -преобразования необходимо перемножить соответствующие передаточные функции, после чего разложить на элементарные дроби и только после этого осуществлять z -преобразование.

Рассмотрим замкнутую цифровую САУ (рис. 2.20).

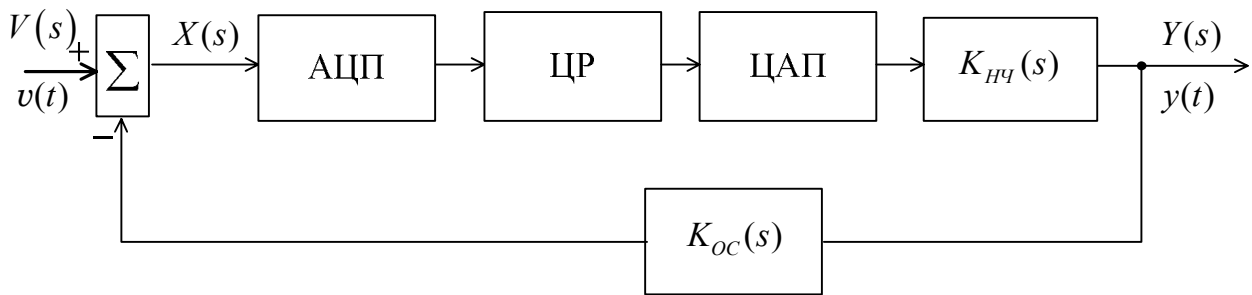


Рис. 2.20. Структура цифровой САУ

Модель разомкнутой части соответствует рис. 2.18. Изображение сигнала ошибки в замкнутой системе $X(s) = V(s) - K_{ЭНЧ}(s)X^*(s)D^*(s)K_{ОС}(s)$, а изображение выходной координаты $Y(s) = K_{ЭНЧ}(s)D^*(s)X^*(s)$.

Подвергнув первое соотношение дискретному преобразованию Лапласа, получим

$$X^*(s) = \frac{V^*(s)}{1 + D^*(s)(K_{ЭНЧ} K_{ОС})^*(s)}.$$

Применяя к $Y(s)$ z -преобразование и подставив в него полученное выражение $X^*(s)$, имеем

$$Y(z) = \frac{D(z)K_{ЭНЧ}(z)}{1 + D(z)(K_{ЭНЧ} K_{ОС})(z)}V(z).$$

Таким образом, передаточная функция замкнутой ЦСАУ будет

$$K_3(z) = \frac{D(z)K_{ЭНЧ}(z)}{1 + D(z)(K_{ЭНЧ} K_{ОС})(z)}. \quad (2.53)$$

2.11. Процессы в импульсных системах

Процессы в ИСАУ возникают, как и в непрерывной системе, либо за счет изменения внутренних координат (вариации начальных условий), либо за счет внешних воздействий (управляющих или возмущающих).

В общем случае при вычислении процессов необходимо решить разностное уравнение, описывающее динамику ИСАУ. Как известно, общее решение

$$y(k) = y_c(k) + y_e(k),$$

где $y_c(k)$ – свободная составляющая, обусловленная ненулевыми начальными условиями, а $y_e(k)$ – вынужденная составляющая, обусловленная внешними воздействиями.

Для вычисления этих составляющих можно воспользоваться формулами разложения z -изображений.

Пусть имеется z -изображение выходной координаты ИСАУ

$$Y(z) = K_3(z)V(z),$$

где $K_3(z) = \frac{K(z)}{Q(z)}$, а $V(z) = \frac{R(z)}{L(z)}$.

Свободные движения обусловлены корнями z_{cv} , $v = \overline{1, n}$ характеристического уравнения замкнутой системы $Q(z) = 0$, а вынужденные – корнями z_{ev} , $v = \overline{1, m}$ уравнения $L(z) = 0$.

$$Y(z) = Y_c(z) + Y_e(z), \text{ где } Y_c(z) = \sum_{v=1}^n c_{cv} \frac{z}{z - z_{cv}} \xrightarrow{\cdot} y_c(k) = \sum_{v=1}^n c_{cv} z_{cv}^k =$$

$$Y_e(z) = \sum_{v=1}^m c_{ev} \frac{z}{z - z_{ev}} \xrightarrow{\cdot} y_e(k) = \sum_{v=1}^m c_{ev} z_{ev}^k.$$

Коэффициенты c_{cv} и c_{ev} определяются по формулам разложения в зависимости от вида $K_3(z)$ и $V(z)$.

В ИСАУ, как и в непрерывных системах, рассматривается переходная функция $h_3(k)$ как реакция ИСАУ на ступенчатое решетчатое воздействие $v(k) = 1(k)$ и вводятся те же понятия: перерегулирование σ , время регулирования t_p .

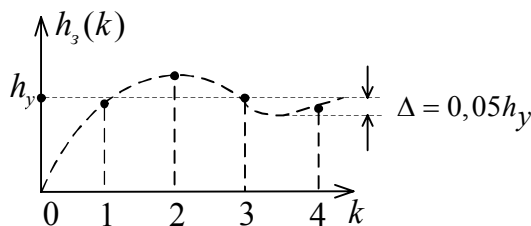


Рис. 2.21. Переходной процесс ИСАУ

Основные методы вычисления переходной функции:

1) аналитический (путем разложения изображения $Y(z)$ на элементарные слагаемые и использования таблиц соответствия z -изображений и оригиналов, а также разложение $Y(z)$ в ряд Лорана);

2) Моделирование на компьютере (например, в среде Matlab).

Рассмотрим первый из них.

$$\text{Если } Y(z) = K_3(z)V(z), \quad K_3(z) = \frac{K(z)}{Q(z)} \text{ и } V(z) = \frac{z}{z-1}, \text{ то } Y(z) = \frac{zK(z)}{(z-1)Q(z)}.$$

Это изображение соответствует первому случаю z -изображения для разложения на элементарные слагаемые. Оригинал $y(k) = h_3(k)$ в этом случае вычисляется по формуле

$$h_3(k) = \frac{K(1)}{Q(1)} - \sum_{v=1}^n \frac{K(z_v)}{(1-z_v)Q'(z_v)} z_v^k.$$

Первое слагаемое соответствует установившейся составляющей ($z = e^{Ts} = 1$), а $\sum_{v=1}^n (\bullet)$ – переходной составляющей. Эта формула пригодна при простых корнях z_v . При кратных корнях выражение усложняется (используются вычеты), при этом предпочтительнее разложение в ряд Лорана.

В отличие от непрерывных систем в ИСАУ можно добиться конечной длительности переходного процесса.

Если в $K_3(z)$ в характеристическом уравнении $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ коэффициенты $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, то оно сводится к виду $a_0 z^n = 0$. Тогда при порядке числителя хотя бы на один меньше порядка знаменателя

$$K_3(z) = \frac{b_0 z^{n-1} + \dots + b_{n-1}}{a_0 z^n} = \frac{b_0}{a_0} z^{-1} + \frac{b_1}{a_0} z^{-2} + \dots + \frac{b_{n-1}}{a_0} z^{-n}.$$

Сравнивая коэффициенты $\frac{b_i}{a_0}$ в этом выражении с весами z -изображения

в выражении $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$, имеем $f(0) = 0$; $f(1) = \frac{b_0}{a_0}$; \dots ; $f(n-1) = \frac{b_{n-1}}{a_0}$;

$f(n) = \frac{b_{n-1}}{a_0}$, т.е. импульсная переходная функция является конечным рядом, заканчивающимся за n периодов дискретизации.

Значит и переходный процесс $h_3(k)$ закончится за время nk или nkT .

Пример 2.6. Найти реакцию разомкнутой и замкнутой ИСАУ, представленной на рис. 2.21, на единичное ступенчатое воздействие. Принять $T = 1$ с.

$$\text{Передаточная функция разомкнутой САУ } K(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s^2} \right\}.$$

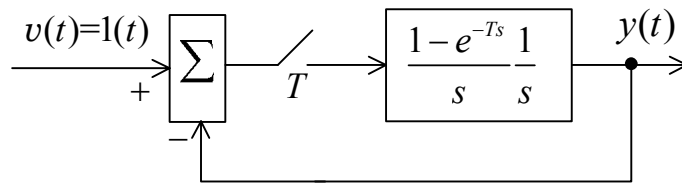


Рис. 2.21. Структура ИСАУ

По таблице соответствий $Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$, а так как $T=1$ с, то

$$Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{z}{(z-1)^2} \text{ и } K(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1}.$$

Переходная функция

$$\begin{aligned} h(k) &= Z^{-1}\{Z\{1(k)\}K(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1} \frac{1}{z-1}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\} = \\ &= kT = 0 + T + 2T + \dots = 0 + 1 + 2 + \dots \end{aligned}$$

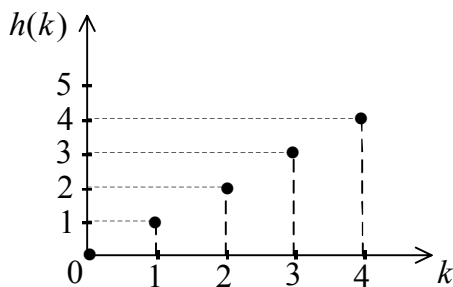


Рис. 2.22. Переходная функция разомкнутой ИСАУ

Этот же результат получается и при разложении $\frac{z}{(z-1)^2}$ в ряд Лорана:

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-2+\frac{1}{z}} &\left| \frac{z^2-2z+1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \dots = 0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3} + \dots \right. \\ &2 - \frac{1}{z} \\ &- \frac{4}{z} + \frac{2}{z^2} \\ &\frac{3}{z} - \frac{2}{z^2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Передаточная функция замкнутой системы $K_3(z) = \frac{K(z)}{1+K(z)} = \frac{\frac{T}{z-1}}{1+\frac{T}{z-1}} = \frac{1}{z}$.

Переходная функция замкнутой системы

$$h_3(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{z-1} \right\}.$$

При разложении изображения $\frac{1}{z-1}$ в ряд Лорана получим:

$$\begin{array}{r} - \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \left| \frac{z-1}{z} \right. \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = 0 \cdot z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ \frac{1}{z} \\ - \frac{1}{z^2} \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \\ \frac{1}{z^2} \\ - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \\ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \\ \dots \end{array}$$

Ординаты соответствуют значениям $h_3(k)$ (рис. 2.23).

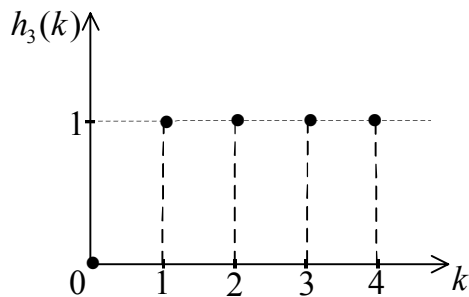


Рис. 2.23. Переходная функция замкнутой ИСАУ

Этот же результат следует и из анализа выражения $h_3(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \frac{1}{z} \right\}$.

Поскольку $\frac{1}{z}$ соответствует сдвигу в сторону запаздывания, то решетчатая функция, соответствующая единичному скачку $Z \{ 1(k) \} = \frac{z}{z-1}$, сдвигается на один такт, а так как при использовании передаточной функции значение $h(0)$ принималось нулевым, то и на рис. 2.23 это значение $h_3(0) = 0$.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

3.1. Условия устойчивости

Решение разностного уравнения

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)Y(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)V(z),$$

описывающего динамику замкнутой системы, состоит из двух частей:

$$y(k) = y_{\text{св}}(k) + y_{\text{в}}(k), \quad (3.1)$$

где первая часть определяет свободное движение, а вторая – вынужденное движение.

При оценке устойчивости ИСАУ, как и в непрерывной системе, исследуется свободное движение. Оно может быть найдено при решении однородного разностного уравнения (без правой части)

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (3.2)$$

называемого характеристическим уравнением замкнутой ИСАУ. Это же уравнение можно получить и по передаточной функции замкнутой системы $K_3(z)$, приравняв нулю ее знаменатель:

$$1 + K(z) = 0. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.2) ищется в виде:

$$y_{\text{св}}(k) = \sum_{i=0}^n c_i z_i^k,$$

где c_i – постоянные коэффициенты, а z_i – корни характеристического уравнения.

Очевидно, что для устойчивости ИСАУ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{\text{св}}(k) = 0$. А это возможно, когда все корни характеристического уравнения z_i будут по модулю меньше единицы. Таким образом, условием устойчивости является соотношение:

$$|z_i| < 1. \quad (3.4)$$

Графически это условие можно интерпретировать, преобразовав s -плоскость в z -плоскость. Так как $z = e^{sT}$, то положив $s = j\omega$, что соответствует мнимой оси, получим $z = e^{j\omega T}$, что является окружностью единичного радиуса (рис. 3.1).

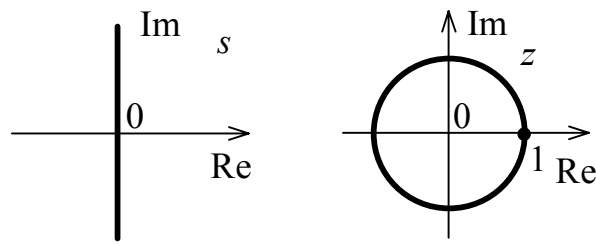


Рис.3.1. Отображение s -плоскости в z -плоскость

Если $s = c + j\omega$, то $z = e^{sT} = e^{cT} e^{j\omega T}$ и при $c \rightarrow -\infty$ переменная $z \rightarrow 0$. Это означает, что левая полуплоскость s -плоскости отображается внутри круга единичного радиуса z -плоскости, а правая полуплоскость s -плоскости – вне круга. Соответствие s -плоскости, z -плоскости и временных характеристик при различных случаях корней характеристического уравнения изображено на рис. 3.2.

Следовательно, для устойчивости ИСАУ необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения замкнутой системы находились внутри круга единичного радиуса.

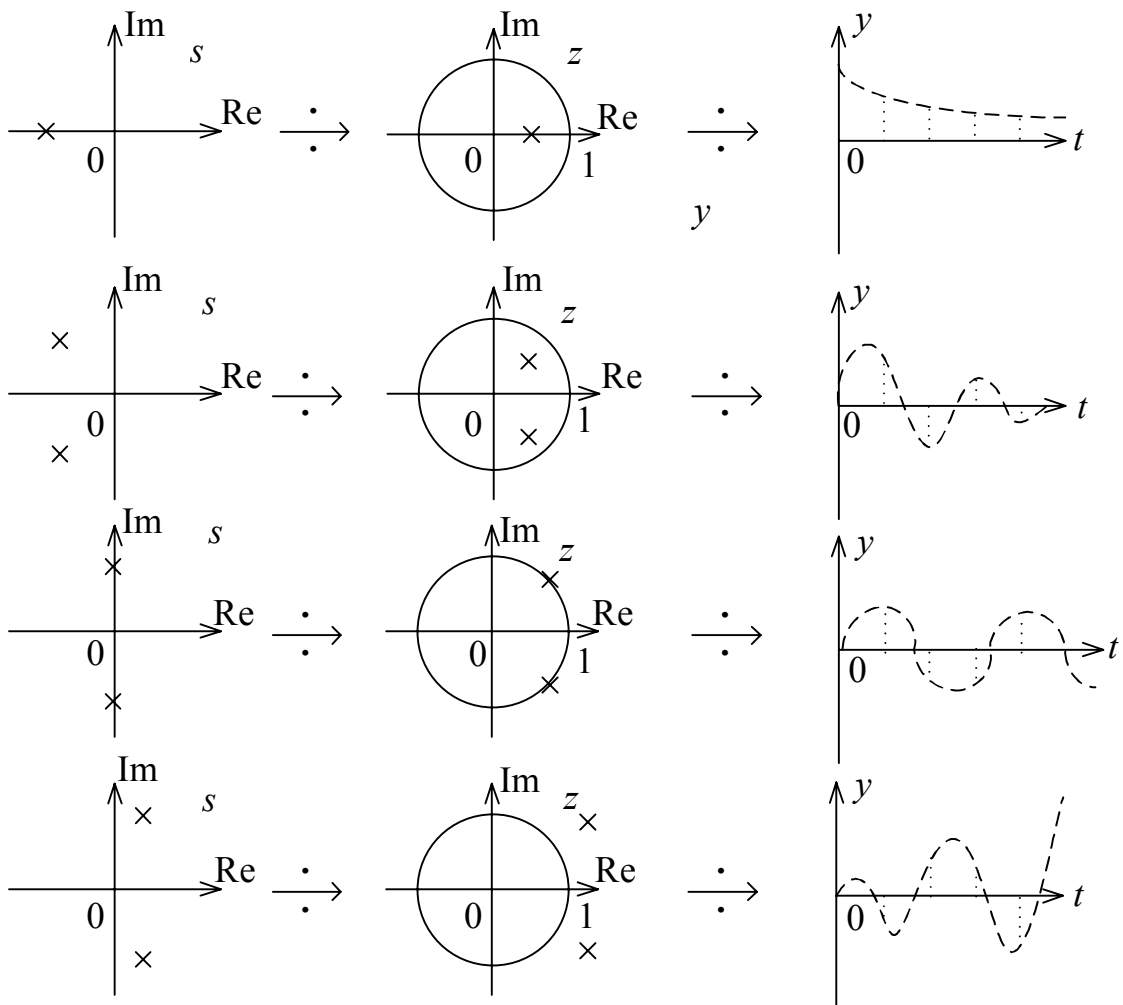


Рис. 3.2. Соответствие корней характеристического уравнения s -плоскости, z -плоскости и временных характеристик

Пример 3.1. Оценить устойчивость импульсной системы со структурой, представленной на рис. 3.3.

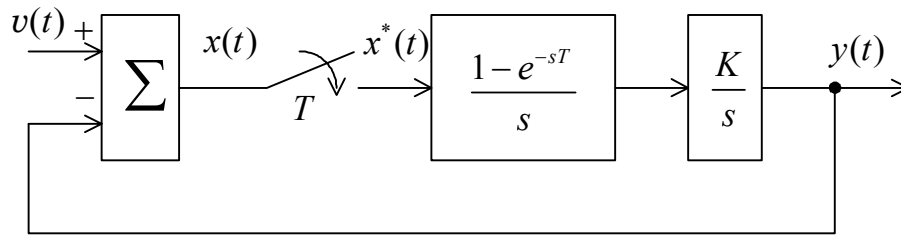


Рис. 3.3. Структура ИСАУ

Запишем передаточную функцию разомкнутой системы $K_{\text{отр}}(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{K}{s^2}$.

Перейдя к z -преобразованию, получим $K(z) = \frac{z-1}{z} \frac{KTz}{(z-1)^2} = \frac{KT}{z-1}$.

Передаточная функция замкнутой системы $K_3(z) = \frac{K(z)}{1 - K(z)} = \frac{KT}{z-1+KT}$,

откуда характеристическое уравнение $z + (KT - 1) = 0$. Здесь единственный корень $z = 1 - KT$. По условию устойчивости $|z| < 1$, то есть $|1 - KT| < 1$ и окончательно область устойчивости будет иметь вид неравенства: $0 < KT < 2$. При всех других значениях K и T импульсная система будет неустойчивой.

В дискретных, как и в непрерывных, системах используют критерии устойчивости. Их применение основано на формуле билинейного преобразования.

3.2. Билинейное преобразование

С помощью подстановки $z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}$, или $w = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$ осуществляется

так называемое билинейное преобразование, то есть отображение единичной окружности на z -плоскости в мнимую ось на w -плоскости. Это отображение можно пояснить следующим образом:

$$w = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \Bigg|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - e^{j\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{e^{j\omega T} + e^{j\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} (e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}})}{e^{j\omega \frac{T}{2}} (e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}})}$$

По формуле Эйлера

$$w = \frac{2}{T} j \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\cos \omega \frac{T}{2}} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2}. \quad (3.5)$$

Анализ (3.5) показывает, что при $\omega = 0$ значение $w = j0$, а при $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ или $\omega \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ значение $w = j\infty$. Другими словами, интервал $0 \leq j\omega \leq j\frac{\omega_s}{2}$ на s -плоскости отображается в верхнюю полуокружность z -плоскости и в верхнюю половину мнимой оси w -плоскости. Тогда областью устойчивости системы на w -плоскости является ее левая половина.

Выражение (3.5) устанавливает связь между частотой ω на s -плоскости и псевдочастотой ω_w на w -плоскости. Если $j\omega_w$ мнимая часть переменной w , то $j\omega_w = j\frac{2}{T} \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2}$ и

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2}. \quad (3.6)$$

Отметим, что при малых частотах на s -плоскости, когда $\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$, выражение (3.6) приводится к виду:

$$\omega_w \approx \frac{2}{T} \omega \frac{T}{2} = \omega_w = \omega. \quad (3.7)$$

Это справедливо при

$$\omega < \frac{2\pi}{10T} = \frac{\omega_s}{10}. \quad (3.8)$$

Таким образом, при выполнении (3.8) можно считать частоты ω и ω_w совпадающими, а при больших частотах следует использовать псевдочастоту.

3.3. Критерий Рауса-Гурвица

Для замкнутой дискретной системы необходимо получить характеристическое уравнение, применив билинейное преобразование:

$$1 + K(w) = 1 + K(z) \Bigg|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}} = 0. \quad (3.9)$$

Далее составляется таблица Рауса по такому же алгоритму, как и для непрерывных систем. Дискретная система устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны все элементы первого столбца таблицы Рауса.

Пример 3.2. Рассмотрим систему, приведенную на рис. 3.3. Характеристическое уравнение замкнутой системы $D(z) = z - 1 + KT = 0$. Перейдем к $D(w)$.

$$D(w) = D(z) \Big|_{z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}} = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} + (KT - 1) = \frac{w(2T - T^2K) + 2KT}{2 - Tw} = 0.$$

Характеристическое уравнение запишем в виде $\underbrace{(2T - T^2K)}_{a_0}w + \underbrace{2KT}_{a_1} = 0$.

Составим таблицу Рауса:

$$\begin{array}{l|l} w^1 & 2T - T^2K \\ w^0 & 2KT \end{array}$$

Для устойчивости дискретной системы необходимо, чтобы знак всех элементов первого столбца (а он единственный в данном примере) был одинаковый. Отсюда $2KT > 0$, при $T > 0$ и $K > 0$; $2T - T^2K > 0$ при $TK < 2$. Этот результат согласуется с результатом примера 3.1.

Рассмотренные примеры показывают, что квантование приводит к сужению области устойчивости дискретных систем по сравнению с аналогичными (имеющими одинаковые непрерывные части) непрерывными системами. В непрерывной системе первого порядка устойчивость обеспечивается при всех положительных коэффициентах характеристического уравнения, а в дискретной – накладывается жесткое ограничение ($TK < 2$).

3.4. Критерий Найквиста

Для дискретных систем также применим критерий Найквиста, как и для непрерывных систем. Различие в построении АФЧХ разомкнутой системы обусловлено переменной и диапазоном ее изменения для каждого типа модели (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Передаточная функция разомкнутой системы	Переменная	Диапазон изменения переменной
$K(s)$	$s = j\omega$	$0 \leq j\omega \leq j\infty$
$K(z)$	$z = e^{j\omega T}$	$0 \leq \omega T \leq \pi$
$K(w)$	$w = j\omega_w$	$0 \leq j\omega_w \leq j\infty$

АФЧХ $K(j\omega_w)$ и $K(j\omega)$ совпадают (рис. 3.4).

$K(e^{j\omega T})$ имеет такой же вид, но заканчивается не в начале координат, а на вещественной оси, так как конечная точка соответствует частоте $\omega = \frac{\omega_s}{2}$, при которой коэффициент усиления разомкнутой системы не равен нулю (рис. 3.5). Дискретная система устойчива, если $K(j\omega_w)$ или $K(e^{j\omega T})$ не охватывают точку $-1; j0$. Запасы устойчивости находятся так же, как и в случае непрерывной системы: по модулю $1/a$, по фазе $-\Delta\phi$.

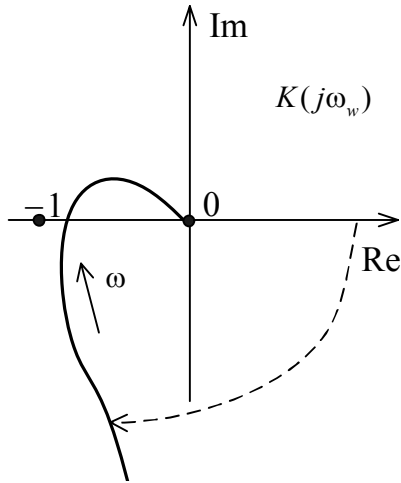


Рис. 3.4. АФЧХ $K(j\omega)$ и $K(j\omega_w)$

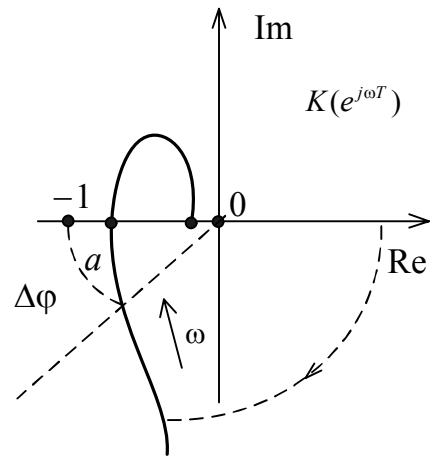


Рис. 3.5. АФЧХ $K(e^{j\omega T})$

3.5. Логарифмический критерий Найквиста

Частотные характеристики дискретных систем после перехода от реальной частоты ω к псевдо частоте ω_w в соответствии с (3.6) строят по методике построения аналогичных характеристик непрерывных систем. Логарифмические частотные характеристики строятся отдельно для областей низких и высоких частот. Границей, разделяющей частотную область на низкочастотную и высокочастотную, служит частота среза ω_c в предположении, что $\omega_c < \frac{2}{T}$. Это условие необходимо выполнять вследствие требований, предъявляемых к обеспечению запасов устойчивости и точности работы системы.

Рассмотрим методику построения ЛЧХ на примере системы, включающей в себя непрерывную часть с обобщенной передаточной функцией вида:

$$K_{НЧ}(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s^v \prod_{i=1}^n (1 + T_i s)}. \quad (3.10)$$

При построении допускаются следующие предположения.

1. Как уже отмечалось, $\omega_c < \frac{2}{T}$.
2. Переход оси нуля децибел асимптотической ЛАХ непрерывной части происходит при отрицательном наклоне -20 дБ/дек.
3. Постоянным времени τ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) соответствуют сопрягающие частоты меньшие, чем частота среза.

4. Имеется l ($l < n$) постоянных времени T_i ($i = 1, 2, \dots, l$), которым соответствуют сопрягающие частоты меньшие, чем частота среза.

При принятых допущениях для области низких частот передаточную функцию непрерывной части можно представить в виде:

$$K_{HЧ}^H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s^v \prod_{i=1}^l (1 + T_i s)}, \quad (3.11)$$

а для области высоких частот

$$K_{HЧ}^B(s) = \frac{\omega_c}{s \prod_{i=l+1}^n (1 + T_i s)}. \quad (3.12)$$

По выражениям (3.11) и (3.12) на основании (3.6) получим частотные характеристики разомкнутой импульсной системы для области низких частот:

$$K_{HЧ}^H(j\omega_w) = \left(1 - j\omega_w \frac{T}{2}\right) \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + j\omega_w \tau_j)}{(j\omega_w)^v \prod_{i=1}^l (1 + j\omega_w T_i)} \quad (3.13)$$

и для области высоких частот:

$$K_{HЧ}^B(j\omega_w) = \frac{\omega_c \left(1 - j\omega_w \frac{T}{2}\right) [1 + j\omega_w (T/2 - T_\Sigma)]}{(j\omega_w)(1 + j\omega_w T/2)}, \quad (3.14)$$

где $T_\Sigma = \sum_{i=l+1}^n T_i$.

Анализ этих выражений показывает, что в низкочастотной области частотная передаточная функция импульсной системы может быть получена из передаточной функции непрерывной части подстановкой $s = j\omega_w$ и умножением на дополнительный множитель $(1 - j\omega_w T/2)$. Псевдо частота ω_w в этой области практически совпадает с угловой частотой ω . Влиянием дополнительного множителя при построении частотной характеристики в низкочастотной области можно пренебречь, так как $\omega_c < 2/T$.

В области низких частот частотная характеристика импульсной системы совпадает с частотной характеристикой ее непрерывной части. В высокочастотной же области этого совпадения нет и построение надо выполнять по псевдо частоте ω_w .

Выражение частотной передаточной функции разомкнутой дискретной системы в плоскости псевдо частоты:

$$K(j\omega_w) = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + j\omega_w \tau_j) [1 + j\omega_w (T/2 - T_\Sigma)] (1 - j\omega_w T/2)}{(j\omega_w)^v \prod_{i=1}^l (1 + j\omega_w T_i) (1 + j\omega_w T/2)}. \quad (3.15)$$

Это выражение представляет собой произведение элементарных типовых сомножителей, поэтому его легко использовать для построения логарифмических частотных характеристик импульсных систем. Результирующий фазовый сдвиг определяется так:

$$\varphi(\omega_w) = -v \cdot 90^\circ + \sum_{j=1}^m \arctg \omega_w \tau_j + \arctg \omega_w \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma \right) - \sum_{i=1}^l \arctg \omega_w T_i - 2 \arctg \omega_w \frac{T}{2}. \quad (3.16)$$

По построенным логарифмическим частотным характеристикам находят запасы устойчивости.

Пример 3.3. Построить логарифмические частотные характеристики системы с экстраполятором нулевого порядка и периодом дискретности импульсного элемента $T = 4$ с, если передаточная функция непрерывной части

$$K_{\text{НЧ}}(s) = \frac{K(1 + 25s)}{s^2(1 + 0,5s)(1 + 0,3s)}, \quad K = 0,01 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем частоту среза $\omega_c < 2/T = 0,5 \text{ с}^{-1}$. В соответствии с заданными постоянными времени вычисляем сопрягающие частоты:

$$\omega_{\text{сопр1}} = 1/25 = 0,04 \text{ с}^{-1} \text{ – низкочастотный диапазон;}$$

$$\omega_{\text{сопр2}} = 1/0,5 = 2 \text{ с}^{-1} \text{ – высокочастотный диапазон;}$$

$$\omega_{\text{сопр3}} = 1/0,3 = 3,33 \text{ с}^{-1} \text{ – высокочастотный диапазон;}$$

$$T_\Sigma = T_1 + T_2 = 0,5 + 0,3 = 0,8; \quad \frac{T}{2} - T_\Sigma = 2 - 0,8 = 1,2 \text{ с}.$$

Следовательно, получаем:

$$K(j\omega_w) = \frac{K(1 + j\omega_w \cdot 25)(1 + j\omega_w \cdot 1,2)(1 - j\omega_w \cdot 2)}{(j\omega_w)^2 (1 + j\omega_w \cdot 2)^2}$$

$$\varphi(\omega_w) = -2 \cdot 90^\circ + \arctg 25\omega_w + \arctg 1,2\omega_w - 2 \arctg 2\omega_w.$$

Вычисляем сопрягающие псевдочастоты:

$$\omega_{\text{wсопр1}} = \omega_{\text{сопр1}} = 1/25 = 0,04 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{\text{wсопр2}} = \frac{1}{T/2} = 1/2 = 0,5 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{\text{wсопр3}} = 1/\left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right) = 1/(2 - 0,8) = 0,833 \text{ с}^{-1}.$$

Асимптотические ЛАХ и ЛФХ, соответствующие полученным выражениям, представлены на рис. 3.6.

Отметим, что множитель $(1 - j\omega_w \cdot 2)$ в системе комплексной передаточной функции соответствует неминимально-фазовому звену, которое поднимает ЛАХ на высоких частотах на +20 дБ/дек. В нашем случае это звено компенсирует снижение ЛАХ на -20 дБ/дек из-за наличия в знаменателе множителя $(1 + j\omega_w \cdot 2)$. Это же неминимально-фазовое звено вносит отрицательный фазовый сдвиг равный $-\arctg\omega_w \frac{T}{2}$. Как следует из рис. 3.6, система имеет запасы устойчивости: по амплитуде около 10 дБ, по фазе около 25° .

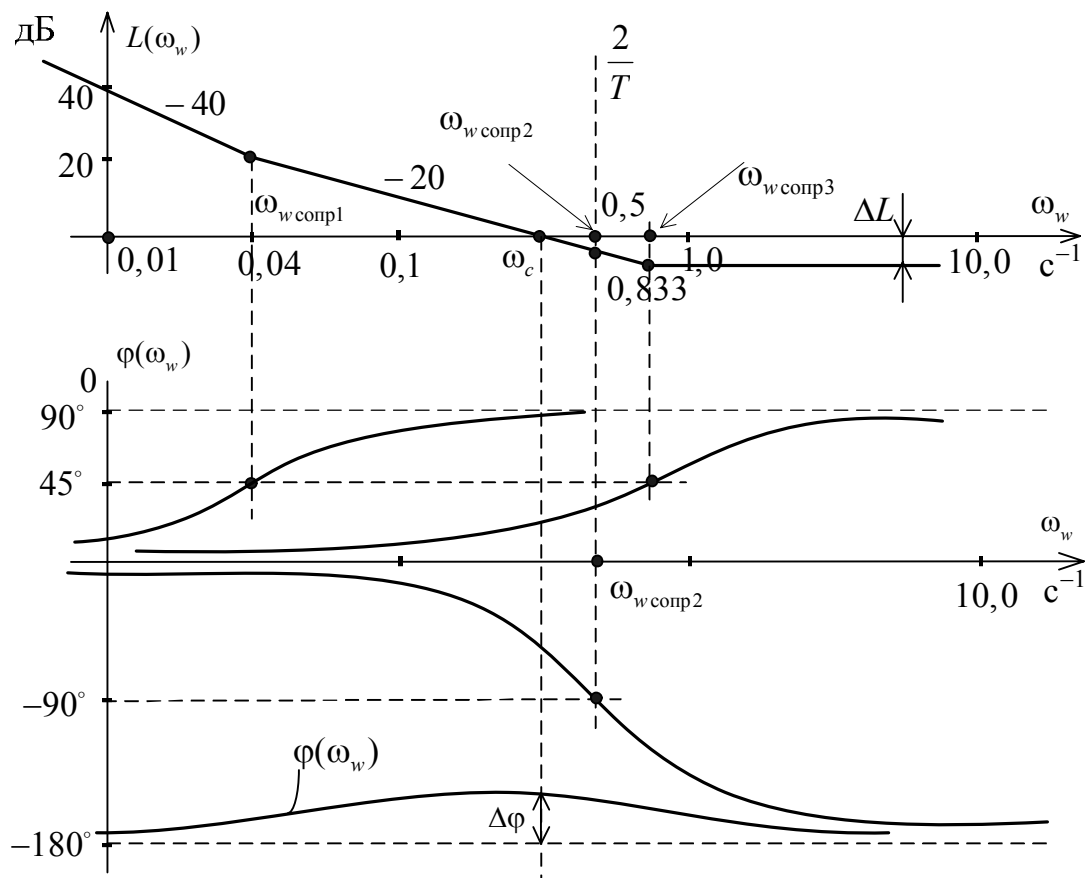


Рис. 3.6. ЛЧХ импульсной системы

3.6 Критерий Михайлова

Для определения устойчивости ИСАУ можно применять также аналог критерия Михайлова.

Представим вектор, соответствующий характеристическому уравнению замкнутой САУ, в виде:

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0.$$

При $z = e^{j\omega T}$ и $T = 1$ вектор $D(e^{j\omega}) = a_0 (e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \dots (e^{j\omega} - z_n) = 0$.

Для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы при $0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}$ (при $T = 1$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$) суммарный поворот $\Delta\varphi_\Sigma$ векторов $(e^{j\omega} - z_i)$ при $i = 1, \dots, n$ был $2\pi n$, (это будет выполняться, когда корни лежат внутри круга единичного радиуса (рис. 3.7, а)). Корень, например z_1 , лежащий вне круга, дает $\Delta\varphi_1 = 0$ при повороте вектора $(e^{j\omega} - z_1)$ на угол 2π (рис. 3.7, б), и условие устойчивости не выполняется.

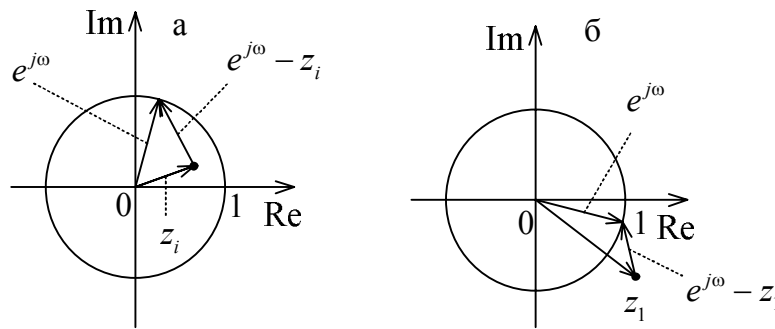


Рис.3.6. Изменение угла поворота вектора $e^{j\omega} - z_i$:
а – для корня внутри круга ($\Delta\varphi_i = 2\pi$), б – для корня вне круга ($\Delta\varphi_i = 0$)

4. ТОЧНОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим точность импульсной системы в установившемся режиме. При изучении непрерывных систем их точность в установившемся режиме исследовалась на основании свойства преобразования Лапласа о конечном значении непрерывной функции. Аналогичные результаты можно получить для импульсных систем на базе свойства z -преобразования о конечном значении ретчатой функции:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z), \quad (4.1)$$

где $X(z)$ – z -изображение ошибки системы $x(kT)$ в дискретные моменты времени (рис. 4.1).

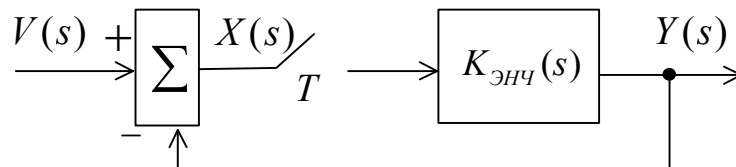


Рис. 4.1. Структура ИСАУ

z -изображение ошибки

$$X(z) = V(z) - Y(z) = V(z) - \frac{K(z)}{1 + K(z)}V(z) = \frac{1}{1 + K(z)}V(z).$$

Из выражения следует, что дискретная передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$K_x(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + K(z)}. \quad (4.2)$$

На основании свойства о конечном значении

$$x_{ycm}(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K_x(z)V(z). \quad (4.3)$$

Рассмотрим установившуюся ошибку при ступенчатом воздействии $V1(kT)$. В этом случае $V(z) = V \frac{z}{z-1}$ и

$$x_{ycm}^0(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K_x(z)V \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z)Vz = V \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z) = \frac{V}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} K(z)} = \frac{V}{1 + K_0}, \quad (4.4)$$

где $K_0 = \lim_{z \rightarrow 1} K(z)$ называют коэффициентом ошибки по положению.

Если $K(z)$ имеет полюс $z=1$, т.е. знаменатель содержит множитель $(z-1)$, то $K_0 = \infty$ и ошибка по положению равна 0, что соответствует непрерывной системе с астатизмом первого порядка.

Теперь рассмотрим установившуюся ошибку при линейно нарастающем воздействии $V \cdot kT$. В этом случае $V(z) = V \frac{Tz}{(z-1)^2}$.

$$\begin{aligned} x'_{ycm}(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K_x(z)V \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z)V \frac{Tz}{(z-1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{VTz}{[1 + K(z)](z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{VTz}{(z-1) + (z-1)K(z)} = \frac{VT}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K(z)} = \frac{V}{K_v}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T}(z-1)K(z)$ называют коэффициентом ошибки по скорости.

Если $K(z)$ имеет два полюса $z_1 = z_2 = 1$, то $K_v = \infty$ и ошибка по скорости равна нулю, что соответствует непрерывной системе с астатизмом второго порядка.

Пример 4.1. Импульсная система имеет структуру, изображенную на рис. 4.2. Найти установившиеся ошибки по положению (как реакцию на единичный скачок) для двух случаев: $K(s) = \frac{K}{s+1}$, $K(s) = \frac{K}{s}$.

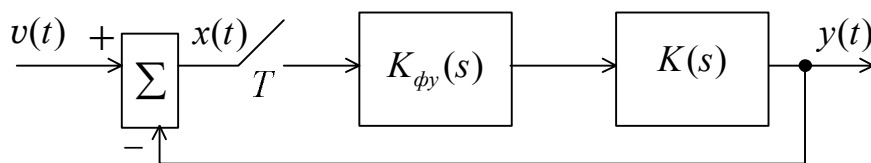


Рис. 4.2. Структура ИСАУ

В первом случае

$$K(z) = Z \left\{ K_{\phi y}(s) K(s) \right\} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{K}{s+1} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{s(s+1)} \right\}.$$

Разложим выражение в фигурных скобках на простые дроби.

$$\frac{K}{s(s+1)} = \frac{\beta_1}{s} + \frac{\beta_2}{s+1}; \quad \beta_1 = \left. \frac{sK}{s(s+1)} \right|_{s=0} = K; \quad \beta_2 = \left. \frac{K(s+1)}{s(s+1)} \right|_{s=-1} = -K.$$

По таблице соответствий находим

$$Z \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1} \right\} = K \frac{z}{z-1} - K \frac{z}{z-e^{-T}} = K \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right).$$

Дискретная передаточная функция

$$K(z) = \frac{z-1}{z} K \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right) = K \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-T}} \right) = K \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}.$$

Установившаяся ошибка по положению $x_{ycm}^0(kT) = \frac{V}{1+K_0}$, где $V=1$,

$$K_0 = \lim_{z \rightarrow 1} K(z) = \frac{1}{1+K}.$$

Во втором случае

$$K(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{s^2} \right\} = \frac{z-1}{z} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{z-1}, \quad x_{ycm}^0(kT) = \frac{V}{1+K_0} = \frac{1}{1+\infty} = 0.$$

Эти результаты согласуются с теоретическими выкладками. Таким образом, дискретная система сохраняет порядок астатизма непрерывной части.

5. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

При синтезе дискретных систем ставится та же задача, что и для непрерывных систем – обеспечить требуемые показатели качества управления. В непрерывных системах эта цель достигается включением в контур управления аналоговых регуляторов или корректирующих устройств, при этом определяется их место включения, динамическая структура и параметры. В случае дискретных систем возможности синтеза шире, т.к. помимо аналоговых могут применяться дискретные регуляторы и корректирующие устройства, а при использовании средств вычислительной техники – вычислительные алгоритмы коррекции.

Рассмотрим две структурные схемы дискретных систем с коррекцией (рис. 5.1).

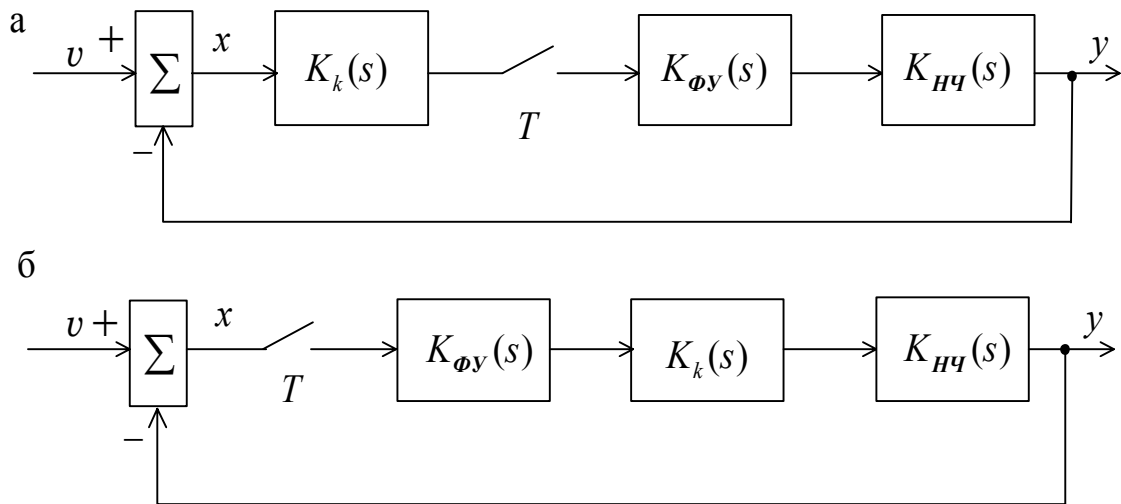


Рис. 5.1. Структурные схемы дискретных систем с коррекцией:
 а – коррекция на входе ключа, б – коррекция на входе непрерывной части

Первый тип систем (рис. 5.1, а) характеризуется непрерывным сигналом ошибки и непрерывным выходным сигналом, поэтому при синтезе корректирующих устройств можно непосредственно применять методы непрерывных систем.

5.1. Замена дискретной системы эквивалентной непрерывной системой

В случае систем второго типа (рис. 5.1, б) задача усложняется. В инженерной практике обычно эту структурную схему сводят к эквивалентной непрерывной схеме на основании следующих преобразований:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}, \text{ а } X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}T. \quad (5.1)$$

Моделью идеального импульсного элемента можно считать

$$K_{ИИЭ} = \frac{X^*(s)}{X(p)} = \frac{1}{T}.$$

Для экстраполятора нулевого порядка $K_{\phi y}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$.

Как было показано ранее, $K_{\phi y}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = Te^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$.

Если $\frac{\omega T}{2} \ll 1$, то $\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = 1$, $K_{\phi y}(j\omega) = T e^{-j\omega \frac{T}{2}}$ и передаточная функция импульсного элемента

$$K_{ИЭ}(s) = K_{ИИЭ}(s)K_{\phi y}(s) = \frac{1}{T} T e^{-s \frac{T}{2}} = e^{-s \frac{T}{2}}. \quad (5.2)$$

Таким образом, реальный импульсный элемент с устройством хранения информации вносит запаздывание, равное $\frac{T}{2}$. Преобразованная таким образом структурная схема представлена на рис. 5.2.

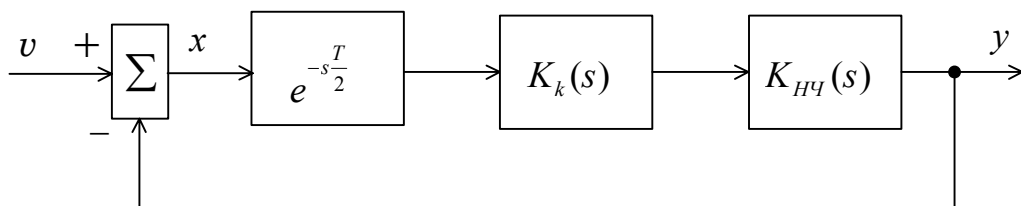


Рис. 5.2. Преобразованная структурная схема дискретной системы

На практике при моделировании применяют более точное выражение:

$$K_{ИЭ}(s) = e^{-s \frac{T}{2}} = \frac{1 - s \frac{T}{2}}{1 + s \frac{T}{2}}. \quad (5.3)$$

Как следует из (5.3), эта передаточная функция соответствует неминимально-фазовому звену.

При принятии решения о замене дискретной системы эквивалентной непрерывной системой необходимо сравнить значение периода дискретизации T с рядом величин, влияющих на процессы в системе. Эквивалентирование возможно при выполнении ряда условий:

1. $T \ll \frac{\pi}{\omega_{\max}}$, где ω_{\max} – наибольшая частота возмущающих и задающих сигналов. Обычно принимают $\omega_{\max} = (2 \div 5)\omega_c$.

2. $T \ll \frac{t_p}{n}$, где t_p – время регулирования, а n – порядок системы.

3. В следящих системах с учетом динамической точности $T \ll \sqrt{\frac{8e_{\text{дон}}}{\ddot{v}_{\max}}}$, где

$e_{\text{дон}}$ – заданная ошибка слежения, \ddot{v}_{\max} – максимальное ускорение входного сигнала.

4. С учетом ухудшения запаса устойчивости $T \ll (0,1 \div 0,5)/\omega_p$, где ω_p – рабочая частота сигналов в системе.

5. С учетом показателя колебательности $T \ll (2/\omega_c) M/(M+1)$.

Из всех ограничений выбирают наиболее жёсткое.

После этого осуществляется расчет коррекции методами непрерывных систем. Правильность выбора величины периода дискретизации подтверждается результатами компьютерного моделирования системы.

Пример 5.1. Оценить влияние величины периода дискретизации T на процессы в системе путем моделирования.

Пусть структура скорректированной системы соответствует рис. 5.3, а. Схема моделирования в SIMULINK приведена на рис. 5.3, б.

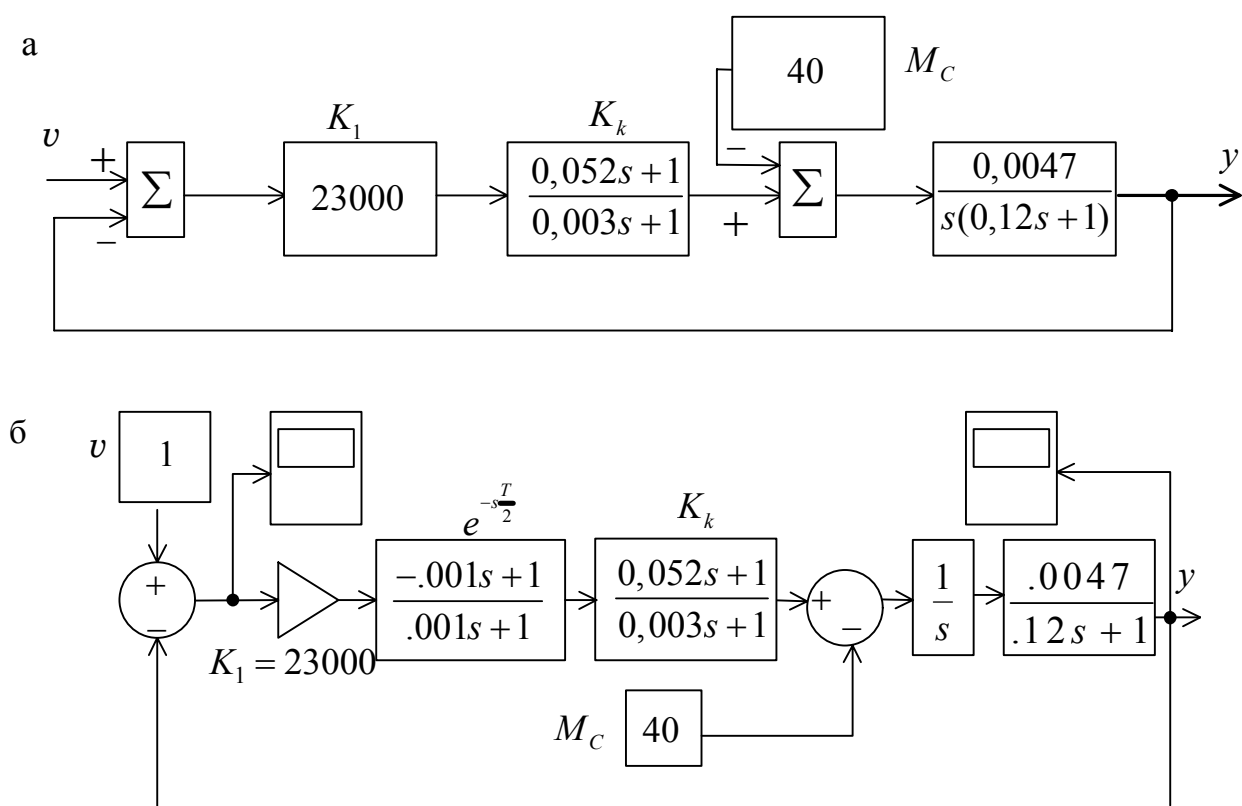


Рис.5.3. Скорректированная система:
а – структурная схема, б – схема моделирования в SIMULINK

В результате исследования системы при $T = 0,002$ с кривые переходного процесса в непрерывной системе (без элемента $e^{-sT/2}$) и с учетом дискретизации (при наличии $e^{-sT/2}$) практически совпали (рис. 5.4, а). При $T \approx 0,01$ с в системе значительно возрастает перерегулирование (рис. 5.4, б), а при $T = 0,03$ – процесс колебательный, расходящийся (рис. 5.4, в).

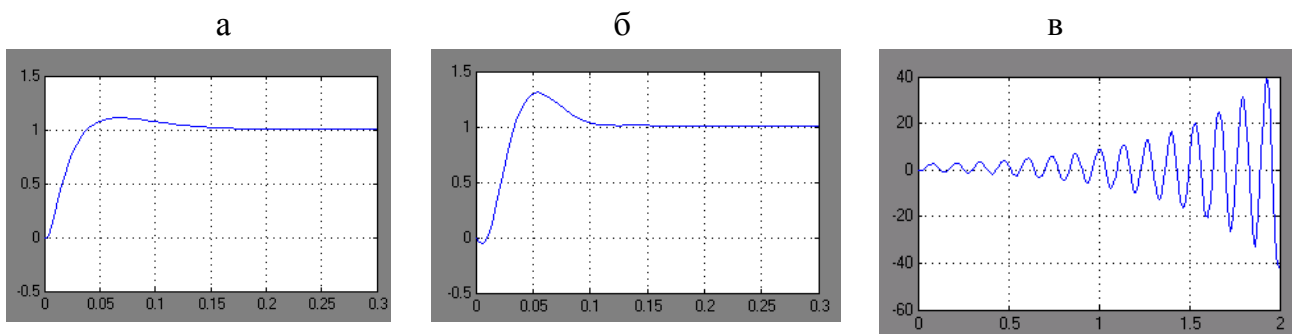


Рис. 5.4. Переходные процессы: а – в непрерывной системе и в дискретной при $T = 0,002$ с ; б – в дискретной системе при $T = 0,01$ с ; в – в дискретной системе при $T = 0,03$ с

Величина $T=0,002$ с соответствует условию $T = \frac{\pi}{10\omega_{\max}}$, где $\omega_{\max} \approx 2\omega_c = 2 \cdot 83 = 166 \text{ с}^{-1}$. В данной системе частота среза $\omega_c \approx 83 \text{ с}^{-1}$.

5.2. Синтез цифровых систем методом w -преобразования

Рассмотрим цифровую систему со структурой, приведенной на рис. 5.5.

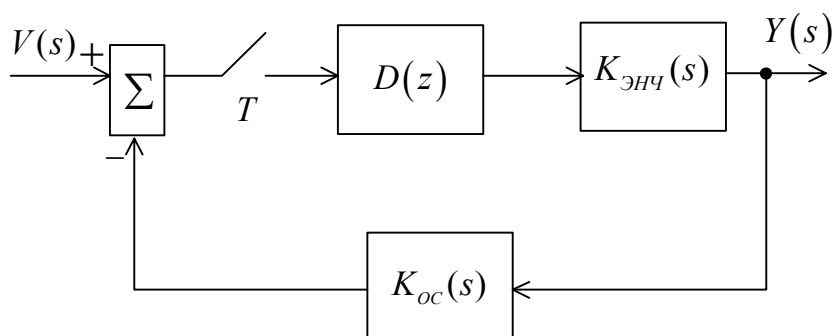


Рис. 5.5. Цифровая система управления: $D(z)$ -цифровой регулятор, $K_{OC}(s)$ -датчик

Передаточная функция замкнутой системы $K_3(z) = \frac{D(z)K_{ЭНЧ}(z)}{1 + D(z)(K_{ЭНЧ}K_{OC})(z)}$,

а характеристическое уравнение

$$1 + D(z)(K_{ЭНЧ}K_{OC})(z) = 0. \quad (5.4)$$

Будем рассматривать корректирующие устройства первого порядка вида:

$$D(z) = \frac{K_d(z - z_0)}{z - z_p}, \quad (5.5)$$

где z_0 – нуль, z_p – полюс, K_d – коэффициент передачи передаточной функции $D(z)$.

Для использования частотного метода синтеза необходимо перейти от z -плоскости к w -плоскости путем замены переменной z на w :

$$D(w) = D(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}}. \quad (5.6)$$

$D(w)$ имеет первый порядок, ее представляют в виде:

$$D(w) = \frac{1 + \frac{w}{\omega_{wo}}}{1 + \frac{w}{\omega_{wp}}}, \quad (5.7)$$

где ω_{wo} и ω_{wp} соответственно нуль и полюс $D(w)$ на w -плоскости.

Для реализации регулятора необходимо перейти от $D(w)$ к $D(z)$:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1 + \frac{w}{\omega_{wo}}}{1 + \frac{w}{\omega_{wp}}} \Big|_{w = \frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{\omega_{wp} \left(\omega_{wo} + \frac{2z-1}{Tz+1} \right)}{\omega_{wo} \left(\omega_{wp} + \frac{2z-1}{Tz+1} \right)} = \frac{\omega_{wp} \omega_{wo} T(z+1) + 2(z-1)}{\omega_{wo} \omega_{wp} T(z+1) + 2(z-1)} = \\ &= \frac{\omega_{wp} T \left[\left(\omega_{wo} + \frac{2}{T} \right) z - \left(\frac{2}{T} - \omega_{wo} \right) \right]}{\omega_{wo} T \left[\left(\omega_{wp} + \frac{2}{T} \right) z - \left(\frac{2}{T} - \omega_{wp} \right) \right]} = \frac{\omega_{wp} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wo} \right) z - \frac{2}{T} - \omega_{wo}}{\omega_{wo} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wp} \right) z - \frac{2}{T} - \omega_{wp}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

С учетом (5.5) параметры регулятора на z -плоскости:

$$K_d = \frac{\omega_{wp} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wo} \right)}{\omega_{wo} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wp} \right)}; \quad z_0 = \frac{\frac{2}{T} - \omega_{wo}}{\frac{2}{T} + \omega_{wo}}; \quad z_p = \frac{\frac{2}{T} - \omega_{wp}}{\frac{2}{T} + \omega_{wp}}. \quad (5.9)$$

При этом если $\omega_{wp} < \omega_{wo}$, регулятор обладает отставанием по фазе; если же $\omega_{wp} > \omega_{wo}$ – опережением по фазе.

5.3. Синтез регулятора с отставанием по фазе

Передаточная функция регулятора с отставанием по фазе имеет вид (5.7), где $\omega_{wp} < \omega_{wo}$, что соответствует логарифмическим частотным характеристикам, приведенным на рис. 5.6.

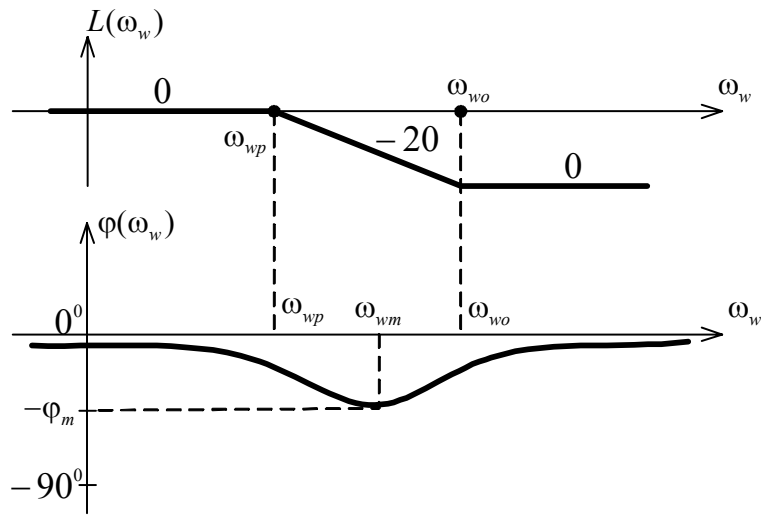


Рис. 5.6. ЛЧХ регулятора с отставанием по фазе

Как следует из рисунка, этот регулятор не вносит искажений на низких частотах, но вносит ослабление на высоких частотах, что используется для увеличения запасов устойчивости. Это иллюстрируется рис. 5.7, где изображены характеристики исходной и желаемой систем.

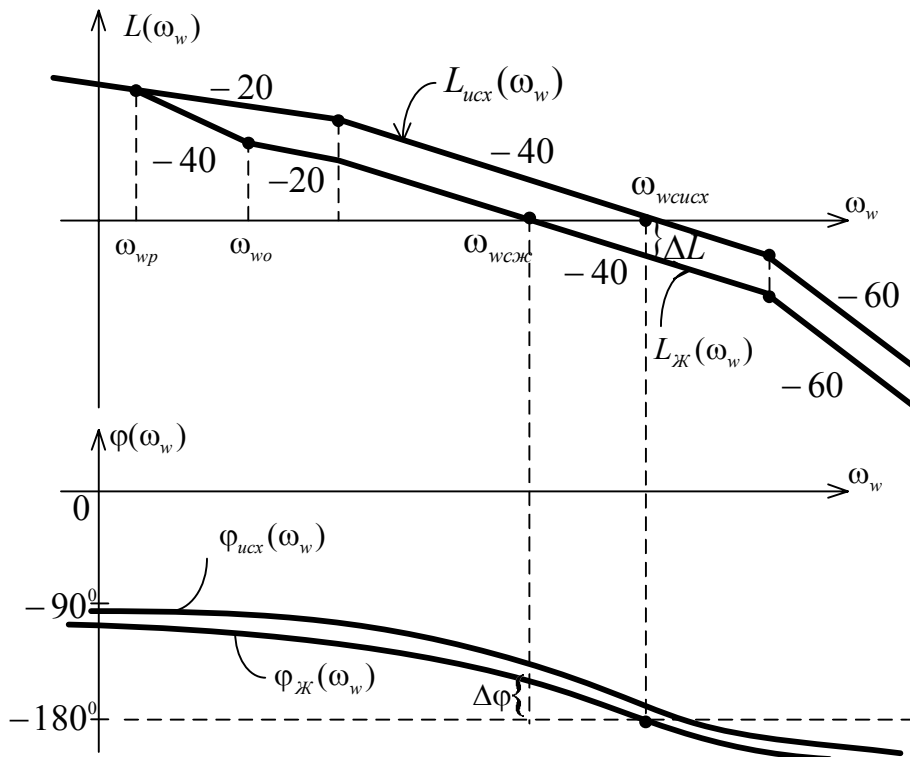


Рис. 5.7. Логарифмические частотные характеристики исходной и желаемой систем

Синтез регулятора рассмотрим применительно к цифровой системе, структура которой приведена на рис. 5.8.

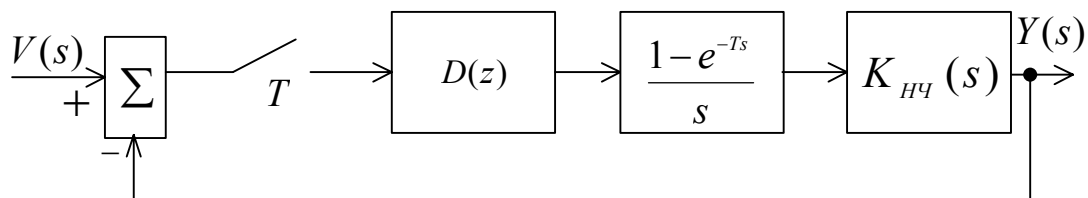


Рис. 5.8. Структура цифровой системы

Порядок синтеза:

1. Получим дискретную передаточную функцию эквивалентной непрерывной части $K_{ЭНЧ}(z)$ по методике, изложенной в разделе 2.9.

2. Перейдем из z -плоскости к w -плоскости с помощью формулы (5.6), получим $K_{ЭНЧ}(w)$.

3. Для построения частотных характеристик разомкнутой системы запишем $K_{ЭНЧ}(j\omega_w) = K_{ЭНЧ}(w)|_{w=j\omega_w}$ и строим ЛАЧХ как зависимость $L_{ЭНЧ}$ от псевдочастоты ω_w . При этом низкочастотный участок должен учитывать заданные требования по точности системы, т. е. в передаточную функцию эквивалентной непрерывной части следует внести дополнительный коэффициент, чтобы общий коэффициент усиления разомкнутой системы был $K_{жс}$.

4. Определим частоту среза $\omega_{всжс}$, при которой обеспечивается заданное быстродействие (t_p) или требуемый запас по фазе ($\Delta\phi$). В первом случае

$\omega_{всжс} = \frac{b\pi}{t_p}$, где $b = 2 \div 5$. Во втором случае

$$\omega_{всжс} = \arg K_{ЭНЧ}(j\omega_{всжс}) = -180^\circ + \Delta\phi + 5^\circ, \quad (5.10)$$

где поправка 5° введена из-за того, что регулятор на частоте среза вносит такой фазовый сдвиг.

5. Примем сопрягающую частоту, соответствующую нулю регулятора, в 10 раз меньше частоты среза:

$$\omega_{wo} = 0,1\omega_{всжс}. \quad (5.11)$$

6. Определим сопрягающую частоту, соответствующую полюсу регулятора, из соотношения:

$$\frac{\omega_{wp}}{\omega_{wo}} = \frac{1}{|K_{ЭНЧ}(j\omega_{всжс})|}. \quad (5.12)$$

7. Запишем передаточную функцию последовательно включаемого регулятора:

$$D(w) = K_{жс} \frac{1 + \frac{w}{\omega_{wo}}}{1 + \frac{w}{\omega_{wp}}}. \quad (5.13)$$

8. Окончательно пересчитаем $D(w)$ в $D(z)$ по формулам (5.5), (5.9).

5.4 Синтез регулятора с опережением по фазе

В этом случае $\omega_{wo} < \omega_{wp}$ и частотные характеристики регулятора имеет вид, изображенный на рис. 5.9.

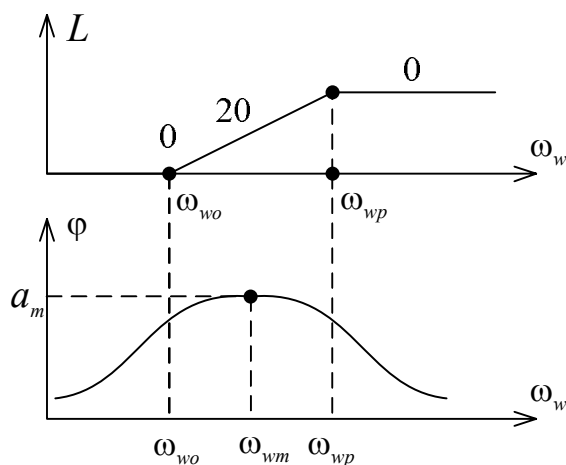


Рис. 5.9. Частотные характеристики регулятора с опережением по фазе

Нуль и полюс регулятора должны располагаться вблизи критической частоты. При этом поднимается амплитуда и фаза, что улучшает устойчивость системы и повышает ее быстродействие. Если регулятор реализуется на пассивных элементах, то подъем амплитуды может быть обеспечен повышением коэффициента усиления в прямой цепи.

Рассмотрим аналитическую процедуру синтеза регулятора с опережением по фазе, подробно изложенную в [6].

Пусть передаточная функция регулятора имеет вид:

$$D(w) = \frac{a_0 w + a_1}{b_0 w + 1}. \quad (5.14)$$

Регулятор имеет на частоте $w = 0$ коэффициент передачи a_1 .

На частоте среза $D(j\omega_{\text{сж}})G(j\omega_{\text{сж}}) = e^{j(-180^\circ + \Delta\varphi)}$. Тогда

$$a_0 = \frac{1 - a_1 |K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{сж}})| \cos \theta}{\omega_{\text{сж}} |K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{сж}})| \sin \theta}, \quad b_0 = \frac{\cos \theta - a_1 |K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{сж}})|}{\omega_{\text{сж}} \sin \theta}, \quad (5.15)$$

$$\theta = \arg D(j\omega_{\text{сж}}) = -180^\circ + \Delta\varphi - \arg K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{сж}}), \quad (5.16)$$

$$|D(j\omega_{\text{сж}})| = \frac{1}{|K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{сж}})|}. \quad (5.17)$$

При синтезе регулятора должны быть известны a_1 , $\omega_{\text{сж}}$, $\Delta\varphi$.

Коэффициент передачи на низких частотах a_1 выбирается, исходя из требований точности.

Частота среза $\omega_{\text{сж}}$ может быть найдена из (5.16) с учетом того, что угол θ должен быть положителен, т.е.

$$\arg K_{\text{ЭНЧ}}(j\omega_{\text{сж}}) < -180^\circ + \Delta\varphi. \quad (5.18)$$

При этом можно воспользоваться подходом к определению частоты среза непрерывной системы, которая связана с быстродействием системы

$$\omega_c \cong \frac{8-10}{t_p \operatorname{tg}(\Delta\varphi)}.$$

После расчета параметров регулятора надо с помощью моделирования в среде Matlab убедиться, что скорректированная система устойчива и удовлетворяет исходным требованиям.

5.5. Цифровые ПИД-регуляторы

При объединении регуляторов с отставанием по фазе и с опережением по фазе можно получить более гибкую коррекцию в виде ПИД-регулятора.

Если непрерывный ПИД-регулятор описывается передаточной функцией

$$K_{\text{ПИД}}(s) = K_{\text{П}} + \frac{K_{\text{И}}}{s} + K_{\text{Д}}s$$

и непрерывным уравнением $U(t) = K_{\text{П}}x(t) + K_{\text{И}} \int x(t)dt + K_{\text{Д}} \frac{dx(t)}{dt}$, то цифровой ПИД-регулятор описывается дискретной передаточной функцией и разностным уравнением. Получим дискретную передаточную функцию интегратора, который описывается уравнением

$$u((k+1)T) = u(kT) + Tx((k+1)T), \quad (5.19)$$

что соответствует правилу прямоугольников (метод Эйлера) численного интегрирования.

Подвергнув уравнение (5.19) z -преобразованию, имеем $z[U(z) - u(0)] = U(z) + Tz[X(z) - x(0)]$, а при нулевых начальных условиях:

$$K_{II}(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = \frac{Tz}{z-1}. \quad (5.20)$$

Дифференцирование описывается разностным уравнением:

$$u((k+1)T) = \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}, \quad (5.21)$$

а передаточная функция будет иметь вид:

$$K_D(z) = \frac{z-1}{Tz}. \quad (5.22)$$

Объединяя передаточные функции пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего звеньев, получаем передаточную функцию цифрового ПИД-регулятора:

$$K_{ПИД}(z) = K_{II} + K_{II} \frac{Tz}{z-1} + K_D \frac{z-1}{Tz}. \quad (5.23)$$

Этой передаточной функции соответствует разностное уравнение:

$$u(k+1) = K_{II}x(k+1) + K_{II}[u(k) + Tx(k+1)] + K_D \frac{x(k+1) - x(k)}{T}. \quad (5.24)$$

Пример 5.2. Пусть при коррекции непрерывной системы получен ПИД-регулятор с передаточной функцией $K_{ПИД}(s) = 2 + 0,001 \frac{1}{s} + 1,5s$. Необходимо записать передаточную функцию дискретного регулятора с периодом дискретизации $T = 0,01$ с.

Так как $\frac{1}{s} \rightarrow \frac{Tz}{z-1}$, а $s \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$, то $K_{ПИД}(z) = 2 + \frac{0,00001z}{z-1} + 150 \frac{z-1}{z}$.

5.6. Особенности реализации дискретной коррекции

Дискретные алгоритмы управления можно реализовать тремя способами: аппаратным, программным и комбинированным.

При аппаратной реализации дискретных алгоритмов управления используют импульсные регуляторы, содержащие модулятор, осуществляющий модуляцию (АИМ, ШИМ, ВИМ) входного сигнала. Как уже отмечалось, при определенном выборе периода дискретизации T импульсный регулятор можно свести к эквивалентному непрерывному. Сравнение дискретных и аналоговых

регуляторов показывает, что аппаратные аналоговые регуляторы менее гибки с точки зрения реализации алгоритмов управления, обладают дрейфом параметров, низкой помехоустойчивостью.

Представление закона управления в виде разностного уравнения, аналогового (5.24), или в виде передаточной функции (5.23) является по существу алгоритмом программирования, который может быть реализован аппаратно с помощью промышленного регулятора или программно.

Дискретные регуляторы, реализуемые на базе микропроцессоров, относятся к комбинированным. Они обладают гибкостью, стабильностью в работе, высокой точностью. Так, при числе разрядов $N=12$ погрешность не превышает 0,05%.

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЯ

6.1. Уравнения состояния дискретных систем и схемы моделирования

Пусть дискретная система описывается разностным уравнением:

$$y(k) = 0,5v(k-1) + 0,3v(k-2) + 1,5y(k-1) - 0,5y(k-2), \quad (6.1)$$

где $v(k)$ – входной сигнал системы, а $y(k)$ – её выходная координата.

Подвергнув это уравнение z -преобразованию, получим дискретную передаточную функцию

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{0,5z^{-1} + 0,3z^{-2}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} = \frac{0,5z + 0,3}{z^2 - 1,5z + 0,5}. \quad (6.2)$$

Разностному уравнению (6.1) или передаточной функции (6.2) могут соответствовать различные схемы моделирования (см. раздел 2.5). Одна из них приведена на рис. 6.1.

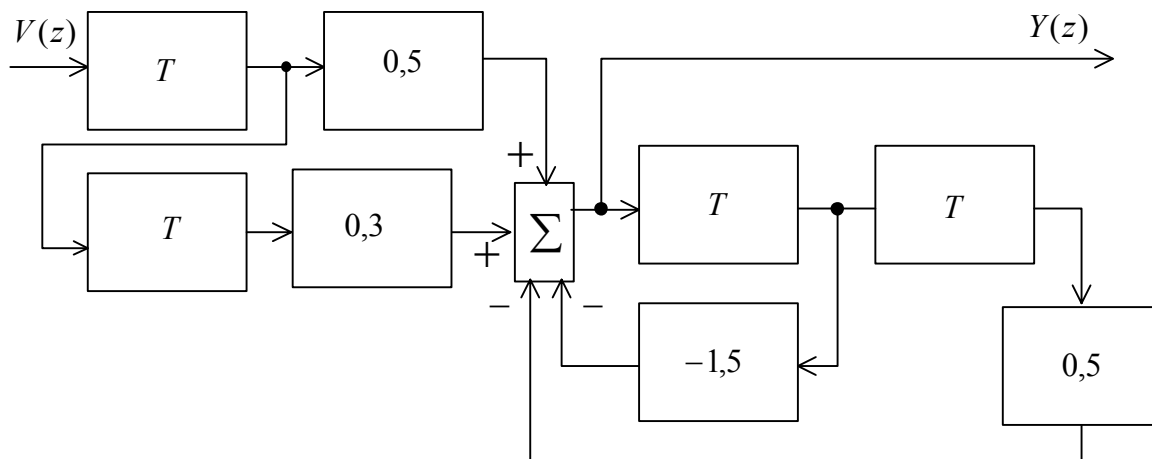


Рис.6.1. Схема моделирования дискретной передаточной функции

Чтобы изобразить модель в переменных состояния системы, описываемой разностным уравнением (6.1), примем за переменную состояния выход каждого элемента задержки T . В нашем случае система имеет второй порядок, поэтому переменных состояния две: $x_1(k)$ и $x_2(k)$. Тогда схема моделирования может иметь вид рис. 6.2.

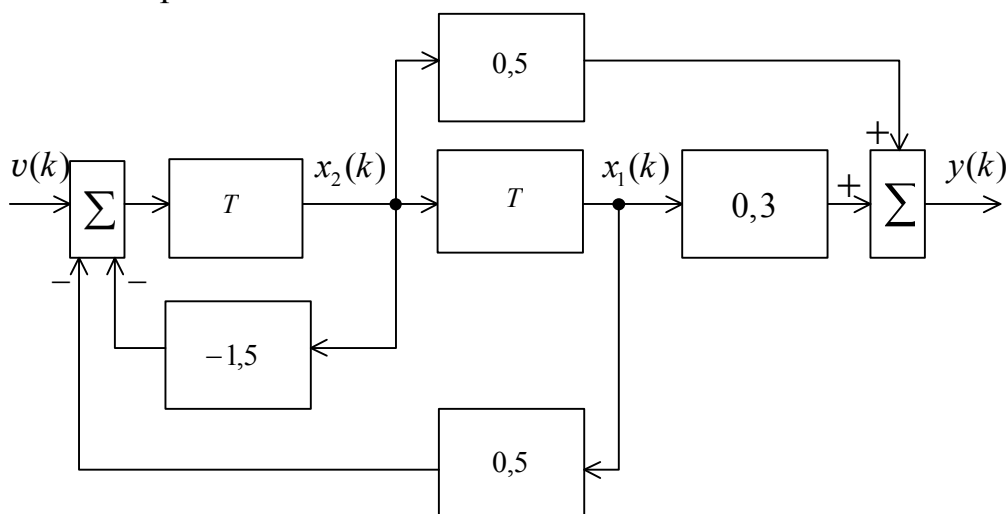


Рис. 6.2. Схема моделирования разностного уравнения в переменных состояния

В соответствии с этой схемой и с учетом того, что входы элементов задержки будут описаны как $x_1(k+1)$ и $x_2(k+1)$, уравнения состояния можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -0,5x_1(k) + 1,5x_2(k) + v(k), \\ y(k) = 0,3x_1(k) + 0,5x_2(k). \end{cases} \quad (6.3)$$

В векторно-матричной форме получим:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k), \\ y(k) = [0,3 \quad 0,5] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Окончательно в компактном виде:

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bv(k), \\ y(k) = CX(k). \end{cases} \quad (6.5)$$

Распространив эти рассуждения на самый общий случай, уравнения в переменных состояния записывают в виде:

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BV(k), \\ Y(k) = CX(k) + DV(k), \end{cases} \quad (6.6)$$

где матрицы A – основная, B – входа, C – выхода, D – связи имеют размерности, как и в непрерывных системах, соответственно $n \times n$, $n \times t$, $p \times n$, $p \times t$. В реальных системах матрица связи D обычно равна нулю, поэтому в дальнейшем ее учитывать не будем.

6.2. Решение уравнений состояния

Рассмотрим первое матричное уравнение состояния системы (6.6):

$$X(k+1) = AX(k) + BV(k). \quad (6.7)$$

Его можно решить как итерационным методом, изложенным в разд. 2.4, так и используя z -преобразование.

Решим уравнение первым методом. При этом надо знать $X(0)$ и $V(k)$ для всех значений k :

$$k=0: \quad X(1) = AX(0) + BV(0);$$

$$k=1: \quad X(2) = AX(1) + BV(1) = A[AX(0) + BV(0)] + BV(1) = A^2X(0) + ABV(0) + BV(1);$$

$$k=2: \quad X(3) = AX(2) + BV(2) = A[A^2X(0) + ABV(0) + BV(1)] + BV(2) = \\ = A^3X(0) + A^2BV(0) + ABV(1) + BV(2);$$

\vdots

$$k=n-1: \quad X(n) = A^nX(0) + A^{n-1}BV(0) + A^{n-2}BV(1) + \dots + ABV(n-2) + BV(n-1).$$

Решение уравнения (6.7) в общем виде:

$$X(n) = A^nX(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}BV(k). \quad (6.8)$$

Найдем решение уравнения (6.7), используя z -преобразование. Для этого представим (6.7) в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_{11}v_1(k) + \dots + b_{1m}v_m(k), \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_{n1}v_1(k) + \dots + b_{nm}v_m(k). \end{cases}$$

Применим к последним уравнениям z -преобразование:

$$\begin{cases} z[X_1(z) - x_1(0)] = a_{11}X_1(z) + \dots + a_{1n}X_n(z) + b_{11}V_1(z) + \dots + b_{1m}V_m(z), \\ \vdots \\ z[X_n(z) - x_n(0)] = a_{n1}X_1(z) + \dots + a_{nn}X_n(z) + b_{n1}V_1(z) + \dots + b_{nm}V_m(z). \end{cases}$$

В векторно-матричной форме эти уравнения будут:

$$z[X(z) - X(0)] = AX(z) + BV(z),$$

$$\text{откуда} \quad X(z) = z[zE - A]^{-1}X(0) + [zE - A]^{-1}BV(z), \quad (6.9)$$

где E – единичная диагональная матрица $\text{diag}[1 \ 1 \dots 1]$.

Применяя к (6.9) обратное z -преобразование, получим решение в виде:

$$X(n) = \Phi(n)X(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(n-1-k)BV(k). \quad (6.10)$$

Из сравнения (6.10) и (6.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= Z^{-1} \left\{ z[zE - A]^{-1} \right\} = A^n, \\ \Phi(n-1-k) &= Z^{-1} \left\{ [zE - A]^{-1} \right\} = A^{n-1-k}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Рассматривая дискретную систему с одним входом и одним выходом, можно получить передаточную функцию системы по матрицам.

Если начальные условия нулевые (т. е. $X(0) = 0$), то из (6.9) следует:

$$X(z) = [zE - A]^{-1} BV(z).$$

Подставив это значение в z -изображение второго уравнения (6.5), получим:

$$Y(z) = CX(z) = C[zE - A]^{-1} BV(z),$$

откуда

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = C[zE - A]^{-1} B. \quad (6.12)$$

Пример 6.1. Пусть передаточная функция дискретной системы

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}.$$

Изобразим модель в пространстве состояний (рис. 6.3).

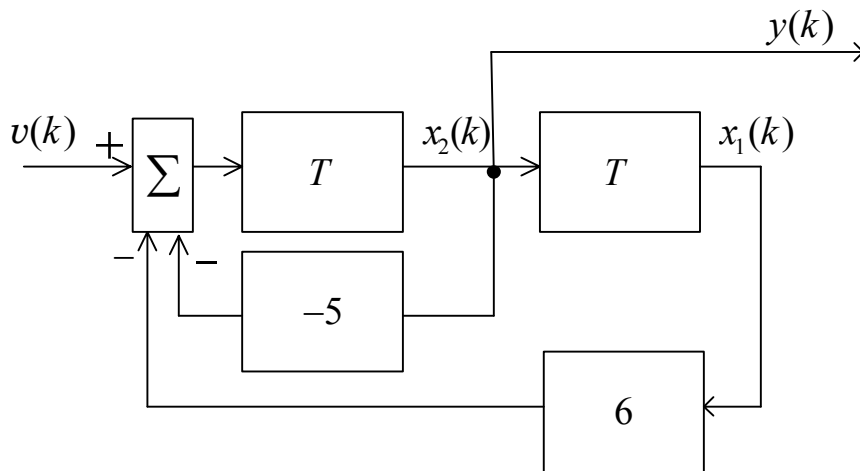


Рис. 6.3. Схема модели

Уравнения состояния в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -6x_1(k) + 5x_2(k) + v(k), \\ y(k) = x_2(k); \end{cases}$$

в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k), \\ y(k) = [0 \quad 1] X(k). \end{cases}$$

Решим уравнения итерационным методом, полагая что $X(0) = 0$; $v(k) = 1$ при $k = 0, 1, 2, \dots$; $y(0) = 0$.

$$X(1) = AX(0) + Bv(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y(1) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$X(2) = AX(1) + Bv(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad y(2) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 6;$$

$$X(3) = AX(2) + Bv(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad y(3) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix} = 25;$$

$$\vdots$$

Решим эти уравнения с использованием z -преобразования.

$[zE - A] = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}$; $|zE - A| = z^2 - 5z + 6$, корни уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0$ будут:

$z_1 = 2$, $z_2 = 3$, тогда $[zE - A]^{-1} = \frac{1}{|zE - A|} [zE - A]_{np} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}$, где

$[zE - A]_{np}$ – матрица, присоединенная относительно матрицы $[zE - A]$.

$X(z) = [zE - A]^{-1} BV(z)$. Так как $V(z) = \frac{z}{z-1}$, то

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \\ \frac{z^2}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \end{bmatrix},$$

$$Y(z) = CX(z) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \\ \frac{z^2}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \end{bmatrix} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Разложим выражение $\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ на простые дроби.

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{\beta_1}{z-1} + \frac{\beta_2}{z-2} + \frac{\beta_3}{z-3},$$

где $\beta_1 = \frac{(z-1)z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2};$ $\beta_2 = \frac{(z-2)z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \Big|_{z=2} = -2;$

$$\beta_3 = \frac{(z-3)z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \Big|_{z=3} = 1,5.$$

Тогда $Y(z) = \frac{0,5z}{z-1} - \frac{2z}{z-2} + \frac{1,5z}{z-3}$ и по таблице соответствия изображений и оригиналов получим, что $y(k) = 0,5 - 2(2)^k + 1,5(3)^k$, откуда следует, что $y(0) = 0; y(1) = 1; y(2) = 6; y(3) = 25$. Результаты обоих методов совпали.

Наконец получим дискретную передаточную функцию по формуле (6.12).

Запишем $[zE - A]^{-1} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-5}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{6}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix}$, где $\Delta = z^2 - 5z + 6$.

$$K(z) = C[zE - A]^{-1}B = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z-5}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{6}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z}{\Delta} = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}, \quad \text{что}$$

соответствует исходной передаточной функции.

6.3. Основные формы уравнений состояния импульсных систем

В общем случае динамика ИСАУ описывается уравнениями (6.6):

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + BV(k), \\ Y(k) &= CX(k). \end{aligned}$$

Если матрица A представлена в форме Фробениуса

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

то имеем нормальную форму уравнений состояния.

Получим другую форму уравнений состояния. Пусть дискретная передаточная функция замкнутой ИСАУ имеет вид

$$K_3(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (6.14)$$

где z_1, z_2, \dots, z_n – корни характеристического уравнения и $m < n$.

Если корни простые, то $K_3(z)$ можно разложить на простые дроби:

$$K_3(z) = \frac{\beta_1}{z - z_1} + \frac{\beta_2}{z - z_2} + \dots + \frac{\beta_n}{z - z_n}, \quad (6.15)$$

где $\beta_i = (z - z_i) K_3(z) \Big|_{z=z_i}$.

Тогда

$$Y(z) = K_3(z) V(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{z - z_i} V(z). \quad (6.16)$$

Обозначим $\frac{\beta_i}{z - z_i} V(z) = X_i(z)$, тогда $Y(z) = \sum_{i=1}^n X_i(z)$.

Используя обратное z -преобразование и учитывая, что $x_i(k+1) = Z^{-1}\{z X_i(z)\}$, а $v_i(k) = Z^{-1}\{V_i(z)\}$, перейдем к оригиналам:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = z_1 x(k) + \beta_1 v(k), \\ \dots \\ x_n(k+1) = z_n x_n(k) + \beta_n v(k), \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + \dots + x_n(k). \end{cases} \quad (6.17)$$

или в матричном виде:

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & z_m \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} V(k), \\ Y(k) = [1, \dots, 1] X(k) \end{cases} \quad (6.18)$$

Окончательно в компактной форме:

$$\begin{cases} X(k+1) = ZX(k) + BV(k), \\ Y(k) = CX(k). \end{cases} \quad (6.19)$$

Форма уравнений состояния (6.18) называется канонической. В ней основная матрица является диагональной: $Z = \text{diag}[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]$.

Если среди корней характеристического уравнения есть кратные, то основная матрица имеет форму Жордана.

Пример 6.2. Пусть передаточная функция замкнутой ИСАУ имеет вид:

$$K_s(z) = \frac{0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}.$$

Корни характеристического уравнения $z^2 - 0,7z + 0,1 = 0$ будут $z_1 = 0,2$; $z_2 = 0,5$.

Определим β_i .

$$\beta_1 = \frac{0,4z(z - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} \Big|_{z=0,2} = \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,2 - 0,5} = -\frac{4}{15}, \quad \beta_2 = \frac{0,4z(z - z_1)}{(z - z_1)(z - z_2)} \Big|_{z=0,5} = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,5 - 0,2} = \frac{2}{3}.$$

Запишем уравнения в пространстве состояния в соответствии с (6.18):

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} V(k), \\ Y(k) = [1 \quad 1] X(k). \end{cases}$$

6.4. Преобразование уравнений состояния

Для перехода от нормальной формы к канонической используют модальную матрицу M . В частности, если матрица A является матрицей Фробениуса и имеет различные собственные числа z_1, z_2, \dots, z_n , то модальная матрица, как и в непрерывных САУ, имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

где n – порядок характеристического уравнения импульсной системы, а z_i – его корни.

Введя новую переменную состояния $Q(k)$ из соотношения $X(k) = MQ(k)$, исходные уравнения (6.6), (6.13) по аналогии с непрерывными системами записывают в виде:
$$\begin{cases} Q(k+1) = ZQ(k) + M^{-1}BV(k), \\ Y(k) = CMQ(k). \end{cases}$$

Пример 6.3. Пусть ИСАУ описывается уравнениями в нормальной форме:

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} V(k), \\ Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} X(k). \end{cases}$$

Так как матрица A является сопровождающей, то характеристическое уравнение системы имеет вид: $\det[A - zE] = (0 - z)(-4 - z) - (-20) \cdot 1 = 0$, откуда $z^2 + 4z + 20 = 0$ и корни $z_{1,2} = -2 \pm 4j$.

Тогда модальная матрица имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 + 4j & -2 - 4j \end{bmatrix}.$$

Исходное уравнение преобразуем путем замены $X(k) = MQ(k)$ к виду:

$$\begin{cases} Q(k+1) = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix} MQ(k) + M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} V(k), \\ Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} MQ(k), \end{cases}$$

где $M^{-1} = \frac{1}{|M|} M_{np} = \frac{1}{-8j} \begin{bmatrix} -2 - 4j & -1 \\ 2 - 4j & 1 \end{bmatrix} = 0,5 \frac{j}{4} \begin{bmatrix} -2 - 4j & -1 \\ 2 - 4j & 1 \end{bmatrix},$

$$M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0,5 \frac{j}{4} \begin{bmatrix} -2 - 4j & -1 \\ 2 - 4j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0,5 \frac{j}{4} \begin{bmatrix} -4 - 4j \\ 4 - 4j \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} -j & 1 \\ j & 1 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} Q(k+1) = \begin{bmatrix} -2 + 4j & 0 \\ 0 & -2 - 4j \end{bmatrix} Q(k) + 0,5 \begin{bmatrix} -j & 1 \\ j & 1 \end{bmatrix} V(k), \\ Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 + 4j & -2 - 4j \end{bmatrix} Q(k) = \begin{bmatrix} -7 + 16j & -7 - 16j \\ -9 + 20j & -9 - 20j \end{bmatrix} Q(k). \end{cases}$$

В общем случае, когда в исходных уравнениях состояния основная матрица является произвольной, переход к канонической форме осуществляется через преобразование $X = MQ$, в котором модальная матрица, как и в непрерывных системах, образуется из вектор-столбцов x^i , получаемых в результате решения уравнений:

$$[z_i E - A] x^i = 0. \quad (6.21)$$

Модальная матрица будет иметь вид:

$$M = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

6.5 Управляемость и наблюдаемость дискретных систем

Понятия управляемости и наблюдаемости дискретных систем аналогичны понятиям, рассмотренным для непрерывных систем (см. разд. 9.8, ч.1 ЭУМК).

Дискретная система, описываемая уравнениями (6.5), называется полностью управляемой, если для моментов времени $t(0)$ и $t(l)$ и состояниях $x(t_0)$ и $x(t_l)$ существует управление $v(k)$, причем $0 \leq k \leq l$, переводящее начальное состояние $x(t_0)$ в конечное $x(t_l)$.

Критерий управляемости связан с невырожденностью матрицы управляемости $K_y = [B:AB:\dots:A^{n-1}B]$. Для системы с одним входом и одним выходом критерий управляемости сводится к условию:

$$\det K_y \neq 0. \quad (6.23)$$

Это можно доказать, воспользовавшись формулой (6.8). Приняв момент времени $l = n$, найдем

$$x(n) = A^n x(0) + A^{n-1} B v(0) + \dots + B v(n-1). \quad (6.24)$$

Соотношение можно представить в виде:

$$x(n) = A^n x(0) + [B:AB:\dots:A^{n-1}B] \begin{bmatrix} v(n-1) \\ v(n-2) \\ \dots \\ v(0) \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Из последнего выражения получаем:

$$\begin{bmatrix} v(n-1) \\ v(n-2) \\ \dots \\ v(0) \end{bmatrix} = [B:AB:\dots:A^{n-1}B]^{-1} [x(n) - A^n x(0)] = K_y^{-1} [x(n) - A^n x(0)], \quad (6.26)$$

а это возможно, когда $\det K_y \neq 0$, поскольку $K_y^{-1} = \frac{1}{\det K_y} K_{yпр}$.

Дискретная система, называется полностью наблюдаемой, если в момент наблюдения $t = t(l)$ по данным измерения $y(t_l)$ и известным значениям $u(t_l)$ можно восстановить вектор состояния в момент $k = 0$. Поскольку наблюдаемость не зависит от входной переменной, можно рассматривать систему как автономную, т.е. (6.8) представить в виде:

$$X(n) = A^n X(0). \quad (6.27)$$

Критерий наблюдаемости связан с невырожденностью матрицы наблюдаемости $K_H = [C^T : A^T C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T]$. Для одномерной системы этот критерий имеет вид:

$$\det K_H \neq 0. \quad (6.28)$$

Положив $l = n - 1$ и учитывая (6.27), найдем значения $y(0), \dots, y(n - 1)$:

$$y(0) = C^T x(0), y(1) = C^T A x(0), \dots, y(n - 1) = C^T A^{n-1} x(0),$$

или в компактном виде:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = [C^T : C^T A^T : \dots : C^T (A^T)^{n-1}] x(0) = K_H x(0). \quad (6.29)$$

Если матрица K_H обратима ($\det K_H \neq 0$), то можно найти

$$x(0) = K_H^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Основные понятия и особенности нелинейных систем

Нелинейной называется система, которая содержит хотя бы один элемент с нелинейной зависимостью между его входной и выходной величинами в установившемся режиме. Нелинейности бывают естественные и искусственно вводимые. Естественные нелинейности обусловлены свойствами реальных элементов: насыщением, нечувствительностью, неоднозначностью и т.п. Преднамеренно вводимые нелинейности предназначены для улучшения качества систем. Например, в линейной системе характер переходного процесса зависит от величины коэффициента передачи системы K : при большом значении K выходная координата нарастает быстро, но имеет много колебаний, а при малом значении K – процесс монотонный, но затянутый по времени. Если ввести в систему нелинейный элемент, как показано на рис. 1.1, то в начале отработки входного сигнала (когда ошибка e большая) значение K большое, а в конце отработки (e – малая) – значение K небольшое.

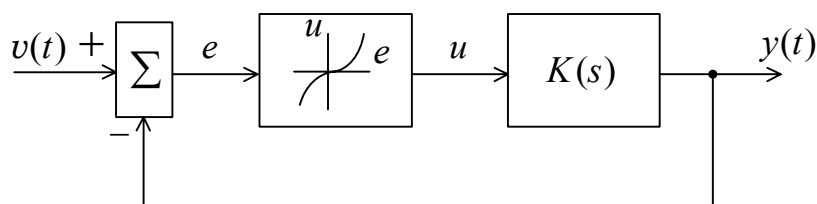


Рис. 1.1. Структура системы с нелинейным элементом

Таким образом, в системе с нелинейным элементом можно получить переходный процесс, быстро нарастающий, без перерегулирования и с небольшим временем установления.

Основные особенности нелинейных систем:

1. К нелинейной системе не применим принцип суперпозиции. Реакцию нелинейной системы на несколько различных воздействий нельзя получить как сумму составляющих на отдельные воздействия, так как эта реакция зависит от величины входных воздействий и начальных условий.

2. В нелинейной системе могут возникнуть автоколебания, амплитуда которых не зависит от внешних воздействий и начальных условий.

3. В нелинейной системе возможны несколько состояний равновесия, которые могут быть либо субгармоникой, либо гармоникой входного сигнала. Несколько состояний равновесия возможны и при отсутствии входного воздействия, но в зависимости от различных значений начальных условий.

4. Наконец, в нелинейной системе могут быть явления скачкообразного резонанса, заключающегося в резком возрастании амплитуды выходной коор-

динаты системы при росте частоты входного воздействия и резком уменьшении выходной координаты при снижении частоты входного воздействия.

1.2. Характеристики типовых нелинейностей и их соединений

Рассмотрим наиболее распространенные нелинейности:

1) Нелинейность типа «ограничение» (насыщение) (рис. 1.2)

$$u(e) = \begin{cases} b, & e \geq a, \\ \frac{b}{a}e, & |e| < a, \\ -b, & e \leq -a. \end{cases}$$

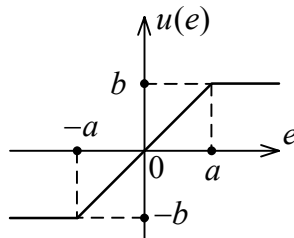


Рис. 1.2. Нелинейность типа «ограничение»

2) Нелинейность типа «зона нечувствительности» (рис. 1.3)

$$u(e) = \begin{cases} k(e-a), & e > a, \\ 0, & |e| \leq a, \\ k(e+a), & e < -a. \end{cases}$$

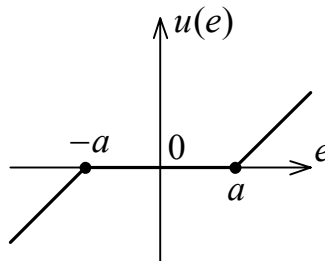


Рис. 1.3. Нелинейность типа «зона нечувствительности»

Возможна комбинированная нелинейность из этих двух.

3) Нелинейность типа «идеальное двухпозиционное реле»

$$u(e) = b \operatorname{sign}(e)$$

$$\operatorname{sign}(e) = \begin{cases} 1, & e > 0, \\ -1, & e < 0. \end{cases}$$

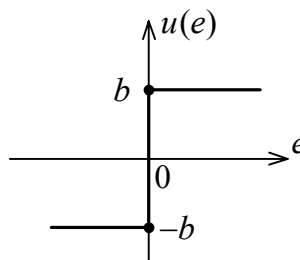


Рис. 1.4. Идеальное двухпозиционное реле

4) Реальное двухпозиционное реле

$$u(e, \dot{e}) = \begin{cases} -b, & e < a, \dot{e} > 0, \\ -b, & e < -a, \dot{e} < 0, \\ b, & e > a, \dot{e} > 0, \\ b, & e > -a, \dot{e} < 0. \end{cases}$$

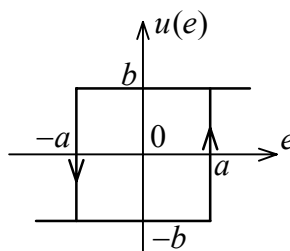


Рис. 1.5. Реальное двухпозиционное реле

Есть также трехпозиционные (идеальные и реальные) реле.

5) Нелинейность типа «люфт»

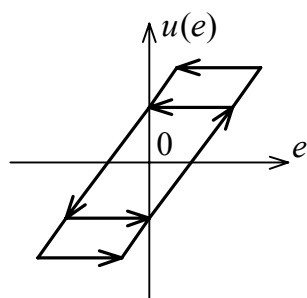


Рис. 1.6. Нелинейность типа «люфт»

6) Нелинейность типа «квантователь»

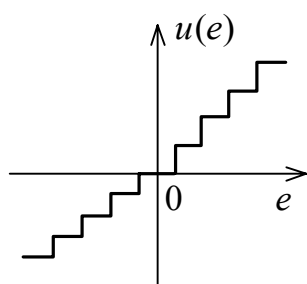


Рис. 1.7. Нелинейность типа «квантователь»

Среди рассмотренных нелинейностей однозначные нелинейности – статические, неоднозначные – динамические.

При наличии в системе нескольких нелинейных элементов их заменяют одной эквивалентной нелинейностью.

Рассмотрим различные соединения звеньев.

1) Последовательное соединение. Пусть статические характеристики двух нелинейностей имеют вид, приведенный на рис. 1.8.

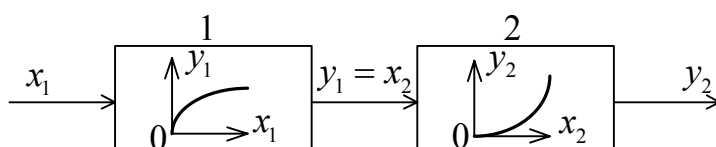


Рис. 1.8. Статические характеристики двух нелинейностей

Значению x'_1 (рис. 1.9) соответствует значение y'_1 первого элемента, y'_1 будет входом x'_2 для второго элемента, для которого находят выходную величину y'_2 . Суммарную характеристику соединения строят в IV квадранте (y'_2 и x'_1). При этом масштабы выходной величины первого звена и входной величины второго звена должны быть одинаковыми. Масштабы и при других видах соединений должны согласовываться.

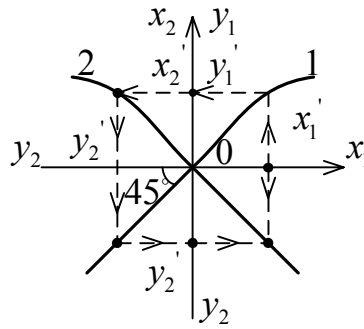


Рис. 1.9. Характеристика последовательного соединения двух нелинейностей

2) Параллельное соединение. Статические характеристики двух нелинейностей, соединенных параллельно, приведены на рис. 1.10.

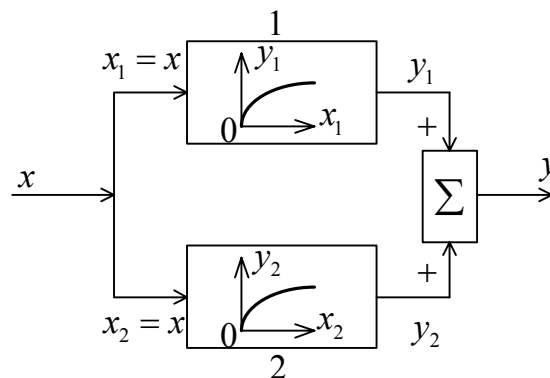


Рис. 1.10. Статические характеристики двух нелинейностей

При построении характеристики этого соединения (рис. 1.11) для фиксированного значения x_i определяется значение $y_i = y_{i1} + y_{i2}$.

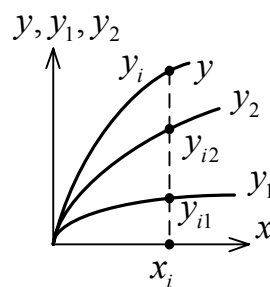


Рис. 1.11. Характеристика параллельного соединения двух нелинейностей

3) Встречно-параллельное соединение (соединение с обратной связью) (рис. 1.12).

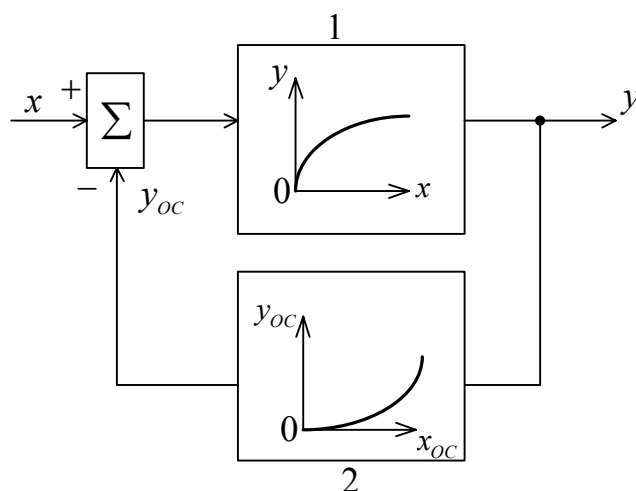


Рис. 1.12. Встречно-параллельное соединение двух нелинейностей

Если разомкнуть обратную связь, то значение y' соответствует x' (рис. 1.13). При замыкании отрицательной обратной связи для достижения y' надо увеличить входной сигнал x'_{oc} на величину y'_{oc} , т.е. $x'_{oc} = x' + y'_{oc}$.

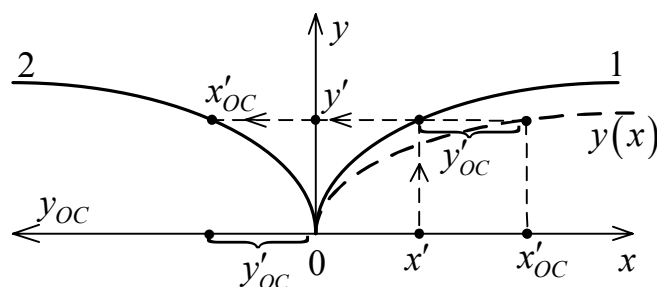


Рис. 1.13. Характеристика встречно-параллельного соединения двух нелинейностей

Для упрощения анализа нелинейной системы производят структурные преобразования, чтобы в замкнутом контуре иметь нелинейный элемент (НЭ) и линейную часть (ЛЧ) (рис. 1.14).

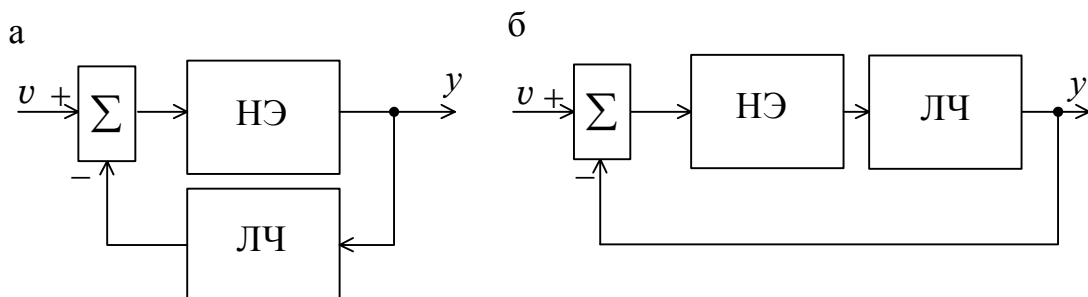


Рис. 1.14. Расчетные структурные схемы нелинейной системы: а – с линейной частью в цепи обратной связи, б – с линейной частью в прямой цепи

При этом следует выполнить условия: через НЭ нельзя переносить линейные звенья; сигналы на входе НЭ должны оставаться такими же и после преобразования схемы.

Пример 1.1. Преобразовать структурную схему (рис. 1.15), в которой F – нелинейный элемент, K_1, K_2, K_3 – линейные части, к расчетным структурам.

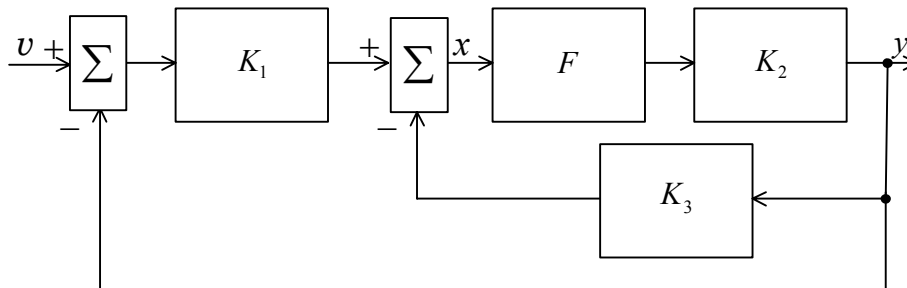
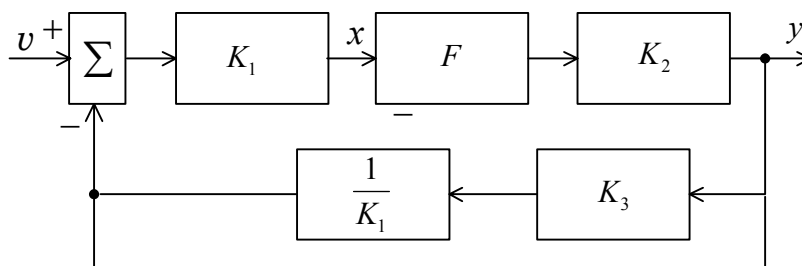
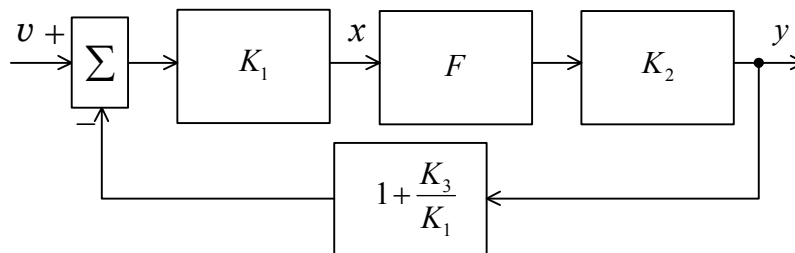


Рис. 1.15. Исходная структурная схема нелинейной системы

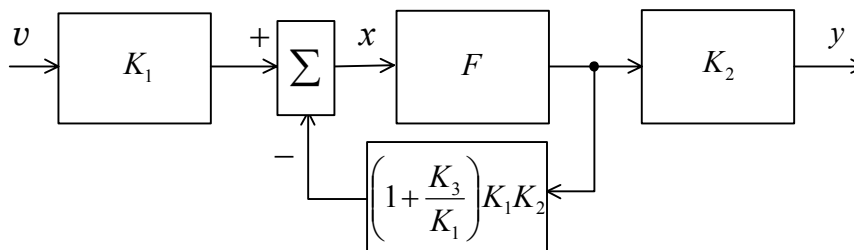
Преобразование осуществим в следующей последовательности. Перенесем сумматор внутреннего контура через элемент K_1 влево:



Заменим параллельно соединенные цепи обратных связей одной:

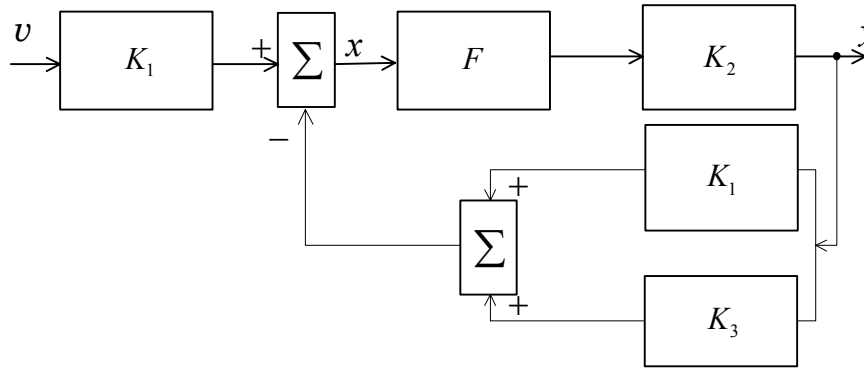


Окончательно получим первый вариант схемы:

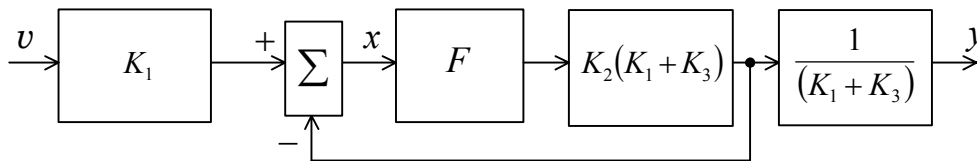


Для получения второго варианта в исходной схеме разорвем цепь на входе нелинейного элемента. $x = (v - y)K_1 - yK_3 = vK_1 - y(K_1 + K_3)$.

На основании этого соотношения схема будет иметь вид:



Окончательно второй вариант расчетной схемы будет:



1.3. Классификация и примеры нелинейных систем

В зависимости от принципа работы нелинейного элемента можно выделить следующие виды нелинейных САУ:

Нелинейные непрерывные САУ, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, v) \\ y = \varphi(t, x, v) \end{cases}$$

где $f(t, x, v)$ и $\varphi(t, x, v)$ – нелинейные вектор-функции.

Нелинейные импульсные САУ, описываемые нелинейными разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(k, x(k), v(k)), \\ y(k) &= \varphi(k, x(k), v(k)). \end{aligned}$$

Релейные САУ.

Нелинейные САУ, в состав которых входят ЭВМ. Если параметры системы с течением времени изменяются, то нелинейные системы называются нестационарными, если не изменяются, то стационарными.

Наконец нелинейные системы при отсутствии задающих воздействий, называют автономными.

Рассмотрим примеры нелинейных систем.

1. Привод подачи станка с вращающимся трансформатором, работающим в режиме фазовращателя (рис. 1.16).

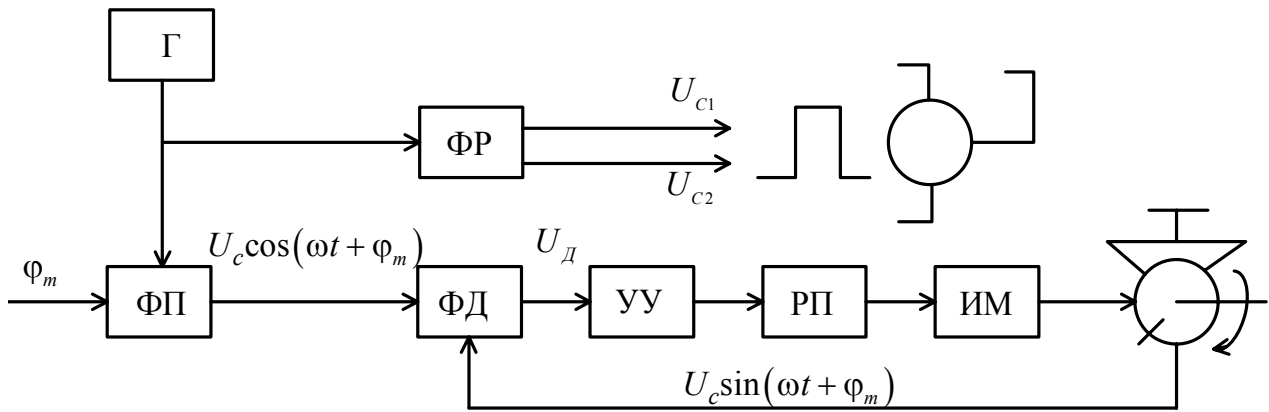


Рис.1.16. Функциональная схема привода подачи станка:

Γ – генератор опорного напряжения; ΦП – функциональный преобразователь формирующий желаемый сигнал $U_c \cos(\omega t + \varphi)$, ΦД – фазовый детектор выделяющий сигнал U_d , пропорционального отклонению реальной фазы φ от желаемого значения $\varphi_{ж}$, УУ – устройство управления; РП – регулируемый привод; ИМ – исполнительный механизм; ФР – фазовращатель, формирующий напряжения, которыми запитываются статорные обмотки трансформатора: $U_{C1} = U_c \sin \omega t$, $U_{C2} = U_c \cos \omega t$, при этом на роторной обмотке формируется напряжение: $U_{P1} = k U_c \sin(\omega t + \varphi)$

Для перехода к структурной схеме системы (рис. 1.17) определим выходную характеристику фазового детектора, который реализует умножение сигналов:

$$U_d = U_c \cos(\omega t + \varphi_m) U_c \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U_c}{2} [\sin(\varphi_m - \varphi) + \cos(2\omega t + \varphi_m + \varphi)].$$

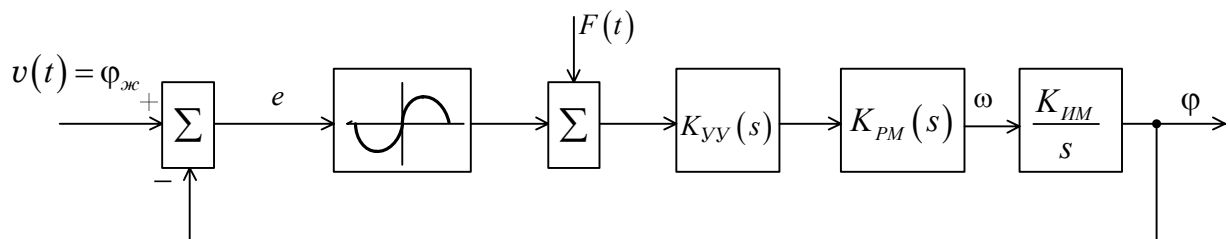


Рис. 1.17. Структурная схема привода подачи станка

Из приведенной структуры, где $F(t)$ – помеха, обусловленная неточной фильтрацией второй гармоники, видно, что систему можно считать линейной, если начальное рассогласование $|e| \ll \frac{\pi}{2}$, во всех остальных случаях система нелинейна.

2. Релейный привод с асинхронным двухфазным двигателем.

Функциональная схема системы приведена на рис. 1.18.

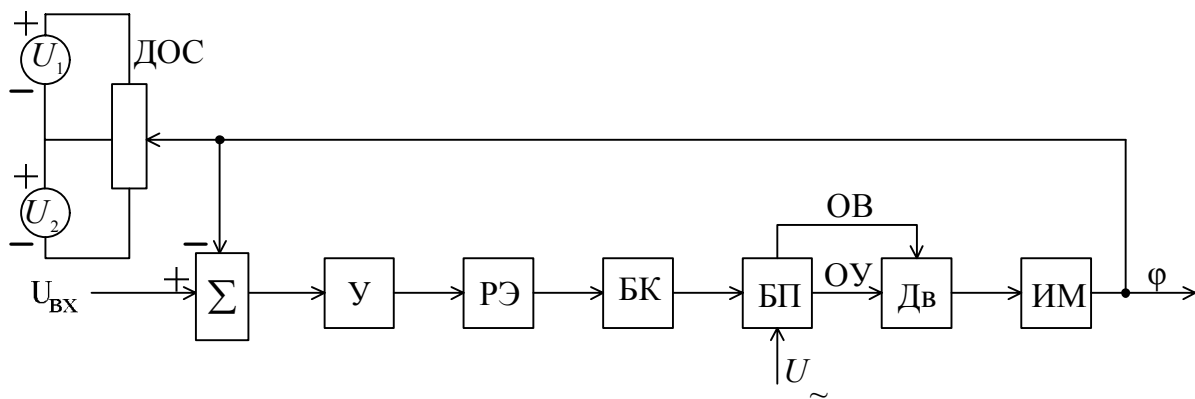


Рис. 1.18. Функциональная система релейного привода с асинхронным двухфазным двигателем: У – усилитель; РЭ – релейный элемент; БК – блок коммутации; БП – блок питания; ИМ – исполнительный механизм; ОУ – обмотка управления; ОВ – обмотка возбуждения; ДОС – датчик обратной связи.

Нелинейные характеристики в виде реле введены в систему для придания ей определенных свойств, связанных с обеспечением максимальной скорости регулирования.

1.4. Методы исследования нелинейных систем

Основными задачами исследования нелинейных систем являются: отыскание возможных состояний равновесия системы и исследование их устойчивости; определение параметров автоколебаний и анализ их устойчивости; исследование процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях.

Начало исследования нелинейных систем обычно связано с рассмотрением устойчивости и определением параметров автоколебаний.

К настоящему времени не создана общая теория анализа нелинейных систем. Разработанные методы позволяют решать задачи лишь для отдельных видов нелинейных систем, и, как правило, они применимы для систем, описываемых определенными типами нелинейных дифференциальных уравнений.

Все методы исследования нелинейных систем разделяются на три основные группы: точные методы, приближенные методы и методы моделирования.

К первой группе, относятся: метод А. М. Ляпунова, метод фазовой плоскости, метод точечных преобразований, частотный метод В. М. Попова. Все они основаны на точном решении нелинейных дифференциальных уравнений.

Приближенные методы, такие как метод гармонической линеаризации, метод статистической линеаризации, основаны на линеаризации нелинейных уравнений системы.

Мощным и эффективным методом исследования нелинейных систем является моделирование, инструментарием которого служит компьютер. В настоящее время многие сложные для аналитического решения теоретические

Рассмотрим поведение автономной линейной системы, описываемой уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \quad (2.2)$$

Обозначим скорость изменения координаты x , т.е. $\frac{dx}{dt}$, через \dot{x} . Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -a_1 \dot{x} - a_2 x, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Исключим из последней системы время t , разделив первое уравнение на второе:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{x}{\dot{x}}. \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) определяет семейство кривых на фазовой плоскости, которое называют фазовым портретом системы. При этом возможны шесть типовых случаев изображения портретов систем в зависимости от корней характеристического уравнения системы:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \quad (2.4)$$

1. Корни вещественные отрицательные при $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (система устойчивая, апериодический монотонный процесс) (рис. 2.2).

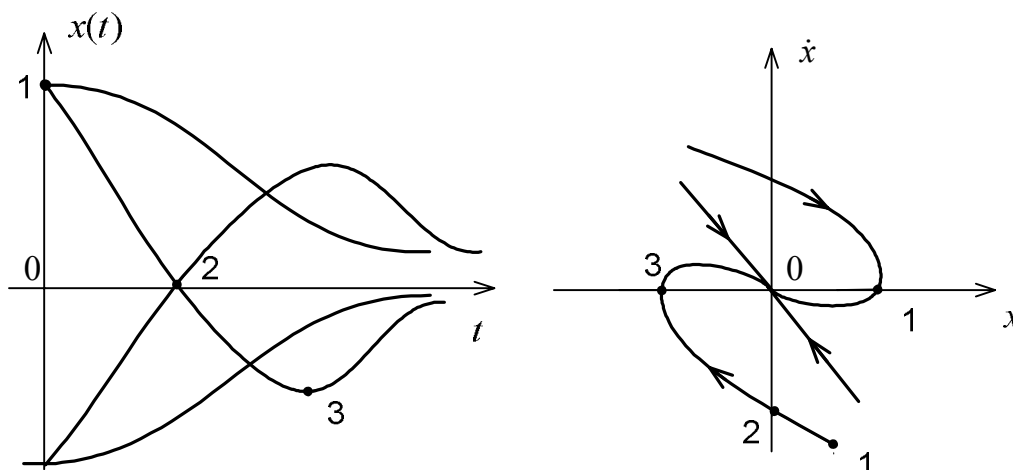


Рис. 2.2

2. Корни вещественные положительные при $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ (система неустойчивая, монотонный расходящийся процесс) (рис. 2.3).

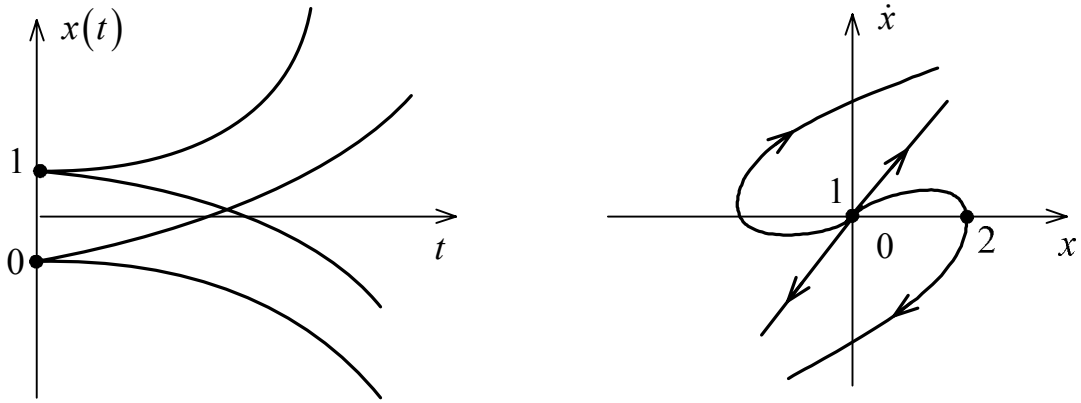


Рис. 2.3

3. Корни комплексные, вещественные части отрицательные при $a_1^2 < 4a_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (система устойчивая, процесс колебательный сходящийся) (рис. 2.4).

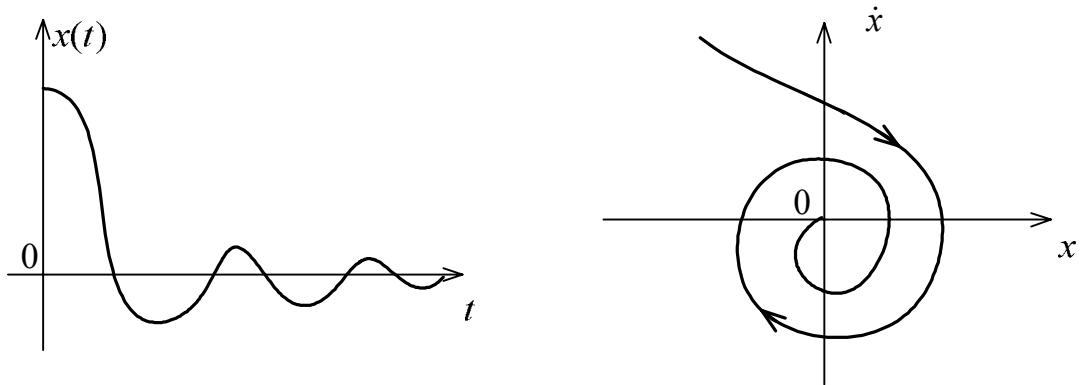


Рис. 2.4

4. Корни комплексные, вещественные части – положительные при $a_1^2 < 4a_2$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ (система неустойчивая, процесс колебательный расходящийся) (рис. 2.5).

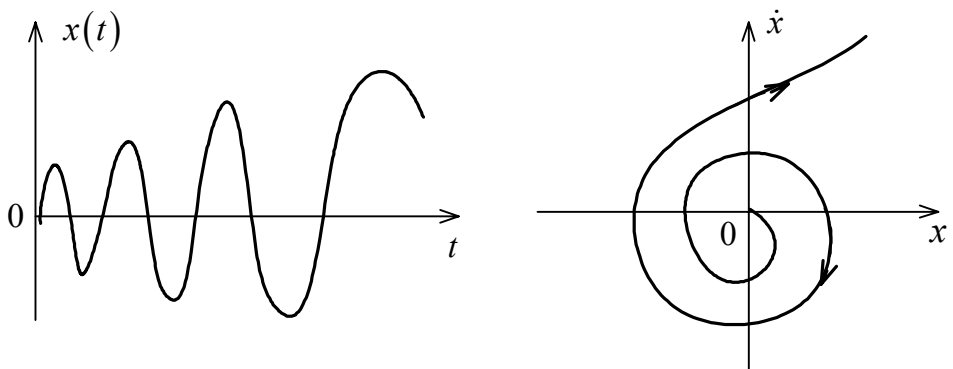


Рис. 2.5

5. Корни чисто мнимые при $a_1 = 0$, $a_2 > 0$. (в системе колебательная граница устойчивости, процесс незатухающий колебательный) (рис. 2.6).

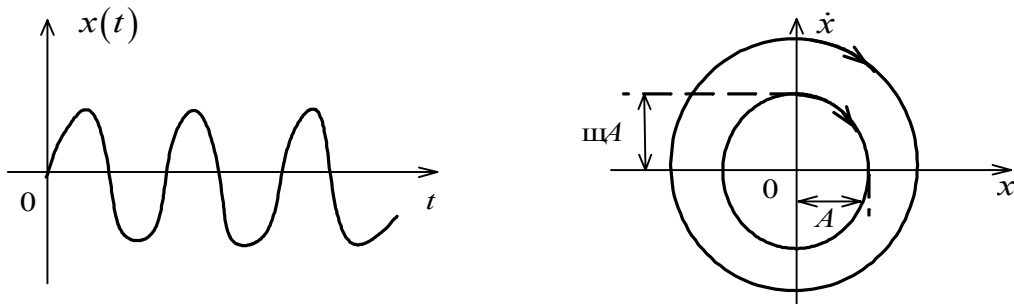


Рис. 2.6. $x(t) = A \sin \omega t$, $\dot{x} = \omega A \cos \omega t$

6. Корни вещественные с разными знаками при $a_2 < 0$ (система сначала стремится к устойчивому значению, а затем попадает в область неустойчивости, процесс аperiodический расходящийся) (рис. 2.7).

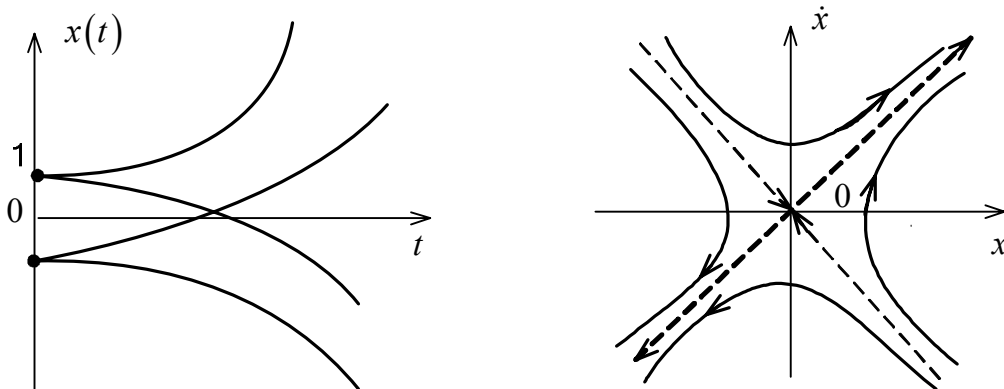


Рис. 2.7

Особые точки. В точках, которые соответствуют установившемуся состоянию системы на основании (2.3) имеем: $\frac{d\dot{x}}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{0}{0}$, т.е. наклон касательных к фазовым траекториям не определен. Такие точки называют особыми точками. Для рассмотренных шести случаев, особые точки называют соответственно: *устойчивым узлом* – (рис. 2.2), *неустойчивым узлом* – рис. 2.3, *устойчивым фокусом* – рис. 2.4, *неустойчивым фокусом* – рис. 2.5, *центром* – рис. 2.6, *седлом* – рис. 2.7.

Отметим общие свойства фазовых траекторий:

1) через всякую точку фазовой плоскости, за исключением особых точек, проходит единственная фазовая траектория, это означает, что фазовые траектории не пересекаются между собой;

2) в верхней фазовой полуплоскости при возрастании времени t изображающая точка движется слева направо, в нижней полуплоскости движение происходит справа налево.

3) в точках, где $\dot{x} = 0$, $f(\dot{x}, x) \neq 0$ (не особых точках на оси абсцисс), фазовые траектории пересекают ось под прямым углом.

Фазовые портреты нелинейных систем. В нелинейных системах, как правило, существуют несколько особых точек. Возможны их самые различные

комбинации. В связи с этим для определения характера движения системы необходимо строить фазовый портрет НСАУ. При этом каждая нелинейная система имеет собственный фазовый портрет.

Выделим основные особенности фазовых портретов нелинейных систем: нелинейные системы в отличие от линейных могут иметь несколько особых точек, в том числе и бесчисленное множество; в нелинейных системах существуют замкнутые кривые – предельные циклы, к которым сходятся или от которых расходятся все остальные фазовые траектории.

Все фазовые портреты можно классифицировать по типу предельного цикла. Рассматривают три типа предельных циклов.

1. *Устойчивый предельный цикл*: к нему стремятся все соседние фазовые траектории.

В системе существуют установившиеся устойчивые незатухающие колебания (автоколебания). При больших начальных условиях a' колебания затухают, и система ведет себя как устойчивая. При начальных условиях внутри цикла a'' колебания расходятся, что соответствует неустойчивому движению. Говорят, что система «устойчива в большом и неустойчива в малом» (рис. 2.8). В инженерной практике по виду предельного цикла можно определить амплитуду и частоту автоколебаний.

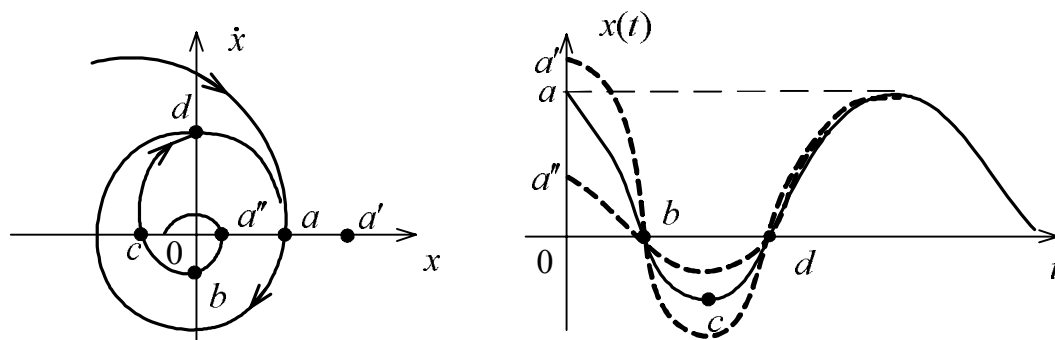


Рис. 2.8. Устойчивый предельный цикл

2. *Неустойчивый предельный цикл*: с него сходят все соседние фазовые траектории. В системе никогда не будет установившихся колебаний, так как при наличии сколь-нибудь малых возмущений они гаснут, либо расходятся, если лежат за пределами цикла. Система «неустойчива в большом и устойчива в малом» (рис. 2.9).

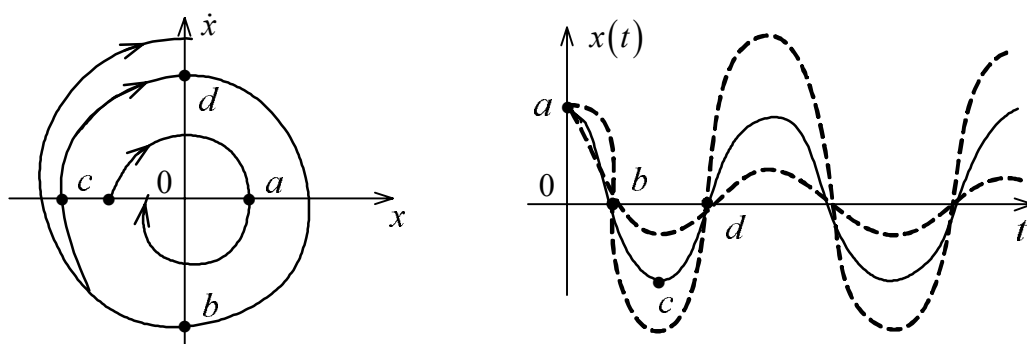


Рис. 2.9. Неустойчивый предельный цикл

3. *Полуустойчивый предельный цикл.* С одной стороны к нему стремятся соседние фазовые траектории, с другой стороны сходят. Возможны два варианта: полуустойчивый предельный цикл в сторону устойчивости (рис. 2.10, а), когда движение всегда устойчиво, так как при любых рассогласованиях система придет в особую точку – начало координат и полуустойчивый предельный цикл в сторону неустойчивости (рис. 2.10, б), движение всегда неустойчиво, так как при любых начальных отклонениях процессы расходятся.

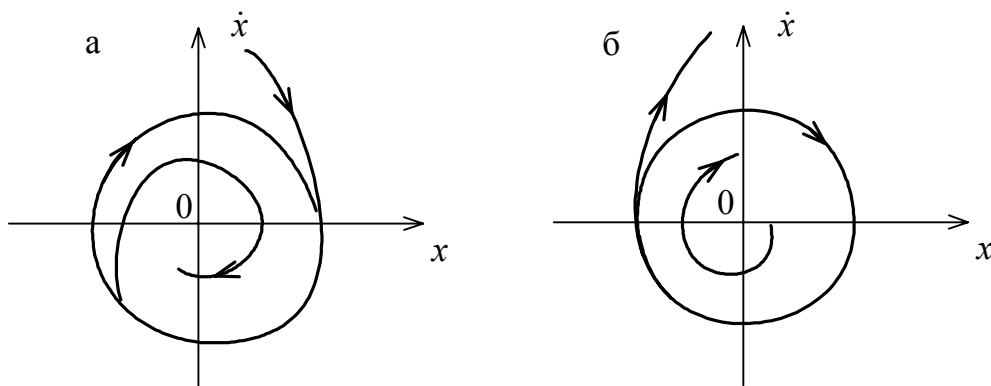


Рис. 2.10. Полуустойчивый предельный цикл: а – в сторону устойчивости, б – в сторону неустойчивости

2.2. Методы построения фазовых портретов

При построении фазовых портретов используют методы решения уравнений по участкам, изоклин, Льенара, δ -метод.

Метод решения уравнений по участкам. Поясним этот метод на примере. Пусть НСАУ имеет структуру, приведенную на рис. 2.11.

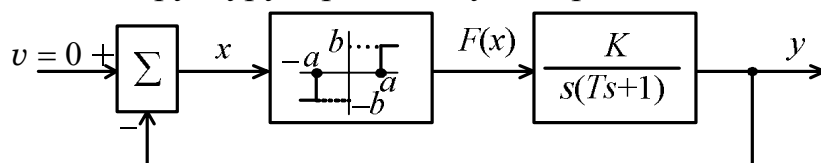


Рис. 2.11

Дифференциальное уравнение системы $T\ddot{x} + \dot{x} + F(x)K = 0$. Обозначим $x = -y$; $\dot{x} = -\dot{y}$. Тогда $T \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = KF(x)$ или

$$T \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = K \begin{cases} b, & x > a, \quad y < a, \\ 0, & |x| < a, \quad |y| < a, \\ -b, & x < -a, \quad y > a. \end{cases} \quad (2.5)$$

Рассмотрим участок, соответствующий зоне нечувствительности, где $F(x) = 0$. Из (2.5) $T \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = 0$. Так как $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$, то $dt = \frac{dy}{\dot{y}}$ и $T \frac{d\dot{y}}{dy} \dot{y} = -\dot{y}$ или $d\dot{y} = -\frac{1}{T} dy$, откуда

$$\dot{y} = -\frac{1}{T}y + C_0. \quad (2.6)$$

На участке, где $F(x) = -Kb$ ($x < -a, y > a$), дифференциальное уравнение $T \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = -Kb$. После подстановки $dt = \frac{dy}{\dot{y}}$ получим $T \frac{d\dot{y}}{dy} \dot{y} = -\dot{y} - Kb$, откуда

$dy = -T \frac{d\dot{y}}{\dot{y} + Kb}$. Возьмем интеграл от обеих частей последнего равенства и пре-

образуем правую часть: $\int dy = -T \int \frac{d\dot{y}(\dot{y} + Kb - Kb)}{\dot{y} + Kb} + C_1$, откуда

$$y = T \left[\int -d\dot{y} + \int \frac{Kb}{\dot{y} + Kb} d\dot{y} \right] + C_1.$$

Окончательно

$$y = T [Kb \ln(\dot{y} + Kb) - \dot{y}] + C_1. \quad (2.7)$$

Участок, где $F(x) = Kb$, исследуется аналогично. Получаются уравнения, симметричные рассмотренным.

Фазовый портрет, построенный по полученным выражениям, имеет вид, приведенный на рис. 2.12, а примерная кривая процесса $y(t)$ соответствует рис. 2.13.

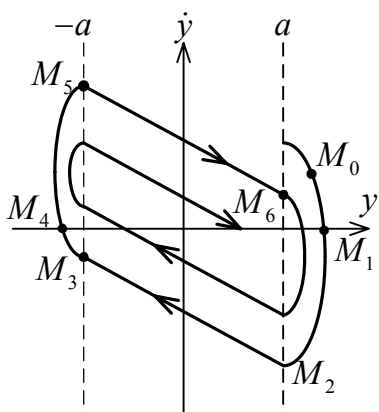


Рис. 2.12. Фазовый портрет НСАУ

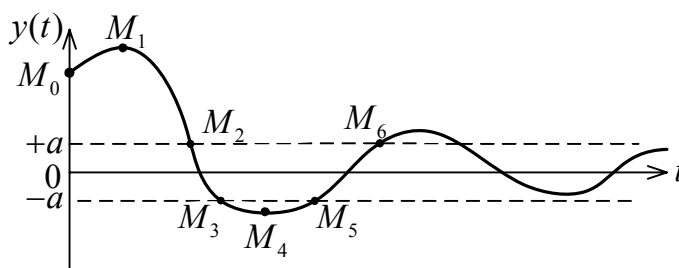


Рис.2.13. Кривая процесса НСАУ

Метод изоклин. Пусть $\frac{d\dot{y}}{dy} = \frac{f_1(y, \dot{y})}{f_2(y, \dot{y})} = N$, где N – наклон фазовой траектории на плоскости (\dot{y}, y) .

Если на фазовой плоскости выбрать точки, которым соответствует один и тот же наклон $N_i = \frac{f_1(y_i, \dot{y}_i)}{f_2(y_i, \dot{y}_i)}$, то соединив их, можно получить линию, называемую *изоклиной* (изоклина – это геометрическое место точек на фазовой плоскости, соответствующих одному постоянному значению наклона интегральных

кривых), а множество линий для разных значений N – семейство изоклин (штриховые линии на рис. 2.14). Уравнение изоклин

$$\dot{y}_i = f(N_i, y_i). \quad (2.8)$$

Построение фазовой траектории осуществляется так (рис. 2.14): строят изоклины; далее из начальной точки M_0 проводят два луча с наклонами N_1 и N_2 до пересечения со следующей изоклиной; отрезок, отсекаемый ими на следующей изоклине делят пополам, точка M_1 будет исходной точкой для следующего построения.

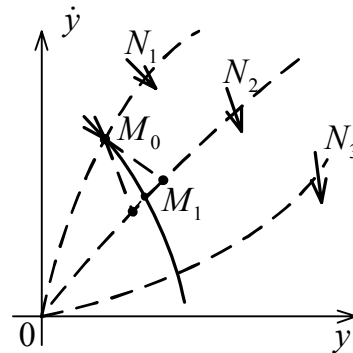


Рис. 2.14. Построение фазовой траектории

Таким образом, фазовая траектория – это линия, проходящая через средние точки. Точность построения тем выше, чем больше изоклин.

Проиллюстрируем эту методику построением фазового портрета для системы из предыдущего примера.

Для участка $F(x) = 0$ $T \frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y} = 0$; $dt = \frac{dy}{\dot{y}}$; $T \frac{d\dot{y}}{dy} + \dot{y} = 0$, откуда уравнение изоклин $\frac{d\dot{y}}{dy} = -\frac{1}{T} = N$ ($\text{tg}\alpha = N$) (рис. 2.15, $|y| < a$).

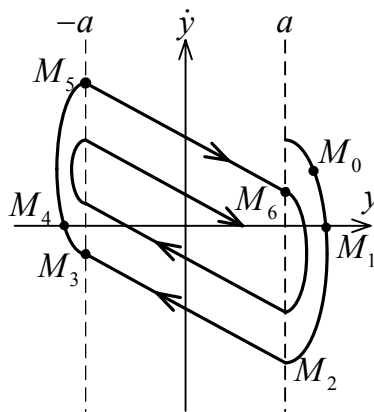


Рис. 2.15. Построение фазового портрета методом изоклин

Для участка $F(x) = -Kb$ $\frac{d\dot{y}}{dy} = -\frac{Kb + \dot{y}}{T\dot{y}} = N$, откуда $\dot{y} = -\frac{Kb}{1 + NT}$. Аналогично получается уравнение изоклин и для последнего участка.

Сравнение рис. 2.12 и рис. 2.15 показывает, что результаты совпали.

Достоинством метода изоклин является возможность построения фазовых траекторий для любых начальных условий, а недостатками – трудоемкость процесса построения и отсутствие возможности исследования системы при изменении параметров во времени или в зависимости от изменения внешних воздействий.

Метод Льенара. Этот метод применяется в том случае, когда свободное движение описывается уравнением вида:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = 0. \quad (2.9)$$

Наклон на фазовой плоскости определяется как

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(\dot{x}) + x}{\dot{x}}. \quad (2.10)$$

Льенар предложил на фазовой плоскости строить кривую $x = -f(\dot{x})$, а затем определять направление движения траектории согласно следующему алгоритму:

1. Выбирается начальная точка $P_1(\dot{x}_1, x_1)$ и осуществляется движение из этой точки до пересечения с кривой $x = -f(\dot{x})$.

2. Из точки пересечения опускается перпендикуляр на ось x и находится точка Q_1 .

3. Радиусом R_1 , равным длине отрезка $[P_1, Q_1]$, проводится дуга окружности с центром в точке Q_1 .

4. На этой дуге произвольно выбирается точка P_2 и процесс повторяется: осуществляется движение до пересечения с кривой $x = -f(\dot{x})$, определяется Q_2 , радиус R_2 и т.д.

Для увеличения точности построения фазовых траекторий дуги окружности рекомендуется выбирать минимальной длины.

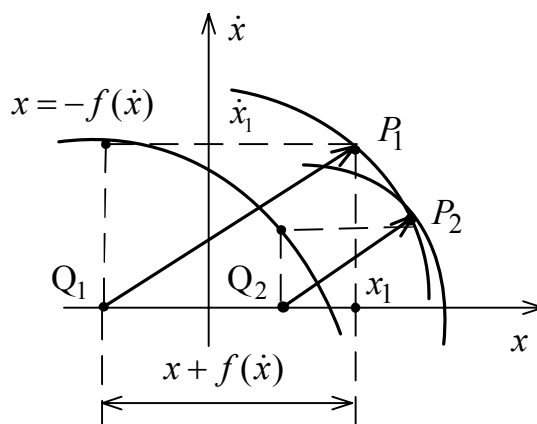


Рис. 2.16. Построение фазового портрета методом Льенара

К методу Льенара близок δ -метод построения фазовых портретов, который также основан на построении окружностей, отрезки дуг которых составляют фрагменты фазовых траекторий. В отличие от метода Льенара δ -метод позволяет исследовать процессы в системах с изменяющимися во времени коэффициентами, а так же вынужденные движения.

2.3. Анализ нелинейной системы с насыщением

Пусть структурная схема НСАУ имеет вид, приведенный на рис. 2.17.

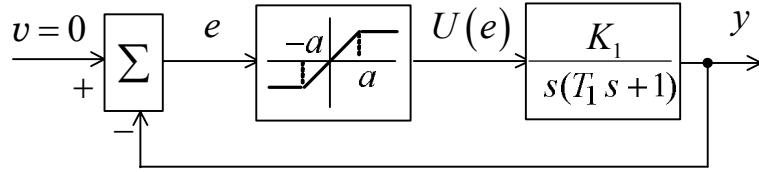


Рис. 2.17. Структурная схема НСАУ с насыщением

В режиме свободного движения $v(t) \equiv 0$, и, следовательно, $e(t) = -y(t)$.

Передаточная функция линейной части системы $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{s(T_1s+1)}$. Дифференциальное нелинейное уравнение системы $T_1 p^2 y(t) + p y(t) = K_1 U(e)$.

Заменяем p на $\frac{d}{dt}$ и $y(t)$ на $-e(t)$, получим $T_1 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{de(t)}{dt} = -K_1 U(e)$,

$$\text{где } U(e) = \begin{cases} U_m, & e \geq a, \\ \frac{U_m}{a} e, & -a < e < a, \\ -U_m, & e \leq -a. \end{cases}$$

Нелинейная система в данном случае будет описываться системой уравнений:

$$\begin{cases} T_1 \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} = -K_1 U_m, & e \geq a, \\ T_1 \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} = -K_1 \frac{U_m}{a} e, & -a < e < a, \\ T_1 \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} = K_1 U_m, & e \leq -a. \end{cases}$$

Разделив правую и левую части уравнений на a , и обозначив $K_1 \frac{U_m}{a} = K$, запишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} T_1 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{e}{a} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{a} \right) = -K, & \frac{e}{a} \geq 1, \\ T_1 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{e}{a} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{a} \right) = -K \left(\frac{e}{a} \right), & -1 < \frac{e}{a} < 1, \\ T_1 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{e}{a} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{a} \right) = K, & \frac{e}{a} \leq -1. \end{cases}$$

Разделив правую и левую части на K и обозначив $\frac{e}{a} = x$, получим

$$\begin{cases} T_1 K \frac{d^2 x}{d(Kt)^2} + \frac{dx}{d(Kt)} = -1, & x \geq 1, \\ T_1 K \frac{d^2 x}{d(Kt)^2} + \frac{dx}{d(Kt)} = -x, & -1 < x < 1, \\ T_1 K \frac{d^2 x}{d(Kt)^2} + \frac{dx}{d(Kt)} = 1, & x \leq -1. \end{cases}$$

Введем новую переменную $\tau = Kt$, тогда

$$T_1 K \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = \begin{cases} -1, & x \geq 1, \\ -x, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \leq -1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, математическая модель нелинейной системы с насыщением описывается системой дифференциальных уравнений в безразмерных величинах.

Исследуем динамику системы (2.11) методом изоклин. Заменим $\frac{d}{d\tau} = s$, тогда структурная схема принимает вид, изображенный на рис. 2.11.

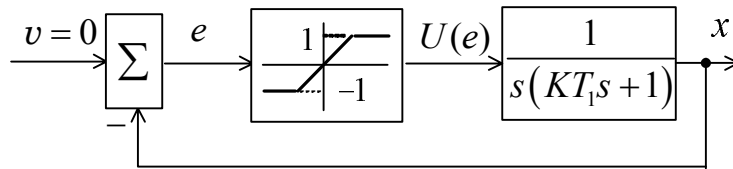


Рис. 2.18. Структурная схема НСАУ, описанная системой (2.11)

Составим уравнения изоклин для двух случаев.

1. Для линейной области ($-1 < x < +1$) уравнение (2.11) приводится к виду

$$T_1 K \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + x = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Обозначаем $\frac{dx}{d\tau} = \dot{x}$, тогда $\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$, $T_1 K \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + \dot{x} + x = 0$. Для построения

изоклин обозначим $\frac{d\dot{x}}{dx} = N_i$ и подставляем в предыдущее уравнение. Окончательно получим $T_1 K N_i \dot{x} + \dot{x} + x = 0$, откуда

$$\dot{x} = -\frac{x}{1 + K T_1 N_i}. \quad (2.12)$$

2. Для нелинейных областей (вывод уравнений аналогичен предыдущему)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{1 + KT_1 N_i}, & x \geq 1; \\ \dot{x} &= \frac{1}{1 + KT_1 N_i}, & x \leq -1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для упрощения расчетов принимаем $KT_1 = 1$. Результат построения фазового портрета системы представлен на рис. 2.19.

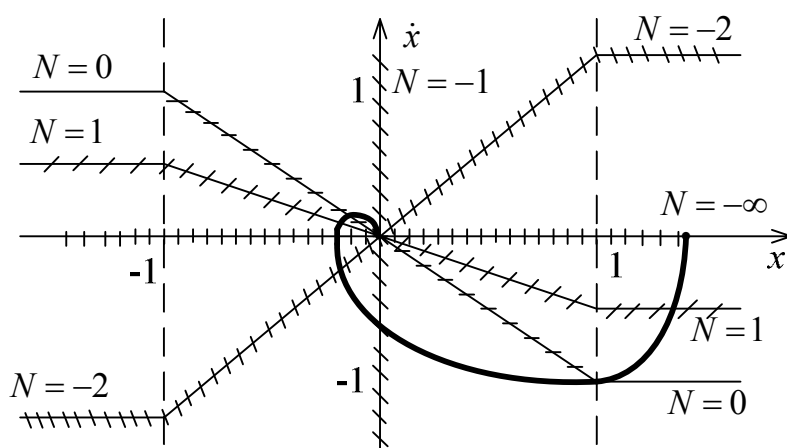


Рис. 2.19. Фазовый портрет НСАУ с насыщением

Анализ фазовых траекторий показывает, что насыщение элементов системы приводит к увеличению длительности переходного процесса, так как скорость движения на различных участках траектории ограничена, с другой стороны в системе уменьшается перерегулирование.

2.4. Анализ нелинейной системы с насыщением и местной ОС по скорости

Пусть структурная схема системы имеет вид, приведенный на рис. 2.20.

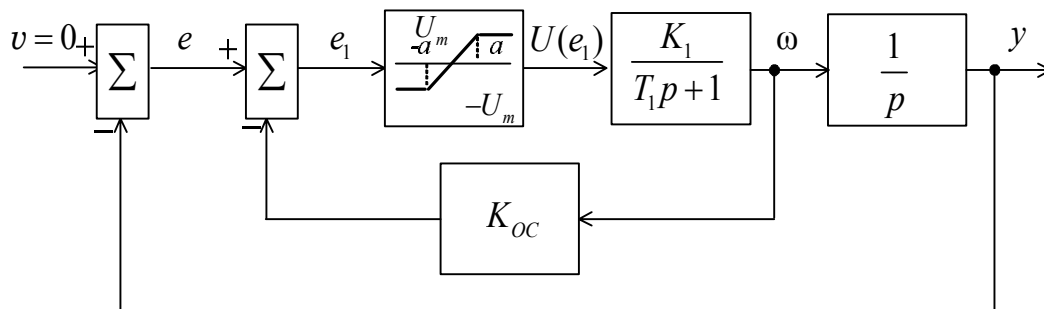


Рис. 2.20. Структурная схема НСАУ с насыщением и местной обратной связью по скорости

Согласно схеме $E_1(p) = E(p) - K_{oc}pY(p)$, где $E(p) = V(p) - Y(p)$.

В режиме свободного движения $V(p) \equiv 0$, $E(p) = -Y(p)$, и $E_1(p) = [1 + K_{oc}p]E(p)$ и исходную систему можно представить в соответствии с рис. 2.21.

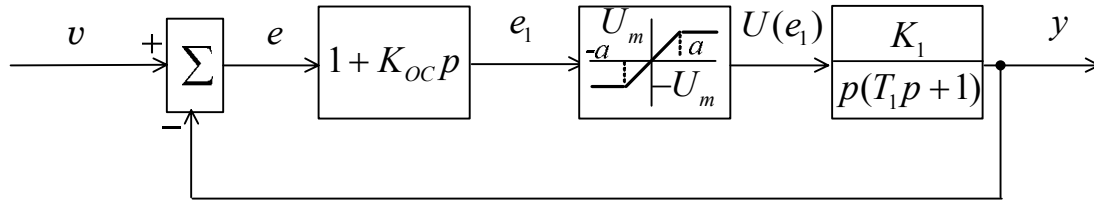


Рис. 2.21. Преобразованная структурная схема НСАУ

Перейдем по рассмотренному в пункте 2.3 алгоритму к структурной схеме, описываемой безразмерными переменными (рис. 2.22).

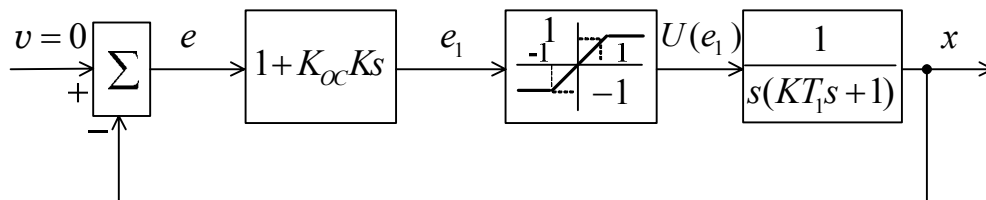


Рис. 2.22. Преобразованная структурная схема НСАУ

Запишем дифференциальные уравнения НСАУ с обратной связью по передаточной функции $\frac{X(s)}{U[E_1(s)]} = \frac{1}{s(KT_1 s + 1)}$. Учитывая, что $X(s) = -E(s)$ и

$s = \frac{d}{d\tau}$, получим:

$$-KT_1 \frac{d^2 e(\tau)}{d\tau^2} - \frac{de(\tau)}{d\tau} = \begin{cases} 1, & e_1(\tau) \geq 1, \\ e(\tau) + KK_{oc} \frac{de(\tau)}{d\tau}, & -1 < e_1(\tau) < 1, \\ -1, & e_1(\tau) \leq -1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Уравнения для построения фазовых траекторий методом изоклин в линейной области:

$$\dot{x} = -\frac{e(\tau)}{1 + KT_1 N_i + KK_{oc}}, \quad (2.15)$$

в областях насыщения:

$$\dot{x} = -\frac{e(\tau)}{1 + KT_1 N_i}. \quad (2.16)$$

Из полученных уравнений видно, что стыковку изоклин необходимо осуществлять на линиях переключения, описываемых уравнениями:

$$\begin{aligned} e(\tau) + KK_{oc}\dot{x} &= 1, \\ e(\tau) + KK_{oc}\dot{x} &= -1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Пусть $KK_{oc} = 1, KT_1 = 1$. Некоторые результаты расчетов: $N = 1, \dot{x} = -\frac{e(\tau)}{3}$; $N = -1, \dot{x} = -e(\tau)$; $N = -2,5, \dot{x} = 2e(\tau)$; $N = -3, \dot{x} = e(\tau)$; $N = -0,5, \dot{x} = -\frac{e(\tau)}{1,5}$; $N = 0, \dot{x} = -\frac{e(\tau)}{2}$.

Фазовый портрет приведен на рис. 2.23.

Сопоставляя результаты исследования динамики системы с ОС по скорости с результатами исследования без ОС можно сделать вывод: коэффициент усиления в цепи ОС по скорости K_{oc} можно подобрать так, что в переходном процессе будет отсутствовать перерегулирование, а время переходного процесса будет минимальным.

Подобные результаты были положены в основу построения позиционных систем управления, которые широко распространены в современной технике.

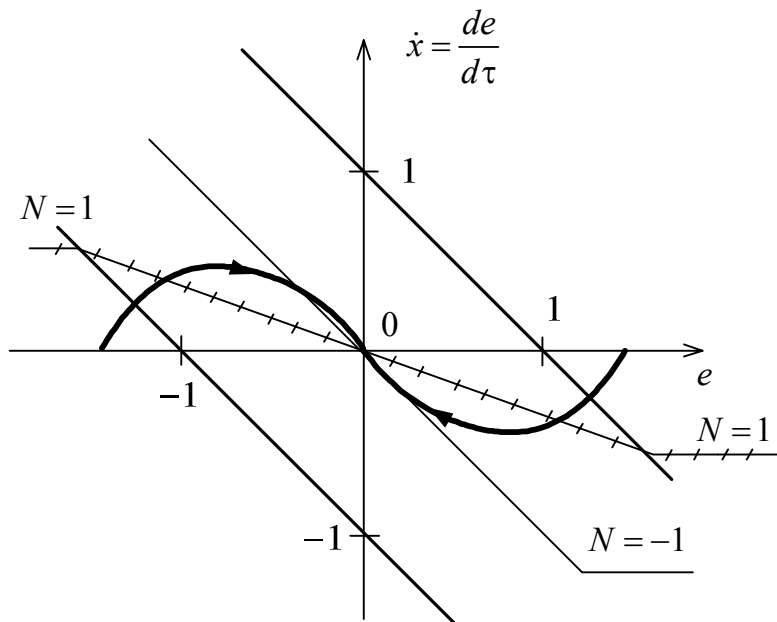


Рис. 2.23. Фазовый портрет НСАУ с насыщением и местной обратной связью по скорости

Учитывая, что $\frac{1}{s(KT_1s + 1)} = \frac{\frac{1}{KT_1s^2}}{1 + \frac{1}{KT_1s}} = \frac{1}{s^2} \frac{KT_1}{1 + \frac{1}{KT_1s}}$, построим структурную

схему позиционной системы (рис. 2.24):

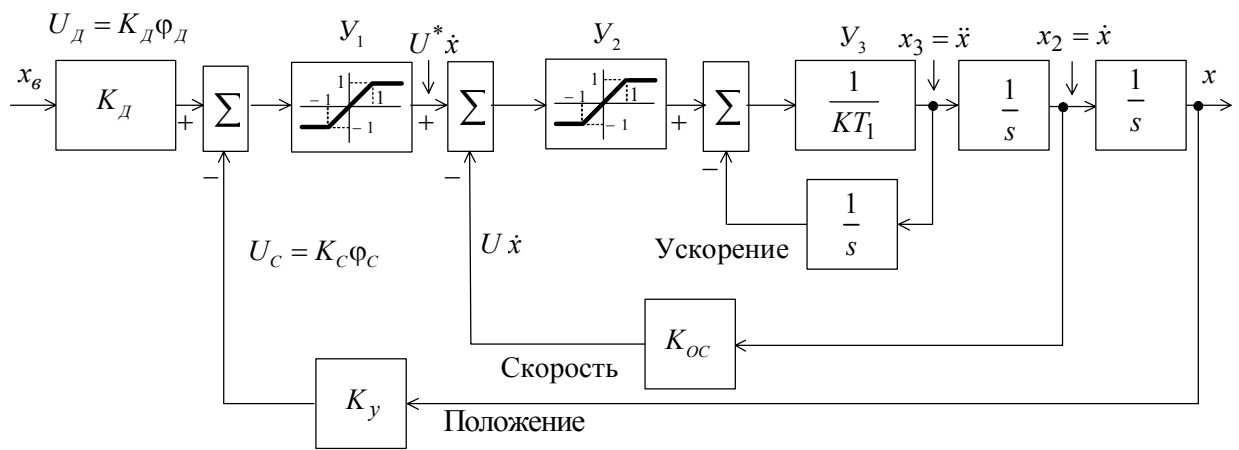


Рис. 2.24. Структурная схема позиционной системы

Пусть в некоторый момент времени на вход подано воздействие x_0 достаточно большой величины. Учитывая, что система находилась в состоянии покоя в начальный момент времени, сигналы в цепях OC по положению, по скорости и ускорению равны нулю. В этом случае усилители Y_1 , Y_2 оказываются в насыщении, Y_3 выполняет роль регулятора ускорения. По мере движения системы сигнал OC по скорости $U \dot{x}$ возрастает и когда достигает определенного уровня, Y_2 выходит из насыщения. Затем на очень коротком отрезке времени сигнал на выходе Y_2 оказывается равным нулю, следовательно ускорение равно нулю, а скорость x_2 достигла своего максимального значения. При дальнейшем движении возрастает сигнал U_d и достигает значения, при котором Y_1 выходит из насыщения. В этот момент $U^* \dot{x} < U \dot{x}$ и усилитель Y_2 снова оказывается в насыщении, но с обратным знаком. Система переходит в режим торможения. Скорость движения снижается и когда ошибка рассогласования на входе Y_1 станет равной нулю, то и скорость равна нулю, система пришла в точку позиционирования (рис. 2.25).

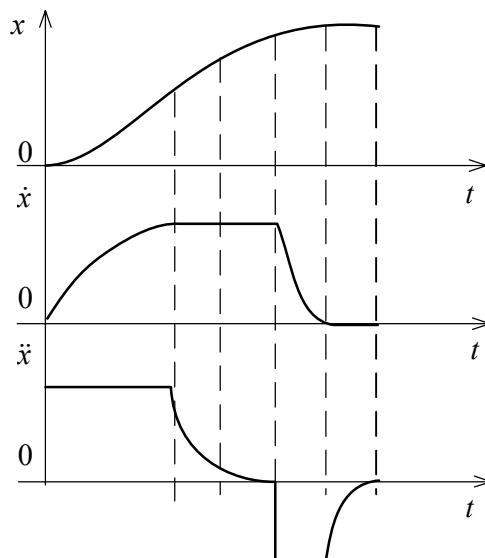


Рис. 2.25. Графики изменения во времени выходной координаты x , её скорости \dot{x} и ускорения \ddot{x}

2.5. Исследование динамики релейной системы с идеальным двигателем

Для улучшения динамических свойств систем в контур управления часто включают элементы, обладающие релейными характеристиками. Рассмотрим структуру простейшей системы (рис. 2.26).

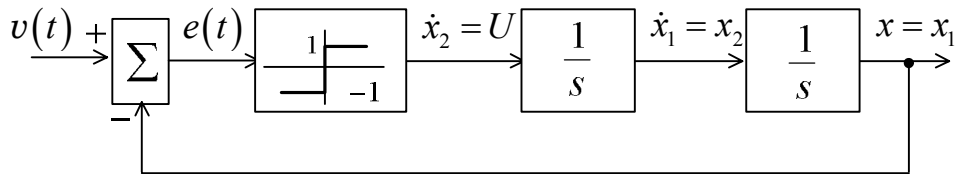


Рис. 2.26. Структура релейной системы

На схеме $x = \frac{y}{U_{\max} K}$, $s = 1 \cdot p$, $\tau = t$, $U = \text{sign } e - \text{sign } x_1$, $v \equiv 0$. Запишем уравнения согласно структурной схеме:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (2.18)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = U, \quad (2.19)$$

$$U = -\text{sign } x_1. \quad (2.20)$$

Интегрируя (2.18) и (2.19), находим:

$$x_2(t) = x_2(0) + Ut, \quad (2.21)$$

$$x_1(t) = x_1(0) + x_2(0)t + \frac{Ut^2}{2} \Big|_{x_1(0) = x_2(0) = 0}. \quad (2.22)$$

Полагая $x_1(0) = x_2(0) = 0$, построим в соответствии с (2.20 – 2.22) графики $U(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (рис. 2.27).

Отметим, что площадь, ограниченная кривой $x_2 = \frac{dx}{dt}$ и осью абсцисс, величина постоянная и равна единице, так как $\int_0^{t_{\text{нп}}} \frac{dx_1}{dt} dt = x_1(t_{\text{нп}}) = 1$.

Иная кривая, не может проходить выше x_2 в силу условия $|x_2| = U \leq 1$, при этом $x_{2\max}$ – максимальная допустимая скорость.

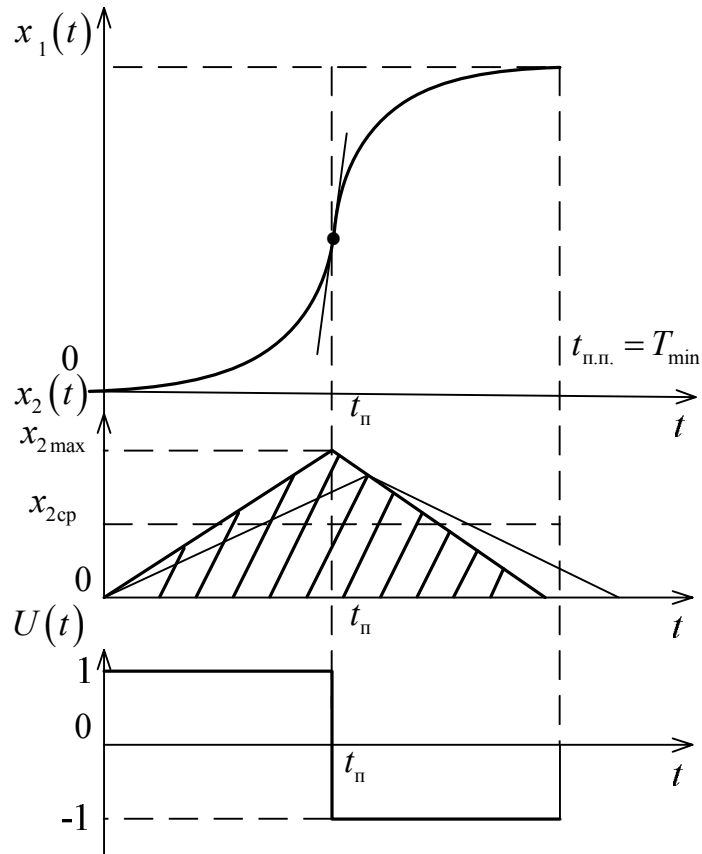


Рис. 2.27

Поясним физический смысл рис. 2.27. В начальный момент времени при $U=1$ к двигателю прикладывается напряжение, при котором он развивает полный момент и начинает разгоняться. В момент $t_{п.п.}$ прикладывается обратное напряжение и двигатель начинает тормозить. Если правильно рассчитать $t_{п.п.}$, то процесс будет апериодическим, без ошибок, с минимальными затратами по времени. Приведенные характеристики являются идеализированными, так как трудно анализировать момент окончания переходного процесса и обеспечить равенство $U=0$ и $x_2=0$.

Докажем, что $t_{п.п.}$ является минимальным. Действительно, из уравнения $x_{1k} = x_{2cp} t_{п.п.}$, где $x_{1k} = 1$, $x_{2cp} = \frac{1}{2} x_{2max}$, находим $t_{п.п.} = \frac{2}{x_{2max}}$.

Допустим теперь, что $x_2(t_{п.п.}) < x_{2max}$. Тогда $t_{п.п.} = \frac{2}{x_2(t_{п.п.})} > \frac{2}{x_{2max}}$.

Следовательно, $t_{п.п.} = \frac{2}{x_{2max}}$ действительно является минимальным ($t_{п.п.} = T_{min}$), а такая система – оптимальной по быстродействию.

Дальнейшее исследование динамики релейной системы продолжим при помощи метода изоклин на фазовой плоскости. Разделим (2.18) на (2.19):

$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2(t)}{U(t)}$, где $U = -\text{sign } x_1$, следовательно $dx_1 = \frac{1}{U(t)} x_2(t) dx_2$ и после интегрирования

$$x_1(t) = \frac{1}{2U} x_2^2(t) + C, \quad (2.23)$$

где C – постоянная интегрирования.

По этому уравнению построим семейство парабол для разных значений C_i и $U(t) = \pm 1$ (рис. 2.28).

При $v(t) = 1(t)$, $C = 1$. Через точку $x_{1k} = C = 1$ проводим параболу при $U = -1$. Из рис. 2.28 видно, что после перемещения системы из начального состояния $x_1(0) = x_2(0) = 0$ в конечное $x_{1k} = 1$, $x_{2k} = 0$, движение не заканчивается, так как в системе возникают автоколебания.

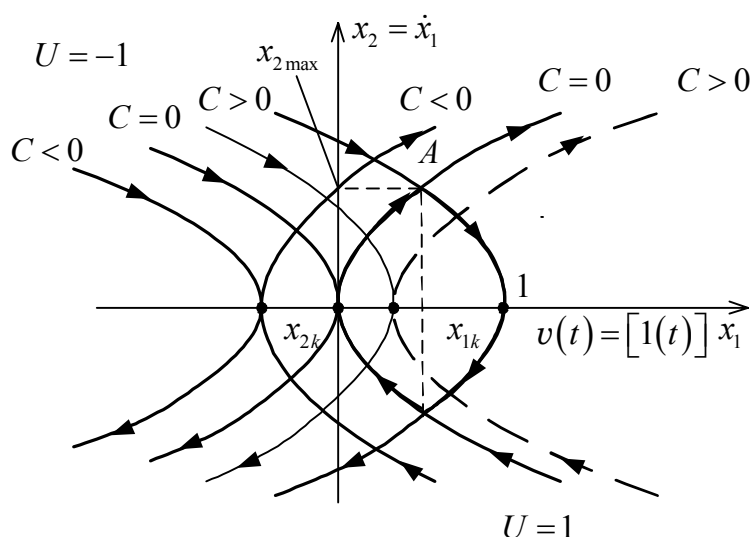


Рис. 2.28. Фазовый портрет релейной системы

Из теории линейных систем известно, что динамические свойства можно улучшить, если в сигнал управления ввести дополнительный сигнал, пропорциональный первой производной (т.е. ввести обратную связь по скорости). Используем этот метод для того, чтобы исключить автоколебания. Структурная схема системы примет вид (рис. 2.29).

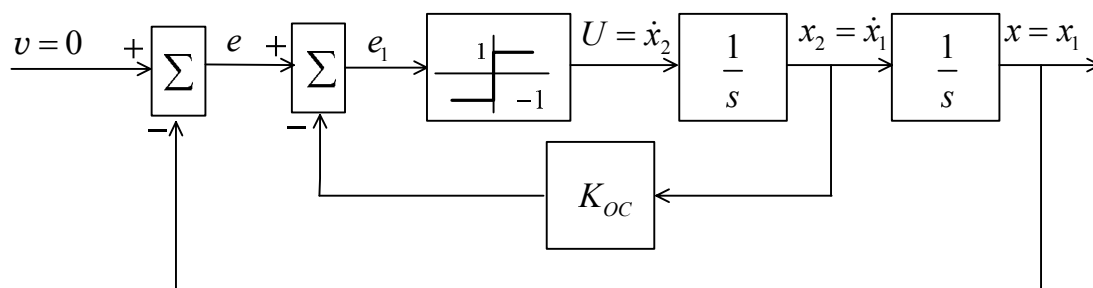


Рис. 2.29. Структура релейной системы с обратной связью по скорости

Этой структуре соответствуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} e_1 &= e - K_{OC}x_2 = -(x_1 + K_{OC}x_2), \\ U &= \text{sign}(e_1) = -\text{sign}(x_1 + K_{OC}x_2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

а уравнение линии переключения имеет вид: $x_1 + K_{OC}x_2 = 0$, откуда

$$x_1 = -K_{OC}x_2. \quad (2.25)$$

Фазовый портрет системы представлен на рис. 2.30.

Изменяя значение K_{OC} , можно подобрать его таким, чтобы парабола при $U = -1$ проходила через начало координат (точка A на линии переключения при начальном условии $(x_0, 0)$), тогда переходный процесс в системе будет монотонный, апериодический, а время переходного процесса – минимальным, другими словами режим работы системы будет оптимальным по быстродействию (рис. 2.30).

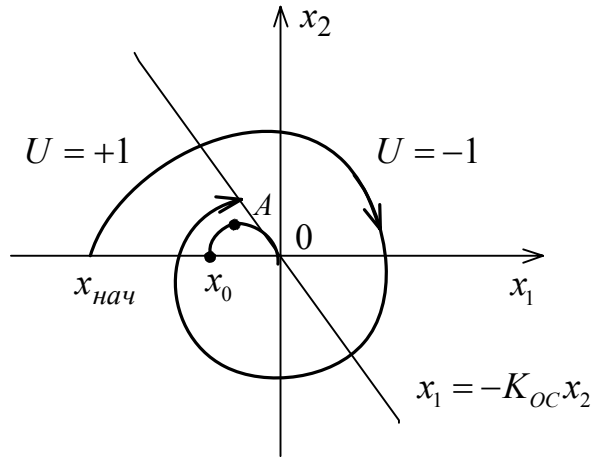


Рис. 2.30. Фазовый портрет линейной системы с обратной связью

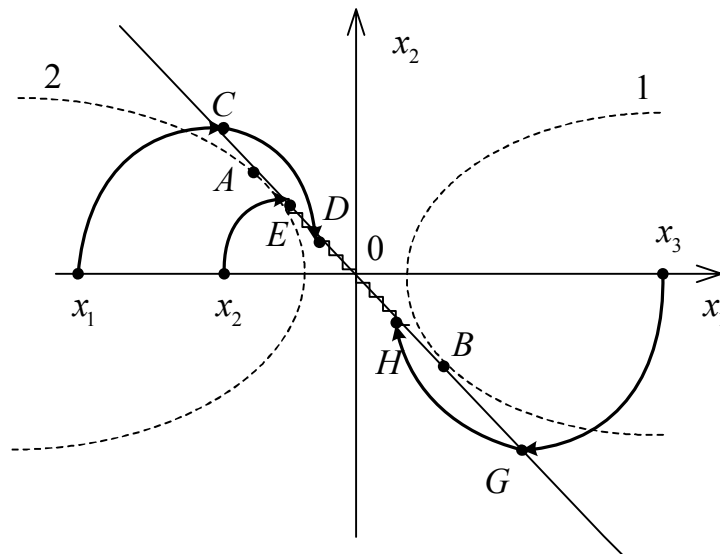


Рис. 2.31. Скользящий режим в релейной системе с обратной связью

В том случае, когда в точке переключения реле угол наклона линии переключения становится равным наклону или меньше угла наклона касательной к фазовой траектории, по которой движется изображающая точка после переключения реле, возникают условия существования скользящего режима (рис. 2.31).

Скользящим режимом называется режим работы релейной системы, характеризующийся колебательным движением изображающей точки вдоль линии переключения с высокой частотой и малой амплитудой.

Пусть начальное состояние системы задано точкой $(x_1, 0)$ (рис. 2.31), от которой изображающая точка перемещается по фазовой траектории типа 1 до встречи с линией переключения в точке C . В этой точке происходит переключение реле и изображающая точка перемещается по фазовой траектории типа 2 до точки D . В точке D происходит переключение реле в другую сторону, после чего изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 1. Как только снова увеличится результирующий сигнал обратной связи, произойдет переключение реле и изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 2 и т. д. Таким образом, изображающая точка, достигнув точки D , непрерывно перемещается к началу координат, как бы «скользя» вдоль линии переключения.

Как видно из рис. 2.31, скользящий режим возникает на участке AB . При начальном положении изображающей точки $(x_2, 0)$ после ее прихода по траектории типа 1 в точку на линии переключения E сразу начинается скользящий режим. При начальном положении изображающей точки $(x_3, 0)$ скользящий режим имеет место после переключения реле в точке H , когда изображающая точка скользит по линии переключения в четвертом квадранте.

Быстрое движение по линии скольжения обуславливает следующие особенности, характерные для нелинейных систем: возможность получения с использованием релейного регулятора гораздо меньшего времени переходного процесса, чем, например, при использовании стандартного ПИД-регулятора; возможность получения практически конечного времени переходного процесса (времени достижения заданного состояния).

Из уравнения (2.18) с учетом (2.25) следует, что $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{K_{oc}} x_1$. Это значит, что движение по линии переключения соответствует системе первого порядка, процессы не зависят от параметров прямой цепи, а определяются только величиной K_{oc} .

Отметим, что на практике всегда реализуется режим, близкий к скользящему, отличающийся от истинно скользящего конечной частотой переключения. В самом деле, релейный элемент не может переключаться с бесконечной частотой вне зависимости от его реализации: аппаратной (реле), электронной (электронная ключевая схема) или программной.

3. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ А.М. ЛЯПУНОВА И В.М. ПОПОВА

По А. М. Ляпунову невозмущенное движение (движение в автономной системе) устойчиво, если при малом ε можно указать такое δ , что если движение начинается в сфере s_δ , то будет протекать внутри s_ε (рис. 3.1).

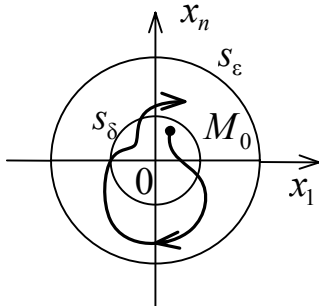


Рис. 3.1

Положение равновесия называют асимптотически устойчивым, если при движении из начальных условий выполняется условие: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(0) \in R^n$; другими словами, с течением времени все фазовые траектории «стягиваются» к началу координат. При неустойчивых движениях фазовые траектории расходятся или вырождаются в предельный цикл.

3.1. Исследование устойчивости нелинейных систем по линейному приближению

Пусть нелинейная автономная САУ описывается уравнением $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$, $f(0) = 0$.

Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора и пренебрежем членами разложения выше первой степени:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0} x. \quad (3.1)$$

Обозначив матрицу коэффициентов через A , получим:

$$\dot{x} = Ax. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) соответствует описанию линейной автономной системы.

Согласно теореме, доказанной А. М. Ляпуновым, *если линеаризованная система устойчива, то исходная нелинейная система будет также устойчива* (асимптотически «в малом», т. е. в малой области вокруг положения равновесия). При неустойчивости линеаризованной системы, нелинейная система неустойчива. Если линеаризованная система находится на границе устойчивости, то надо дополнительно исследовать нелинейную САУ.

Пример 3.1. Пусть нелинейная САУ описывается системой уравнений в пространстве состояний: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2. \end{cases}$ Необходимо определить ее устойчи-

вость. Запишем уравнения равновесия $\begin{cases} f_1 = x_1^2 - 2x_2 = 0, \\ f_2 = x_1x_2 - x_2 = 0, \end{cases}$ откуда одна из точек равновесия $x_1^0 = 0, x_2^0 = 0$. Линеаризуем НСАУ в окрестности этой точки.

$$\dot{x}_1 = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x^0} x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x^0} x_2 = 2x_1|_0 x_1 + (-2)|_0 x_2 = 0x_1 - 2x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x^0} x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x^0} x_2 = x_2|_0 x_1 + (x_1 - 1)|_0 x_2 = 0x_1 - 1x_2.$$

В матричном виде: $\dot{X} = AX$, где $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Характеристическое уравнение системы ($\det[\lambda E - A] = 0$) будет $\det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 0 = 0$, а его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$.

Так как один корень нулевой, то об устойчивости нелинейной САУ ничего нельзя сказать.

3.2. Применение второго метода Ляпунова к анализу устойчивости нелинейных систем

Этот метод позволяет судить об устойчивости НСАУ без решения дифференциальных уравнений.

А.М. Ляпунов вводит функцию (функцию Ляпунова) $V(x)$ со следующими свойствами.

Функция переменных состояния называется *положительно определенной* в области D , если она положительна для любых значений переменных из этой области и обращается в 0 только в начале координат:

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Функция называется *отрицательно определенной*, если

$$\begin{cases} V(x) < 0 & \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Полная производная функции Ляпунова $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x). \quad (3.5)$$

При этом $\dot{V}(0) = 0$, так как $f(0) = 0$.

А. М. Ляпуновым сформулированы и доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Состояние равновесия системы является асимптотически устойчивым, если для положительно определенной функции $V(x)$ ее полная производная есть отрицательно определенная функция:*

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \neq 0, & V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) < 0 & \forall x \neq 0, & \dot{V}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Теорема 2. *Состояние равновесия системы неустойчиво, если*

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \neq 0, & V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) > 0 & \forall x \neq 0, & \dot{V}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Пример 3.2. С помощью второго метода Ляпунова оценить устойчивость системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Выберем функцию Ляпунова: $\begin{cases} V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \forall x \neq 0, \\ V(0) = 0. \end{cases}$

Полная производная функции Ляпунова в нашем случае

$$\dot{V}(x) = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(-x_1 - x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2.$$

Так как $\dot{V}(x) < 0 \forall x \neq 0$ и $\dot{V}(0) = 0$, то система устойчива и функция Ляпунова выбрана удачно.

Отметим, что теоремы Ляпунова дают лишь достаточные условия. Кроме того функцию Ляпунова подобрать непросто и она не единственная.

3.3. Анализ устойчивости нелинейных систем методом В. М. Попова

Будем анализировать НСАУ, представленную на рис. 3.2, а. До сих пор рассматривались нелинейности с фиксированными нелинейными характеристиками. Реально они находятся в секторе $rx < F(x) < F = Kx$ (рис. 3.2, б). При этом невозмущенное движение нелинейной САУ абсолютно устойчиво, если но устойчиво при любой нелинейной характеристике класса $r < F(x)/x < K$, $F(0) = 0$.

Румынский ученый В.М. Попов предложил метод, суть которого сводится к следующему. Для того, чтобы невозмущенное движение НСАУ было абсолютно устойчиво в угле $[0, K]$ достаточно, чтобы существовало такое действительное число q , при котором для всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство:

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{K}, \quad (3.8)$$

где $U(\omega) = \operatorname{Re}[K_{\text{лч}}(j\omega)]$, $V(\omega) = \operatorname{Im}[K_{\text{лч}}(j\omega)]$, а $K_{\text{лч}}(j\omega)$ – АФЧХ линейной части системы.

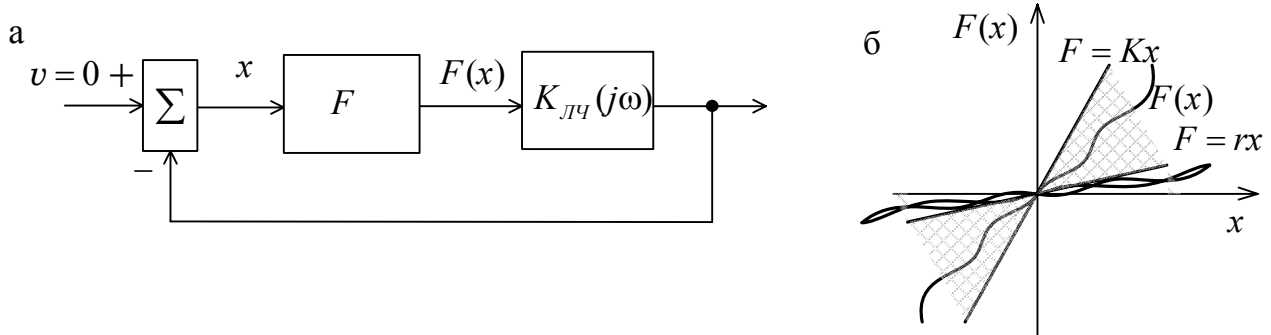


Рис. 3.2. К частотному анализу НСАУ методом В. М. Попова:
а – структура системы, б – характеристика нелинейного элемента

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этого метода.

Введем $U^*(\omega) = U(\omega)$, $V^*(\omega) = \omega V(\omega)$, тогда $K^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$.

При этом $K^*(j\omega)$ называется видоизмененной АФЧХ.

Условие устойчивости с учетом принятых ограничений будет:

$$U^*(\omega) - qV^*(\omega) > -\frac{1}{K}. \quad (3.9)$$

На плоскости (U^*, V^*) проводится прямая

$$U^*(\omega) - qV^*(\omega) = -\frac{1}{K} \quad (3.10)$$

(при $U^* = 0$, $V^* = \frac{1}{Kq}$; при $V^* = 0$, $U^* = -\frac{1}{K}$), называемая прямой Попова.

В соответствии с (3.9) НСАУ устойчива, если $K^*(j\omega)$ лежит правее прямой Попова (рис. 3.3).

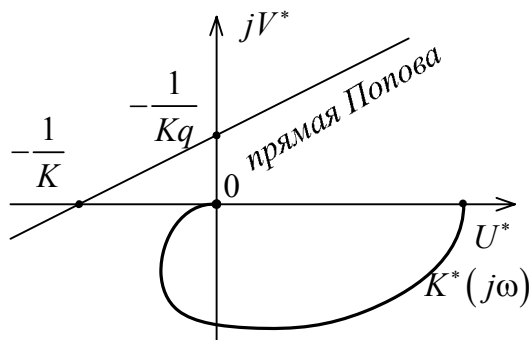


Рис. 3.3. Геометрическая интерпретация критерия В. М. Попова

4. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод гармонической линеаризации нелинейностей относится к приближенным методам расчета нелинейных систем. Он применяется для исследования условий возникновения и определения параметров автоколебаний, анализа и оценки их устойчивости, а также для исследования вынужденных колебаний систем различной сложности.

Пусть нелинейная система имеет структуру, представленную на рис. 4.1.

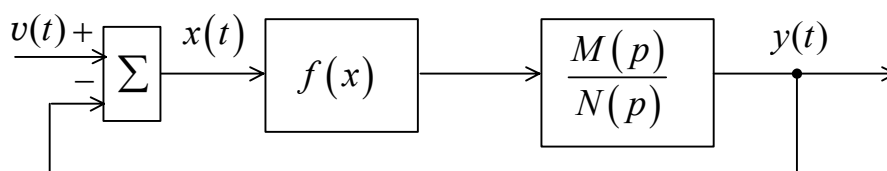


Рис. 4.1. Структура НСАУ: $f(x)$ – нелинейная характеристика, $M(p)$ и $N(p)$ – полиномы, соответствующие числителю и знаменателю передаточной функции линейной части системы $K_{лч}(s) = M(s)/N(s)$

Предполагают, что $v(t) \equiv 0$ (режим свободного движения) и в системе существуют свободные колебания $x(t) = A \sin \omega t$, где A и ω – их неизвестные амплитуда и частота.

При исследовании НСАУ могут быть сформулированы две основные задачи:

1. Определить параметры свободных колебаний, их устойчивость.
2. Найти зависимость параметров свободных колебаний от внутренних параметров системы.

Для решения поставленных задач осуществляют гармоническую линеаризацию нелинейной характеристики в виде:

$$f(x) = K_H(A)x. \quad (4.1)$$

где $K_H(A)$ – комплексный коэффициент преобразования нелинейного элемента или коэффициент гармонической линеаризации.

4.1. Сущность метода гармонической линеаризации

Если на вход нелинейного элемента подаются свободные гармонические колебания $x(t) = A \sin \omega t$, то на выходе нелинейного элемента $f(x)$ будет периодический, но не гармонический сигнал, который можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t), \quad (4.2)$$

где a_0, a_k, b_k – коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \text{ при } k = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin k \omega t d\omega t, \quad (4.3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos k \omega t d\omega t.$$

Нелинейный элемент работает в замкнутом контуре с линейным, который представляет собой, по сути, фильтр низких частот, поэтому при увеличении k линейные элементы подавляют высшие гармоники. На практике ограничиваются составляющими ряда при $k=1$, т.е. пренебрегают второй и более высокими гармониками.

Если предположить, что нелинейные характеристики симметричны относительно начала координат, то $a_0 = 0$.

В силу отмеченных допущений имеем

$$f(x) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t, \quad (4.4)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t.$$

Запишем полученное выражение в виде: $f(x) = \frac{a_1}{A} A \sin \omega t + \frac{b_1}{A \omega} A \omega \cos \omega t$, обозначим $x = A \sin \omega t$, $\frac{dx}{dt} = A \omega \cos \omega t = px = jqx$. Тогда

$$f(x) = \left(\frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \right) x = (q(A) + jq'(A))x = K_n(A)x. \quad (4.5)$$

Структура гармонически линеаризованной НСАУ будет иметь вид, представленный на рис. 4.2.

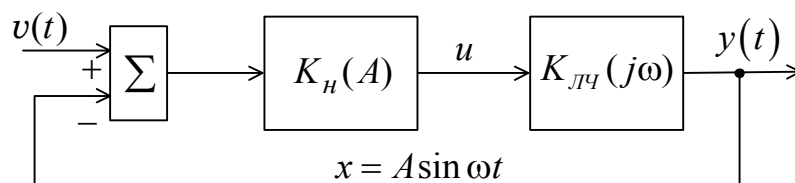


Рис. 4.2

Уравнение свободного движения этой системы:

$$N(p)y(t) + M(p)f(x) = 0. \quad (4.6)$$

Заметим, что если нелинейность однозначная (нечетно-симметричная), то

$$q'(A) = 0, \text{ а } q(A) = 4 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\bullet). \text{ Если нелинейность неоднозначная, то присутствуют обе составляющих } q(A) = 2 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} (\bullet); \quad q'(A) = 2 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} (\bullet).$$

Приведем характеристики некоторых нелинейностей.

Идеальное реле (рис. 4.3).

$$q'(A) = 0; \quad q(A) = 4 \cdot \frac{1}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin \omega t \, d\omega t = \frac{4b}{\pi A} \left(-\cos \omega \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4b}{\pi A}. \quad (4.7)$$

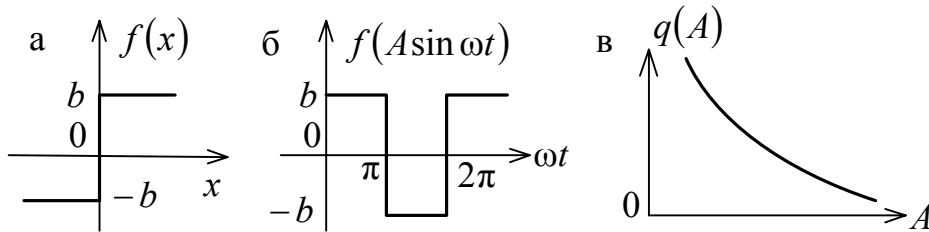


Рис. 4.3. Характеристики идеального реле:

а – зависимость $f(x)$, б – зависимость $f(A \sin \omega t)$, в – зависимость $q(A)$

Элемент с насыщением (рис. 4.4).

$$q(A) = \frac{b}{a} - \frac{2b}{a\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right). \quad (4.8)$$

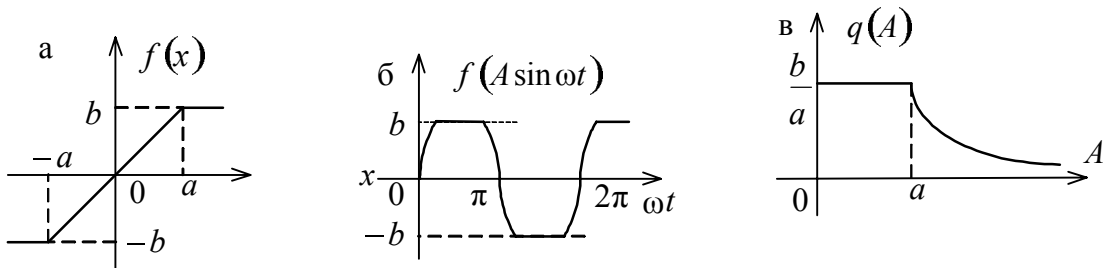


Рис. 4.4. Характеристики элемента с насыщением:

а – зависимость $f(x)$, б – зависимость $f(A \sin \omega t)$, в – зависимость $q(A)$

Элемент с зоной нечувствительности (рис. 4.5).

$$q(A) = K - \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) \text{ при } A > a. \quad (4.9)$$

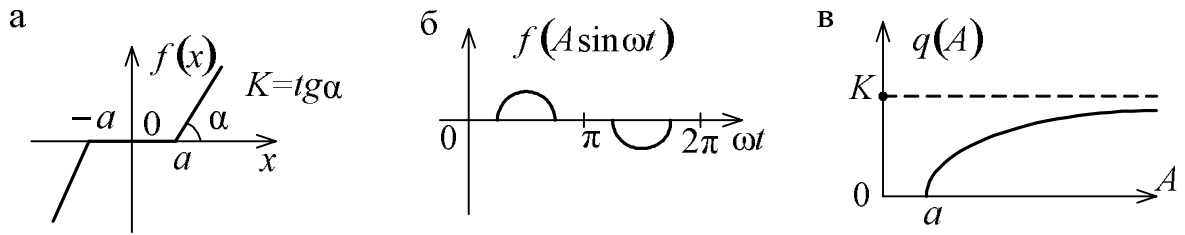


Рис. 4.5. Характеристики элемента с зоной нечувствительности:
 а – зависимость $f(x)$, б – зависимость $f(A \sin \omega t)$, в – зависимость $q(A)$

Реальное двухпозиционное реле (рис. 4.6).

$$q(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}, \quad q'(A) = -\frac{4ba}{\pi A^2}. \quad (4.10)$$

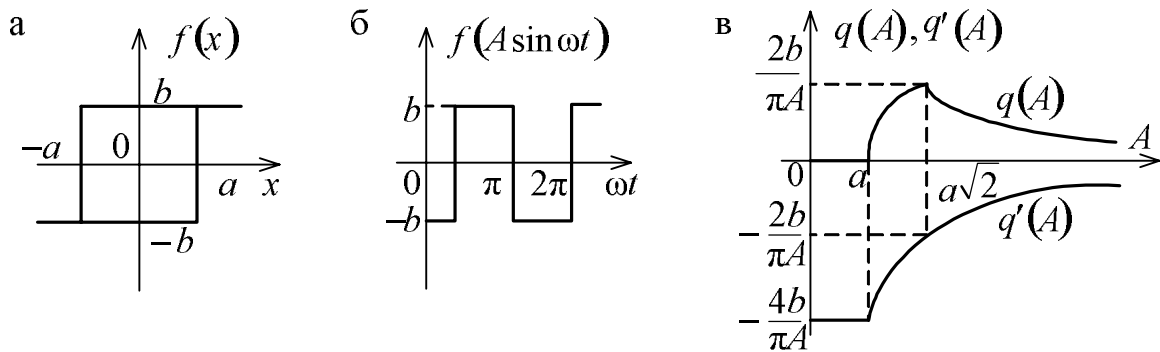


Рис. 4.6. Характеристики реального двухпозиционного реле:
 а – зависимость $f(x)$, б – зависимость $f(A \sin \omega t)$, в – зависимости $q(A)$ и $q'(A)$

Анализ этих графиков показывает, что с увеличением амплитуды входного сигнала A крутизна линеаризованной характеристики падает. Сдвиг по фазе выходного сигнала относительно входного в неоднозначных нелинейностях отрицателен ($q'(A) < 0$), при $A \rightarrow \infty$ он уменьшается, так как относительная ширина петли уменьшается.

Амплитуда и фаза первой гармоники на выходе нелинейного элемента будут:

$$A = |K_H(A)| = \sqrt{(q(A))^2 + (q'(A))^2}, \quad (4.11)$$

$$\varphi = \arctg \frac{q'(A)}{q(A)}. \quad (4.12)$$

4.2. Определение амплитуды и частоты автоколебаний

4.2.1. Аналитический метод

Согласно структурной схеме (рис. 4.2) характеристическое уравнение нелинейной системы:

$$D(j\omega, A) = 1 + K_H(A)K_{ЛЧ}(j\omega) = 1 + \frac{K_H(A)M(j\omega)}{N(j\omega)} = 0,$$

откуда

$$N(j\omega) + K_H(A)M(j\omega) = 0. \quad (4.13)$$

Аналитический метод предполагает, что на основании уравнения (4.13) необходимо записать действительную и мнимую части $D(j\omega, A)$:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega, A)] = 0, \\ \operatorname{Im}[D(j\omega, A)] = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Получаем два уравнения с двумя неизвестными, совместное решение которых позволяет определить A и ω .

Этот метод ограничивается исследованием систем не выше четвертого порядка, причем для простейших коэффициентов гармонической линеаризации нелинейных элементов $K_H(A)$.

Обычно в аналитическом методе определяют зависимость A и ω от коэффициента усиления системы K или от постоянной времени T , т. е. решают вторую из поставленных задач в виде $D(j\omega, A, \Pi) = 0$, где Π – один из внутренних параметров системы. Для нахождения зависимости анализируют систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[D(j\omega, A, \Pi)] = 0, \\ \operatorname{Im}[D(j\omega, A, \Pi)] = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Полученный результат может при определенных условиях иметь вид, представленный на рис. 4.7.

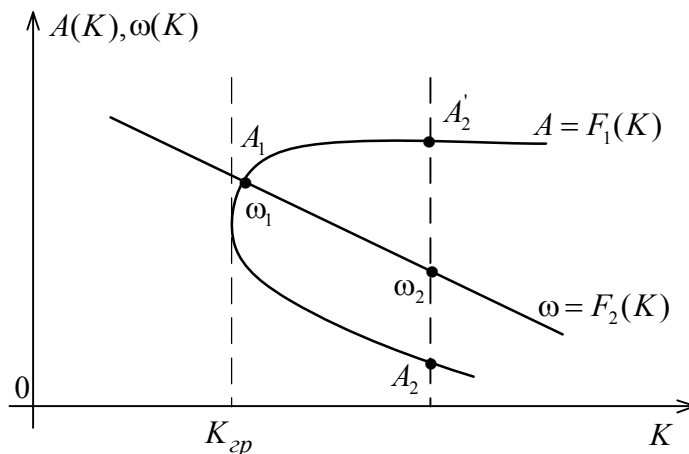


Рис. 4.7

При построении возникает ситуация колебаний на одной частоте (ω_2), но с двумя разными амплитудами A_2 и A_2' . С точки зрения физического смысла это означает, что одно из решений будет неустойчиво.

4.2.2. Графоаналитический метод

Характеристическое уравнение $1 + K_{ЛЧ}(j\omega)K_H(A) = 0$ запишем в виде:

$$K_{ЛЧ}(j\omega) = -\frac{1}{K_H(A)} \quad (4.16)$$

или

$$K_H(A) = -\frac{1}{K_{ЛЧ}(j\omega)}. \quad (4.17)$$

Для определения параметров A и ω необходимо построить в соответствии с (4.16) АФЧХ линейной части системы и график правой части, т.е. обратную характеристику НЭ со знаком «минус» (рис. 4.8) или в соответствии с (4.17) обратную АФЧХ линейной части со знаком «минус» и характеристику нелинейного элемента (рис. 4.9). Равенство будет выполняться тогда, когда кривые пересекаются. Точки пересечения – искомое решение задачи. Точек пересечения графиков может быть одна, две, возможно и больше.

Если характеристики не пересекаются, то периодические процессы в НСАУ не возникают. При наличии точек пересечения частота периодических движений определяется по АФЧХ линейной части, а амплитуда – по характеристике нелинейного элемента.

Первый способ определения параметров периодических движений называется *способом Гольдфарба* (рис. 4.8). При оценке устойчивости периодических движений используют такое *правило*: если при движении по характеристике нелинейного элемента в сторону увеличения амплитуды происходит пересечение АФЧХ линейной части «изнутри наружу», то в этой точке будут автоколебания, в противном случае колебания неустойчивы. На рис. 4.8 точка 1 соответствует устойчивым колебаниям (автоколебаниям), точка 2 – неустойчивым.

Второй способ называется *способом Коченбургера* (рис. 4.9). В этом случае оценка устойчивости периодических движений производится *по правилу*: если при движении по характеристике нелинейного элемента в сторону увеличения амплитуды происходит пересечение обратной АФЧХ линейной части «снаружи внутрь», то в этой точке будут автоколебания, в противном случае – нет. На рис. 4.9 точка 1 соответствует автоколебаниям, точка 2 – неустойчивым колебаниям.

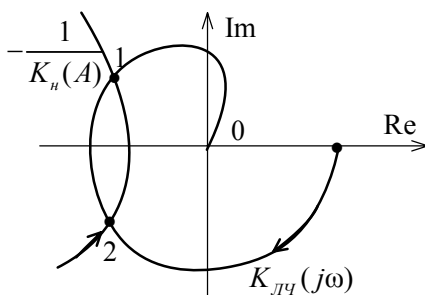


Рис. 4.8. Иллюстрация способа Гольдфарба

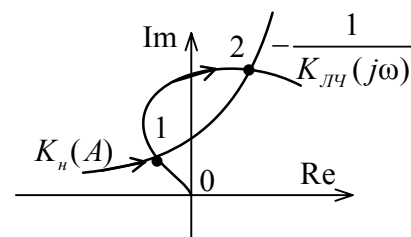


Рис. 4.9. Иллюстрация способа Коченбургера

5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

В линейных системах частота вынужденных колебаний совпадает с частотой вынуждающего внешнего воздействия, амплитуда вынужденных колебаний в установившемся режиме связана с амплитудой внешнего гармонического воздействия линейной зависимостью, устойчивость вынужденных колебаний определяется только свойствами системы и не зависит от параметров внешнего вынуждающего воздействия.

В нелинейных же системах вынужденные колебания характеризуются следующими свойствами:

1. Вынужденные колебания содержат гармоническую составляющую на частоте, совпадающей с периодическим внешним воздействием и, кроме того гармоника, кратные этой частоте.

2. Амплитуда вынужденных колебаний связана с амплитудой вынуждающего воздействия нелинейной часто неоднозначной зависимостью.

3. Устойчивость зависит как от свойств системы, так и от параметров внешнего воздействия.

5.1. Определение параметров и устойчивости вынужденных колебаний (задача Дуффинга)

Предположим, что система описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \xi\dot{x} + f(x) = C\cos\omega t. \quad (5.1)$$

Пусть $\xi = 0$ (в системе отсутствуют потери энергии, т. к. ξ – характеризует затухание процесса), а решение уравнения (5.1), если C и ω заданы, отыскивается в виде $x(t) = A\cos\omega t$.

Амплитуду A и частоту ω вынужденных колебаний необходимо определить, но в общем случае строят следующие зависимости: $A = f_1(\omega)$; $A = f_2(C)$.

Для решения задачи сначала определяют первую и вторую производные от $x(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega A \sin\omega t, \\ \ddot{x} &= -\omega^2 A \cos\omega t. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Пусть характеристика НЭ имеет вид:

$$f(x) = \omega_0^2 x \pm x^3 h, \quad (5.3)$$

где h – некоторый параметр НЭ. Знак «плюс» выбирается, если НЭ имеет зону нечувствительности, «минус», если – насыщение.

Найдем значение $x^3 = A^3 \cos^3 \omega t = A^3 \left[\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right]$. Поскольку величина третьей гармоники мала,

$$x^3 \approx \frac{3}{4} A^3 \cos \omega t. \quad (5.4)$$

Подставив найденные значения в исходное уравнение, запишем $-\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t + \frac{3}{4} h A^3 \cos \omega t = C \cos \omega t$ и, сократив левую и правую части этого выражения на $\cos \omega t$, получим уравнение Дуффинга:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} h A^3 = C. \quad (5.5)$$

Решить это уравнение можно графически. Для этого представим (5.5) в виде $\frac{3}{4} h A^3 = C + A(\omega^2 - \omega_0^2)$ и обозначим левую часть через $y_1 = -\frac{3}{4} h A^3$, правую через $y_2 = C + A(\omega^2 - \omega_0^2)$.

Построим график левой и правой частей (рис. 5.1) и найдем зависимости $A = f_1(\omega)$ при $C = \text{const}$, $A = f_2(C)$ при $\omega = \text{const}$.

При изменении частоты график прямой y_2 вращается. Это дает возможность проследить за точками пересечения кривых y_1, y_2 при изменении частоты ω и построить зависимость $A = f_1(\omega)$ (рис. 5.2).

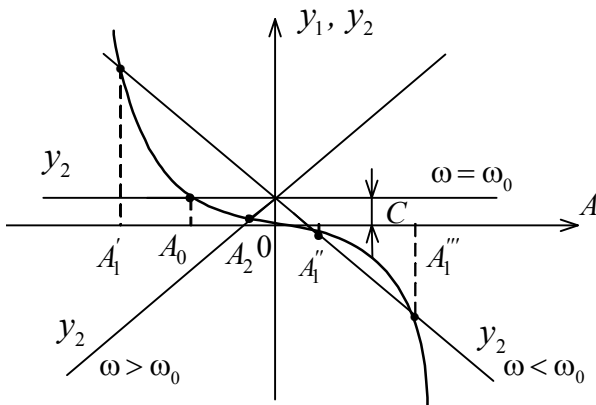


Рис. 5.1

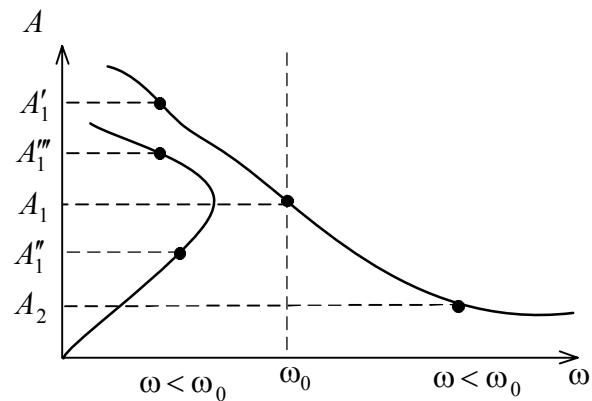


Рис. 5.2

В реальных системах присутствуют потери мощности ($\xi \neq 0$). В этом случае АЧХ для различных значений параметра h имеют вид рис. 5.3.

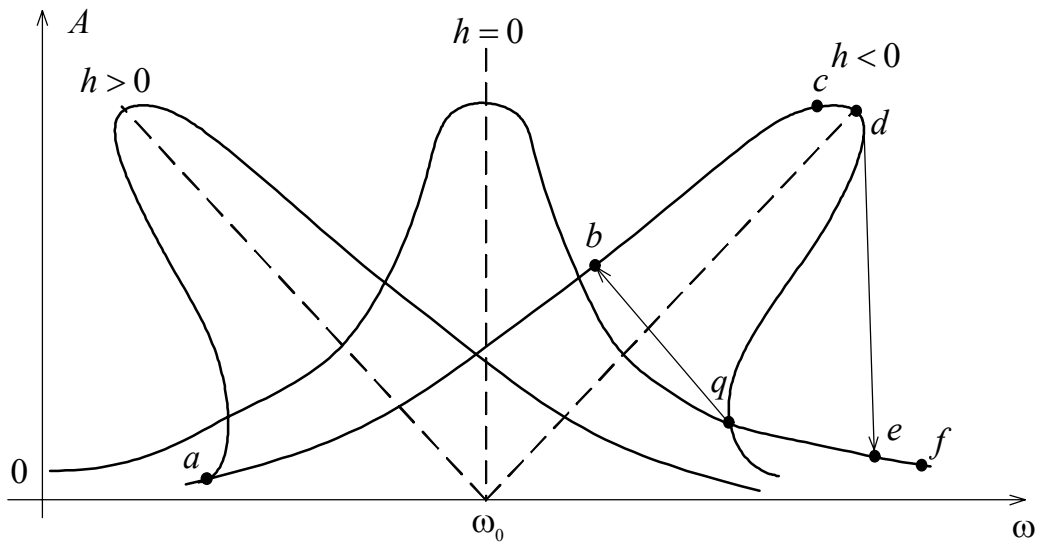


Рис. 5.3

При возрастающей частоте ω и $C = \text{const}$ амплитуда A возрастает на интервале abc , на cd несколько уменьшается и скачком принимает значение e , затем снова убывает на ef . При уменьшении частоты ω амплитуда A возрастает на интервале feq , затем скачком переходит в b и снова убывает на ba . Это явление получило название скачкообразного резонанса.

Чтобы построить амплитудную зависимость $A = f_2(C)$, необходимо построить нелинейную характеристику y_1 и семейство прямых y_2 , при различных значениях C . Изменяя значения параметра C , определяют точки пересечения семейства кривых y_2 и y_1 , по которым строят искомый график зависимости (рис. 5.4).

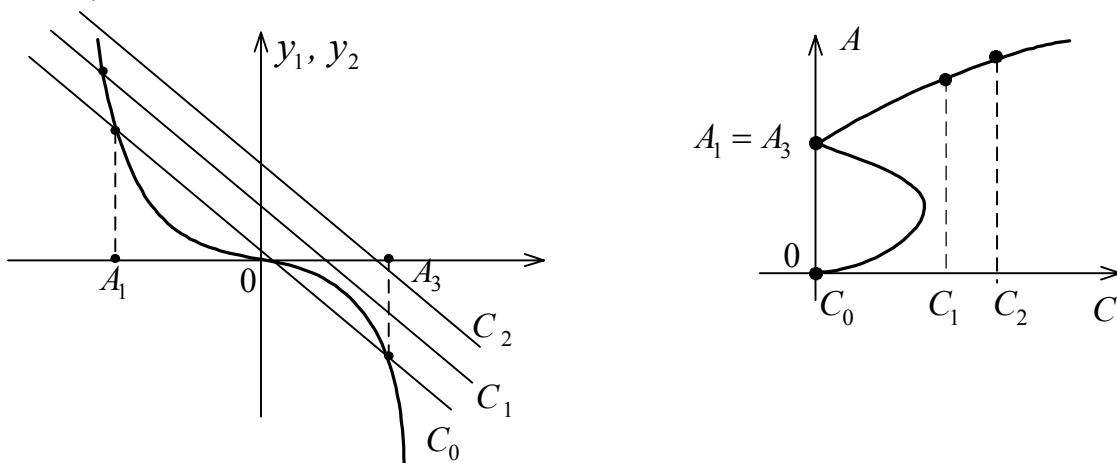


Рис. 5.4. $A_1 = A_3$, так как характеристика симметрична при $C_0 = 0$

Задача Дуффинга может быть решена при исследовании вынужденных колебаний нелинейных систем второго порядка вида (5.1). Если порядок системы превышает второй, то применяют метод эллипса, когда НЭ находится в канале ошибки или метод Гольдфарба, когда НЭ находится в цепи ОС.

5.2. Метод эллипса

Пусть нелинейная система имеет структуру (рис. 5.5).

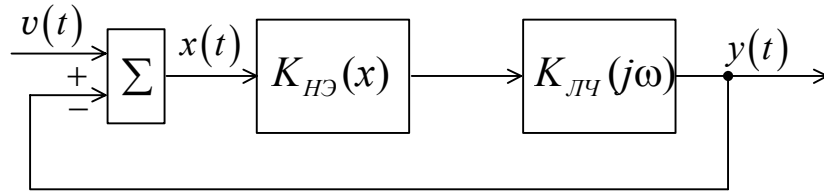


Рис. 5.5

В этой системе нелинейный элемент включен в канал ошибки. Будем считать, что характеристика нелинейного элемента однозначна.

Запишем выражение АФЧХ замкнутой системы по ошибке

$$\frac{x(j\omega)}{v(j\omega)} = \frac{1}{1 + K_{HЭ}(x)K_{ЛЧ}(j\omega)} = \frac{K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega)}{K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega) + K_{HЭ}(x)}.$$

При $K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega) = [\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]$ получим

$$\frac{x(j\omega)}{v(j\omega)} = \frac{[\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]}{[\alpha(\omega) + j\beta(\omega)] + K_{HЭ}(x)}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим квадраты модулей сигнала ошибки x и входного сигнала v :

$$|x|^2 = [(\alpha(\omega) + K_{HЭ}(x)) + j\beta(\omega)]^2 = |v|^2 [\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]^2,$$

$$|x|^2 [K_{HЭ}(x) + \alpha(\omega)]^2 = -\beta^2(\omega)|x|^2 + [\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)] |v|^2,$$

тогда

$$\underbrace{xK_{HЭ}(x)}_{y_1} = \underbrace{-x\alpha(\omega) \pm \sqrt{-x^2\beta^2(\omega) + v^2\alpha^2(\omega) + v^2\beta^2(\omega)}}_{y_2}. \quad (5.7)$$

Обозначим левую и правую части выражения (5.7) через y_1 и y_2 , где $y_1 = xK_{HЭ}(x)$ – нелинейная характеристика, y_2 – уравнение эллипса. При изменении частоты ω , эллипс поворачивается вокруг начала координат, а при изменении амплитуды входного сигнала оси эллипса не изменяют своего положения, но значения их как в первом так и во втором случае изменяются, что позволяет строить зависимости $A = f_1(\omega)$, $A = f_2(C)$.

Таким образом, чтобы получить зависимость $A = f_1(\omega)$ при $v = \text{const}$, необходимо выполнить построения, приведенные на рис. 5.6.

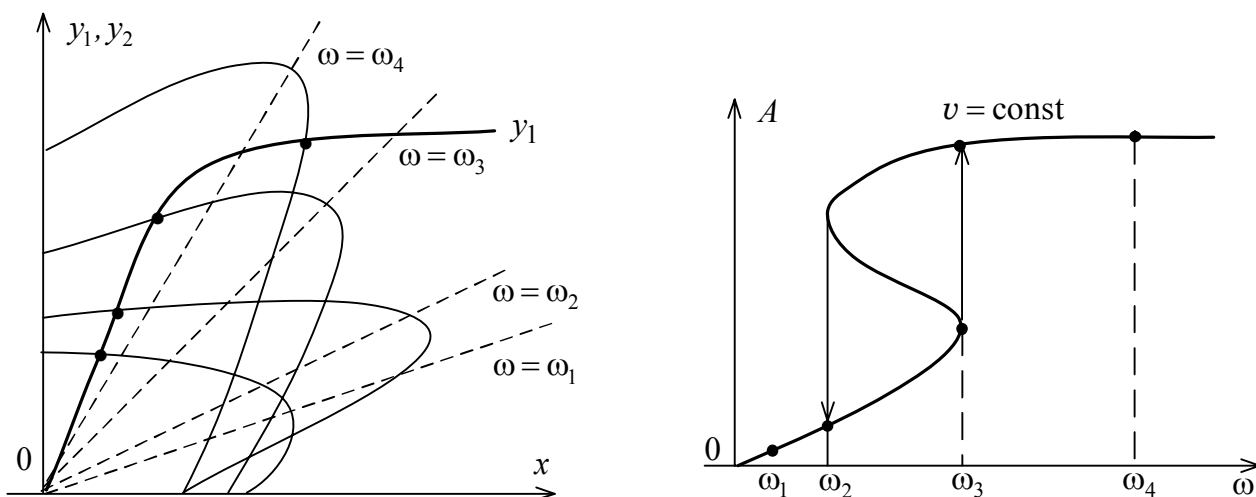


Рис. 5.6

В общем случае характер кривой зависит от типа НЭ. Рассмотренный пример относится к НЭ типа насыщения.

Второй случай для $A = f_2(C)$, $\omega = \text{const}$ и $A = x |K_{НЭ}(x) K_{ЛЧ}(j\omega)|$ представлен на рис. 5.7.

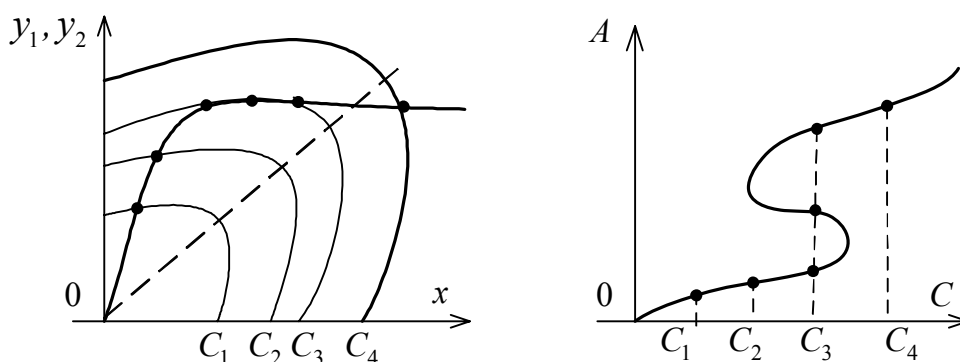


Рис. 5.7

Графики зависимостей, как правило, имеют зону неустойчивых решений, в которых необходимо проводить дополнительные исследования для определения устойчивости полученных результатов. Для НСАУ в этой области значений характерно возникновение скачкообразных резонансов, которые могут быть устранены путем коррекции параметров исходной системы.

5.3. Метод Гольдфарба

Этот метод применяется к нелинейным системам с вынужденными колебаниями, где нелинейный элемент включен в цепь обратной связи.

Предположим, что структурная схема нелинейной системы имеет вид рис. 5.8.

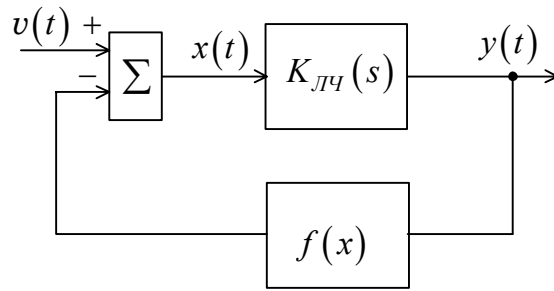


Рис. 5.8

Пусть $v(t) = C \sin \omega t$. Решение будем отыскивать в виде $x(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$, где φ – фазовый сдвиг.

Согласно структурной схеме $\frac{K_{ЛЧ}(j\omega)}{1 + K_{ЛЧ}(j\omega)K_{НЭ}(A)} = \frac{A \sin(\omega t - \varphi)}{C \sin \omega t}$ или

$$\frac{1}{K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega) + K_{НЭ}(A)} = \frac{A \sin(\omega t - \varphi)}{C \sin \omega t}. \quad (5.8)$$

где C и ω – параметры внешнего гармонического воздействия.

Надо определить амплитуду A и сдвиг фазы φ вынужденного колебания. Для решения поставленной задачи осуществляют следующие преобразования.

Приводят входной сигнал к виду выходного:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(t) &= C \sin \omega t = C \sin[(\omega t - \varphi) + \varphi] = C \sin(\omega t - \varphi) \cos \varphi + C \cos(\omega t - \varphi) \sin \varphi = \\ &= \frac{C}{A} \underbrace{A \sin(\omega t - \varphi) \cos \varphi}_x + \frac{C}{A\omega} \underbrace{A\omega \cos(\omega t - \varphi) \sin \varphi}_{\dot{x}}. \end{aligned}$$

Преобразуют полученное выражение, умножив и разделив его первое слагаемое на A , а второе на $A\omega$, и приняв во внимание, что $A \sin(\omega t - \varphi) = A\omega \cos(\omega t - \varphi)$, $s = j\omega$. Тогда

$$C \sin \omega t = \frac{C}{A} (\cos \varphi + j \sin \varphi) A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{C}{A} e^{j\varphi} A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{C}{A} e^{j\varphi} x. \quad (5.9)$$

где $x = A \sin(\omega t - \varphi)$, e – основание натурального логарифма.

Гармоническую линеаризацию нелинейной характеристики осуществляют в виде $f(x) = K_{НЭ}(A)x$. Подставляя (5.9) в (5.8), получают

$$K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega) = -K_{НЭ}(A) + \frac{C}{A} e^{j\varphi} \quad (5.10)$$

Соотношение (5.10) называют уравнением Гольдфарба. Поскольку это уравнение трансцендентное, то решить его относительно A и φ не удастся, поэтому изменяют постановку задачи: полагают, что известны C и A , а необхо-

можно определить частоту ω и фазовый сдвиг φ для всех значений амплитуд. Таким образом, необходимо на комплексной плоскости построить характеристики $K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega)$ и $K_{НЭ}(A)$ (рис. 5.9, а). Затем для каждого заданного значения A строить окружности радиусом $\frac{C}{A}$ при $C = \text{const}$. Центр этих окружностей будет лежать на кривой $-K_{НЭ}(A)$ в точках A_i . Точки пересечения этих окружностей с характеристикой $K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega)$ дают искомую зависимость $A = f_1(\omega)$ (рис. 5.9, б). Отсутствие решения – неустойчивые процессы системы.

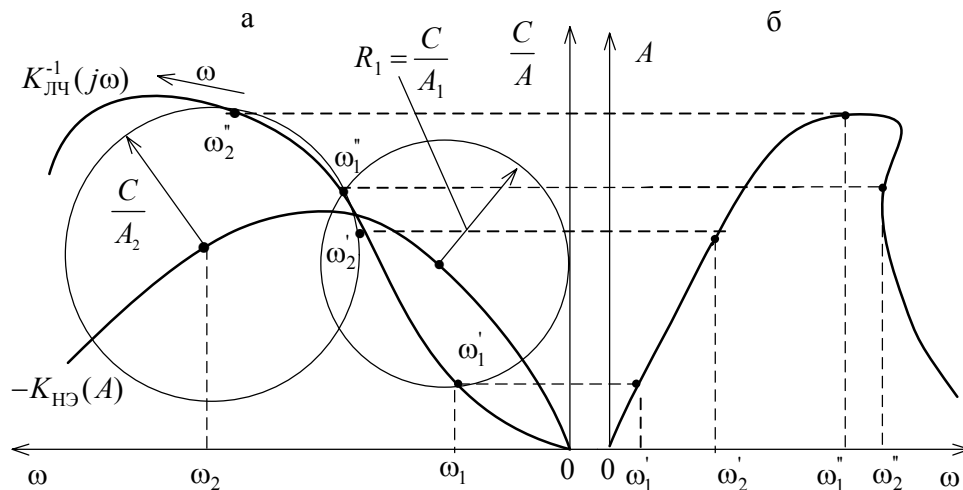


Рис. 5.9

Чтобы построить зависимость $A = f_2(C)$ при $\omega = \text{const}$, уравнение Гольдфарба записывают в виде:

$$A \left[K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega) + K_{НЭ}(A) \right] = C e^{j\varphi}. \quad (5.11)$$

На комплексной плоскости строится кривая, соответствующая левой части уравнения и семейство окружностей с различными радиусами $R = C_i$. Центр окружностей лежит в начале координат, точки пересечения с кривой $A \left[K_{ЛЧ}^{-1}(j\omega) + K_{НЭ}(A) \right]$ соответствуют искомой зависимости (рис. 5.10).

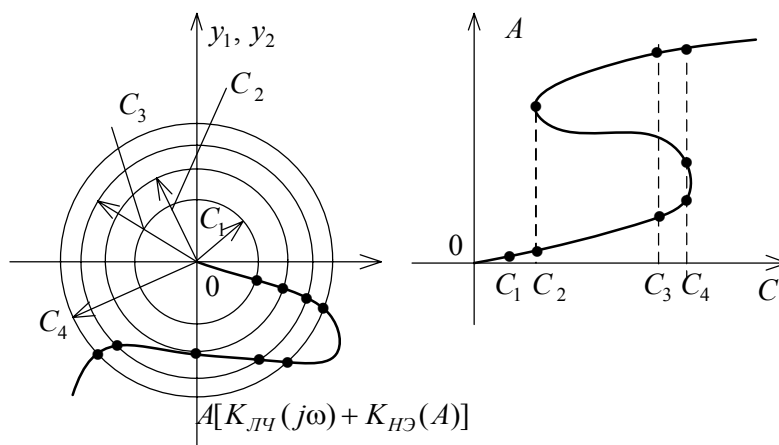


Рис. 5.10

6. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотренные до сих пор переходные процессы в нелинейных системах часто носили качественный характер, поскольку время в явном виде не фигурировало. Для количественной оценки качества переходного процесса необходимо построить зависимость $x = f(t)$.

6.1. Построение переходного процесса методом фазовой плоскости

Пусть фазовая траектория системы имеет вид, приведенный на рис. 6.1, а.

Возьмем начальную точку $M_0(x_0, \dot{x}_0)$. Разобьем ось x на участки (желательно равные) $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2$ и т.д. Если интервалы $x_i - x_{i-1}$ малы, то можно считать, что на интервале скорость изменения координаты неизменна и определяется средней величиной

$$\dot{x}_{cp.i} = \frac{\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}}{2} = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t_i}. \quad (6.1)$$

Отсюда

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{\dot{x}_{cp.i}} = 2 \frac{x_i - x_{i-1}}{\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}}, \quad (6.2)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i. \quad (6.3)$$

Естественно, отрезки Δt_i в общем случае будут различными по величине. Точность построения зависит от величины интервалов разбиения оси на участки. Кривая переходного процесса $x(t)$ в данном случае представлена на рис. 6.1, б.

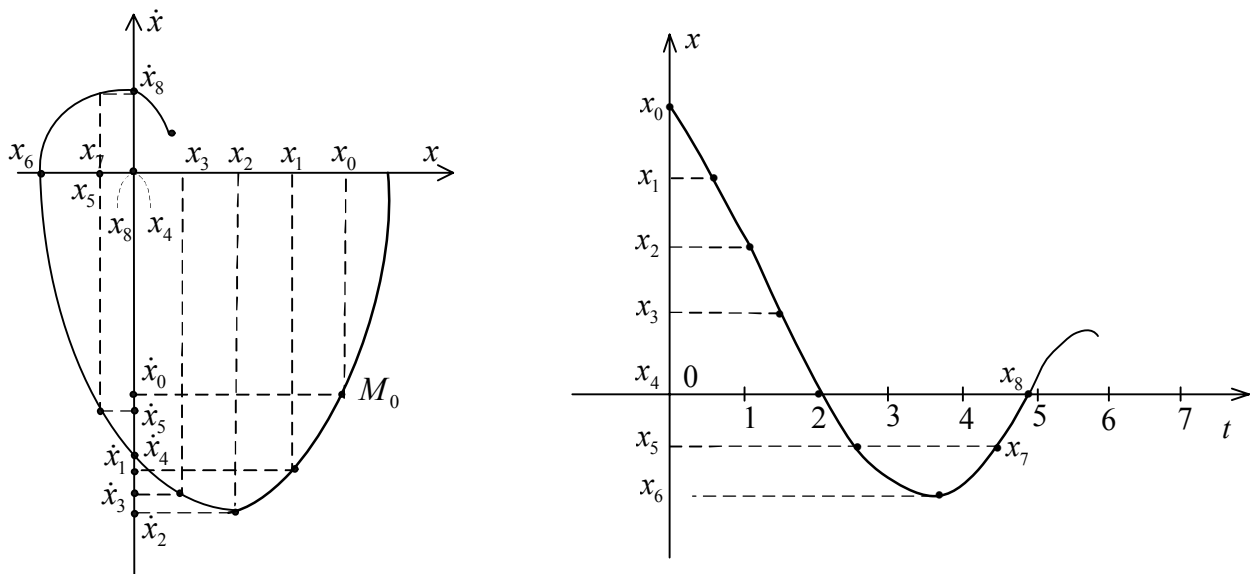


Рис. 6.1. Построение переходного процесса по фазовой траектории:
а – фазовая траектория, б – кривая $x = f(t)$

6.2. Построение переходного процесса методом гармонической линеаризации

Рассмотрим колебательное звено второго порядка. В линейном звене свободные движения (при $v(t) = 0$) соответствуют характеристическому уравнению $T^2\lambda^2 + 2\zeta T\lambda + 1 = 0$, корни которого $\lambda_{1,2} = \gamma \pm j\omega$. Эти движения определяются выражением

$$x = A_0 e^{\gamma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.4)$$

причем $\gamma = \frac{\xi}{T} = \text{const}$, $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \text{const}$, так как показатель колебательности $\xi = \text{const}$.

В нелинейном звене $\gamma = \gamma(t)$ и $\omega = \omega(t)$, поэтому

$$x = A_0 e^{\int_0^t \gamma(t) dt} \sin\left(\int_0^t \omega(t) dt + \varphi\right). \quad (6.5)$$

В связи с этим коэффициенты гармонической линеаризации в общем случае будут функциями A , ω , γ . Выражение (4.15) с учетом этого примет вид:

$$\begin{cases} \text{Re}[D(j\omega, A, \gamma, \Pi)] = 0, \\ \text{Im}[D(j\omega, A, \gamma, \Pi)] = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

По этим выражениям строят диаграммы качества нелинейных колебаний. Это семейства линий $\gamma = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ на плоскости (A, Π) , где Π – параметр, например, коэффициент усиления системы.

Для этого построения из первого уравнения (6.6) выделяют $\omega = f_1(A, \gamma, \Pi)$ и подставляют во второе, получают $A = f_2(\Pi, \gamma)$. Придавая γ постоянные значения, строят семейство, показанное на рис. 6.2, а. Затем, подставляя $A = f_2(\Pi, \gamma)$ в $\omega = f_1(A, \gamma, \Pi)$, исключают γ и получают $A = f_3(\Pi, \omega)$ – рис. 6.2, б.

Отметим, что для линейных САУ линии на рис. 6.2 вертикальны.

Из рис. 6.2, а следует, что при $\gamma = 0$ можно найти амплитуду автоколебаний (для точки C – амплитуда A_C). Слева от заштрихованной линии – затухающие колебания, справа – расходящиеся.

Если зафиксировать параметр Π , то переходному процессу соответствует движение изображающей точки по вертикали.

Если параметр Π соответствует точке L (затухающие колебания), то переходный процесс будет от начальной точки M_0 с амплитудой A_0 до $A \rightarrow 0$.

Если же Π соответствует точке E , то характер процесса зависит от выбора начальных условий. Если это точка M_{02} , то колебания расходятся до автоколе-

баний. Если это точка M_{03} , то колебания затухают до автоколебаний. В обоих случаях амплитуда автоколебаний будет A_4 .

При этом частота изменяется в соответствии с графиком $A = f_3(\Pi, \omega)$ по вертикали. На рис. 6.3, б линии $\omega = 0$ соответствуют монотонные переходные процессы.

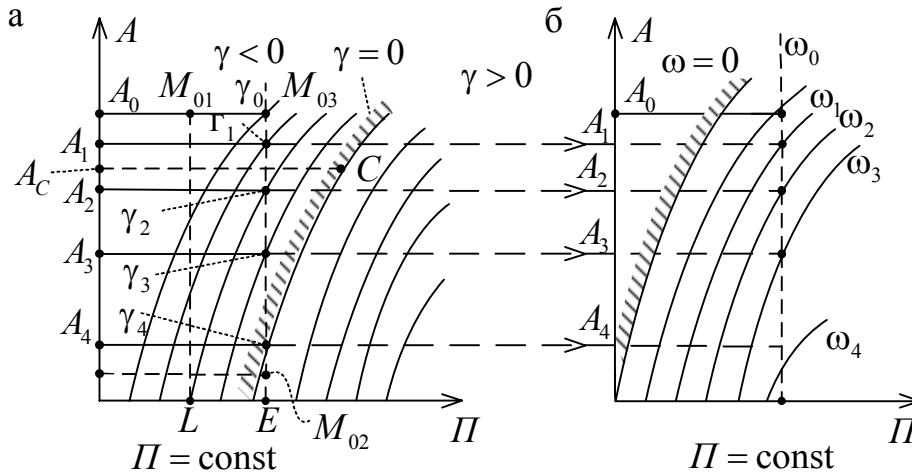


Рис. 6.2

На основании этих рассуждений можно приближенно оценить переходной процесс, определив при $\Pi = \text{const}$ огибающую и частоту колебаний.

Из графика на рис. 6.2, а определяют $T_i(A_i) = -\frac{1}{\gamma_i(A_i)}$, а из рис.6.2, б –

$$\tau_i(A_i) = \frac{2\pi}{\gamma_i(A_i)}.$$

Огибающую можно построить, используя свойство экспоненты, заключающееся в том, что длина подкасательной равна постоянной времени (рис. 6.3).

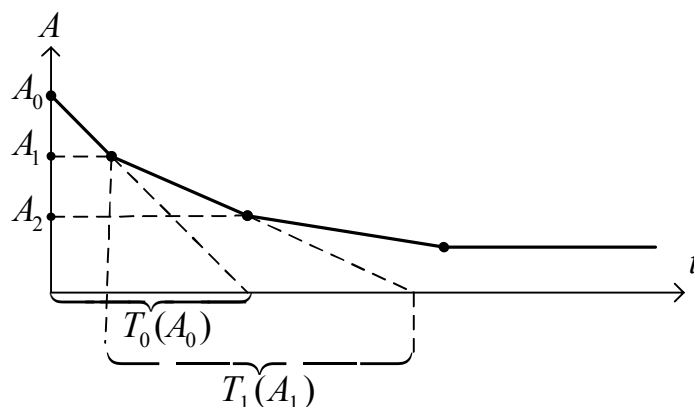


Рис. 6.3

$$T_0(A_0) = -\frac{1}{\gamma_0}; \quad T_1(A_1) = -\frac{1}{\gamma_1}; \quad T_2(A_2) = -\frac{1}{\gamma_2}; \quad \text{и т. д.}$$

Аналогично оценивается и период колебаний: $\tau_0(A_0) = \frac{2\pi}{\omega_0}$; $\tau_1(A_1) = \frac{2\pi}{\omega_1}$;

$$\tau_2(A_2) = \frac{2\pi}{\omega_2} \text{ и т.д.}$$

Окончательно зависимость $A = f(t)$ имеет вид рис. 6.4.

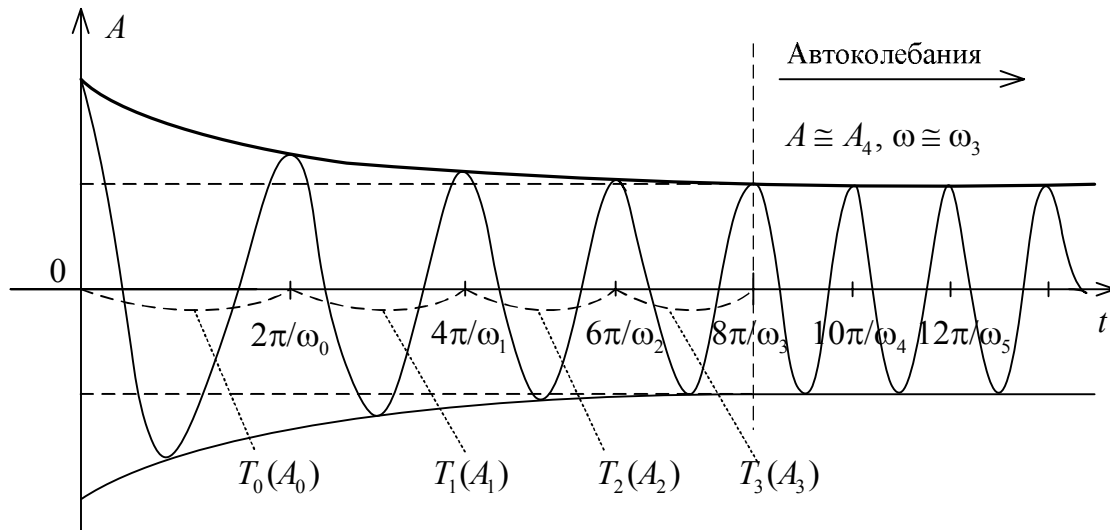


Рис. 6.4

6.3. Компьютерное моделирование переходного процесса

При расчетах переходных процессов рассмотренными методами возникают трудности, связанные с громоздкими построениями и невысокой точностью. Кроме того, наличие в системе нескольких нелинейностей усложняет решение задачи. Существенные ограничения накладывает порядок системы и необходимость вариации величины и характера внешних воздействий. От этих недостатков в значительной степени свободен метод компьютерного моделирования процессов.

Рассмотрим систему, структура которой приведена в примере 5.1 на рис. 5.3, а (M_c учитывать не будем). Выполним исследование системы при подаче на вход гармонического воздействия. Будем считать, что усилитель K_1 имеет характеристику типа «насыщение».

Схема моделирования системы в SIMULINK изображена на рис. 6.5.

Нелинейный элемент представлен звеном, имеющим коэффициент усиления в линейной зоне, равный единице. При моделировании исследовано влияние величины "а" нелинейного элемента на характер ошибки при гармоническом воздействии и переходной процесс системы при ступенчатом воздействии.

При подаче на вход системы сигнала $v(t) = 0,18 \sin 0,25t$ осциллограммы выходного сигнала изображены на рис. 6.6.

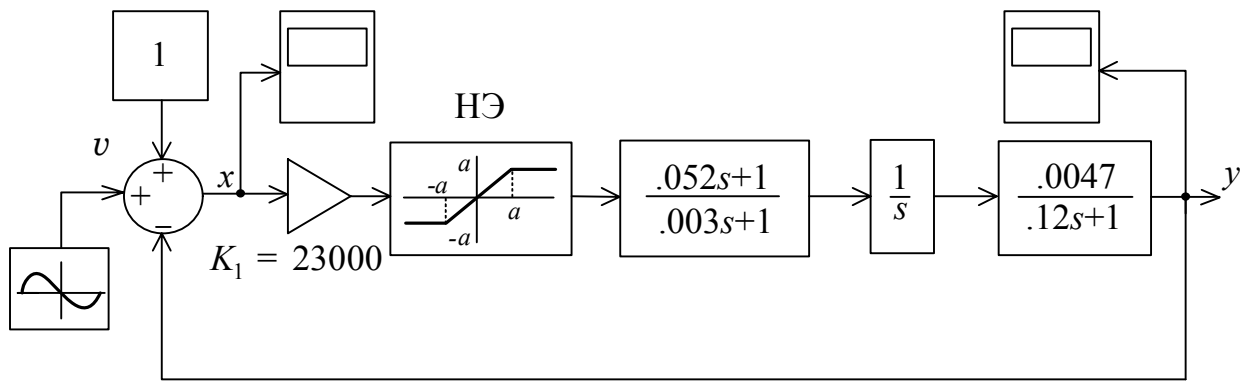


Рис. 6.5. Схема моделирования нелинейной системы в SIMULINK

Рис. 6.6, а соответствует значению " a "=10, при котором НЭ не входит в насыщение, при этом ошибка $x_{\max} = 4 \cdot 10^{-4}$. Рис. 6.6, б соответствует значению " a "=8, при котором начинает сказываться насыщение. Выходной сигнал отличен от синусоиды, ошибка $x_{\max} = 7,5 \cdot 10^{-3}$; рис. 6.6, в соответствует " a "=6 – НЭ входит в глубокое насыщение.

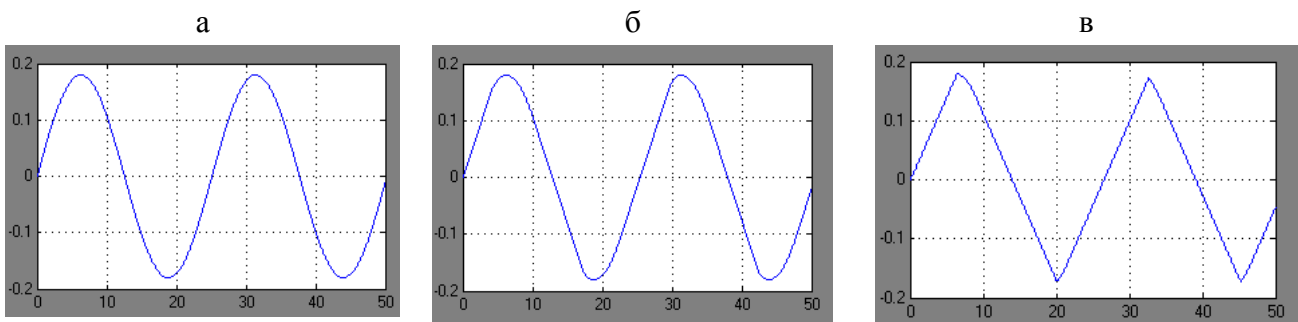


Рис. 6.6

При подаче на вход системы сигнала $1(t)$ при значении " a "=25000, нелинейный элемент не входит в насыщение, переходной процесс и ошибка соответствуют линейной системе рис. 6.7, а. При $a = 10000$, нелинейный элемент входит в насыщение; переходной процесс затягивается рис. 6.7, б. При дальнейшем уменьшении " a " НЭ входит в глубокое насыщение, система становится «вялой», t_p возрастает, перерегулирование уменьшается рис. 6.7, в.

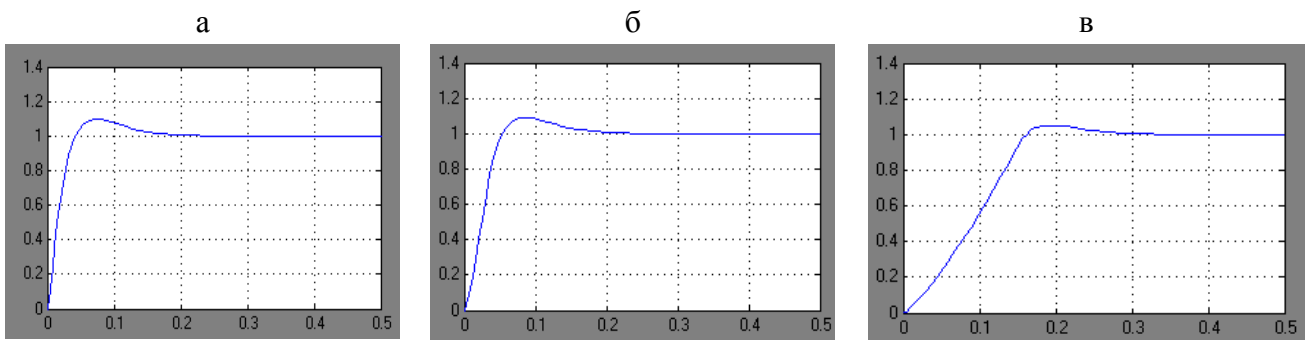


Рис. 6.7

7. КОРРЕКЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При синтезе нелинейных систем кроме классических задач коррекции систем автоматического управления по точности, качеству, устойчивости, решаются две специфические задачи – подавление автоколебаний или организация в системе свободных колебаний с определенной амплитудой и частотой.

Для их решения применяются цепи обратной связи, обратные нелинейные характеристики, специально организованные гармонические сигналы, вибрационная линеаризация нелинейных характеристик, другие методы.

7.1. Коррекция нелинейной системы с помощью обратной связи

Рассмотрим метод подавления автоколебаний, основанный на введении обратной связи, охватывающей нелинейный элемент и часть линейной системы (рис. 7.1).

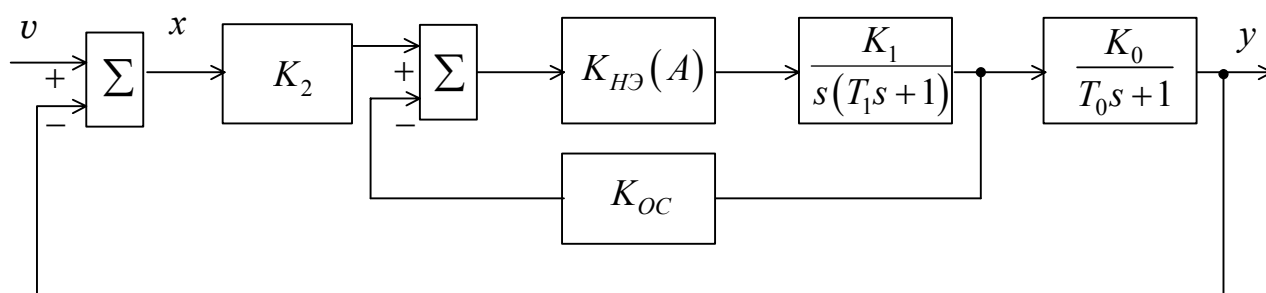


Рис. 7.1

Проанализируем, когда в системе автоколебания невозможны. С этой целью запишем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_0 T_1 \lambda^3 + (T_0 + T_1) \lambda^2 + (1 + T_0 q(A) K_1 K_{OC}) \lambda + K_{HЭ}(A) K_1 (K_{OC} + K_2 K_0) = 0, \quad (7.1)$$

где $K_{HЭ}(A)$ – гармонически линеаризованный коэффициент усиления нелинейного элемента.

Воспользуемся критерием устойчивости Гурвица. Для системы третьего порядка $(T_0 + T_1)(1 + T_0 K_{HЭ}(A) K_1 K_{OC}) > T_0 T_1 K_{HЭ}(A) K_1 (K_{OC} + K_2 K_0)$, откуда

$$T_0 + T_1 > T_0^2 K_{HЭ}(A) K_1 \left[\frac{T_1}{T_0} K_2 K_0 - K_{OC} \right]. \quad (7.2)$$

Таким образом, если $K_{OC} = \frac{T_1}{T_0} K_2 K_0$, то в системе автоколебания невозможны. Автоколебания существуют, когда выполняется условие:

$$K_1 > \frac{T_1 + T_0}{T_0 K_{HЭ}(A) (T_1 K_2 K_0 - T_0 K_{OC})}. \quad (7.3)$$

По данному выражению можно построить область устойчивости в интересующих параметрах, задаваясь максимальным значением характеристики нелинейного элемента. Например, для двухпозиционного реле $K_{HЭ}(A)_{\max} = \frac{2l}{\pi A}$, тогда максимальное значение K_{OC}^* в выражении (7.3) найдем так:

$$K_1 = \frac{\pi A(T_0 + T_1)}{2lT_0(T_1K_2K_0 - T_0K_{OC}^*)}, T_1K_2K_0 - T_0K_{OC}^* = 0, K_{OC}^* = K_2K_0 \frac{T_1}{T_0}. \quad (7.4)$$

Область устойчивости в параметрах (K_{OC}, K_2) представлена на рис. 7.2.

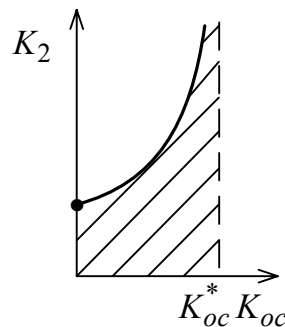


Рис. 7.2

7.2. Синтез компенсационных моделей

С целью подавления автоколебаний в систему вводят нелинейный элемент с обратной характеристикой $f^{-1}(x)$ (рис. 7.3).

Теоретически идея реализуется так, как показано на рис. 7.3.

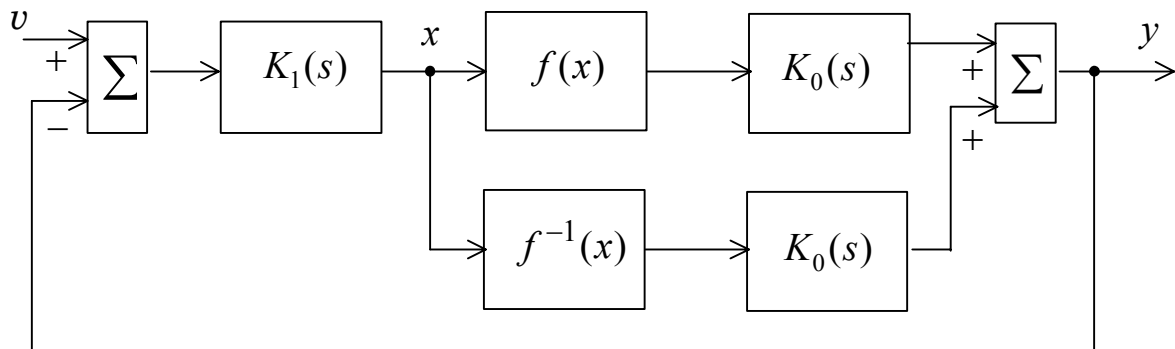


Рис. 7.3

Точно реализовать такую структурную схему сложно. Поэтому на практике используют эквивалентную схему (рис. 7.4).

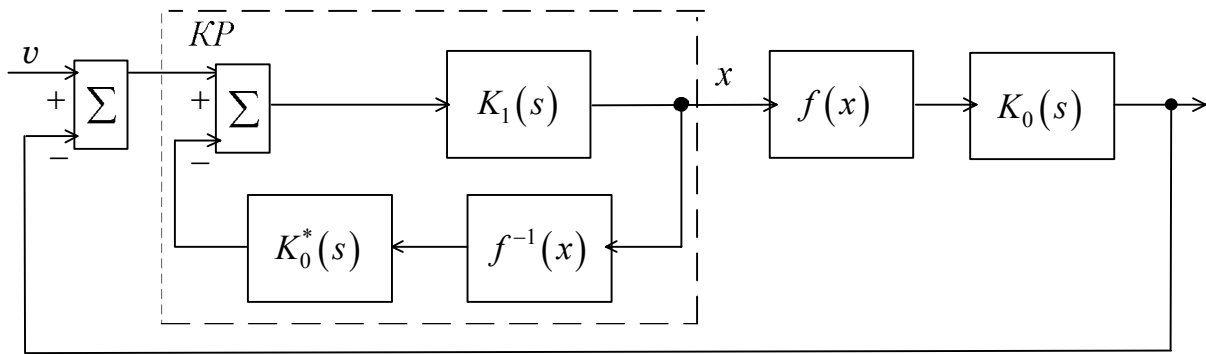


Рис. 7.4

На этой схеме KP – компенсационный регулятор, который, как правило, реализуется на основе микропроцессора.

7.3. Метод вибрационной линеаризации

Вибрационная линеаризация используется для подавления автоколебаний в релейных системах. Предположим, что на вход НСАУ подан гармонический сигнал $x(t) = x_0(t) + A \sin \omega t$, причем частота ω велика настолько, что за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, сигнал $x_0(t)$ практически не изменяет значение коэффициента линеаризации.

На выходе нелинейного элемента, например реле, в таком случае будет присутствовать сигнал

$$\frac{U_m}{2\pi} [\pi + 2\varphi - (\pi - 2\varphi)] = \frac{2U_m}{\pi} \varphi, \quad (7.5)$$

что показано на рис. 7.5.

Значение φ в (7.5) находят из следующих соображений:

$$\varphi = \arcsin \frac{x_0}{A} \approx \frac{x_0}{A}, \quad \sin \frac{\pi}{2} \approx A, \quad (7.6)$$

т.е. $\sin \varphi \approx x_0$, откуда следует, что нелинейный элемент может быть заменен линейной характеристикой $f(x_0) = \frac{2U_m}{\pi A} x_0$.

При этом НЭ работает последовательно с линейной частью, которая является фильтром низких частот, и, следовательно, автоколебания на выходе системы можно исключить.

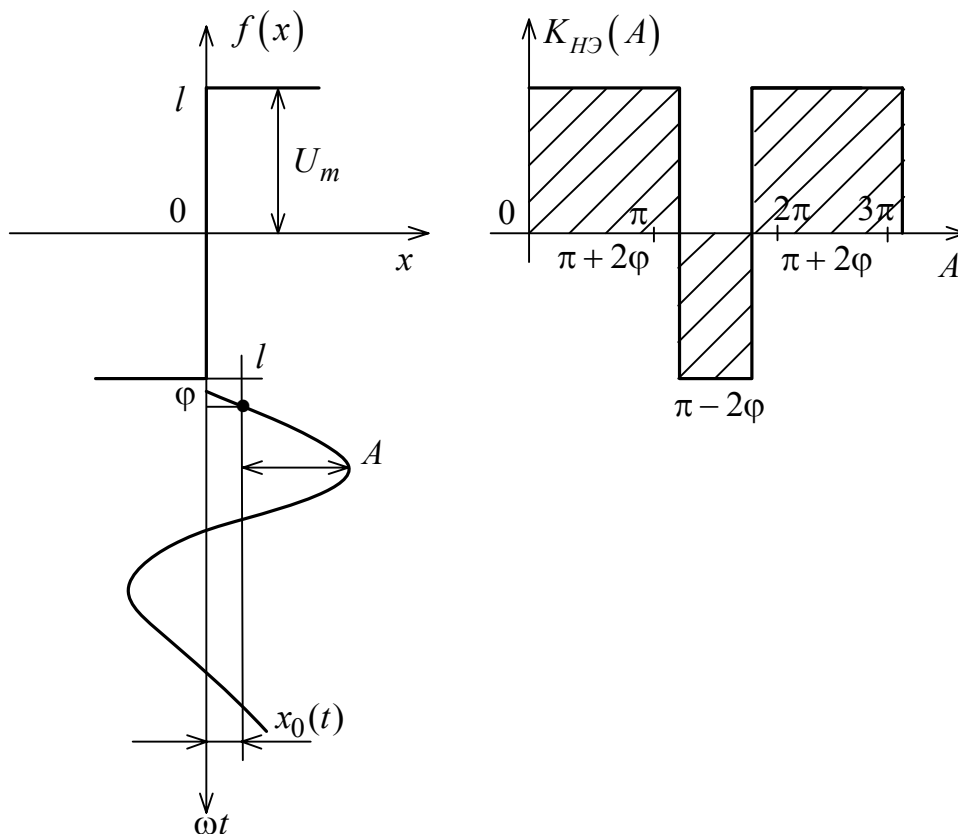


Рис. 7.5

На практике применяют два способа введения дополнительного высокочастотного сигнала $A \sin \omega t$.

1) В систему вводится дополнительный генератор, который можно настраивать на нужные значения параметров A и ω (рис. 7.6).

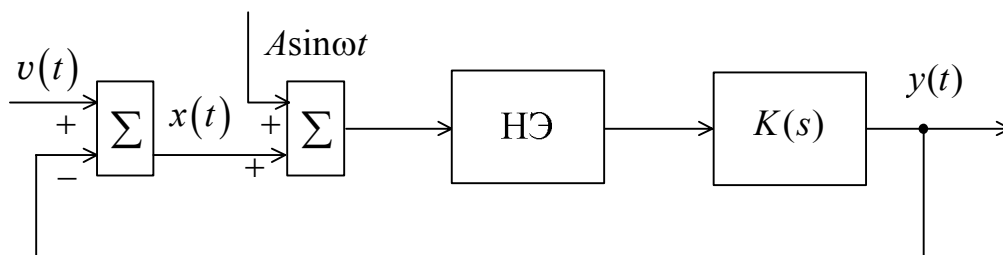


Рис. 7.6

Недостаток способа – наличие дополнительного генератора, преимущество заключается в том, что при наладке схемы параметры A и ω можно изменять в широких пределах, что дает возможность всегда избегать автоколебаний в системе.

2) В системе организуют собственные колебания путем введения местной обратной связи (рис. 7.7).

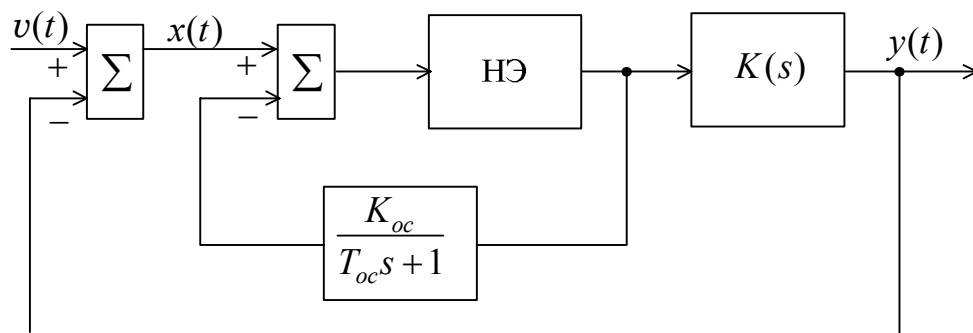


Рис. 7.7

Важной и сложной задачей является определение частоты и амплитуды колебаний. В простейшем случае можно воспользоваться следующими рекомендациями: частота подбирается таким образом, чтобы за один период колебаний ошибка управления не изменялась; амплитуда выбирается так, чтобы выполнялось соотношение $\arcsin x \approx x$.

Недостаток этого способа – существенное ослабление сигнала ошибки управления.

ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Важной составной частью теории автоматического управления является синтез оптимальных и адаптивных систем. Причем задачи синтеза характеризуются большим разнообразием.

В основе традиционных задач синтеза лежит предположение о том, что конфигурация структурной схемы, включая управляемый процесс и устройство управления (регулятор), задана с точностью до регулируемых параметров. Этими параметрами могут быть коэффициенты усиления или постоянные времени регулятора или отдельных его частей (корректирующих устройств). Задача состоит в том, чтобы выбрать такие значения параметров, которые минимизировали бы критерий качества системы. Этот класс задач называют *оптимизацией параметров*.

Более общий класс задач, известный как *аналитическое конструирование регуляторов*, связан с определением импульсной переходной характеристики или передаточной функции регулятора по динамическим характеристикам управляемого процесса и общей импульсной переходной характеристике или по общей передаточной характеристике системы, минимизирующей критерий качества.

При решении задач оптимизации обычно полагают, что динамические характеристики управляемого процесса и внешних воздействий на процесс известны. Однако параметры системы могут непредсказуемо меняться в широких пределах. При этом возможны такие комбинации даже малых отклонений параметров управляемого процесса и регулятора от расчетных значений, при которых не только нарушается оптимальный режим управления, но и устойчивость системы. В ряде случаев это является основной причиной аварий и катастроф в технических системах с автоматическим управлением.

Чтобы в условиях «дрейфа» параметров системы и изменения внешних воздействий поддержать оптимальный режим управления и устойчивость системы необходимо оценивать текущие значения переменных состояния системы и параметров сигналов и в соответствии с этими оценками перестраивать параметры регулятора, а возможно его структуру и алгоритм управления.

Системы, использующие принципы идентификации переменных состояния управляемого процесса и параметров внешних воздействий для поддержания заданного (обычно оптимального) режима работы, называют *адаптивными системами*.

Существуют различные подклассы адаптивных систем. Наиболее изучены подклассы беспойсковых и поисковых адаптивных (самонастраивающихся) следящих систем и систем стабилизации, а также экстремальные системы, поддерживающие главный показатель эффективности технологического объекта, например мощность, расход топлива, температуру, давление и т.п.

Наименее изучены подклассы адаптивных систем, обладающие одновременно максимальным быстродействием, точностью и помехоустойчивостью; обеспечивающие максимальную производительность технологического оборудования или подвижного объекта, минимальное потребление энергии на производство или движение, минимальную вероятность аварийных ситуаций. Привлекательно создать систему, которая наилучшим образом удовлетворяла бы всем этим целям. Однако многие цели противоречивы, а те, которые не являются противоречивыми, не достигаются при одной и той же конфигурации структуры схемы, требуют различных законов управления. Кроме того, при достижении целей приходится учитывать множество ограничений, связанных с особенностями управляемого процесса и средствами получения информации для организации управления. Можно лишь выделить область (область компромисса), при приближении к которой все условия меняются в нужном направлении. Однако даже определение этой области представляет собой сложную задачу. Что касается оптимизации для области компромисса, то в лучшем случае задача решается путем преобразования векторного критерия целей оптимизации к скалярному, в котором различные критерии учитываются с помощью весовых коэффициентов. В тех случаях, когда обоснованный выбор весовых коэффициентов затруднен, задачу многокритериально оптимизации упрощают. Из всех критериев выбирают один критерий оптимизации, наиболее важный по мнению конструктора. Все остальные условия учитывают как дополнительные ограничения в виде неравенств. Первый критерий оптимизации переводится в разряд ограничения в виде неравенства, и оптимизируют второй по важности критерий и т.д. В результате этой сложной творческой работы можно получить наиболее важную часть решения задачи – синтез алгоритма работы оптимальной системы, а затем решать вопросы адаптивного оптимального управления.

Излагаемый далее материал следует рассматривать как общее ознакомление с методиками оптимизации систем управления и принципами построения адаптивных систем.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ

Структурную схему системы управления часто проектируют исходя из накопленного опыта и предъявляемых к системе требований в форме ограничений на значения коэффициентов ошибок управления, время переходного процесса, величину перерегулирования, простоту реализации регулятора или отдельной его части (корректирующего устройства), удобства обслуживания и т. д.

Предположим, что в процессе проектирования определена структурная схема системы, удовлетворяющая предъявляемым требованиям, и ее передаточная функция имеет вид

$$\Phi(s, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad (2.1)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – параметры регулятора, значения которых можно изменять по желанию конструктора или в процессе наладки и эксплуатации системы.

Задача состоит в том, чтобы выбрать такие численные значения параметров γ_i , которые обеспечивают наилучшее качество управления.

Критерий качества либо задается, либо его выбирает конструктор исходя из назначения системы, характера воздействий на систему и ограничений.

В простейшем случае качество линейной системы для детерминированных воздействий выбирают в виде интеграла от квадрата ошибки управления

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt. \quad (2.2)$$

Отметим, что мгновенные значения ошибок управления $e(t)$, как аналитические функции настраиваемых параметров γ_i неизвестны. Более того определить их по структурной схеме крайне сложно, а порой вообще невозможно. Это затруднение преодолевают с помощью теоремы Парсеваля, согласно которой для системы с нулевыми начальными условиями справедливо следующее соотношение между временной и частотной областями:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s)F(-s) ds, \quad (2.3)$$

где $F(s)$ – изображение функции при $s = j\omega$.

Согласно теореме Парсеваля критерий качества вида (2.2) представляют через изображение функции ошибки $E(s)$

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s)E(-s) ds, \quad (2.4)$$

Чтобы оценить значение выражения (2.4) необходимо по структурной схеме системы записать изображение функции ошибки $E(s)$ и представить ее в стандартной полиномиальной форме

$$E(s) = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \dots + c_1s + c_0}{d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0}, \quad (2.5)$$

а затем воспользоваться таблицей интегралов или итерационной процедурой интегрирования. В результате получают аналитическую функцию регулируемых параметров

$$J = F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n). \quad (2.6)$$

Дифференцируя эту функцию по всем γ_i и приравнивая результаты нулю, получают n уравнений, определяющих оптимальные параметры. Однако при большом числе регулируемых параметров уравнения трудно разрешимы. Задача усложняется еще и тем, что диапазон изменения отдельных параметров ограничен, а их оптимальные значения оказываются за пределами допустимых диапазонов. Поэтому аналитически оптимальным образом выбирают один или

два параметра, например, коэффициент усиления регулятора или коэффициент усиления и постоянную времени. При бóльшем числе настраиваемых параметров задачу решают численными методами оптимизации, используя, например, пакеты прикладных программ Matlab.

Во многих практически важных задачах число параметров, влияющих на точность управления, невелико. В подобных случаях аналитические методы предпочтительнее. Они позволяют найти алгоритм перестройки параметров при изменении условий работы системы и параметров управляемого процесса.

Пример 2.1. На рис. 2.1 показана структурная схема системы управления объектом, динамическая характеристика которого аппроксимирована передаточной функцией интегрирующего звена с параметром объекта $k_{об}$. Устройство управления содержит интегратор, охваченный обратной связью с коэффициентом усиления $k_{ос}$. Параметры схемы k_1 и $k_{об}$ известны. Начальные значения переменных состояния системы нулевые. Задающее воздействие на входе системы – ступенчатое $v(t) = A1(t)$, где A – желаемое будущее состояние выходной переменной в цепи обратной связи. Требуется определить значение $k_{ос}$, минимизирующее критерий качества (2.2).

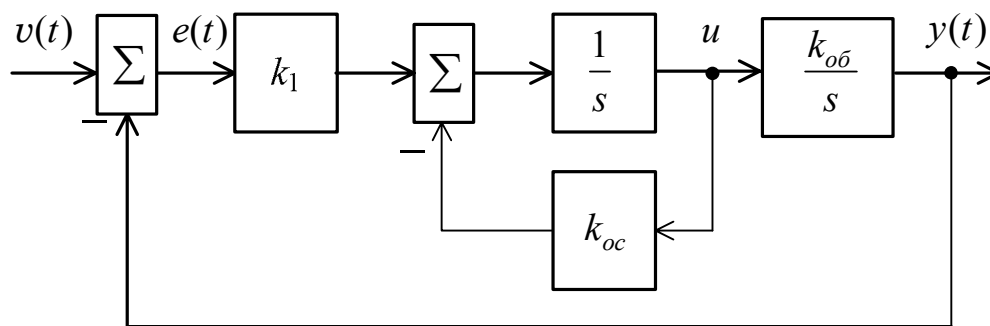


Рис. 2.1

Решение.

Передаточная функция $K_{ye}(s)$ разомкнутой системы:

$$K_{ye}(s, k_{ос}) = \frac{k_1 k_{об}}{s(s + k_{ос})}; \quad (2.7)$$

изображение по Лапласу задающего воздействия $v(t) = A \cdot 1(t)$:

$$V(s) = A / s; \quad (2.8)$$

изображение ошибки $E(s)$ в стандартной полиномиальной форме (2.5):

$$E(s) = V(s) \frac{1}{1 + K_{ye}(s, k_{ос})} = \frac{As + Ak_{ос}}{1s^2 + k_{ос}s + k_1 k_{об}}, \quad (2.9)$$

где $A = c_1$, $Ak_{ос} = c_0$, $1 = d_2$, $k_{ос} = d_1$, $k_1 k_{об} = d_0$.

Значение интеграла

$$J = \frac{c_1^2}{2d_1d_2} + \frac{c_0^2}{2d_0d_1} = \frac{A^2}{2} \left[\frac{1}{k_{oc}} + \frac{k_{oc}}{k_1k_{o\bar{o}}} \right] = F(k_{oc}). \quad (2.10)$$

Условие минимума интеграла $\frac{\partial F(k_{oc})}{\partial k_{oc}} = 0$:

$$\left[\frac{1}{k_{oc}^2} + \frac{1}{k_1k_{o\bar{o}}} \right] = 0. \quad (2.11)$$

Оптимальное значение k_{oc}^* , удовлетворяющее условию (2.11):

$$k_{oc}^* = \sqrt{k_1k_{o\bar{o}}}. \quad (2.12)$$

Минимальное значение $J_{\min} = J(k_{oc}^*)$:

$$J_{\min} = \frac{A^2}{2} \left[\frac{1}{k_{oc}^*} + \frac{k_{oc}^*}{k_1k_{o\bar{o}}} \right] = \frac{A^2}{\sqrt{k_1k_{o\bar{o}}}}.$$

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НАСТРОЙКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

За критерий качества настройки параметров системы принимают относительное допустимое увеличение интеграла от квадрата ошибки управления:

$$\delta^2 = \frac{J - J_{\min}}{J_{\min}}, \quad (3.1)$$

где J и J_{\min} – значения интеграла при произвольно настроенных и при оптимальных параметрах соответственно, вычисленные по формуле (2.6).

Пусть

$$J = F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad (3.2)$$

$$J_{\min} = F(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_n^*), \quad (3.3)$$

Предполагаем, что i -й параметр γ_i связан со своим оптимальным значением γ_i^* соотношением

$$\gamma_i = \gamma_i^* + \Delta\gamma_i = \gamma_i^*(1 + \Delta i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

Подставляя (3.2) (с учетом (3.3) и (3.4)) в выражение (3.1) и преобразуя его, получаем

$$\delta^2 = F(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n). \quad (3.5)$$

Погрешности настройки $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ являются случайными величинами, причем законы их распределения и даже моменты появления неизвестны. Учитывая это считают, что относительные погрешности постоянны. Если же погрешности принять одинаковыми, т.е. $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = \Delta$, то выражение (3.5) сводится к виду

$$\delta^2 = F(\Delta)$$

и решение задачи, связанной с оценкой Δ упрощается.

Пример 3.1. Пусть

$$J = \frac{A^2}{2} \left[\frac{1}{k_{oc}} + \frac{k_{oc}}{k_1 k_{об}} \right], \quad (3.6)$$

$$J_{\min} = \frac{A^2}{2} \left[\frac{1}{k_{oc}^*} + \frac{k_{oc}^*}{k_1 k_{об}} \right], \quad (3.7)$$

где

$$k_{oc} = k_{oc}(1 + \Delta) \text{ и } k_{oc}^* = \sqrt{k_1 k_{об}}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.6) и (3.7) с учетом (3.8) в формулу (3.1), находим

$$\delta^2 = \frac{1 + (1 + \Delta)^2}{1 + \Delta} - 1. \quad (3.9)$$

Из формулы (3.9) следует

$$\Delta = \delta^2 \pm \sqrt{\delta^2(\delta^2 + 2)}. \quad (3.10)$$

Графики, соответствующие уравнению (3.10), приведены на рис. 3.1. Видно, что в рассматриваемом примере существует возможность достаточно грубой настройки коэффициента обратной связи. Например, при относительном допустимом увеличении интеграла от квадрата ошибки всего на 5% ($\delta^2 = 0,05$) допустимая относительная погрешность может лежать в пределах $0,27 \leq \Delta \leq 0,37$.

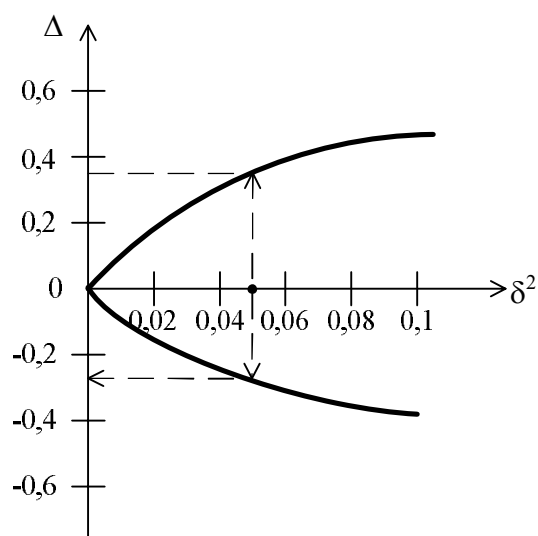


Рис. 3.1

4. ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСА ПАРАМЕТРОВ НА ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ

При оптимизации обычно полагают, что заданные параметры структурной схемы величины постоянные и получены на основе обработки статистических данных многократных испытаний и проверок функциональных частей системы. Однако в процессе эксплуатации системы ее реальные параметры могут отличаться от расчетных. Оценка влияния этого разброса параметров на динамику системы позволяет обоснованно предъявлять требования к точности и периодичности регулировок параметров, принимать решение о проведении дополнительных расчетов, способе физической реализации регулятора и т.д.

Конкретные результаты можно получить лишь при анализе конкретных систем. Поэтому ограничимся лишь кратким изложением методики на простейшем примере.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (см. рис. 2.1), соответствующее сумме полиномов знаменателя и числителя передаточной функции (2.7)

$$\lambda^2 + k_{oc}\lambda + k_1k_{o\sigma} = 0. \quad (4.1)$$

Пусть $k_1^*k_{o\sigma}^*$ является расчетным значением произведения $k_1k_{o\sigma}$: $k_1k_{o\sigma} = k_1^*k_{o\sigma}^*$, а оптимальное значение $k_{oc}^* = \sqrt{k_1^*k_{o\sigma}^*}$. Сопоставим характеристическое уравнение (4.1) с эквивалентным ему уравнением

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0. \quad (4.2)$$

Из сопоставления находим:

– собственная частота ω_n колебаний системы:

$$\omega_n = \sqrt{k_1k_{o\sigma}} = \sqrt{k_1^*k_{o\sigma}^*}; \quad (4.3)$$

– коэффициент относительного демпфирования ζ при оптимальной настройке коэффициента обратной связи:

$$\zeta = \frac{k_{oc}^*}{2\omega_n} = \frac{\sqrt{k_1^*k_{o\sigma}^*}}{2\sqrt{k_1^*k_{o\sigma}^*}} = 0,5. \quad (4.4)$$

Используя известные выражения, определяем:

– перерегулирование

$$\sigma = 100 \exp\left(-\zeta\pi / \sqrt{1 - \zeta^2}\right) = 100 \exp\left(-0,5\pi / \sqrt{1 - 0,5^2}\right) = 17\%, \quad (4.5)$$

– время регулирования

$$t_p = \gamma\pi / \sqrt{1 - \zeta^2} = 1,9 \cdot 3,14 / \sqrt{1 - 0,5^2} = 6,9, \quad (4.6)$$

где $\gamma = 1,9$ при $\zeta = 0,5$.

Предположим теперь, что коэффициент обратной связи k_{oc} настроен относительно своего оптимального значения k_{oc}^* с погрешностью $\Delta = -0,2$ и его значение

$$k_{oc} = k_{oc}^*(1 - \Delta) = 0,8k_{oc}^*. \quad (4.7)$$

Допустим также, что в некоторый момент времени произведение $k_1k_{об}$ реальных параметров системы превышает расчетное значение $k_1^*k_{об}^*$ в 1,4 раза, т.е. $k_1k_{об} = 1,4k_1^*k_{об}^*$. В этом случае получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 0,08k_{oc}^*\lambda + 1,4k_1^*k_{об}^* = 0. \quad (4.8)$$

Следовательно имеем: $\omega_n = 1,18k_1^*k_{об}^*$; $\zeta = 0,34$. Тогда, пользуясь выражениями (4.5) и (4.6), и учитывая, что при $\zeta = 0,34$ множитель $\gamma = 2,8$, находим: $\sigma = 30\%$, $t_p = 10$.

Если в этот момент в системе возникнет переходной процесс, то он будет колебательным, медленно затухающим в течение сравнительно длительного отрезка времени. Более того, из-за достаточно большого перерегулирования элементы системы могут оказаться в насыщении, нарушая процесс управления. Если, кроме того, учесть влияние на переходные режимы работы постоянных времени, которыми из-за их малости обычно пренебрегают при аппроксимации динамических характеристик измерительных преобразователей и усилителей, то система, вообще говоря, может оказаться вблизи границы устойчивости.

Нежелательно также и такое сочетание разброса параметров, при котором коэффициент относительного демпфирования будет превышать значение 0,8. В подобных случаях система будет вяло реагировать на поступающие воздействия, не обеспечивая своевременность управления технологическим процессом или подвижным объектом.

В заключение отметим, что приведенный пример показывает сколь непредсказуемым может быть поведение системы с параметрами, обеспечивающими минимум квадратичного критерия качества. Предотвратить непредсказуемость поведения можно, если в системе непрерывно оценивать изменения параметров или переменные состояния с этими оценками, перестраивать регулируемые параметры.

5. УЧЕТ ФИЗИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Если структурная схема системы была спроектирована с учетом физических ограничений, например на скорость, или ускорение выходной переменной, то оптимизировать параметры регулятора необходимо с учетом этих ограничений. При этом учитывают не сами ограничения, а их интегральные квадратичные оценки.

Например, если производная $\dot{y}(t)$ не должна превышать максимально допустимое значение \dot{Y}_{\max} , то вводят ограничение

$$\int_0^{\infty} \dot{y}^2(t) dt \leq \dot{Y}_{\max}^2. \quad (5.1)$$

В этом случае кроме аналитической функции (2.6) определяют аналитическую функцию

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} (sY(s)(-sY(-s))) ds, \quad (5.2)$$

а ограничение в виде неравенства (5.1) записывают в следующем форме

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) - \dot{Y}_{\max}^2 \leq 0. \quad (5.3)$$

Затем, используя метод множителей Лагранжа, составляют новую аналитическую функцию

$$L(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \mu) = F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) + \mu [\varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) - \dot{Y}_{\max}^2]. \quad (5.4)$$

Если заданы k ограничений, то определяют k неравенств

$$\varphi_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) - \varphi_{i\max} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5.5)$$

где $\varphi_{i\max}$ — i -ое ограничение, и аналитическую функцию Лагранжа записывают в следующем виде

$$\begin{aligned} L(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) = \\ = F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) + \sum_{i=1}^k \mu_i [\varphi_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) - \varphi_{i\max}]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Последовательно дифференцируя функцию Лагранжа по всем γ_i и каждый раз, приравнивая результат дифференцирования нулю, получают n уравнений, содержащих n неизвестных параметров системы и k неизвестных множителей Лагранжа. Недостающие k уравнений берутся из условия (5.5).

Аналитическое решение уравнений находят при ограниченном числе регулируемых параметров. Обычно используют пакеты прикладных программ, содержащие алгоритмы компьютерных вычислений оптимальных параметров с учетом физических ограничений.

Пример 5.1.

Пусть в системе, структурная схема которой показана на рис. 2.1, по технологическому регламенту скорость $\dot{y}(t)$ выходной переменной ограничена некоторым наперед заданным значением \dot{Y}_{\max} : $|\dot{y}(t)| \leq \dot{Y}_{\max}$. Так как согласно структурной схеме управление $u(t)$ и скорость $\dot{y}(t)$ в любой момент времени связаны зависимостью

$$u(t) = \frac{1}{k_{об}} \dot{y}(t), \quad (5.7)$$

то условие $|\dot{y}(t)| \leq \dot{Y}_{\max}$ удовлетворяется при $|u(t)| \leq U_{\max}$, где

$$U_{\max} = \frac{1}{k_{o\delta}} \dot{Y}_{\max}. \quad (5.8)$$

Требуется для условий задачи, сформулированных в примере 2.1, определить значение коэффициента k_{oc} , минимизирующее критерий качества (2.10) и удовлетворяющее требованию

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \leq U_{\max}^2. \quad (5.9)$$

Решение. По структурной схеме (см. рис. 8.1) записываем изображение $U(s)$ сигнала управления в форме, удобной для применения формул контурных интегралов:

$$U(s) = \frac{0 \cdot s + Ak_1}{1s^2 + k_{oc}s + k_1k_{o\delta}}. \quad (5.10)$$

Находим

$$\varphi(k_{oc}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \frac{C_1^2 d_0 + C_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{0 + A^2 k_1^2}{2k_1 k_{o\delta} k_{oc}} = \frac{A^2 k_1}{2k_{o\delta} k_{oc}}. \quad (5.11)$$

Следовательно, неравенство (5.3) с учетом (5.9) принимает вид

$$\frac{A^2 k_1}{2k_{o\delta} k_{oc}} - u_{\max}^2 \leq 0. \quad (5.12)$$

Поясним смысл неравенства (5.12).

На рис. 5.1 построен график функции $\varphi_1(k_{oc})$

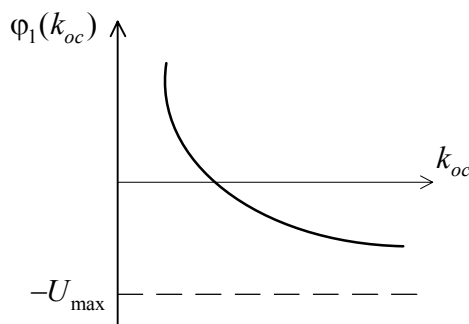


Рис. 5.1

Неравенство $\varphi_1(k_{oc}) \leq 0$ означает, что функция $\varphi_1(k_{oc})$ не может быть положительной. Она может быть равной нулю или отрицательной.

Следовательно, все значения k_{oc} , которые расположены слева от точки пересечения функцией $\varphi(k_{oc})$ оси абсцисс, запрещается использовать при настройке коэффициента обратной связи.

$$\varphi_1(k_{oc}) = \frac{A^2 k_1}{2k_{o\delta}} \cdot \frac{1}{k_{oc}} - U_{\max}^2. \quad (5.13)$$

Воспользуемся теперь выражением (2.12), полученным при оптимизации квадратичного критерия качества без учета ограничений, и подставим его в неравенство (5.12). Если окажется, что $\varphi_1(k_{oc}) < 0$ или $\varphi_1(k_{oc}) = 0$, то это значение $k_{oc} = \sqrt{k_1 k_{об}}$ принимается за оптимальное k_{oc}^* . Если окажется, что $\varphi_1(k_{oc}) > 0$, что недопустимо, то за оптимальное принимается значение, которое находят из условия

$$k_{oc}^* = \frac{A^2 k_1}{2U_{\max} k_{об}}. \quad (5.14)$$

Отметим, что изложенная методика оптимизации параметров не учитывает возможную погрешность их настройки и разброс заданных значений параметров. Поэтому, например, сколь угодно малое уменьшение коэффициента k_1 , или увеличение $k_{об}$ нарушает условие (5.12), что может привести к серьезным последствиям в работе технической системы с автоматическим управлением.

6. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА

Определение передаточной функции или импульсной характеристики оптимального регулятора при детерминированных воздействиях связано с серьезными трудностями по условиям физической реализуемости. Этих трудности удается избежать, если критерий качества для детерминированных воздействий задать в следующей форме:

при отсутствии ограничений на управляющее воздействие u

$$J = \int_0^{\infty} [qe^2(t) + ru^2(t)] dt, \quad (6.1)$$

при наличии ограничений ($u \leq U_{\max}$)

$$J = \int_0^{\infty} [e^2(t)dt + \mu u^2(t)] dt - \mu U_{\max}^2, \quad (6.2)$$

где q и r – весовые коэффициенты, μ – множитель Лагранжа, которые находят в процессе решения задачи.

Постановка задачи. Пусть задана структурная схема системы (рис. 6.1), где $K_p(s)$ – передаточная функция регулятора, $K_o(s)$ – известная передаточная функция объекта управления. Требуется найти такое выражение $K_p(s)$, при котором критерий качества (6.1) имеет наименьшее значение, а система оказывается физически реализуемой.

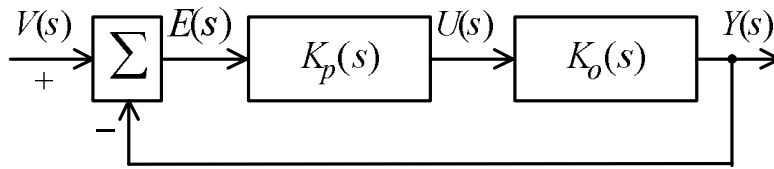


Рис. 6.1

Решение задачи. Согласно структурной схеме записываем:

– передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(s) = K_p(s)K_o(s)/1 + K_p(s)K_o(s); \quad (6.3)$$

– изображение ошибки

$$E(s) = V(s)[1 - \Phi(s)]; \quad (6.4)$$

– изображение управляющего воздействия на объект:

$$U(s) = V(s)\Phi(s)/K_o(s). \quad (6.5)$$

Используя теорему Парсеваля (2.3), переписываем критерий качества (6.1) в виде

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} V(s)V(-s) \left[q(1 - \Phi(s))(1 - \Phi(-s)) + r\Phi(s)\Phi(-s)/K_o(s)K_o(-s) \right] ds. \quad (6.6)$$

Функционал (6.6) на функции $\Phi(s)$, удовлетворяющей условиям физической реализуемости, достигает минимального значения, если частная производная от подинтегральной функции по $\Phi(-s)$ имеет только правые полюсы.

Дифференцируя подинтегральное выражение (6.6) по $\Phi(-s)$ и приравняв результат дифференцирования некоторой произвольной функции $\theta(-s)$, имеющей только правые полюсы, получим

$$V(s)V(-s) \left[-q(1 - \Phi(s)) + r\Phi(s)/K_o(s)K_o(-s) \right] = \theta(-s). \quad (6.7)$$

Левая часть уравнения (6.7) содержит особые точки (нули и полюсы) как в левой, так и в правой полуплоскости переменной $s = j\omega$, поэтому её необходимо представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых содержит полюса только в правой полуплоскости и должно быть сохранено, а второе – содержит полюса только в левой полуплоскости и должно быть положено равным нулю.

Можно показать, что в результате алгебраических преобразований уравнение (6.7) сводится к следующему уравнению

$$\frac{V(s)\Phi(s)}{K_o(s)} \Psi(s) - \left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^+ - \left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^- = \frac{Q(-s)K_o(-s)}{V(s)\Psi(-s)}, \quad (6.8)$$

где сумма первых двух слагаемых должна быть равна нулю.

Из их равенства находим

$$\Phi(s) = \frac{K_o(s)V(s)}{V(s)\Psi(s)K_o(s)} \left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^+ . \quad (6.9)$$

Комментарий к формулам (6.8) и (6.9).

1) Сомножители $\Psi(s)$ и $\Psi(-s)$ определяют путем преобразования суммы $qK_o(s)K_o(-s) + r$ в произведение $\Psi(s)\Psi(-s)$:

$$qK_o(s)K_o(-s) + r = \Psi(s)\Psi(-s). \quad (6.10)$$

Пример 6.1. Пусть $K_o(s) = k_o / s$, тогда

$$q \frac{k_o^2}{-s^2} + r = \frac{\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs}}{s} - \frac{\sqrt{qk_o} - \sqrt{rs}}{-s}.$$

Следовательно

$$\Psi(s) = \frac{\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs}}{s}; \quad \Psi(-s) = \frac{\sqrt{qk_o} - \sqrt{rs}}{-s}. \quad (6.11)$$

2) Индекс «+» при квадратных скобках означает, что это слагаемое функции заключенной в квадратные скобки имеет только левые полюса. Соответственно индекс «-» указывает на правое расположение полюсов второго слагаемого функции. Оба слагаемые находят путем расщепления функции $qV(s)K_o(-s)/\Psi(-s)$:

$$q \frac{V(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} = \left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^+ + \left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^-. \quad (6.12)$$

Пример 6.2. Пусть $V(s) = A/s$; $K_o(-s) = k_o/(-s)$; $\Psi(-s) = \frac{\sqrt{qk_o} - \sqrt{rs}}{-s}$. В

этом случае получаем $\frac{qAk_o}{s(-s)} \cdot \frac{(-s)}{\sqrt{qk_o} - \sqrt{rs}} = \frac{\sqrt{q}A}{s} + \frac{\sqrt{r}\sqrt{q}A}{\sqrt{qk_o} - \sqrt{rs}}$.

Следовательно

$$\left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^+ = \frac{\sqrt{q}A}{s}; \quad \left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^- = \frac{\sqrt{r}\sqrt{q}A}{\sqrt{qk_o} - \sqrt{rs}}. \quad (6.13)$$

7. МЕТОДИКА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РЕГУЛЯТОРА

Расчет оптимального регулятора по квадратичному критерию качества при отсутствии ограничений осуществляют в следующей последовательности:

- по формуле (6.10) определяют выражения $\psi(s)$ и $\psi(-s)$;
- пользуясь формулой (6.12), находят $\left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^+$;
- используя формулу (6.9), получают передаточную функцию замкнутой системы с оптимальным регулятором $\Phi(s)$;
- в соответствии с выражением (6.3) находят искомую передаточную функцию оптимального регулятора $K_p(s)$:

$$K_p(s) = \Phi(s)/K_o(s)(1 - \Phi(s)). \quad (7.1)$$

Пример 7.1. На вход системы управления, структурная схема которой показана на рис. 6.1, поступает задающее воздействие $u(t) = A \cdot 1(t)$. Передаточная функция объекта задана: $K_o(s) = K_o/s$. Требуется найти передаточную функцию регулятора $K_p(s)$, при которой критерий качества (6.1) имеет наименьшее значение, а система оказывается физически реализуемой.

Решение. Используя для заданных условий выражения (6.11) и (6.13) по формуле (6.9), находим

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{K_o(s)}{V(s)\Psi(s)} = \left[\frac{qV(s)K_o(-s)}{\Psi(-s)} \right]^+ = \frac{k_o s \cdot s}{s \cdot A(\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs})} \cdot \frac{\sqrt{qA}}{s} = \\ &= \frac{\sqrt{qk_o}}{\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Искомая передаточная функция регулятора

$$K_p(s) = \frac{\Phi(s)}{K_o(s)(1 - \Phi(s))} = \frac{\sqrt{qk_o}}{\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs}} \cdot \frac{s}{k_o} \cdot \frac{\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs}}{\sqrt{rs}} = \sqrt{\frac{q}{r}}. \quad (7.3)$$

Таким образом, для управления объектом, динамические свойства которого аппроксимированы передаточной функцией интегрирующего звена, необходимо по условиям задачи использовать в системе регулятор пропорционального действия с коэффициентом пропорциональности, равным корню квадратному из соотношения весовых коэффициентов, входящих в квадратичный критерий качества.

При $K_p = \sqrt{q/r}$ квадратичный критерий качества (6.6) принимает минимальное значение J_{\min}

$$J_{\min} = \frac{A^2}{k_o}. \quad (7.4)$$

8. ВЫБОР ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Весовые коэффициенты в квадратичном критерии качества полагались «по умолчанию» заданными величинами. На самом деле выбор их значений представляет собой достаточно сложную задачу, успешное решение которой зависит от динамики объекта управления, технических требований к системе и во многом определяется опытом и изобретательностью специалиста, требует применения вычислительных средств.

Вообще весовые коэффициенты должны зависеть от времени, так как в начальные моменты времени вес мгновенных значений ошибки $e(t)$ значительно превышает вес значений сигнала управления $u(t)$. По мере нарастания переходного процесса мгновенные значения $e(t)$ уменьшаются, их вес падает, а вес требуемых значений сигнала управления $u(t)$ возрастает.

Формула (7.4) показывает, что для поддержания минимального значения квадратичного критерия качества J_{\min} весовые коэффициенты q и r должны быть связаны обратно-пропорциональной зависимостью.

На практике при решении многих задач выбор весовых коэффициентов рассматривают как начальную оценку их значений. При этом задачу упрощают, полагая весовые коэффициенты величинами постоянными на всем интервале времени управления, а ее решение находят, используя предъявляемые требования к системе, например ограничения на время переходного процесса, коэффициент демпфирования, полосу пропускания и т. п. В тех случаях, когда параметры оптимального регулятора зависят только от отношения весовых коэффициентов, находят значение этого отношения.

Пример 8.1. Требуется определить коэффициент $K_p = \sqrt{q/r}$ оптимального регулятора пропорционального действия, если передаточная функция замкнутой системы задана выражением (7.3), а время переходного процесса в системе t_p ограничено допустимым значением t_{\max} , т. е. $t_p \leq t_{\max}$.

Решение. Передаточную функцию (7.3) приведем к стандартному виду

$$\Phi(s) = \frac{1}{1 + Ts}, \quad T = \frac{1}{k_o} \sqrt{\frac{r}{q}}.$$

Известно, что время переходного процесса в системе, описываемой апериодическим звеном, определяется соотношением

$$t_p = 3T \text{ или } t_p = \frac{3}{k_o} \sqrt{\frac{r}{q}}.$$

Поэтому, исходя из требования $t_p \leq t_{\max}$, находим

$$k_p = \sqrt{\frac{r}{q}} \geq \frac{3}{k_o t_{\max}}.$$

9. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО УСЛОВИЯМ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Существует большой класс систем автоматического управления, которые проектируют таким образом, чтобы переходной процесс в них был апериодическим и как можно быстрее достигал требуемого значения. Такие системы называют системами с минимальным временем переходного процесса или системами, оптимальными по быстродействию.

Синтез систем можно осуществлять методами вариационного исчисления. Однако при решении практических задач оптимизации по быстродействию приходится учитывать ограничения на изменение управляемой переменной и на ее производные: скорость, ускорение и т.д. Поэтому в теории автоматического управления были разработаны методы синтеза, известные как принцип максимума Понтрягина и динамическое программирование. Что касается задач синтеза, рассматриваемых в этом подразделе, то они ориентированы на синтез регуляторов методом фазовой плоскости.

Постановка задачи. Задана структурная схема системы, конфигурация которой показана на рис. 9.1. В начальный момент времени t_0 система находится в состоянии покоя ($y = \dot{y} = 0$), в этот же момент на вход системы подается единичное ступенчатое воздействие $v(t) = 1(t)$. Требуется определить структурную схему регулятора максимального быстродействия или алгоритм его работы, при котором будет достигнуто конечное состояние ($y(t) = 1$; $\dot{y}(t) = 0$) за минимальное время, без ошибки и без перерегулирования, в продолжении, что управляющее воздействие $u(t)$ ограничено максимально допустимым значением U_{\max} , т.е. $|u(t)| \leq U_{\max}$.

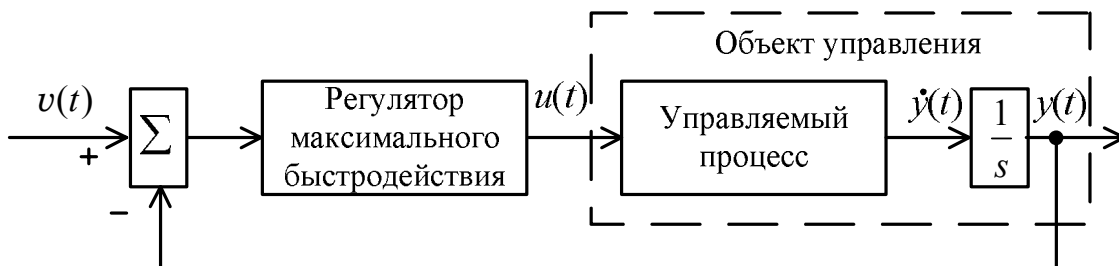


Рис. 9.1

На рис. 9.1 под объектом управления понимается часть системы, например, регулируемый электропривод и звено машины.

Математические модели объекта управления. Для успешного синтеза оптимального по быстродействию регулятора необходимо, прежде всего, решить вопрос о понижении порядка объекта управления и о переходе от физических переменных в системе управления к относительным единицам.

При понижении порядка объекта управления в его передаточной функции пренебрегают i -ми постоянными времени T_i , численные значения которых не превышают величину $(0,1 \dots 0,15)T_m$, где T_m наибольшая постоянная времени объекта управления (в устойчивой системе эти постоянные времени не оказывают заметного влияния на характер переходного процесса).

Обычно передаточную функцию $K(s)$ объекта управления удается свести к одному из следующих видов:

$$K(s) = \frac{K}{s^2}; K(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s^2}; K(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}.$$

Переход к относительным единицам проиллюстрируем на следующем примере. Пусть задана структурная схема, вид которой показан на рис. 9.2, где $u(t) \leq U_{\max}$.

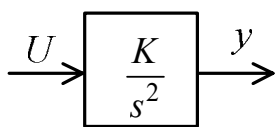


Рис. 9.2

Согласно структурной схеме запишем

$$y = \frac{K}{s^2} u, |u(t)| \leq U_{\max} \quad (9.1)$$

Разделим левую и правую части уравнения (9.1) на K и U_{\max} . Получим $\frac{y}{KU_{\max}} = \frac{1}{s^2} \frac{U}{U_{\max}}$. Обозначим $\frac{y}{KU_{\max}} = x_1$, $\frac{U}{U_{\max}} = u$, $|u| < 1$. Будем иметь

$$x_1 = \frac{1}{s^2} u, |u| \leq 1. \quad (9.2)$$

На основании (9.2) записываем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, |u| \leq 1, \end{aligned} \quad (9.3)$$

которую используют при синтезе регулятора.

Понятие об оптимальных процессах в системе. Предположим, что динамические свойства системы максимального быстродействия описываются уравнениями (9.3). Интегрируя их, находим

$$x_2(t) = x_2(0) + u(t), \quad (9.4)$$

$$x_1(t) = x_1(0) + x_2(0)t + \frac{1}{2}ut^2, \quad |u| \leq 1. \quad (9.5)$$

Графики изменения $x_1(t)$, скорости $x_2(t) = \frac{dx_1}{dt}$ и ускорения $u(t) = \frac{dx_2}{dt}$ при $|u(t)| \leq 1$ показаны на рис. 9.3. Они построены по следующей методике.

Сначала по формуле (9.4) построены парабола I при $u(t) = +1$ и парабола II при $u(t) = -1$. Затем парабола II была смещена параллельно самой себе вверх и вправо в такое положение, при котором она одновременно касается первой параболы в точке B и линии заданного значения выходной величины x_1^* в точке C. Участок траектории OBC, расположенный на параболах I и II, представляет собой оптимальный по быстродействию переходной процесс.

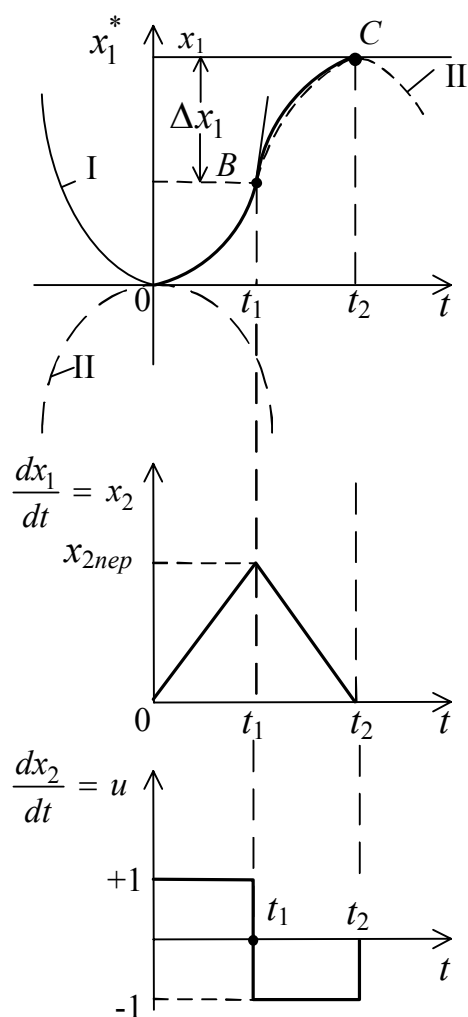


Рис. 9.3

Абсцисса t_1 точки B соответствует переключению управляющего воздействия $u(t)$ со значения $u = +1$, при котором осуществлялся разгон системы, на значение $u = -1$ для торможения.

Абсцисса t_2 точки C соответствует в идеале моменту окончания переходного процесса.

График изменения скорости $dx_1/dt = x_2$ построен по формуле (9.3) при $u = +1$ на интервале разгона и при $u = -1$ на интервале торможения. Скорость x_{2nep} , при которой происходит переключение системы на торможение, называют скоростью переключения.

Треугольный закон изменения скорости характерен для тех переходных процессов, которые вызваны заданным значением x_1^* , выражающим «малые» уровни задающего воздействия $v(t)$ на входе системы относительно ее установившегося состояния.

Если x_1^* выражает большие уровни воздействия $v(t)$, то скорость $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ достигает значения x_{2max} , которая соответствует допустимой скорости $dy/dt = \dot{Y}_{max}$ в физической системе, и затем остается постоянной. Только в

конце движения она снижается. В подобных случаях имеем трапецеидальный профиль изменения скорости. Методика построения графиков $x_1(t)$, $x_2(t) = dx/dt$ и $u(t) = dx_2/dt$, иллюстрируется рис. 9.4.

Построение начинают с определения момента времени t'_1 как абсциссы точки пересечения уравнения прямой (9.3) при $u = +1$ с линией заданного значения $x_{2\max}$. Затем строят параболу I и находят точку A, равную значению x_1 в момент времени t'_1 . Начиная с этого момента времени переходный процесс изменяется по прямой AB, которая описывается уравнением $x_1 = x_{2\max}t$ и т.д. Отрезок OABC представляет собой оптимальную переходную характеристику системы при наложенных ограничениях на скорость и ускорение движения системы.

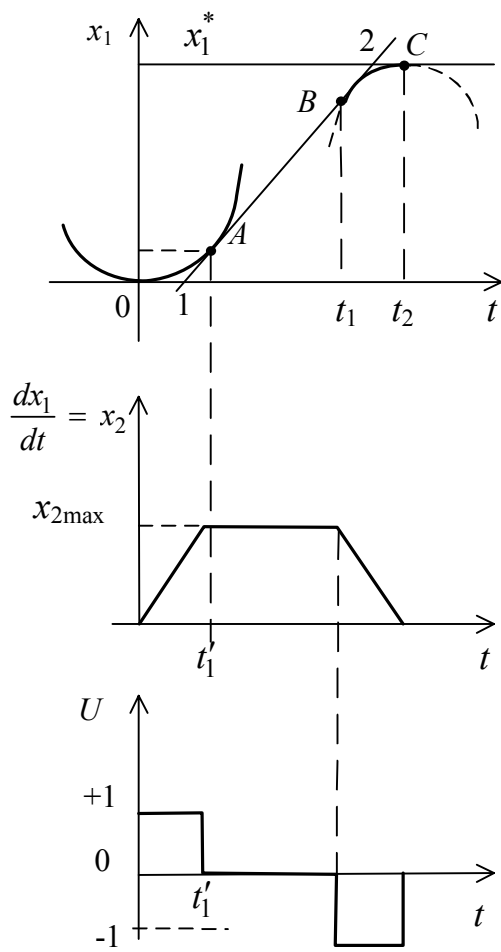


Рис. 9.4

Рассматривая оптимальные переходные процессы необходимо сделать следующие важные выводы.

Во-первых, регулятор максимального быстродействия должен обеспечивать релейный закон управления изменением знака ускорения управляемой переменной.

Во-вторых, в оптимальной по быстродействию системе второго порядка можно выделить два характерных интервала изменения переходной характеристики. На первом интервале при «малых» воздействиях на входе системы она изменяется с постоянным ускорением, а при «больших» воздействиях – сначала с постоянным ускорением, а затем (начиная с момента времени t'_1) – с постоянной скоростью. На втором интервале времени ($t_1 \leq t \leq t_2$) переходная характеристика изменяется всегда с постоянным замедлением. Независимо от величины задающего воздействия необходимо в системе второго порядка изменять знак управления один раз.

В оптимальном переходном процессе системы третьего порядка можно выделить три интервала, на которых производятся два изменения знака управления.

В общем случае системы n -го порядка сформулирована теорема об оптимальном переходном процессе, названная теоремой об n интервалах, на которых производится $(n-1)$ переключений знака управления $u(t)$.

Фазовый портрет, оптимальной по быстродействию системы.

Наглядное представление о совокупности оптимальных переходных процессах при различных задающих воздействиях дает фазовый портрет. Кроме того, фазовый портрет облегчает синтез регуляторов максимального быстродействия.

Рассмотрим фазовый портрет системы, структурная схема которой показана на рис. 9.5.

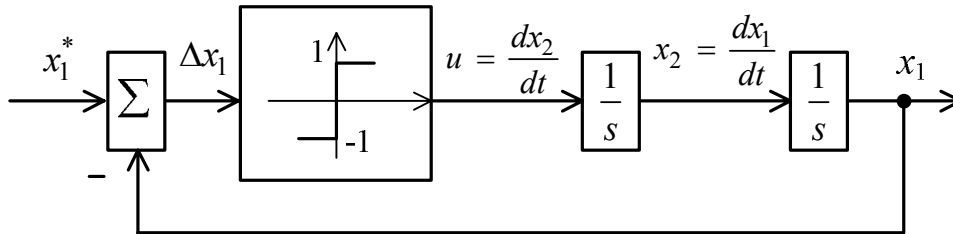


Рис. 9.5

Пусть на фазовой плоскости (x_1, x_2) начальное состояние системы характеризуется точкой с фазовыми координатами $(x_1)_{t=0} = x_1(0)$; $(x_2)_{t=0} = 0$. Требуется перевести систему в конечное состояние – в точку с фазовыми координатами $(x_1)_{t=t_2} = x_1^*$; $(x_2)_{t=t_2} = 0$.

Согласно структурной схеме имеем уравнения:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = u; \quad u = \pm 1.$$

Разделив первое из них на второе, получим

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{u}; \quad u = \pm 1.$$

После интегрирования имеем

$$x_1 = \frac{1}{2u} x_2^2 + C, \quad (9.6)$$

где C – постоянная интегрирования: $C = x_1(0)$, при $t = 0$ и $C = x_1^*$ при $t = t_2$.

Из уравнения (9.6) находим функцию

$$x_2 = \pm \sqrt{2u(x_1 - C)}, \quad (9.7)$$

которая существует при следующих условиях: если $(x_1 - C) \geq 0$, то $u = +1$; если $(x_1 - C) \leq 0$, то $u = -1$.

Графики этой функции – параболы, симметричные оси x_1 с вершинами в точках $C = x_1(0)$ и $C = x_1^*$, показаны на рис. 9.6.

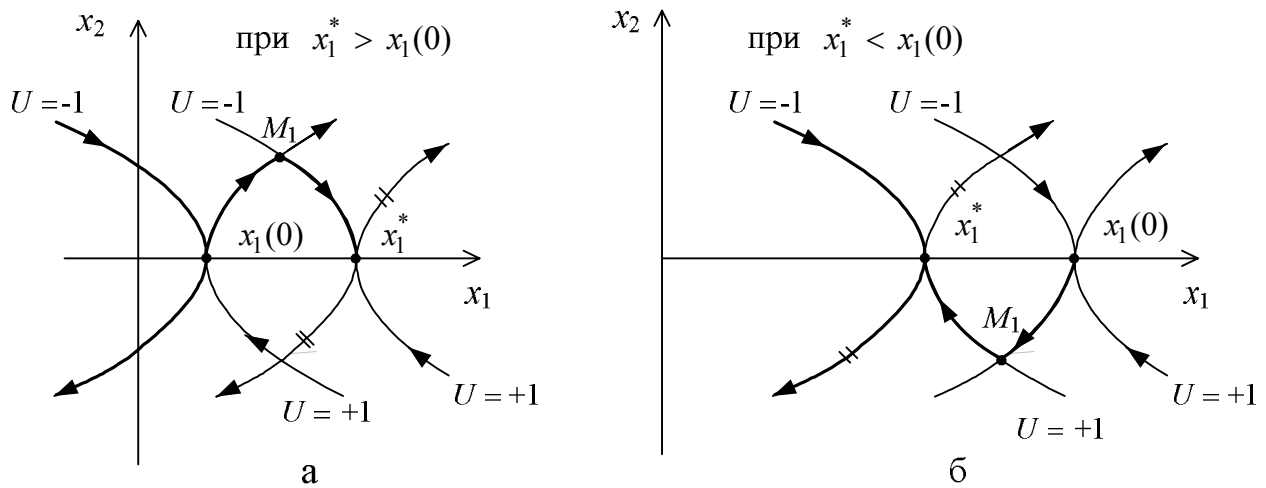


Рис. 9.6

Видно, что оптимальный процесс в общем случае изображается на фазовой плоскости траекторией, состоящей из двух отрезков $x_1(0)M_1$ и $M_1x_1^*$. Причем на первом интервале управляющее воздействие $u = +1$, если $x_1(0) < x_1^*$ и $u = -1$, если $x_1(0) > x_1^*$. На втором отрезке управляющее воздействие $u = -1$, если $x_1(0) < x_1^*$ и $u = +1$, если $x_1(0) > x_1^*$. В точке M_1 осуществляется переключение знака управляющего воздействия u .

Кроме того из рисунка следует, что точка x_1^* может быть конечной, если отсечь ветви парабол уводящие фазовую точку (x_1, x_2) из конечной точки x_1^* . На рис. 9.6 эти ветви помечены двумя штрихами.

Теперь фазовые траектории, изображенные на рис. 9.6, а и б можно объединить путем переноса начала координат в конечную точку x_1^* , как показано на рис. 9.7, где $\Delta x_1 = x_1^* - x_1$. Начальное значение новой переменной $\Delta x_1(0) = x_1^* - x_1(0)$. Знак минус при $\Delta x_1(0)$ указывает на то, что $x_1(0)$ расположено относительно x_1^* в направлении обратном направлению отсчета переменной Δx_1 .

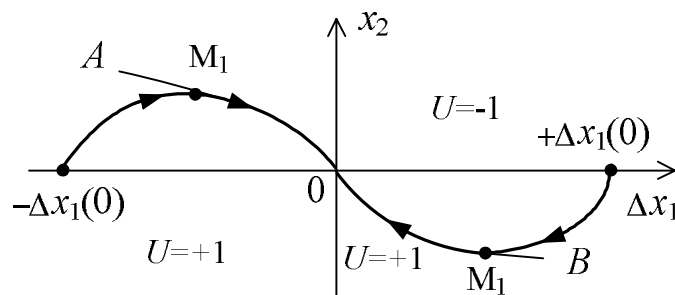


Рис. 9.7

Замена переменной x_1 на переменную Δx_1 значительно упрощает анализ и синтез оптимальной по быстродействию системы управления.

Прежде всего отметим, что линия AOB делит фазовую плоскость $(\Delta x_1, x_2)$ на две области. В области, расположенной ниже линии AOB , для любых значений $(\Delta x_1, x_2)$ управляющее воздействие $u = +1$. В области, расположенной выше этой линии, всегда $u = -1$. При любых заданных начальных условиях $(\Delta x_1(0), x_2(0))$, за исключением условий, которые принадлежат точкам линии AOB , изображающая точка $(\Delta x_1, x_2)$ стремится к линии AOB , на которой происходит переключение знака управляющего воздействия u . Эту линию называют линией переключения. После переключения знака управления изображающая точка движется к началу координат по линии переключения, которую можно описать в виде общего уравнения

$$\Delta x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \text{sign } x_2 = 0. \quad (9.8)$$

Алгоритм (закон) максимального быстродействия. Оптимальное управление, принимающее значение $u = +1$ или $u = -1$, вырабатывается в зависимости от знака выражения $\left(\Delta x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \text{sign } x_2 \right)$. Значение $u = +1$ вырабатывается тогда и только тогда, когда выполняется условие $\Delta x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \text{sign } x_2 < 0$, а значение $u = -1$ – при соблюдении условия $\Delta x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \text{sign } x_2 > 0$.

Алгоритм можно изобразить в виде схемы, показанной на рис. 9.8.

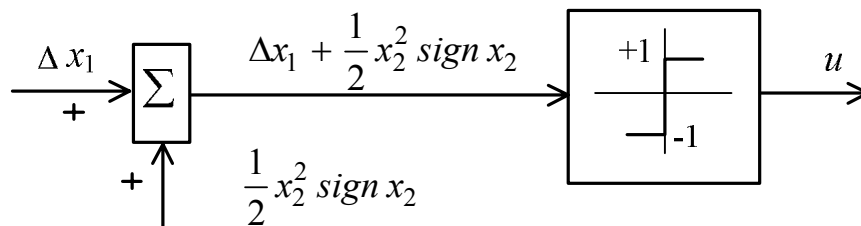


Рис. 9.8

На рис. 9.9 показана структурная схема оптимальной системы с регулятором, реализующим алгоритм максимального быстродействия.

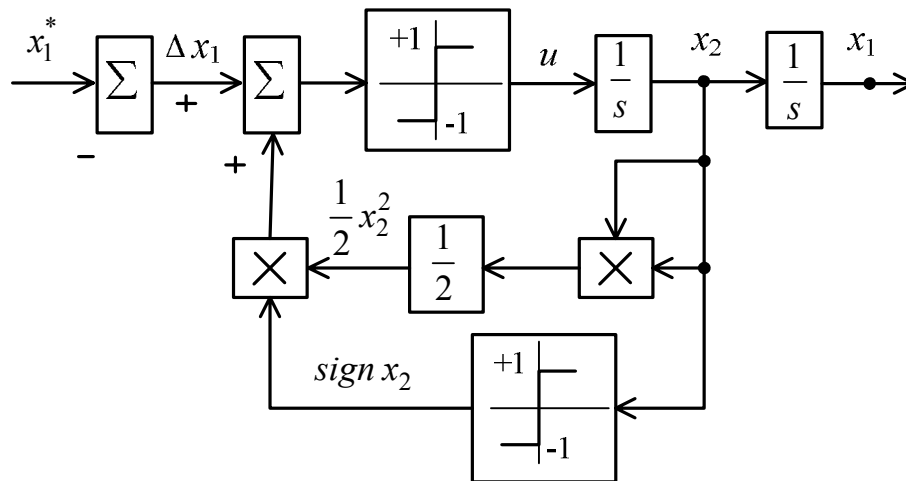


Рис. 9.9

При замене $x_2^2 \text{sign} x_2$ на $|x_2| x_2 : x_2^2 \text{sign} x_2 = |x_2| x_2$ структурная схема оптимальной системы принимает вид, изображенный на рис. 9.10.

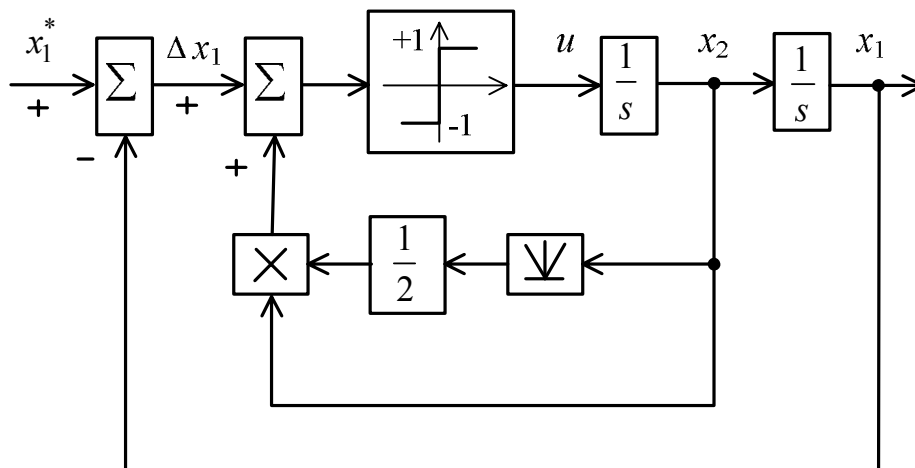


Рис. 9.10

Динамика оптимальной по быстрдействию системы. Сформулированный алгоритм (закон) управления обеспечивает системе оптимальное быстрдействие только в том случае, когда математические операции умножения и переключения осуществляются мгновенно. На самом деле их реализация даже с помощью современных вычислительных средств требует определенных затрат времени. Эти сколь угодно малые задержки могут приводить к серьезному нарушению оптимального поведения системы вблизи конечного состояния (в окрестности начала координат фазовой плоскости). Действительно, пусть в начале оптимального процесса изображающая точка находится в положении $-\Delta x_1(0)$, а $u = +1$. Тогда траектория изображающей точки на первом участке совпадает с оптимальной.

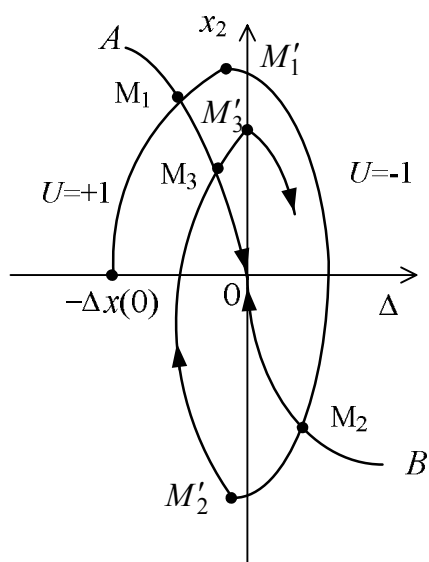


Рис. 9.11

Однако из-за задержки вычислений переключение управляющего воздействия u произойдет не на линии переключения в точке M_1 , а позже – в точке M'_1 (рис. 9.11). На участке $M'_1 M'_2$ изображающая точка будет двигаться при $u=-1$. При этом переключение осуществляется в точке M'_2 , а не на линии переключения в точке M_2 и т. д. В окрестностях начала координат в лучшем случае возникает слабозатухающий колебательный процесс.

Если учесть, что в окрестности начала координат начинает сказываться влияние малых постоянных времени, которыми пренебрегают при выборе математической модели объекта управления, то в оптимальной по быстродействию системе следует ожидать возникновения сложного вида незатухающих колебаний. Эти колебания в свою очередь снижают надежность системы и, если не принять меры по их предотвращению, могут с течением времени стать основной причиной аварии в объекте управления.

Существует несколько способов предотвращения колебаний в оптимальной системе. Основной из них основан на использовании в конце оптимального процесса, начиная с фазовой точки $(\Delta x_{1\max}, x_{2\min})$, траектории, удовлетворяющей требованиям линейного обычно пропорционально–интегрально–дифференциального закона управления. При расчетах задаются как правило значением $x_{2\min} = 0,1x_{2\max}$, где $x_{2\max}$ – максимальная допустимая скорость объекта в относительных единицах. Значение $\Delta x_{1\min}$ находят в процессе анализа линейной скорректированной системы. Значение $\Delta x_{1\min}$, например, можно принять равным величине $(3 \dots 4)\delta$, где δ – допустимая погрешность остановки.

Затем (см. рис. 9.12) ветви линии переключения AOB смещают так, чтобы ветвь AO проходила через фазовую точку $(-\Delta x_{1\min}, -x_{2\min})$, а ветвь OB – через фазовую точку $(\Delta x_{1\min}, -x_{2\min})$. Знак минус при $x_{2\min}$ означает, что эта величина отсчитывается в направлении, противоположном направлению отсчета Δx_1 .

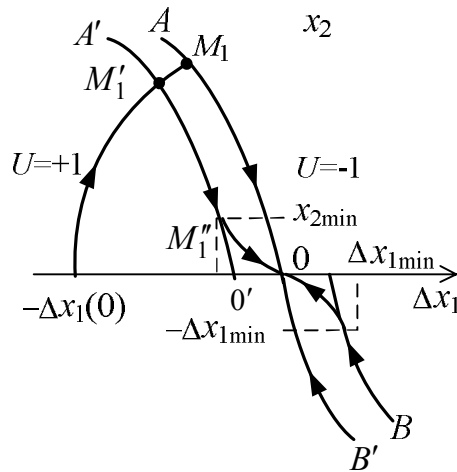


Рис. 9.12

Если линию переключения AOB записать в виде зависимости переменной x_2 от переменной состояния x_1 :

$$x_2 = -\sqrt{2|\Delta x_1|} \operatorname{sign} \Delta x_1, \quad (9.9)$$

то смещению ветвей линии переключения соответствует новая функция

$$x_2 = -\sqrt{2|\Delta x_1| + b} \operatorname{sign} \Delta x_1, \quad (9.10)$$

где параметр « b » находят из условия

$$x_{2 \min} = -\sqrt{2|\Delta x_{1 \min}| + b} \operatorname{sign} \Delta x_1. \quad (9.11)$$

Процесс в системе протекает следующим образом. Предположим, что в начале процесса изображающая точка находится в положении $-\Delta x_1(0)$, а управляющее воздействие $u = +1$.

Из рис. 9.12 видно, что фазовая траектория изображающей точки на первом отрезке совпадает с оптимальной траекторией. Однако переключение управляющего воздействия произойдет не на оптимальной линии переключения, а раньше – в точке M_1' , принадлежащей смещенной линии $A'O'$. После переключения изображающая точка будет двигаться на участке $M_1'M_1''$ при $u = -1$. В точке M_1'' происходит переключение на управление по линейному закону управления.

Движение изображающей точки можно приблизить к оптимальной траектории, если линию переключения $A'O'$ переместить вверх параллельно оси ординат, как показано на рис. 9.13 – кривая $A''O''$.

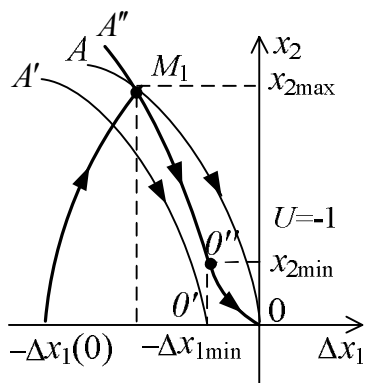


Рис. 9.13

Участок M_1O'' новой линии переключения описывается функцией

$$x_2 = -k \left[a + \sqrt{2|\Delta x_1| + b} \right] \text{sign} \Delta x_1,$$

где $a = x_{2\min}$, $b = 2x_{1\min} \text{sign} \Delta x_1$, а коэффициент k выбирают из условия

$$x_{2\max} = -k \left[a + \sqrt{2|\Delta x_1| + b} \right] \text{sign} \Delta x_1.$$

Алгоритм (закон) квазиоптимального быстрогодействия. На рис. 9.14 изображен фазовый портрет квазиоптимальной системы при различных начальных условиях.

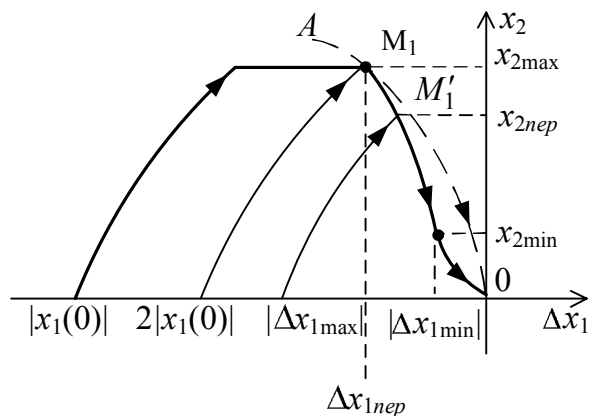


Рис. 9.14

Можно выделить две области начальных условий: область «больших» значений $|\Delta x_1(0)| \geq 2|\Delta x_{1\max}|$ и область «малых» значений $|\Delta x_1(0)| < 2|\Delta x_{1\max}|$.

В первом случае в системе реализуется трапецеидальный закон управления, переключение на торможение происходит всегда в тот момент, когда Δx_1 достигает значения $\Delta x_{1\max}$ — абсциссы точки M_1 .

Во втором случае реализуется треугольный закон управления скоростью. Момент переключения каждый раз вычисляется по формуле

$$|\Delta x_{1\text{nep}}| = \frac{1}{2} [\Delta x_1(0) + \Delta x_{1\min}] \text{sign} \Delta x_1. \quad (9.15)$$

и запоминается как константа для торможения.

Следовательно, алгоритм квазиоптимального быстрогодействия можно описать следующим образом.

После поступления задающего воздействия x_1^* вычисляется отклонение $|\Delta x_1(0)| = x_1^* - \Delta x_1(0)$ и определяется момент начала торможения. Если

$|\Delta x_1(0)| \geq 2|\Delta x_{1\max}|$, то за момент переключения на торможение принимается постоянная $|\Delta x_{1\max}|$. Если $|\Delta x_1(0)| < 2\Delta x_{1\max}$, то момент переключения вычисляется по формуле (9.15) и значение $|\Delta x_{1\text{неп}}|$ фиксируется в памяти.

Одновременно формируется управляющее воздействие $u = \text{sign}\Delta x_1$, подключается заданное значение $x_{2\max}$ и организуется непрерывный контроль изменения $|\Delta x_1|$.

При достижении переменной $|\Delta x_1|$ значения $|\Delta x_{1\max}|$ или $|\Delta x_{1\text{неп}}|$ процесс переключается на управление торможением, формируя x_2 в соответствии с вычислениями функции $k \left[a + \sqrt{2|\Delta x| + b} \right]$. Одновременно продолжается непрерывный контроль изменения $|\Delta x_1|$, но теперь с ориентацией на величину $|\Delta x_{1\min}|$. При $|\Delta x| = |\Delta x_{1\min}|$ управление торможением осуществляется по пропорционально-интегральному (ПИ) или пропорционально-интегрально-дифференциальному закону (ПИД).

Схема алгоритма работы регулятора квазикасимального быстродействия показана на рис. 9.15.

На этом рисунке верхний индекс * – звездочка при x_2 поставлен с целью оттенить квазиоптимальное значение переменной x_2 , которое представляет собой желаемое воздействие на контур скорости, как показано на рис. 9.16.

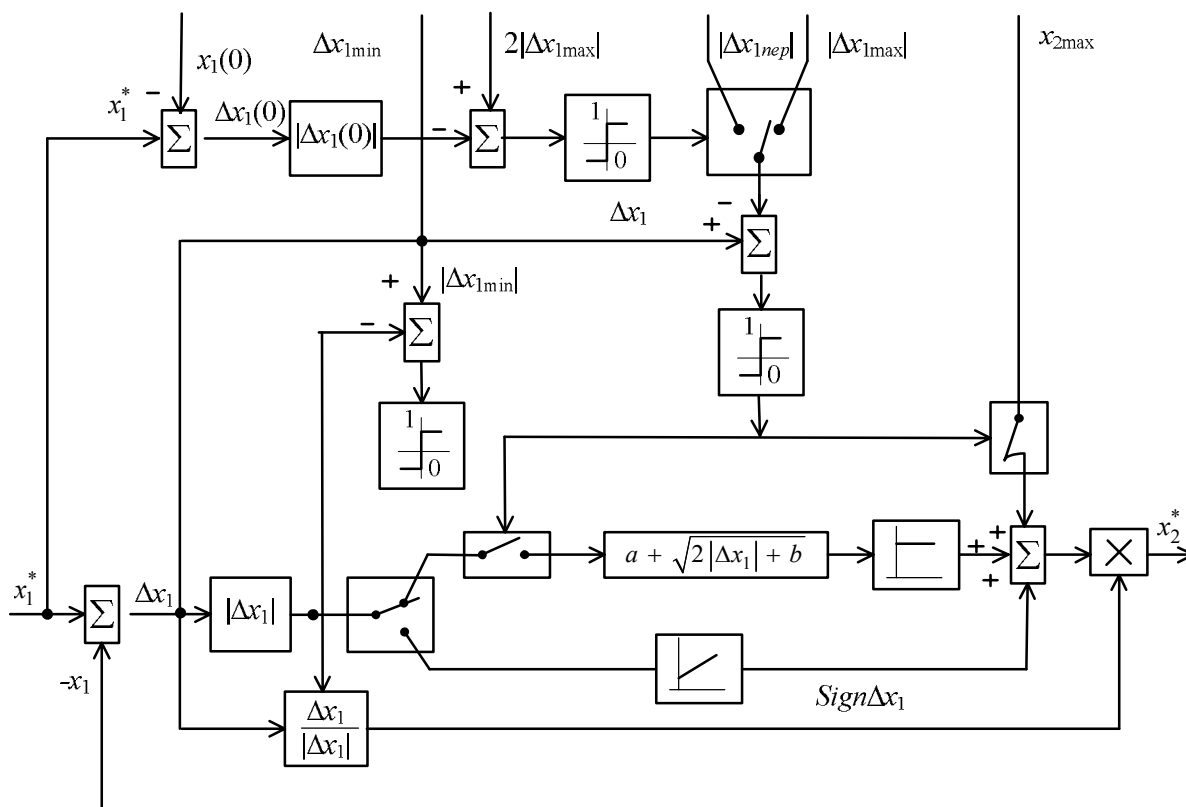


Рис. 9.15

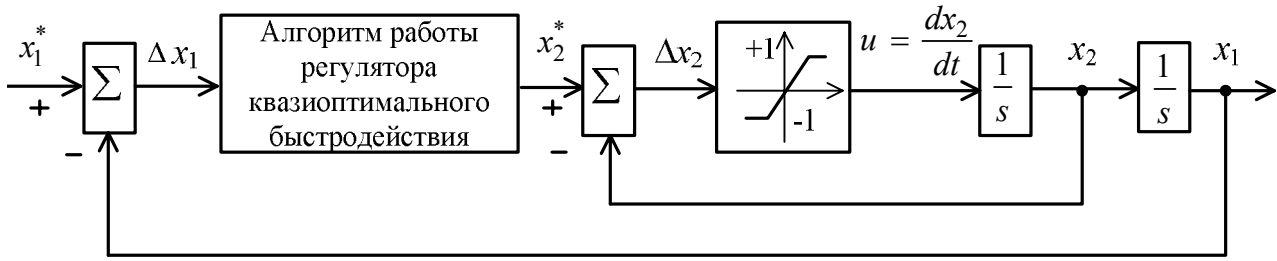


Рис. 9.16

Контур скорости содержит звено с характеристикой насыщения и играет особую роль. Звено, ограничивая воздействие u на уровне $+1$ или -1 , тем самым поддерживает неизменным ускорение или замедление dx_2/dt движения объекта.

Система работает следующим образом. В начальный момент времени $x_2(0) = 0$ и сигнал в цепи обратной связи контура отсутствует. При подаче на вход контура воздействия $x_2^* = x_{2\max}$ объект разгоняется равноускоренно. По мере нарастания скорости x_2 увеличивается сигнал в цепи обратной связи. Это приводит к постоянному уменьшению $\Delta x_2 = x_2^* - x_2$. При сравнительно малом значении Δx_2 звено регулятора скорости выходит из насыщения, что приводит к быстрому снижению уровня управляющего воздействия u . В момент, когда x_2 сравняется с $x_2^* = x_{2\max}$, $u = 0$ и движение осуществляется с постоянной скоростью $x_{2\max}$.

По мере приближения переменной состояния x_1 к желаемому значению x_1^* разность $\Delta x_1 = x_1^* - x_1$ уменьшается и в момент, когда $|\Delta x_1|$ снижается до уровня $|x_{1\max}|$, алгоритм переключает работу регулятора квазиоптимального быстродействия на управление торможением. Начиная с этого момента, на входе контура скорости формируется воздействие $x_2^* = \left[a + \sqrt{2|\Delta x_1| + b} \right] k$, причем теперь x_2^* оказывается меньше x_2 . Следовательно, $\Delta x_2 = x_2^* - x_2$ становится отрицательным, а регулятор скорости вновь оказывается в насыщении, формируя управляющее воздействие $u = -1$.

В непосредственной близости переменной состояния x_1 к x_1^* , когда $|\Delta x_1| = |x_1^* - x_1|$ становится равной $|x_{1\min}|$, алгоритм переключает работу регулятора на торможение по линейному закону. В этот момент звено регулятора скорости выходит из насыщения. В конце торможения $u = 0$, $x_2 = 0$, а $x_1 = x_1^*$.

10. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ

При синтезе оптимальных параметров системы управления, аналитическом конструировании регуляторов, алгоритмов оптимального управления предполагается, что структурные схемы системы и объекта управления, внешние воздействия точно известны и что с течением времени они остаются неизменными. Однако на самом деле в реальных условиях эксплуатации технических объектов с автоматическим управлением они в лучшем случае известны с точностью до параметров, которые могут непредсказуемо меняться в широких пределах. В подобных условиях подлинное оптимальное управление можно обеспечить, если в процессе работы системы непрерывно оценивать переменные состояния системы, воздействия на систему и в соответствии с этими оценками перестраивать параметры регуляторов, изменять алгоритмы управления, а возможно и конфигурацию системы. Системы автоматического управления, способные решать эти задачи автоматически в реальном масштабе времени, называют адаптивными системами.

Классификация адаптивных систем. Адаптивные системы классифицируют по различным признакам, чаще всего по основному фактору, который требует применения адаптации, например, непредвиденные (случайные) изменения внешних воздействий, в том числе и воздействий на входе системы; изменение динамических характеристик объекта управления, изменение некоторого показателя качества работы объекта управления или системы. По этому фактору различают следующие виды адаптивных систем:

- а) системы с адаптацией к внешним воздействиям и управляемым переменным;
- б) системы с адаптацией к динамическим характеристикам объекта управления;
- в) экстремальные системы, обеспечивающие поддержание таких заранее неизвестных значений входных величин объекта управления, при которых главный показатель имеет экстремальное значение (например, температура, секундный расход, мощность и т.д.).

Дополнительным признаком классификации считают способ воздействия канала адаптации на систему. По этому признаку различают самонастраивающиеся системы, у которых осуществляется автоматическая настройка регулируемых параметров; самоорганизующиеся – системы с автоматической реконструкцией структурной схемы; самоалгоритмизирующиеся – с автоматическим изменением алгоритма работы.

Системы с адаптацией к внешним воздействиям. Оптимальные системы часто рассчитывают на определенный тип внешних воздействий с постоянными параметрами. Однако во многих случаях характеристики этих воздействий бывают известны с точностью до параметров, которые могут быть произвольными функциями времени. Чтобы в этих условиях реализовать оптимальный процесс, необходимо измерять текущие значения параметров воздей-

ствий и в соответствии с этими измерениями перестраивать либо параметры, либо структуру регулятора.

Структурная схема адаптивной системы, способной решать эту задачу, показана на рис. 10.1.

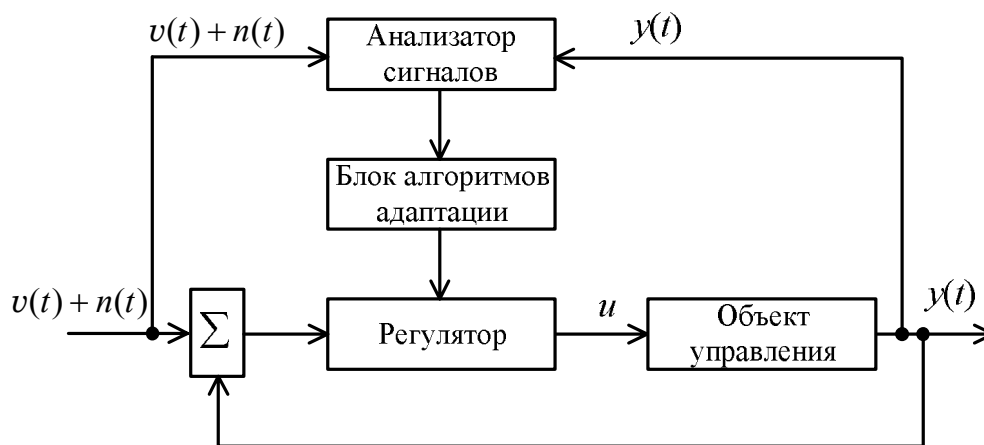


Рис. 10.1

Анализатор оценивает характеристики и параметры воздействий $v(t)$ и $n(t)$ с учетом реакции системы $y(t)$ на их аддитивную смесь $v(t) + n(t)$. В соответствии с результатами оценивания по заданным алгоритмам оптимизации качества рассчитываются и настраиваются параметры регулятора.

При использовании быстродействующей аппаратуры обработки информации и настройки параметров быстродействие контура адаптации определяется в основном длительностью интервала изменения параметров воздействий в анализаторе. Если параметры воздействий меняются достаточно медленно, то с увеличением длительности интервала измерения точность настройки параметров, а, следовательно, точность управления возрастает. Однако при быстрых изменениях характеристик воздействий возникает противоречие между временем, необходимым для точного измерения параметров воздействий, и скоростью их изменения. Это противоречие усугубляется тем, что система управления превращается в систему с переменными параметрами, скорость изменения которых соизмерима со скоростью протекающих в системе переходных процессов. Эти обстоятельства в значительной степени затрудняют практическую реализацию систем с адаптацией к внешним воздействиям.

Системы с адаптацией к динамическим характеристикам объекта управления. Существует обширный и важный вид адаптивных систем, предназначенных для управления в условиях изменения параметров объекта управления, подверженных внешним возмущениям. К этому виду относятся системы с автоматическим контролем частотных характеристик, импульсных переходных функций, системы со спектральным анализатором и сравнением высокочастотных и низкочастотных составляющих, например сигнала ошибки управления, и другие. Однако, наиболее просты в реализации адаптивные системы с эталонными моделями, структурная схема которых показана на рис. 10.2, где

ε – ошибка адаптации, r – вектор перестраиваемых (регулируемых) параметров регулятора.

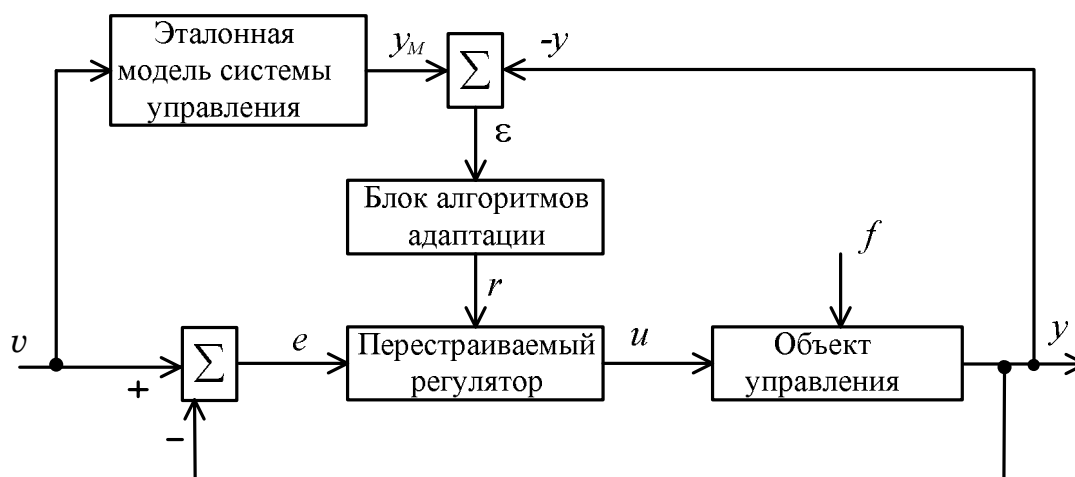


Рис. 10.2

В этой схеме реакция y реальной системы сравнивается с реакцией y_M эталонной модели и сигнал ε используется в блоке алгоритмов (законов) адаптации для оценки значений настраиваемых параметров регулятора, обеспечивающих приближение динамики реальной системы к динамике эталонной модели. Предполагается, что регулятор содержит функциональные элементы, изменяющие реальные параметры с целью их приближения к оценкам.

Эталонная модель системы может быть полной и отражать все особенности структурной схемы реальной системы с постоянными параметрами, полученными на этапе проектирования, так и приближенной. Приближенную модель обычно выбирают в тех случаях, когда динамика реальной системы сколь угодно высокого порядка подобна динамике системы второго или третьего порядка, которую и выбирают в качестве эталонной.

Качество адаптации оценивают по мгновенной ошибке ε . Однако использовать мгновенную ошибку для синтеза алгоритмов адаптации крайне сложно. Поэтому в блоке алгоритмов адаптации формируют критерий качества в виде

зависимости $J = \varepsilon^2(t)$, $J = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$, $J = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) e^{\alpha(t-\tau)} d\tau$ и другие, а алгоритмы

адаптации синтезируют, исходя из условия $J = \min$.

Задачи синтеза алгоритмов адаптации по минимуму критерия адаптации часто называют задачами вторичной оптимизации.

Экстремальные системы. Характерным признаком экстремальной системы является наличие у объекта управления естественной характеристики с явно выраженным экстремумом (рис. 10.3). Причем профиль характеристики, положение и значение экстремума меняются с течением времени под действием различных, часто неизвестных причин. Кроме того, в экстремальной системе экстремальное значение показателя качества $Q(x_i^*)$ обеспечивается не

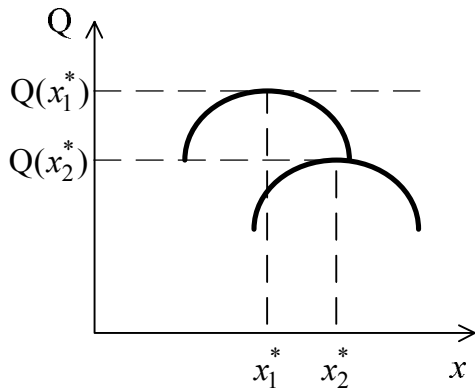


Рис. 10.3

за счет изменения параметров регулятора, а путем изменения входной переменной x объекта управления.

Предложено и реализовано большое количество экстремальных систем, отличающихся по принципу действия, устройству и конструкции.

Рассмотрим два типа систем: системы с определением производной dQ/dx и системы со вспомогательной модуляцией.

Структурная схема системы с определением производной dQ/dx показана на рис. 10.4.

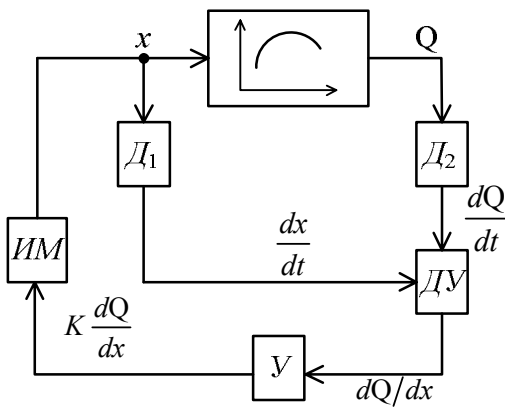


Рис. 10.4

Производная dQ/dx определяется делением сигнала датчика производной D_2 выходной переменной dQ/dt на сигнал датчика D_1 производной входной переменной dx/dt . Сигнал dQ/dx с выхода делительного устройства DU подается на усилитель U и с выхода усилителя поступает на исполнительный механизм ИМ, который изменяет переменную x со скоростью dx/dt , пропорциональной KdQ/dx :

$$\frac{dx}{dt} = K \frac{dQ}{dx}. \quad (10.1)$$

При параболической форме характеристики объекта управления в окрестностях экстремума $Q = -kx^2$ производная, а уравнение (10.1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = -2kKx(t). \quad (10.2)$$

При любых начальных условиях $x(0)$ уравнение (10.2) описывает на фазовой плоскости семейство прямых линий, проходящих через начало координат (рис. 10.5). Видно, что изображающая точка всегда стремится к началу координат, в которой расположен экстремум. Однако описанная система обладает рядом существенных недостатков, которые проявляются при учете инерционности объекта управления и возмуща-

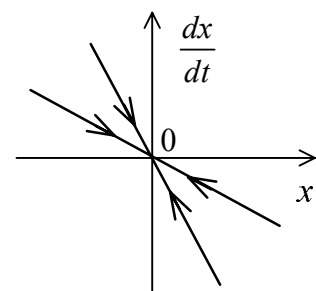


Рис. 10.5

ющих воздействий на объект.

Структурная схема экстремальной системы со вспомогательной модуляцией показана на рис. 10.6.

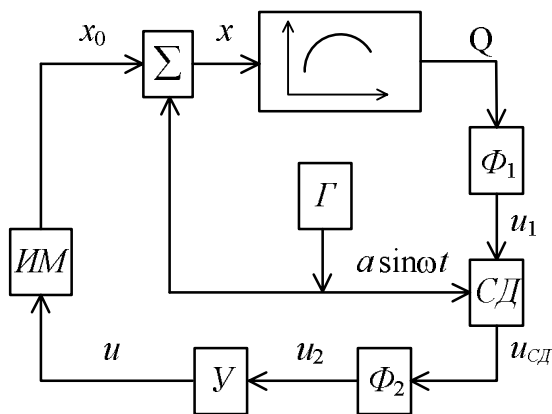


Рис. 10.6

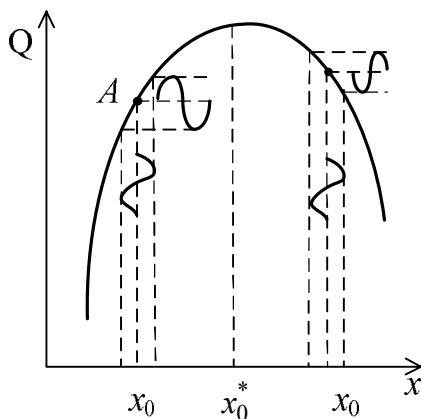


Рис. 10.7

Входная переменная объекта $x(t)$ представляет собой сумму двух составляющих: $x_0 + a \sin \omega t$, где x_0 – рабочее значение входной переменной, a и ω – постоянные гармонического колебания, создаваемого генератором Γ . Переменная составляющая $a \sin \omega t$ на входе объекта вызывает появление переменной на выходе объекта, как показано на рис. 10.7. Причем, если рабочее значение x_0 располагается слева от экстремального значения x_0^* , то фаза выходной переменной совпадает с фазой гармонического сигнала на входе объекта. При $x_0 > x_0^*$ фаза выходной переменной оказывается сдвинутой относительно фазы входного гармонического воздействия на 180° .

Поясним работу системы. При $x_0 < x_0^*$ полосовой фильтр Φ_1 выделяет основную составляющую величины $Q(x + a \sin \omega t)$: $u_1 = U_1 \sin \omega t$, которая подается на вход синхронного детектора СД. На второй его вход поступает опорное напряжение $u = a \sin \omega t$.

Напряжение $u_{сд}$ на выходе синхронного детектора:

$$u_{сд} = aU_1 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} aU_1 (1 - \cos 2\omega t).$$

Низкочастотный фильтр Φ_2 не пропускает на выход гармонику удвоенной частоты. Постоянная составляющая $u_2 = \frac{1}{2} aU_1$ подается на вход усилителя, который обладает релейной характеристикой и управляет исполнительным механизмом (ИМ) с постоянной скоростью изменения x_0 . Так как составляющая u_2 положительная, то исполнительный механизм увеличивает x_0 , что соответствует условию $dQ/dx > 0$ в точке A .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Теория автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. – М. : Высш. шк., 1986. Ч. 2. – 504 с.
2. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / А. А. Ерофеев. – СПб. : Политехника, 2003. – 302 с.
3. Теория автоматического управления: Учеб. пособие для вузов / А. С. Востриков, Г. А. Французова. – М. : Высш. шк., 2004. – 365 с.
4. Теория автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – СПб. : Профессия, 2004. – 752 с.
5. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 601 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.
7. Кузнецов, В. П. Линейные импульсные системы: Математическое описание. Тексты лекций по курсу «Теория автоматического управления» для студентов специальности «Автоматика и управление в технических системах» / В. П. Кузнецов. – Минск : БГУИР, 1996. – 70 с.
8. Антипова, М. А. Теория автоматического управления / Учебно-методическое пособие по курсовому проектированию для студентов специальностей 53 01 03 «Автоматическое управление в технических системах» и 53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» всех форм обучения / М. А. Антипова, А. Т. Доманов. – Минск : БГУИР, 2005. – 54 с.
9. Андриевский, Б. Р. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB–5 и Scilab / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2000.