Министерство образования Республики Беларусь

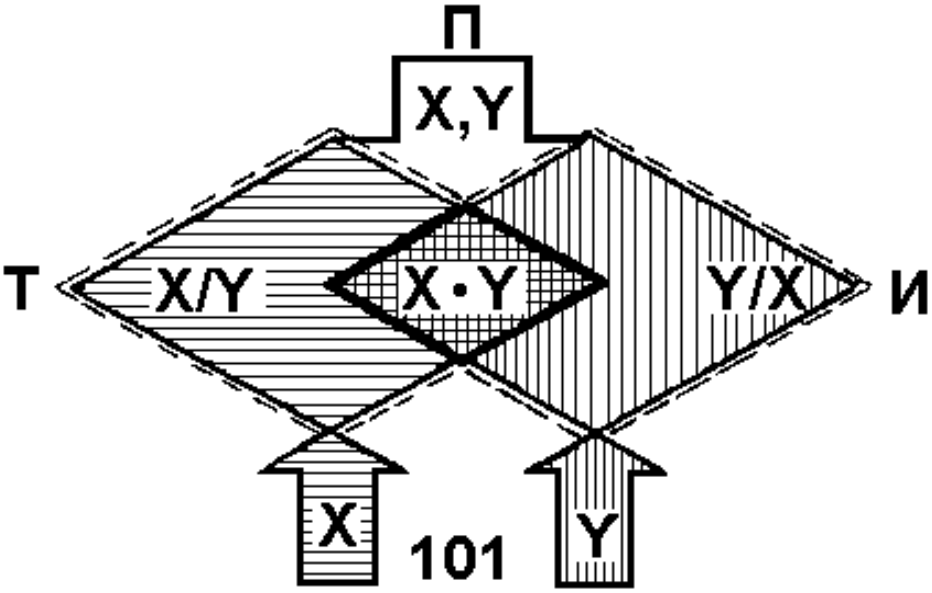
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра систем управления

Н.И.Сорока, Г.А.Кривинченко

# СБОРНИК ЗАДАЧ

по курсу «Теория передачи информации»
для студентов специальностей
53.01.03 «Автоматическое управление в технических системах»
и 53.01.07 «Информационные технологии и управление
в технических системах»




Минск 2004

# 1. Количественная оценка информации

## 1.1. Основные формулы

Ёмкость устройства, состоящего из $n$ ячеек, каждая из которых может находиться в одном из m равновероятных состояний:

$$C = I = \log N = n \log m . \qquad (1.1)$$

Энтропия дискретного источника, имеющего $m$ равновероятных состояний:

$$H = \log m . \qquad (1.2)$$

Количество информации при неполной достоверности результатов опыта:

$$I = \log( P_2 / P_1 ), \qquad (1.3)$$

где $P_2$ и $P_1$ – апостериорная и априорная вероятности соответственно.

Энтропия ансамбля:

$$H = I_{\text{ñð}} = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log P_i , \qquad (1.4)$$

где $P_i$ – вероятность того, что источник находится в $i$-м состоянии.

Средняя неопределённость, приходящаяся на одно состояние ансамбля $Y$ при известном состоянии ансамбля $X$ (условная энтропия):

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i) \log P(y_j / x_i) . \qquad (1.5)$$

Энтропия объединения двух статистически связанных ансамблей $X$ и $Y$:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X); \qquad (1.6)$$

$$H(Y,X) = H(Y) + H(X/Y); \qquad (1.7)$$

$$H(X,Y) = H(Y,X) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log P(x_i, y_j) . \qquad (1.8)$$

Энтропия статистически независимых ансамблей:

$$H(X,Y) = H(Y,X) = H(X) + H(Y) . \qquad (1.9)$$

Точные количества неопределённости в совместном событии $x_i$ и $y_j$:

$$H(x_i, y_j) = -\log P(x_i, y_j).$$

Точные значения неопределённостей в наступления события $y_j$ при известном исходе некоторого события $x_i$:

$$H(y_j / x_i) = -\log(y_j / x_i).$$

Основные соотношения между вероятностями:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j); \tag{1.10}$$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j); \tag{1.11}$$

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j / x_i) = P(y_j)P(x_i / y_j); \tag{1.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = 1; \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1; \quad \sum_{j=1}^{m} P(y_j) = 1. \tag{1.14}$$

Если неопределённость передачи некоторого сигнала $X$ до опыта $H(X)$, а после опыта $H(X/Y)$, то количество информации, имеющееся в $Y$ о $X$:

$$I = (Y, X) = H(X) - H(X / Y); \tag{1.15}$$

$$I(Y, X) = H(Y) - H(Y / X); \tag{1.16}$$

$$I(Y, X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)}. \tag{1.17}$$

**Пример 1.1.** Опыт $X$ имеет два исхода $x_1$, $x_2$ с соответственными вероятностями $P(x_1) = 0{,}3$, $P(x_2) = 0{,}7$. Найти точные и среднее количества информации, несомые исходами $x_1$ и $x_2$. Вычислить дисперсию случайной величины $I = -\log P(x_i)$ и величину отклонения от своего среднего значения $\bar{I}(X)$.

**Решение.** Точные количества информации, несомые исходами $x_1$, $x_2$, равны:

$$I(x_1) = -\log P(x_1) = -\log 0{,}3 = 1{,}737 \quad \text{áèò};$$

$$I(x_2) = -\log P(x_2) = -\log 0{,}7 = 0{,}515 \quad \text{áèò}.$$

Так как числа $I(x_1) = 1{,}737$ и $I(x_2) = 0{,}515$ появляются с соответственными вероятностями 0,7 и 0,3, среднее количество информации по К.Шеннону

$$\bar{I}(X) = H(X) = -\sum_{i=1}^{2} P(x_i) \cdot \log P(x_i) = 0{,}3 \cdot 1{,}737 + 0{,}7 \cdot 0{,}515 = 0{,}88 \text{ áèò.}$$

Дисперсию случайной величины $I = -\log P(x_i)$ вычислим из выражения

$$D(I) = \sum_{i-1}^{2} (I(x_i) - \bar{I}(X))^2 \cdot P(x_i) = (1{,}737 - 0{,}88)^2 \cdot 0{,}3 + (0{,}515 - 0{,}88)^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}86 .$$

Таким образом, случайная величина $I(x_i)$ отклоняется от своего значения $\bar{I}(X)$ в среднеквадратичном на величину $\sigma_i = \sqrt{D(I)} = \sqrt{0{,}86} = 0{,}92$.

**Пример 1.2.** Вероятности совместного появления $P(x_i, y_j)$ объединения двух статистически зависимых ансамблей заданы в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вероятности совместного появления $P(x_i, y_j)$

| $y_j$ \ $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | 0,20 | 0,35 |
| $y_2$ | 0,40 | 0,05 |

Определить точные и среднее количества неопределенности совместного наступления событий $x_i$ и $y_j$, а также точные и средние количества неопределенности в $y_j$ при известном исходе $x_i$.

**Решение.** Точные количества неопределенности в совместном наступлении событий $x_i$ и $y_j$ находим из формулы

$$H(x_i, y_j) = -\log P(x_i, y_j).$$

Подставляя в данное выражение $P(x_i, y_j)$ из табл. 1.1, получим точные количества $H(x_i, y_j)$, которые помещены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Точные количества $H(x_i, y_j)$

| $y_j$ \ $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | 2,32 | 1,51 |
| $y_2$ | 1,32 | 4,32 |

Среднее количество неопределенности в любом совместном наступлении событий $x_i, y_j$ равно

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} P(x_i, y_j) \cdot \log P(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} H(x_i, y_j) \cdot P(x_i, y_j) =$$

$$= 2{,}32 \cdot 0{,}20 + 1{,}32 \cdot 0{,}40 + 1{,}51 \cdot 0{,}35 + 4{,}32 \cdot 0{,}05 =$$

$$= 0{,}46 + 0{,}53 + 0{,}53 + 0{,}22 = 1{,}74 \text{ áèò.}$$

Найдем точные значения неопределенностей в наступлении события $y_j$ при известном исходе некоторого события $x_i$. Для этого необходимо знать условные вероятности $P(y_j / x_i)$, а затем воспользоваться формулой

$$H(y_j / x_i) = -\log P(y_j / x_i).$$

Найдем сначала безусловные вероятности $P(x_i)$ и $P(y_j)$ по формулам полной вероятности

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{2} P(x_i, y_j);\ P(y_j) = \sum_{i=1}^{2} P(x_i, y_j).$$

В результате вычислений получим:

$$P(x_1) = 0{,}6;\ P(x_2) = 0{,}4;$$

$$P(y_1) = 0{,}55;\ P(y_2) = 0{,}45.$$

Наконец, по формуле умножения вероятностей вычислим

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}.$$

Результаты вычислений представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Условные вероятности $P(y_j / x_i)$

| $y_j \mid x_i$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | 0,33 | 0,87 |
| $y_2$ | 0,67 | 0,13 |

Результаты расчета $H(y_j / x_i)$ представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Точные условные энтропии $H(y_j / x_i)$

| $y_j \mid x_i$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | 1,6 | 0,20 |
| $y_2$ | 0,58 | 2,94 |

Найдем частные условные энтропии путем усреднения точных условных энтропий.

$$H(Y / x_i) = \sum_{j=1}^{2} P(y_j / x_i) \cdot H(y_j / x_i).$$

Результаты расчета следующие:

$$H(Y / x_1) = 1{,}6 \cdot 0{,}33 + 0{,}58 \cdot 0{,}67 = 0{,}53 + 0{,}39 = 0{,}92;$$
$$H(Y / x_2) = 0{,}20 \cdot 0{,}87 + 2{,}94 \cdot 0{,}13 = 0{,}17 + 0{,}38 = 0{,}55.$$

Эти результаты образуют случайную величину, значения которой наступают с вероятностью $P(x_i)$. Поэтому только среднее $H(Y / x_i)$, усредненное с весом $P(x_i)$, не случайно, а именно:

$$H(Y / X) = \sum_{i=1}^{2} H(Y / x_i) \cdot P(x_i) = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} P(x_i, y_j) \cdot \log P(y_j / x_i) =$$
$$= 0{,}92 \cdot 0{,}6 + 0{,}55 \cdot 0{,}4 = 0{,}55 + 0{,}22 = 0{,}77 \ \frac{\text{áèò}}{\text{ñîîáù.}}.$$

Если испытания будут независимы, то энтропия объединения будет

$$H^*(X,Y) = H(X) + H(Y) = -\sum_{i=1}^{2} P(x_i) \cdot \log P(x_i) - \sum_{j=1}^{2} P(y_j) \cdot \log P(y_j) =$$
$$= -(0{,}6 \cdot \log 0{,}6 + 0{,}4 \cdot \log 0{,}4) - (0{,}55 \cdot \log 0{,}55 + 0{,}45 \cdot \log 0{,}45) =$$
$$= 0{,}44 + 0{,}53 + 0{,}47 + 0{,}52 = 1{,}96 \ \text{áèò}.$$

Таким образом

$$H(X,Y) = 1{,}74 \text{ бит} < H^*(X,Y) = H(X) + H(Y) = 1{,}96 \text{ бит}.$$

### 1.2. Задачи и упражнения

1.2.1. В некотором городе 25% населения составляют студенты. Среди студентов 50% юношей. Всего юношей в городе 35%. Сколько дополнительной информации содержится в сообщении, что встреченный юноша – студент.

Ответ: $I = 1{,}486$ бит.

1.2.2. Определить минимальное число взвешиваний, которое необходимо произвести на равноплечных весах, чтобы среди 27 внешне неотличимых монет найти одну фальшивую, более лёгкую. Указать алгоритм определения фальшивой монеты.

Ответ: 3.

1.2.3. Опыт $X$ имеет три исхода $x_1,x_2,x_3$ с соответственными вероятностями $P(x_1)=0{,}2$; $P(x_2)=0{,}5$; $P(x_3)=0{,}3$. Найти точные и средние количества информации, несомые исходами $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Ответ: 1,49 бит.

1.2.4. По условию предыдущей задачи вычислить дисперсию $D(I)$ случайной величины $I = -\log P(x_i)$ и величину отклонения $\delta_i$.

Ответ: $D(I)$=0,277; $\delta_i = \sqrt{D(I)} = 0{,}525$.

1.2.5. Вероятности совместного появления $P(x_i, y_j)$ объединения двух статистически зависимых ансамблей заданы в табл. 1.5. Определить точные и средние количества неопределённости в совместном наступлении событий $x_i$ и $y_j$, а также точные и средние количества неопределённости в $y_j$ при известном исходе $x_i$.

Таблица 1.5

Вероятности совместного появления, $P(x_i, y_j)$

| $y_j$ | $x_i$ | | |
|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| $y_1$ | 0,1 | 0,15 | 0,05 |
| $y_2$ | 0,05 | 0,03 | 0,02 |
| $y_3$ | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Ответ: точные количества $H(x_1,y_1) = 3{,}32$; $H(x_2,y_1) = 2{,}74$; $H(x_3,y_1) = 4{,}32$; $H(x_1,y_2) = 4{,}32$; $H(x_2,y_2) = 5{,}06$; $H(x_3,y_2) = 5{,}64$; $H(x_1,y_3) = 1{,}74$; $H(x_2,y_3) = 2{,}32$; $H(x_3,y_3) = 3{,}32$; среднее количество $H(X,Y) = 2{,}76$ $\frac{\text{áèò}}{\text{ñîîáù.}}$; точные количества условных энтропий $H(y_1/x_1) = 2{,}171$; $H(y_1/x_2) = 1{,}361$; $H(y_1/x_3) = 1{,}766$; $H(y_2/x_1) = 3{,}171$; $H(y_2/x_2) = 3{,}662$; $H(y_2/x_3) = 3{,}074$; $H(y_3/x_1) = 0{,}584$; $H(y_3/x_2) = 0{,}908$; $H(y_3/x_3) = 0{,}766$; среднее количество $H(Y/X) = 1{,}274$ $\frac{\text{áèò}}{\text{ñîîáù.}}$.

1.2.6. По условию задачи 1.2.5 определить энтропию объединения когда источники независимы.

Ответ: $H(X,Y) = 2{,}78$ $\frac{\text{áèò}}{\text{ñîîáù.}}$.

1.2.7. Известно, что телеизмеряемая величина должна быть в пределах от 21 В до 40 В. Измерение произвели прибором, который показал 30 В, но он имеет погрешность $\pm 2$ В. Определить количество информации, полученной в результате опыта.

Ответ: $I = 2$ бита.

1.2.8. Студент может сдать зачёт по теории передачи информации с вероятностью $\alpha$, не проработав весь материал, и с вероятностью $\beta$, проработав весь материал курса; или не сдать зачёт с вероятностью $\gamma$, не проработав весь материал, и с вероятностью $\delta$, проработав весь материал курса $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 1$.

Определить среднее количество информации, которое может получить преподаватель, о подготовленности студента по результатам сдачи зачёта.

Ответ:

$$I(X,Y)=\beta\log\frac{\beta}{(\alpha+\beta)(\beta+\delta)}+\alpha\log\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}+\delta\log\frac{\delta}{(\delta+\gamma)(\beta+\delta)}+\gamma\log\frac{\gamma}{(\delta+\gamma)(\alpha+\gamma)}.$$

1.2.9. По линии связи с помехами передаётся одно из двух сообщений $x_1$ или $x_2$ с вероятностями соответственно $p$ и $g$, причём $p+g=1$. На приёмном конце канала сигналу $x_1$ соответствует $y_1$, а сигналу $x_2$ соответствует $y_2$. Заданы условные вероятности правильного приёма $P(y_1/x_1)=\Delta$ и $P(y_2/x_2)=\delta$. Определить количество информации $I(Y,X)$, содержащее в $y$ о $x$.

Ответ:

$$I(Y,X)=p\Delta\log\frac{\Delta}{p\Delta+g(1-\delta)}+p(1-\Delta)\frac{1-\Delta}{g\delta+p(1-\Delta)}+g(1-\delta)\log\frac{1-\delta}{p\Delta+g(1-\delta)}+g\delta\log\frac{\delta}{g\delta+p(1-\Delta)}.$$

1.2.10. По каналу связи передаётся один из двух сигналов $x_1$ или $x_2$ с одинаковыми вероятностями. На выходе канала сигналы $x_1$ и $x_2$ преобразуются в сигналы $y_1$ и $y_2$, причём из-за помех, которым одинаково подвержены сигналы $x_1$ и $x_2$, в передачу вносится ошибка, так что в среднем один сигнал из 100 принимается неверно. Определить среднее количество информации на один символ. Сравнить её с количеством информации при отсутствии помех.

Ответ: при отсутствии помех $I(X,Y)=1$ бит; при наличии помех $I(Y,X)=0{,}919$ бит.

1.2.11. Из выражения для количества информации:

$$I(Y,X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i,y_j)\log\frac{P(x_i,y_j)}{P(x_i),P(y_j)}$$

получить выражение для точного количества информации, содержащего в сообщении $y_j$, о сообщении $x_i$.

Ответ: $I(y_j,x_i)=\log\dfrac{P(x_i/y_j)}{P(x_i)}$.

1.2.12. По цели может быть произведено n независимых выстрелов, вероятность поражения цели при каждом выстреле равна $P$. После $k$-го выстрела $(1\le k\le n)$ производится разведка, сообщающая, поражена или не поражена цель. Если поражена, стрельба прекращается. Определить $k$ из условия, что количество информации, доставляемое разведкой, было максимальным.

Ответ: $k=-\dfrac{1}{\log(1-p)}$.

1.2.13. На вход линии связи, в которой действует помеха, поступает сообщение $X$ в двоичном коде 11111000. На выходе линии связи зафиксирована последовательность 11100001. Определить точное и среднее количество информации, содержащееся в $Y$ о $X$.

Указание: для удобства расчётов обозначить $X=AAAAABBB$ и $Y=CCCDDDDC$.

Ответ: точные количества информации – $I(A,C) = I(C,A) = 0{,}263$ бит; $I(A,D)=I(D,A) = -0{,}322$ бит; $I(B,D) = I(D,B) = 0{,}415$ бит; $I(B,C) = I(C,B) = -0{,}585$ бит; среднее количество информации - $I(Y,X) = 0{,}049$ бит.

1.2.14. Сигнал состоит из семи двоичных элементов. Определить количество информации в сигнале, когда элементы равновероятны, т.е. $P_1=P_2=1/2$, и когда $P_1=3/4$, а $P_2=1/4$.

Ответ: $I_{PB} = 7$ бит; $I_{HPB} = 5{,}67$ бит.

1.2.15. Определить энтропии $H(X)$, $H(Y)$, $H(X/Y)$, $H(X,Y)$, если задана матрица вероятностей состояний системы, объединяющей источники $X$ и $Y$:

$$P(x_i, y_j) = \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $H(X) = 1{,}485$ дв.ед.; $H(Y) = 1{,}57$ дв.ед.; $H(X/Y) = 0{,}55$ дв.ед.;
$H(X,Y) = 2{,}12$ дв.ед.

1.2.16. Известны энтропии двух зависимых источников $H(X) = 5$ дв.ед., $H(Y) = 10$ дв.ед. Определить, в каких пределах будет изменяться условная энтропия $H(Y/X)$ при изменении $H(X/Y)$ в максимально возможных пределах.

Указание: использовать графическое отображение связи между энтропиями.

Ответ: $H(Y/X)$ будет уменьшаться до значения $H(Y) - H(X) = 5$ дв.ед.

1.2.17. Ансамбли событий $X$ и $Y$ объединены. Вероятности совместных событий $(x, y)$ описываются матрицей:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| $y_2$ | 0,25 | 0 | 0,15 |

Определить:

1) энтропию ансамблей $X$ и $Y$;

2) энтропию объединённого ансамбля $(X,Y)$;

3) условные энтропии ансамблей;

4) количество информации, содержащейся в событиях $y$ относительно $x$.

Ответ: $H(X) = 1{,}512$ $\frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$; $H(Y) = 0{,}971$ $\frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$; $H(X,Y) = 2{,}228$ $\frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$;

$H(X/Y) = 1{,}257$ $\frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$; $H(Y/X) = 0{,}716$ $\frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$; $I(Y,X) = 0{,}255$ äâ.åä.

# 2.Источники дискретных сообщений

## 2.1 Основные формулы

Энтропия источника сообщений при наличии связей между двумя соседними символами:

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} P(x_k) \sum_{l=1}^{n} P(x_l / x_k) \log P(x_l / x_k) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} P(x_k, x_l) \log P(x_l / x_k) \quad \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñèìâîë}}. \tag{2.1}$$

Энтропию источника сообщений, когда коррелятивные связи имеются между тремя символами:

$$H(X) = -\sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P(x_h, x_j) \sum_{i=1}^{n} P(x_i / x_h, x_j) \log P(x_i / x_h, x_j) = \\ = \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} P(x_h, x_j, x_i) \log P(x_i / x_h, x_j) \quad \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñèìâîë}}. \tag{2.2}$$

Число типичных последовательностей длиной *M:*

$$N_T = 2^{MH(X)}, \tag{2.3}$$

где $H(X)$ – энтропия эргодического источника.

Число всевозможных последовательностей, которое можно составить из n букв:

$$N = n^M. \tag{2.4}$$

Число последовательностей, у которых из $M$ мест $n_A$ мест представлено букве $A$, равно числу сочетаний из $M$ элементов $n_A$*:*

$$C_M^{n_A} = \frac{M!}{n_A!(M - n_A)!}. \tag{2.5}$$

Вероятность того, что в выработанной источником последовательности длиной $M$ содержится $n_A$ символов $A$, определяется из биномиального закона:

$$P_{M,n_A} = C_M^{n_A} P^{n_A} (1 - P)^{M - n_A}. \quad (2.6)$$

Избыточность источника:

$$R = \frac{H_{\max}(X) - H(X)}{H_{\max}(X)}. \quad (2.7)$$

Скорость создания сообщений или поток информации

$$\overline{H}(X) = \frac{H(X)}{\overline{\tau}} \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}, \quad (2.8)$$

где $\overline{\tau}$ – средняя длительность:

$$\overline{\tau} = \sum_i \tau_i P(x_i). \quad (2.9)$$

**Пример 2.1.** Источник, используя алфавит из двух символов $x_1$ и $x_2$, вырабатывает последовательности $x_1$, $x_2$, $x_2$, $x_1$, $x_2$, $x_1$, $x_2$, $x_1$... Вероятностные связи в данной последовательности имеют место между тремя символами. Определить все возможные состояния источника и порядок их следования в данной последовательности.

**Решение.** В условии задан эргодический источник второго порядка $(r = 2)$. Поэтому число различных состояний источника равно $2^2 = 4$. Выпишем их, нумеруя состояния соответствующими индексами:

$$x_1x_1 - S_{11};$$
$$x_1x_2 - S_{12};$$
$$x_2x_1 - S_{21};$$
$$x_2x_2 - S_{22}.$$

Чтобы установить, в каком состоянии находится источник, необходимо подождать, пока он выработает два символа. Поэтому в последовательности $x_1\,x_2\,x_2\,x_1\,x_2\,x_1\,x_2\,x_1$... первым состоянием является $S_{12}$. Затем источник после появления символа $x_2$ переходит в состояние $S_{22}$ и т.д. Получается следующая последовательность состояний, проходимая источником:

$$S_{12} \to S_{22} \to S_{21} \to S_{12} \to S_{21} \to S_{12} \to S_{21}...$$

**Пример 2.2** Источник сообщений вырабатывает три различных символа $x_1, x_2, x_3$ с соответственными вероятностями 0,2; 0,5; 0,3.

Вероятности появления пар заданы в табл. 2.1. Определить энтропию и сравнить ее с энтропией источника, у которого отсутствуют вероятностные связи. Определить избыточность источника.

Таблица 2.1

Вероятности появления пар символов $P(x_i, x_j)$

| $x_i\ x_j$ | $x_1\ x_1$ | $x_1\ x_2$ | $x_1\ x_3$ | $x_2\ x_1$ | $x_2\ x_2$ | $x_2\ x_3$ | $x_3 x_1$ | $x_3\ x_2$ | $x_3\ x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_i, x_j)$ | 0,2 | 0 | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0 |

**Решение.** Энтропию найдем из выражения

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P(x_i, x_j) \cdot \log P(x_i / x_j). \qquad (2.10)$$

Для этого вычислим условные вероятности по формуле

$$P(x_i / x_j) = \frac{P(x_i, x_j)}{P(x_j)}.$$

Результаты расчета сведем в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Условные вероятности $P(x_i / x_j)$

| $x_i / x_j$ | $x_1 / x_1$ | $x_1 / x_2$ | $x_1 / x_3$ | $x_2 / x_1$ | $x_2 / x_2$ | $x_2 / x_3$ | $x_3 / x_1$ | $x_3 / x_2$ | $x_3 / x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_i / x_j)$ | 0,5 | 0 | 0 | 0,25 | 0,6 | 1 | 0,25 | 0,4 | 0 |

Подставляя полученные значения вероятностей $P(x_i, x_j)$ и $P(x_i / x_j)$ в (2.10), получим:

$$H(X) = -(0{,}2 \cdot \log 0{,}5 + 0{,}1 \cdot \log 0{,}25 + 0{,}3 \cdot \log 0{,}6 + 0{,}1 \cdot \log 1 + \\ + 0{,}1 \cdot \log 0{,}25 + 0{,}2 \cdot \log 0{,}4) = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 0{,}737 + \\ + 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 2{,}0 + 0{,}2 \cdot 1{,}32 = 1{,}08 \text{ áèò}.$$

Энтропия источника, у которого вероятностные связи между символами отсутствуют,

$$H^*(X) = -\sum_{i=1}^{3} P(x_i) \cdot \log P(x_i) = -(0{,}2 \cdot \log 0{,}2 + 0{,}5 \cdot \log 0{,}5 + 0{,}3 \cdot \log 0{,}3) = \\ = 0{,}46 + 0{,}5 + 0{,}52 = 1{,}48 \text{ áèò}.$$

Энтропия источника с независимым появлением равновероятных символов равна

$$H^{**}(X) = \log 3 = 1{,}58 \text{ áèò}.$$

Избыточность с учетом статистических связей

$$R = \frac{Hmax(X) - H(X)}{Hmax(X)} = \frac{H^{**}(X) - H(X)}{H^{**}(X)} = \frac{1{,}58 - 1{,}08}{1{,}58} = 0{,}32.$$

Избыточность из-за неравновероятности появления символов

$$R^{*} = \frac{H^{**}(X) - H^{*}(X)}{H^{**}(X)} = \frac{1{,}58 - 1{,}48}{1{,}58} = 0{,}06.$$

Следовательно, наличие коррелятивных (статистических) связей между символами также приводит к уменьшению энтропии и увеличению избыточности.

**Пример 2.3 .** Источник вырабатывает два символа $A$ и $B$ с вероятностью $P(A) = 0{,}4$ и $P(B) = 0{,}6$. Определить количество возможных последовательностей, содержащих $n_A$ символов $A$, причем $n_A + n_B = M = 4$. Определить вероятность события, которое заключается в том, что в выработанной источником последовательности длиной $M$ содержится $n_A$ символов $A$.

**Решение.** Число всевозможных последовательностей, которое можно составить из двух букв, по $M$ букв в каждой, $N = 2^M$. Число последовательностей, у которых из $M$ мест $n_A$ мест представлено букве $A$, равно числу сочетаний из $M$ элементов по $n_A$.

$$C_M^{n_A} = \frac{M!}{(M - n_A)!\,n_A!}.$$

Вероятность того, что в выработанной источником последовательности длиной $M$ содержится $n_A$ символов $A$, определяется из биномиального закона

$$P_{M,n_A} = C_M^{n_A} P^{n_A} (1 - P)^{M - n_A},$$

Более подробно рассмотрим работу данного источника для $M = 4$. Тогда $N = 2^4 = 16$. Выпишем эти 16 возможных последовательностей, вычислив для каждой из них $C_M^{n_A}$ и $P_{M,n_A}$.

| Возможные последовательности | $n_A$ | $n_B$ | $C_M^{n_A}$ | $P_M, n_A$ |
|---|---|---|---|---|
| $AAAA$ | 4 | 0 | 1 | 0,0256 |
| $AAAB$<br>$AABA$<br>$ABAA$<br>$BAAA$ | 3 | 1 | 4 | 0,154 |
| $AABB$<br>$ABBA$<br>$BBAA$<br>$BAAB$<br>$BABA$<br>$ABAB$ | 2 | 2 | 6 | 0,346 |
| $BBBA$<br>$BBAB$<br>$BABB$<br>$ABBB$ | 1 | 3 | 4 | 0,346 |
| $BBBB$ | 0 | 4 | 1 | 0,130 |

Из таблицы видно, что источник чаще вырабатывает последовательности, содержащие одинаковое число символов $A$ и $B$. И 3 символа В.

**Пример 2.4.** Эргодический источник с энтропией $H = 2$ бита вырабатывает 8 различных символов. Оценить, какую долю общего числа возможных последовательностей следует учитывать в практических расчетах, если длина последовательностей $M = 30$.

**Решение.** Всевозможное число последовательностей

$$N = n^M = 8^{30} = 2^{90}$$

Число типичных последовательностей

$$N_T = 2^{MH(X)} = 2^{30 \cdot 2} = 2^{60},$$

откуда

$$\frac{N_T}{N} = \frac{2^{60}}{2^{90}} = \frac{1}{2^{30}} \cong \frac{1}{10^9}.$$

Следовательно, к типичным последовательностям относится только одна миллиардная доля всевозможных реализаций.

## 2.2. Задачи и упражнения

2.2.1. Источник, используя алфавит из двух символов $x_1$ и $x_2$, вырабатывает последовательность $x_1, x_2, x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, \cdots$ Вероятностные связи в данной последовательности имеют место между четырьмя символами. Определить все возможные состояния источника и порядок их следования в данной последовательности.

Ответ: $x_1,x_1,x_1,\ x_1,x_1,x_2,\ x_1,x_2,x_1,\ x_2,x_1,x_1,\ x_1,x_2,x_2,\ x_2,x_1,x_2,\ x_2,x_2,x_1,\ x_2,x_2,x_2$;

$$S_{122} \to S_{221} \to S_{212} \to S_{121} \to S_{212} \to S_{121} \to \dots$$

2.2.2. Источник сообщений вырабатывает три различных символа $x_1,x_2,x_3$ с соответственными вероятностями 0,4; 0,5; 0,1.

Вероятности появления пар заданы в табл. 2.3. Определить энтропию и сравнить её с энтропией источника, у которого отсутствуют вероятностные связи и вероятность появления символов одинакова.

Таблица 2.3

| $x_i, x_j$ | $x_1x_1$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_1$ | $x_2x_2$ | $x_2x_3$ | $x_3x_1$ | $x_3x_2$ | $x_3x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_i,x_j)$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0 | 0,1 | 0 | 0 |

Ответ: $H(X)$ = 1,086 бит; $H'(X)$ = 1,36 бит; $H''(X)$ = 1,58 бит.

2.2.3. Источник сообщений вырабатывает символы $a$ и $b$. Условные вероятности $P(a/b)$ = 0,1; $P(b/b)$ = 0,9; $P(b/a)$ = 0,7; $P(a/a)$ = 0,3. Определить энтропию источника.

Ответ: $H(X) = 0{,}51$ $\frac{\text{áèò}}{\text{ñèìâîë}}$.

2.2.4. Источник генерирует два равновероятных символа $x_1$ и $x_2$, условные вероятности $P(x_1/x_1) = P(x_2/x_2) = 0{,}7$; $P(x_1/x_2) = P(x_2/x_1) = 0{,}3$. Определить энтропию и избыточность источника.

Ответ: $H(X) = 0{,}883$ $\frac{\text{áèò}}{\text{ñèìâîë}}$; $R = 0{,}12$.

2.2.5. Элементы сигнала принимают два состояния $m_1$ и $m_2$. Определить количество информации (энтропию) и избыточность, если две полные и четыре условные вероятности имеют следующие значения: $P(m_1) = 3/4$; $P(m_2) = 1/4$; $P(m_1/m_1) = 2/3$; $P(m_2/m_2) = 0$; $P(m_1/m_2) = 1$; $P(m_2/m_1) = 1/3$, т.е. после $m_2$ всегда следует $m_1$.

Ответ: $H(X) = 0{,}685$ $\frac{\text{áèò}}{\text{ñèìâîë}}$; $R = 0{,}315$.

2.2.6. Вероятности появления символов источника равны $P(x_1) = 1/2$, $P(x_2) = 1/4$, $P(x_3) = P(x_4) = 1/8$. Корреляционные связи имеют место между двумя соседними символами, которые описываются табл. 2.4. Определить энтропию и избыточность источника.

Таблица 2.4

| $x_i, x_j$ | $P(x_i,x_j)$ | $x_i, x_j$ | $P(x_i,x_j)$ | $x_i, x_j$ | $P(x_i, x_j)$ | $x_i, x_j$ | $P(x_i,x_j)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1x_1$ | 13/32 | $x_2x_1$ | 1/32 | $x_3x_1$ | 0 | $x_4x_1$ | 1/16 |
| $x_1x_2$ | 3/32 | $x_2x_2$ | 1/8 | $x_3x_2$ | 0 | $x_4x_2$ | 1/32 |
| $x_1x_3$ | 0 | $x_2x_3$ | 3/32 | $x_3x_3$ | 0 | $x_4x_3$ | 1/32 |
| $x_1x_4$ | 0 | $x_2x_4$ | 0 | $x_3x_4$ | 1/8 | $x_4x_4$ | 0 |

Ответ: $H(X) = 0{,}886 \ \frac{\text{áèò}}{\text{ñèìâîë}}$; $R = 0{,}557$.

2.2.7. Эргодический источник с энтропией $H(X) = 1{,}9$ бит вырабатывает четыре различных символа. Найти отношение числа типичных к общему числу всевозможных последовательностей длиной $M = 100$ символов.

Ответ: $N_T / N = 1 \cdot 10^{-3}$.

2.2.8. Источник вырабатывает с одинаковой вероятностью два символа $A$ и $B$. Определить количество возможных последовательностей, содержащих $n_A$ символов $A$, причём $n_A + n_B = M = 4$. Определить вероятность события, которое заключается в том, что в выработанной источником последовательности длиной $M$ содержится $n_A$ символов $A$.

Ответ: $C_M^{n_A} = \frac{M!}{n_A!(M - n_A)!}$; $P_{M,n_A} = C_M^{n_A} (1/2)^M$; $C_4^4 = 1$, $P_{4,4} = 1/16$;

$C_4^3 = 4$, $P_{4,3} = 4/16$; $C_4^2 = 6$, $P_{4,2} = 6/16$; $C_4^1 = 4$, $P_{4,1} = 4/16$; $C_4^0 = 1$, $P_{4,0} = 1/16$.

2.2.9 . Источник вырабатывает три различны символа $x_1$, $x_2$, $x_3$ с вероятностями 0,5; 0,3; 0,2 соответственно. Заданы возможные длительности символов $\tau_1 = 10$ ñ, $\tau_2 = 4$ ñ, $\tau_3 = 2$ ñ. Подобрать такое соответствие заданных длительностей символам источника, чтобы поток информации был максимальным.

Ответ: $\overline{\tau}_{\min} = 4{,}2$ с; $\overline{H}_{\max} = 0{,}354 \ \frac{\text{áèò}}{\text{ñ}}$.

2.2.10. Оценить, какую долю общего числа возможных последовательностей следует учитывать в практических расчётах, если эргодический источник, имеющий энтропию $H(X) = 3{,}5$ дв.ед., вырабатывает $n = 16$ различных символов, а длина последовательностей $M = 50$.

Ответ: $\frac{N_T}{N} = \frac{2^{175}}{2^{200}} = \frac{1}{30 \cdot 10^6}$.

2.2.11. На контролируемом пункте имеются три объекта, каждый из которых может находиться в одном из двух положений («включён» или «выключен»). С контролируемого пункта передаются сообщения об изменении положений объектов. Наблюдением в течение длительного отрезка времени установлено, что из 100 переданных сообщений 70 относятся к первому объекту, 20 – ко второму и 10 – к третьему. Определить количество информации, содержащейся в одном сообщении.

Ответ: $H(X) = 2{,}156 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$.

2.2.12. На контролируемом пункте, аналогичном описанному в задаче 2.2.11, производится периодический контроль состояния объектов. Количество сообщений, передаваемых о состоянии каждого объекта, одинаково. Наблюдением установлено, что в среднем объект 1 включён 98%, объект 2 – 80%, а объект 3 – 0,6% всего времени. В остальное время объекты отключены. Определить количество информации, содержащееся в одном сообщении.

Ответ: $H(X) = 1{,}88 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$.

2.2.13. Определить избыточность источников информации для условий задач 2.12.11 и 2.12.12.

Ответ: для условий задач 2.12.11 $R = 0{,}167$; для условий задач 2.12.12 $R = 0{,}272$.

# 3. ИСТОЧНИК НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

## 3.1. Основные формулы

Дифференциальная энтропия источника:

$$H_{\Delta}(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} W(x) \log W(x) dx \ . \qquad (.3.1)$$

Относительная дифференциальная условная энтропия источника:

$$H_{\Delta}(X/Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} W(x, y) \log \frac{W(x, y)}{W(y)} dxdy \ . \qquad (3.2)$$

Эпсилон-энтропия источника:

$$H(X)_\varepsilon = \min I(Y, X) = H_\Delta(X) - \max H_\Delta(X/Y). \qquad (3.3)$$

Эпсилон-энтропия для одного независимого отсчёта при гауссовском процессе $X(t)$ и $E(t)$:

$$\max\ H(X)_\varepsilon = 0{,}5 \log(\sigma_X^2/\sigma_E^2), \qquad (3.4)$$

где $\sigma_X$ и $\sigma_E$ – среднеквадратическое значение сигнала и помехи соответственно.

Эпсилон-производительность источника при дискретном времени:

$$H'(X)_\varepsilon = V_\tau H(X)_\varepsilon = V_\tau (H_\Delta(X) - \log\sqrt{2\pi e\varepsilon_0^2}\ \ \text{áèò/ñ}. \qquad (3.5)$$

где $V_\tau = 1/\Delta t$ – скорость передачи отсчетов; $\Delta t = 1/2\Delta F$ – интервал дискретизации; $\Delta F$ – полоса частот сигнала $X(t)$.

Если время непрерывное, то:

$$H'(X)_\varepsilon = 2\Delta F\,(H_\Delta(X) - \log\sqrt{2\pi e\varepsilon_0^2})\ \ \text{áèò/ñ}. \qquad (3.6)$$

Максимальное значение эпсилон-производительности имеет место, когда сигнал X(t) является гауссовским:

$$\max H'(X)_\varepsilon = \frac{V_\tau}{2}\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)\ \ \text{áèò/ñ}, \qquad (3.7)$$

$$\max\ H'(X)_\varepsilon = \Delta F\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)\ \ \text{áèò/ñ}, \qquad (3.8)$$

где $\varepsilon_0^2$ – максимальная мощность помехи.

Объём информации, выдаваемый источником, за время $T$:

$$\max V = \max H'(X)_\varepsilon \cdot T = \Delta FT\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)\ \text{бит}. \qquad (3.9)$$

Избыточность источника:

$$R_X = 1 - \frac{H_\Delta(X) - \log\sqrt{2\pi e\varepsilon_0^2}}{0.5\log(\sigma_X^2/\varepsilon_0^2)}. \qquad (3.10)$$

Количество информации, содержащееся в одной непрерывной случайной величине, относительно другой:

$$I(X,Y) = H_{\Delta}(X) - H_{\Delta}(X/Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x,y)\log\frac{W(x,y)}{W(x)W(y)}dxdy\ . \qquad (3.11)$$

**Пример 3.1.** Определить энтропию случайных величин равномерно распределенной на интервале с шириной $\varepsilon = \beta - \alpha$.

**Решение.** Из условия задачи вытекает, что плотность вероятности $W(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, а энтропия

$$H_{\Delta}(X) = -\int_{\alpha}^{\beta} W(x)\log W(x)dx = -\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}dx = \log(\beta - \alpha).$$

**Пример 3.2.** Вычислить дисперсию равномерного распределения на интервале $(\alpha,\beta)$.

**Решение.** На основании определения дисперсии имеем

$$\sigma_x = \int_{\alpha}^{\beta}(x(t) - m(x))^2 W(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}(x - \frac{\alpha+\beta}{2})^2\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

### 3.2. Задачи и упражнения

3.2.1. Определить выигрыш в мощности при использовании источника с гауссовской плотностью распределения по сравнению с источником, имеющим в интервале $(\alpha,\beta)$ равномерную плотность распределения.

Ответ: $\sigma_{Д}^2 = 1{,}42\,\sigma_{\tilde{A}}^2$, т.е. 42%.

3.2.2. Определить энтропию случайной величины, распределённой по экспоненциальному закону:

$$W(X) = \begin{cases} ce^{-cx}, x \geq 0; \\ 0, x \leq 0; c > 0. \end{cases}$$

Ответ: $H_{\Delta}(X) = \log\dfrac{e}{c}$.

3.2.4. Определить количество информации $I(X,Y)$ для системы $(X,Y)$ гауссовских случайных величин:

$$W(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\gamma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\gamma^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\gamma\cdot xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right).$$

Ответ: $I(X,Y) = -\log\sqrt{1-\gamma^2}$.

3.2.5. Определить ε производительность источника, формирующего со скоростью $V_\tau = \alpha$ некоррелированные отсчёты стационарного нормального случайного сигнала с дисперсией $\sigma_x^2$.

Ответ: $H'(X)_{\varepsilon_0} = \frac{\alpha}{2}\log\frac{\sigma_x^2}{\varepsilon_0^2}$.

# 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ КАНАЛОВ

## 4.1. Основные формулы

Пропускная способность канала с дискретным временем:

$$C = 0{,}5V_\tau \log(1 + \sigma_X^2 / \sigma_E^2). \tag{4.1}$$

Пропускная способность канала с непрерывным временем:

$$C = \Delta F \log\left(1 + \sigma_X^2 / \sigma_E^2\right). \tag{4.2}$$

Число уровней, которое может быть различимо без ошибок:

$$M = \sqrt{1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma^2 E}} = \sqrt{1 + \frac{P_X}{P_ø}}, \tag{4.3}$$

где $P_x$ и $P_ш$ – мощность полезного сигнала и шума соответственно.

Приемник не различает изменения входного сигнала меньше чем корень квадратный из мощности шума, т.е.:

$$\delta = \sqrt{P_ø}\ . \tag{4.4}$$

Наибольшее количество информации, переносимое импульсом, имеющим $M$ различных уровней:

$$I = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{P_X}{P_ø}). \tag{4.5}$$

**Пример 4.1.** Аналоговый сигнал с амплитудой 2 В передается по каналу связи, в котором отношение сигнал/шум равно 20 дб. Определить абсолютную погрешность телеизмерения.

**Решение.** Если сигнал смешан с помехой, то амплитуда сигнала может быть измерена с точностью до эффективного значения напряжения. При этом погрешность оценки точного значения амплитуды равна $\sqrt{P_ø}$ .

Из соотношения

$$10 \lg \frac{P_C}{P_ø} = 20 \text{ äÁ}$$

определим мощность шума

$$\lg \frac{P_C}{P_ø} = 2, \; P_ø = \frac{P_C}{100} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Âò}$$

Тогда погрешность

$$\delta = \sqrt{P_ø} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1 \text{ В}.$$

**Пример 4.2.** Определить пропускную способность канала связи при условии, что сигнал $C(t) = 5 \sin 1000\pi t$ должен быть восстановлен с погрешностью не большей чем 1 В.

**Решение.** Из условия задачи известно, что амплитуда сигнала $u_c = 5$ В, а полоса частот $\Delta F_c = 500$ Гц. Тогда пропускная способность

$$C = \Delta F_c \log\left(1 + \frac{P_C}{P_ø}\right) = \Delta F_ñ \log\left(1 + \frac{è_ñ^2}{\delta^2}\right) = 500 \log\left(1 + \frac{25}{1}\right) =$$
$$= 500 \log(26) \cong 500 \cdot 4{,}7 = 2350 \;\; \frac{\text{äâ. åä.}}{\text{ñ}}.$$

## 4.2. Задачи и упражнения

4.2.1. Определить объем информации, содержащейся в изображении из 500 строк по 500 элементов в каждой строке. Яркость каждого элемента передается восемью квантованными уровнями. Различные градации яркости равновероятны, а яркости разных элементов не коррелированны.

Ответ: $H(X) = 750000 \;\; \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{èçîáð.}}$.

4.2.2. Изображение задачи 4.2.1 должно быть передано по радиолинии, на входе которой действует белый гауссовский шум с удельной мощностью $P_{ОШ} = 10^{-4}$ Вт/Гц. Ширина полосы пропускания приемного устройства

$\Delta F_C = 1000$ Гц. Время передачи 1 час. Определить минимально возможное значение мощности полезного сигнала на входе приемника.

Ответ: $P_X = 155 \cdot 10^{-4}$ Вт.

4.2.3. Определить длину магнитной ленты для записи одного изображения, если энтропия изображения $H(X)_И = 600000$ дв.ед./изобр., а по ширине ленты записывается 30 дв.ед. информации при плотности записи 10 дв.ед./мм.

Ответ: $L = 2000$ мм.

4.2.4. Сигнал с амплитудой 1 В передается по каналу связи, в котором отношение сигнал/шум равно 10 дБ. Определить абсолютную погрешность телеизмерений.

Ответ: $\delta = 0{,}31$ В.

4.2.5. По непрерывному каналу передается сигнал, спектр которого ограничен полосой частот 30 Гц. Определить пропускную способность канала связи таким образом, чтобы погрешность передаваемого сигнала не превышала 1%.

Ответ: $C = 400 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

4.2.6. Непрерывный канал связи с пропускной способностью 40 дв.ед./с предназначен для передачи квантованного сигнала с полосой частот 5 Гц. Определить число различных уровней измеряемого сигнала и погрешность измерений.

Ответ: $M = 16$, $\delta = 6{,}3$ %.

4.2.7. По радиолинии, на входе которой действует гауссовский шум с удельной мощностью $10^{-8}$ Вт/Гц, передается 1024 сообщения в течение $1 \cdot 10^{-1}$с. Определить минимальную мощность полезного сигнала на входе приемника, если полоса пропускания приемника равна 100 Гц.

Ответ: $P_{c\,min} = 10^{-6}$ Вт.

4.2.8. Отношение сигнал/шум в линии связи равно $10^{-1}$, а полоса пропускания канала связи 1 кГц. Определить пропускную способность канала связи.

Ответ: $C = 140 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

4.2.9. Определить пропускную способность канала связи при условии, что сигнал $\sin 500\pi t$ должен быть восстановлен с погрешностью не большей чем 0,57 В.

Ответ: $C = 500 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

# 5. Информационные характеристики дискретных каналов связи

## 5.1 Основные формулы

Скорость передачи информации:

$$R_t = \frac{H(X) - H(X/Y)}{\tau} = \frac{I(X,Y)}{\tau}, \qquad (5.1)$$

где $\tau$ – длительность передаваемых сигналов.

Пропускная способность канала связи:

$$C = \frac{\max I(X,Y)}{\tau} = \frac{H_{\max}(X) - H(X/Y)}{\tau}. \qquad (5.2)$$

Пропускная способность бинарного канала связи:

$$C = \frac{1}{\tau}(1 + P\log P + (1-P)\log(1-P)), \qquad (5.3)$$

где $P$ – вероятность перехода одного символа в другой.

Объем сигнала:

$$V_X = T_X \cdot F_X \cdot H_X. \qquad (5.4)$$

где $H_X = \log(P_X / P_\varepsilon)$ – превышение сигнала над помехой; $T_X$ – время передачи сигнала; $F_X$ – полоса частот сигнала.

Объем канала:

$$V_K = T_K \cdot F_K \cdot H_K, \qquad (5.5)$$

где $T_K$ – время использования канала; $F_K$ – полоса пропускания канала; $H_K = \log(P_{X\max} / P_\varepsilon)$ – допустимая энергетическая нагрузка.

**Пример 5.1.** По каналу связи передаются двоичные 8-разрядные сообщения, вероятность появления нулей $P(0) = 0{,}6$. Время передачи одного сообщения $T = 10^{-3}$ с. Определить скорость передачи и пропускную способность канала связи.

**Решение.** Пропускная способность будет определяться выражением

$$C = \frac{n \log m}{\tau} = \frac{8 \log 2}{10^{-3}} = 8000 \ \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}.$$

Скорость передачи сообщений с учетом вероятности состояния каждого элемента будет:

$$R_t = \frac{-n\sum_{i=1}^{2} P_i \cdot \log P_i}{\tau} = \frac{-8(0{,}6 \cdot \log 0{,}6 + 0{,}4 \cdot \log 0{,}4)}{10^{-3}} =$$
$$= \frac{8 \cdot (0{,}4422 + 0{,}5288)}{10^{-3}} \cong 7768 \quad \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}.$$

**Пример 5.2.** Количество сообщений, передаваемых с контролируемого пункта, о состоянии четырех объектов одинаково. Наблюдением установлено, что в среднем объект 1 включен 80%, объект 2 – 40%, объект 3 – 60%, объект 4 – 20%. В остальное время объекты отключены. Определить скорость передачи информации и пропускную способность канала связи, если длительность одного сообщения $10^{-3}$ с.

**Решение.** Исходя из одинакового количества сообщений о состоянии объектов, можно записать, что $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = \frac{1}{4}$. Из статистики наблюдений можно записать выражения для определения вероятности того, что объекты находятся во включенном состоянии:

$$P(x_{1B}) = 0{,}8P(x_1);\ P(x_{2B}) = 0{,}4P(x_2);\ P(x_{3B}) = 0{,}6P(x_3);\ P(x_{4B}) = 0{,}2P(x_4).$$

Результаты расчета вероятностей того, что объекты находятся во включенном или отключенном состоянии, сведем в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Вероятности $P(x_{iB})$ и $P(x_{iO})$

| $x_i$ | $x_{1B}$ | $x_{1O}$ | $x_{2B}$ | $x_{2O}$ | $x_{3B}$ | $x_{3O}$ | $x_{4B}$ | $x_{4O}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_i)$ | 0,2 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,15 | 0,1 | 0,05 | 0,2 |

Тогда скорость передачи информации будет

$$R_t = V_\tau \cdot (H(X)) = \frac{1}{10^{-3}} \cdot (-0{,}2 \cdot \log 0{,}2 - 0{,}05 \cdot \log 0{,}05 - 0{,}1 \cdot \log 0{,}1 -$$
$$- 0{,}15 \cdot \log 0{,}15 - 0{,}15 \cdot \log 0{,}15 - 0{,}1 \cdot \log 0{,}1 - 0{,}05 \cdot \log 0{,}05 - 0{,}2 \cdot \log 0{,}2) =$$
$$= \frac{1}{10^{-3}} \cdot (0{,}464 + 0{,}216 + 0{,}332 + 0{,}410 + 0{,}410 + 0{,}332 + 0{,}216 + 0{,}464) = 2844 \ \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}.$$

Пропускная способность в этом случае будет

$$C = V_\tau \cdot \max H(X) = V_\tau \log M = 10^3 \cdot 3 = 3000 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}},$$

где $M = 8$ – общее число состояний системы (четырех объектов).

**Пример 5.3.** По дискретному каналу связи с помехами передается кодовое сообщение 1110011110. Вероятность искажения одиночных сигналов

$$P = P_{10} = P_{01} = 10^{-2},$$

а длительность элемента кода $10^{-3}$ с. Определить скорость передачи и пропускную способность канала связи.

**Решение.** Пропускную способность канала связи определим из выражения:

$$C = V_\tau \cdot (1 + P\log P + (1-P)\cdot\log(1-P)) = 10^3(1 + 0{,}01\cdot\log 0{,}01 + 0{,}99\cdot\log 0{,}99) =$$
$$= 1000\cdot(1 - 0{,}066 - 0{,}014) \cong 1000\cdot 0{,}92 = 920 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}.$$

Скорость передачи

$$R_t = V_\tau \cdot (-\sum_{i=1}^{2} P_i \log P_i + P\log P + (1-P)\cdot\log(1-P)) =$$
$$= 10^3(-0{,}3\log 0{,}3 - 0{,}7\log 0{,}7 + 0{,}01\log 0{,}01 + 0{,}99\log 0{,}99) =$$
$$= 1000\cdot(0{,}521 + 0{,}360 - 0{,}066 - 0{,}014) = 1000\cdot 0{,}801 = 801 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}},$$

где $P(0) = \frac{n(0)}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3, \quad P(1) = \frac{n(1)}{n} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$

## 5.2. Задачи и упражнения

5.2.1. В информационном канале используется алфавит с четырьмя различными символами. Длительность всех символов одинакова и равна $\tau = 1$ мс. Определить пропускную способность канала при отсутствии шумов.

Ответ: $C = 2000 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.2. В информационном канале используется сменно-качественный код, при котором запрещается передача подряд двух одинаковых символов. Алфавит кода состоит из четырех различных символов. Вероятности передачи всех разрешенных пар символов одинаковы. Длительности всех символов также одинаковы и равны $\tau = 1$ мс. Определить скорость передачи информации.

Ответ: $R_t = 1585 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.3. В дискретном канале для передачи сообщений используются три различных символа с длительностями $\tau_1 = \tau_2 = 10$ мс и $\tau_3 = 20$ мс. Определить пропускную способность канала.

Ответ: $C = 127 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.4. В канал связи передаются сообщения длиной $n = 10$ элементов, каждый из которых может принимать $m = 4$ состояния с вероятностями $P_1 = 0{,}2$; $P_2 = 0{,}3$; $P_3 = 0{,}1$; $P_4 = 0{,}4$. Время передачи одного сообщения $\tau = 0{,}1$ с. Определить скорость передачи информации и пропускную способность канала связи.

Ответ: $R_t = 185 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$, $C = 200 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.5. По бинарному каналу передаются сообщения: 1110011101, 1110000001. Длительность каждого элемента сообщения $\tau = 10$ мс. Определить скорость передачи каждого сообщения и пропускную способность двоичного канала.

Ответ: $R_{t1} = 88 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$, $R_{t2} = 97 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$, $C = 100 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.6. В канал связи передаются сообщения от эргодического источника, вырабатывающего $m = 3$ элемента. В кодовых комбинациях запрещена передача двух одинаковых элементов. Вероятность передачи всех разрешенных кодовых комбинаций длиной $n = 3$ одинакова. Длительность каждого элемента $\tau = 10$ мс. Определить скорость передачи информации и пропускную способность канала связи.

Ответ: $R_t = C = 300 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.7. В бинарном канале вероятности подавления и воспроизведения ложного сигнала одинаковы и равны $P_{10} = P_{01} = P = 10^{-3}$. Длительности символов одинаковы и равны $\tau = 1$ мс. Определить пропускную способность бинарного симметричного канала.

Ответ: $C = 11{,}3 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.8. По линии связи с помехами передается четыре сообщения. Ансамбль объединения описывается табл. 5.2. Длительность сообщения $\tau = 2$ мс. Определить скорость передачи сообщений и пропускную способность канала связи.

Таблица 5.2

| $y_j$ | $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | | 0,1 | 0,05 | 0,05 | 0,15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y_2$ | 0,03 | 0,05 | 0,1 | 0,04 |
| $y_3$ | 0,07 | 0,03 | 0,05 | 0,06 |
| $y_4$ | 0 | 0,07 | 0,05 | 0,1 |

Ответ: $R_t = 13{,}5 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$, $C = 34{,}5 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.9. По дискретному каналу связи с помехами передается кодовое сообщение 1100110011. Вероятность искажения одиночных символов $P_{10} = P_{01} = P = 10^{-1}$, а длительность элемента кода $\tau = 1 \cdot 10^{-2}$ с. Определить скорость передачи и пропускную способность канала связи.

Ответ: $R_t = 72 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$, $C = 92 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.10. С контролируемого пункта передаются сообщения об изменении положения объектов. Каждый объект может находиться в одном из двух положений «включен» или «выключен». Наблюдением установлено, что из 50 переданных сообщений 40 относится к первому объекту, 2 – ко второму и 8 – к третьему. Объекты работают независимо друг от друга, а положения объектов равновероятны. Определить скорость передачи информации и пропускную способность дискретного канала, если длительность каждого сообщения 1 мс.

Ответ: $R_t = 1864 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$, $C = 2585 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

5.2.11. Количество сообщений, передаваемых с контролируемого пункта, о состоянии трех объектов, одинаково. Наблюдением установлено, что в среднем объект 1 «включен» 60%, объект 2 – 30%, а объект 3 – 40%. В остальное время объекты «отключены». Определить скорость передачи информации и пропускную способность канала связи, если длительность одного сообщения 5 мс.

Ответ: $R_t = 504 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$, $C = 517 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñ}}$.

# 6. КОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ПО ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛУ БЕЗ ПОМЕХ.

## 6.1. Основные формулы

Средняя длина кодового слова:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \mu_i P(x_i), \qquad (6.1)$$

где $\mu_i$ – длина кодового слова, сопоставляемая $x_i$ сообщению.

При кодировании сообщений $x_i$ в алфавите, насчитывающем $m$ символов, при условии отсутствия шумов средняя длина кодового слова:

$$L \geq \frac{H(X)}{\log m}, \qquad (6.2)$$

где $H(X)$ – энтропия сообщения.

**Пример 6.1.** Определите среднюю длину кодового слова и ее нижнюю границу, а также вероятность появления нулей $P(0)$ и единиц $P(1)$, при передаче сообщений длиной $\mu_i$ и вероятностями появления сообщений $P(x_i)$, указанными в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Ансамбль сообщений

| Сообщение | $P(x_i)$ | Код | $\mu_i$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,4 | 11 | 2 |
| $x_2$ | 0,3 | 10 | 2 |
| $x_3$ | 0,2 | 010 | 3 |
| $x_4$ | 0,1 | 0001 | 4 |

**Решение.** Среднюю длину кодового слова определим из выражения

$$L = \sum_{i=1}^{4} \mu_i P(x_i).$$

Подставив значения $\mu_i$ и $P(x_i)$ из таблицы, получим:

$$L = 2 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}4 = 2{,}4 \text{ ñèìâîëà}.$$

Среднее число нулей

$$L(0) = \sum_{i=1}^{4} \mu_{i0} P(x_i) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1 \text{ ñèìâîë}.$$

Вероятность появления нулей $P(0) = L(0)/L = 1/2{,}4 = 0{,}417$.

Среднее число единиц

$$L(1) = \sum_{i=1}^{4} \mu_{i1} P(x_i) = 2 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1{,}4 \text{ ñèìâîëà}.$$

.

Вероятность появления единиц $P(1) = L(1)/L = 1{,}4/2{,}4 = 0{,}583$.

Определим нижнюю границу средней длины кодового слова из выражения (6.2)

$$L \geq \frac{H(X)}{\log m} = \frac{-(0{,}4\log 0{,}4 + 0{,}3\log 0{,}3 + 0{,}2\log 0{,}2 + 0{,}1\log 0{,}1)}{\log 2} =$$

$$= \frac{0{,}529 + 0{,}521 + 0{,}464 + 0{,}332}{1} = 1{,}846 \text{ ñèìâîëà} .$$

## 6.2. Правило построения эффективных кодов

6.2.1. Для построения кода Шеннона-Фано все сообщения выписываются в порядке убывания их вероятностей. Записанные таким образом сообщения затем разбиваются на две по возможности равновероятные подгруппы. Всем сообщениям первой подгруппы присваивают цифру 1 в качестве первого кодового символа, а сообщениям второй подгруппы – цифру 0. Аналогичное деление на подгруппы продолжается до тех пор, пока в каждую подгруппу не попадёт по одному сообщению.

6.2.2. Для получения кода Хаффмана все сообщения выписывают в порядке убывания их вероятностей. Две наименьшие вероятности объединяют скобкой и одной из них присваивают символ 1, а другой – 0. Затем эти вероятности складывают, результат записывают в промежутке между ближайшими вероятностями. Процесс объединения двух сообщений с наименьшими вероятностями продолжают до тех пор, пока суммарная вероятность двух оставшихся сообщений не станет равной единице. Код для каждого сообщения строится при записи двоичного числа справа налево путем обхода по линиям вверх направо, начиная с вероятности сообщения, для которого строится код.

6.2.3. Универсальный код при неизвестной статистике сообщений для $k$-й группы состоит из двух частей: префикса и суффикса. Префикс содержит $\log(n+1)$ двоичных знаков. Он указывает, к какой группе сообщений принадлежит кодируемый блок. Суффикс содержит $\log C_n^k$ двоичных символов и указывает номер блока в группе. Суффикс вычисляется по правилу

$$N(X) = C^1_{i_1-1} + C^2_{i_2-1} + \ldots + C^r_{i_r-1}. \qquad (6.3)$$

Для нахождения $N(X)$ используется таблица биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля):

$$\begin{array}{ccccccccc}
8 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 \\
7 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & \\
6 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & & \\
5 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & & & \\
4 & 3 & 3 & 1 & 0 & & & & \\
3 & 2 & 1 & 0 & & & & & \\
2 & 1 & 0 & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & &
\end{array} \qquad (6.4)$$

**Пример 6.2.** Для передачи по каналу связи без шумов используется код, состоящий из двух букв $a_1$ и $a_2$, появляющиеся с вероятностями $P(a_1) = 0{,}9$ и $P(a_2) = 0{,}1$ соответственно. Применить метод Шеннона-Фано к кодированию всевозможных однобуквенных, двухбуквенных и трехбуквенных сообщений. Определить среднюю длину в каждом случае и результаты сравнить между собой.

**Решение.** Определим энтропию сообщений

$$H(A) = -0{,}9 \cdot \log 0{,}9 - 0{,}1 \cdot \log 0{,}1 = 0{,}469 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{áóêâà}}.$$

Применяя метод Шеннона-Фано к двухбуквенному алфавиту получаем простейший код (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Код Шеннона-Фано для однобуквенных сообщений

| Буква | Вероятность | Код |
|---|---|---|
| $a_1$ | 0,9 | 1 |
| $a_2$ | 0,1 | 0 |

Этот код требуется для передачи каждой буквы одного двоичного символа ($L = 1$), что на 53% больше минимально возможного значения $H(A) = 0{,}469 \ \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{áóêâà}}$.

Применим метод Шеннона-Фано к кодированию всевозможных двухбуквенных комбинаций (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Код Шеннона-Фано для двухбуквенных сообщений

| Сообщение | Вероятность | Код |
|---|---|---|
| $a_1a_1$ | 0,81 | 1 |
| $a_1a_2$ | 0,09 | 01 |
| $a_2a_1$ | 0,09 | 001 |
| $a_2a_2$ | 0,01 | 000 |

Средняя длина кодового слова равна

$L = 1 \cdot 0{,}81 + 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}01 = 1{,}29$ бит.

Таким образом, на одну приходится 1,29/2 = 0,645 бит, что на лишь на 76% больше значения 0,469.

Произведем кодирование всевозможных трехбуквенных комбинаций (табл. 6.4).

Таблица 6.4

| Сообщение | Вероятность | Код | Сообщение | Вероятность | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1a_1a_1$ | 0,729 | 1 | $a_1a_2a_2$ | 0,009 | 00011 |
| $a_1a_1a_2$ | 0,081 | 011 | $a_2a_1a_2$ | 0,009 | 00010 |
| $a_1a_2a_1$ | 0,081 | 010 | $a_2a_2a_1$ | 0,009 | 00001 |
| $a_2a_1a_1$ | 0,081 | 001 | $a_2a_2a_2$ | 0,001 | 00000 |

Средняя длина кодового слова здесь равна

$$L = 0{,}729 + 3 \cdot 0{,}081 + 3 \cdot 0{,}081 + 3 \cdot 0{,}081 + 5 \cdot 0{,}009 + 5 \cdot 0{,}009 + \\ + 5 \cdot 0{,}009 + 5 \cdot 0{,}001 = 1{,}598 \text{ áèò.}$$

Таким образом, на одну букву текста приходится в среднем 1,598/3=0,532 бит, что только на 6,3% больше значения $H(A) = 0{,}469 \frac{\text{áèò}}{\text{áóêâà}}$.

**Ответ:** кодирование блоками более выгодно, чем кодировать отдельные буквы. 1

**Пример 6.3.** Закодировать блок $X = x_2x_1x_2x_1x_1x_1x_1x_2$ префиксным кодом при неизвестной статистике сообщений, если символ $x_1$ появляется с вероятностью $p$, а $x_2$ – с вероятностью $g$.

**Решение.** Определим число разрядов префикса

$$E\log(n+1) = E\log(8+1) = 4,$$

где $E$ – знак округления в большую сторону.

Вероятность слова

$$P(X) = p^5 g^3.$$

Тогда префикс будет 0011.

Число символов $x_1$ $r = 5,$ которые размещаются на местах: $i_1 = 2,\ i_2 = 4,\ i_3 = 5,\ i_4 = 6,\ i_5 = 7.$

Находим номер блока

$$N(X) = C_1^1 + C_3^2 + C_4^3 + C_5^4 + C_6^5.$$

Слагаемые в $N(X)$ находим, используя таблицу дополнительных коэффициентов. Таким образом,

$$N(X) = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 = 19$$

или в двоичной записи

$$N(X) = 10011.$$

Следовательно, закодированный блок поступит в канал связи в виде

$$X = 001110011.$$

**Пример 6.4.** Из канала связи принята кодовая комбинация $X = 001110011$ в префиксном коде с неизвестной статистикой сообщений. Декодировать дан-

ную кодовую комбинацию, если известно, что длина передаваемого блока равна $n = 8$, а разрядность префиксов равна четырем.

**Решение.** По префиксу находим, что число букв $x_2 = 3$, а, следовательно, число букв в $x_1 = 5$. Находим максимальное число в пятом столбце треугольника Паскаля, не превосходящее число 19, это $6 = C_{7-1}^5$, следовательно, $i_5 = 7$, находим разность 19-6=13. Находим далее максимальное число четвертого столбца, не превосходящее 13. Это $5 = C_{6-1}^4$, т.е. $i_4 = 6$. Находим разность 13-5=8. Максимальное число третьего столбца, не превосходящее 8, это $4 = C_{5-1}^3$, т.е. $i_3 = 5$. Находим разность 8-4=4. Максимальное число второго столбца, не превосходящее 4, это $3 = C_{4-1}^2$, т.е. $i_2 = 4$. Находим разность 4-3=1. Максимальное число первого столбца, не превышающее 1, это $1 = C_{2-1}^1$, т.е. $i_1 = 2$. Следовательно, декодируемое сообщение имеет вид

$$X = x_2 x_1 x_2 x_1 x_1 x_1 x_1 x_2,$$

что совпадает с условием примера 6.3.

### 6.3. Защита информации от несанкционированного доступа

6.3.1. При шифровании методом простой подстановки буквы кодируемого сообщения прямо заменяются другими буквами того же или другого алфавита.

6.3.2. В методе Вижинера каждая буква используемого алфавита нумеруется. Затем под сообщением подписывается с повторением ключ, который представляет собой некоторое слово или просто последовательность букв. Цифровой эквивалент каждой буквы криптограммы определяется в результате сложения цифровых эквивалентов буквы сообщения и подписанной под ней буквы ключа с приведением по модулю равным старшей цифре используемого алфавита. Полученная последовательность цифр заменяется буквами используемого алфавита.

6.3.3. При шифровании шифром с автоключом, шифрование начинается с ключа, называемого первичным, и продолжается с помощью открытого текста или криптограммы, смещенной на длину первичного ключа.

6.3.4. При гомофонической замене одному символу открытого текста ставят в соответствие несколько символов шифртекста.

6.3.5. Полиалфавитная подстановка использует несколько алфавитов шифртекста.

6.3.6. Полиграммная замена формируется из одного алфавита с помощью специальных правил. При использовании шифра Плейфера алфавит располагается в матрице. Открытый текст разбивается на пары символов. Каждая пара

символов открытого текста заменяется на пару символов и символов по определенным правилам.

6.3.7. При шифровании перестановкой открытый текст разбивается на группы определенной длины, а ключом задается порядок перестановки букв в группе. Наиболее сложные перестановки осуществляются по гамильтоновым путям.

6.3.8. В процессе шифрования по методу гаммирования цифровые эквиваленты знаков закрываемого сообщения складываются с псевдослучайной последовательностью чисел, именуемой гаммой, и приводятся по модулю $k$, где $k$ – объем алфавита знаков. Таким образом, псевдослучайная последовательность выполняет здесь роль ключа. Данный метод используется для криптографического закрытия сообщений, уже выраженных в двоичном коде.

6.3.9. В стандарте DES используется произведение простых шифров основанных на подстановках и перестановках.

6.3.10. Стандарт на шифрование данных ГОСТ 28147-89 предусматривает использование режимов замены и гаммирования.

6.3.11. В криптографических системах с открытым ключом один ключ используется для шифрования, а другой – для расшифрования.

**Пример 6.5.** Зашифровать фразу «ОТКРЫТЫЙ ТЕКСТ» шифром Плейфера.

**Решение.** Воспользовавшись матрицей алфавита шифра Плейфера (табл. 6.12 [1]) получим криптограмму
«ЛДЭЪРФР-ЛФС,ЬЛ».

**Пример 6.6.** Открытый текст «Я СТУДЕНТ ТРЕТЬЕГО КУРСА БГУИР.» зашифровать методом перестановки. Правила перестановки (ключ) группы из восьми букв с порядковыми номерами 1-2-3-4-5-6-7-8 переставить в порядок 5-6-2-1-3-7-4-8.

**Решение.** Разбиваем открытый текст на группы длиной по восемь элементов. В результате чего получим четыре группы:

Я СТУДЕНТ ТРЕТЬЕГО КУРСА БГУИР.
12345678123456781234567812345 67

Осуществляя перестановки по заданному ключу получим
«УД□ЯСЕТНЕТ□ТТЬРЕУРОГ□СКАИРБ□Г.У»

**Пример 6.7.** Зашифровать сообщение «МОЗГ» алгоритмом RSA, если открытый ключ (e,n)= (7.33), а секретный ключ (d,n)=(3.33).

**Решение**. Представим шифрируемое сообщение, как последовательность целых чисел взятых из табл. 6.8 [1]
«13-15-08-04». Зашифруем эту последовательность, используя открытый ключ(7.33):

$$C_1 = 13^7 (\mathrm{mod} 33) = 62748517 (\mathrm{mod} 33) = 7,$$
$$C_2 = 15^7 (\mathrm{mod}\, 33) = 170859375 (\mathrm{mod}\, 33) = 27,$$
$$C_3 = 8^7 (\mathrm{mod}\, 33) = 2097152 (\mathrm{mod}\, 33) = 2,$$
$$C_4 = 4^7 (\mathrm{mod} 33) = 16384 (\mathrm{mod}\, 33) = 16.$$

В канал связи поступит криптограмма «07-27-02-16». Расшифруем это сообщение с помощью секретного ключа (3.33).

Получим:

$$M_1 = 7^3 (\mathrm{mod}\, 33) = 343 (\mathrm{mod}\, 33) = 13,$$
$$M_2 = 27^3 (\mathrm{mod}\, 33) = 19683 (\mathrm{mod}\, 33) = 15,$$
$$M_3 = 2^3 (\mathrm{mod} 33) = 8,$$
$$M_4 = 16^3 (\mathrm{mod}\, 33) = 4096 (\mathrm{mod}\, 33) = 4.$$

Таким образом, в результате расшифрования криптограммы получено исходное сообщение «13-15-08-04», что согласно табл. 6.8 [1] соответствует исходному тексту «МОЗГ». А теперь удостоверимся, что открытым ключом (7.33) невозможно правильно дешифровать криптограмму «07-27-02-16». Результат дешифровки:

$$M_1^* = 7^7 (\mathrm{mod}\, 33) = 823543 (\mathrm{mod}\, 33) = 28,$$
$$M_2^* = 27^7 (\mathrm{mod} 33) = 10460353203\ (\mathrm{mod}\ 33) = 3,$$
$$M_3^* = 2^7 (\mathrm{mod}\, 33) = 127 (\mathrm{mod}\, 33) = 28,$$
$$M_4^* = 16^7 (\mathrm{mod}\ 33) = 268435456\ (\mathrm{mod}\ 33) = 25.$$

Таким образом, в результате дешифровки открытым ключом получим сообщение в цифровом эквиваленте «28-03-28-25», что не соответствует исходному – «13-15-08-04».

### 6.4. Задачи и упражнения

6.4.1. Определить среднюю длину кодового слова при передаче $x_i$ сообщений длиной $\mu_i$ и вероятностями появления $P(x_i)$, указанными в табл. 6.5.

Таблица 6.5

| Сообщения | $P(x_i)$ | Кодовые слова |
|---|---|---|
| $x_1$ | 0,35 | 11 |
| $x_2$ | 0,25 | 10 |
| $x_3$ | 0,20 | 010 |
| $x_4$ | 0,15 | 0010 |

| | | |
|---|---|---|
| $x_5$ | 0,05 | 0001 |

Ответ: $L = 2{,}6$ символа.

6.4.2. По каналу связи без помех передаются пять сообщений с вероятностями $P(x_1) = 0{,}30$; $P(x_2) = 0{,}20$; $P(x_3) = 0{,}40$; $P(x_4) = P(x_5) = 0{,}05$ в двоичном коде. Определить нижнюю границу средней длины кодового слова.

Ответ: $L = 1{,}95$ символа.

6.4.3. По каналу связи без помех передаются в двоичном коде пять сообщений с вероятностями $P(x_1) = 1/2$; $P(x_2) = 1/4$; $P(x_3) = 1/8$; $P(x_4) = 1/16$, $P(x_5) = 1/32$. Определить нижнюю границу средней длины кодового слова и результаты сравнить с результатами задачи 6.4.2.

Ответ: $L = 1{,}78$; из сравнения вытекает, что если вероятности сообщений не являются целочисленными степенями числа m, точное достижение нижней границы невозможно.

6.4.4. Построить код Шеннона-Фано для восьми сообщений, имеющих следующие вероятности: 0,2; 0,2; 0,15; 0,13; 0,12; 0,10; 0,07; 0,03. Определить среднее число нулей, приходящихся на одно сообщение.

Ответ: $L = 2{,}9$ символа, что меньше чем при равномерном кодировании ($L = 3$) и не очень далеко от энтропии: $H(X) = 2{,}806 \frac{\text{äâ.åä.}}{\text{ñîîáù.}}$.

6.4.5. Для передачи по каналу связи без шумов используется код, состоящий из двух букв $a_1$ и $a_2$, появляющихся с вероятностями $P(a_1)=0{,}8$ и $P(a_2)=0{,}2$. Применить метод Шеннона-Фано к кодированию всевозможных однобуквенных, двухбуквенных и трехбуквенных сообщений. Определить среднюю длину в каждом случае и результаты сравнить между собой.

Ответ: $L(1) = 1$; $L(2) = 0{,}78$; $L(3) = 0{,}728$; $H(A) = 0{,}722 \frac{\text{áèò}}{\text{áóêâà}}$; кодирование блоками более выгодно, чем кодирование отдельных букв.

6.4.6. Построить код Хаффмана для восьми сообщений, имеющих следующие вероятности: 0,2; 0,2; 0,15; 0,13; 0,12; 0,10; 0,07; 0,03. Определить среднее число нулей и единиц, приходящихся на одно сообщение, и сравнить с результатами, полученными при решении задачи 6.4.4.

Ответ: $L = 2{,}9$; по экономичности в данном случае методы Шеннона-Фано и Хаффмана одинаковы.

6.4.7. Для передачи по каналу связи без шумов используется код, состоящий из двух букв $a_1$ и $a_2$, с вероятностями $P(a_1) = 0{,}8$ и $P(a_2) = 0{,}2$. Применить метод Хаффмана к кодированию всевозможных однобуквенных сообщений. Определить среднюю длину, скорость передачи, избыточность для каждого случая и сравнить их между собой, если длительности кодовых символов одинаковы и равны $\tau = 10^{-6}$ с.

Ответ: $L(1) = 1$ бит; $R_{t1} = 721900$ бит/с; $R(1) = 0{,}2781$; $L(2) = 0{,}78$ бит; $R_{t2} = 925513$ бит/с; $R(2) = 0{,}0042$; $L(3) = 0{,}728$ бит; $R_{t3} = 991620$ бит/с; $R(3)=0{,}002$.

Кодирование трехбуквенных комбинаций дает возможность приблизиться к максимальной скорости передачи информации.

6.4.8. По каналу связи передаются четыре сообщения кодовыми комбинациями

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|
| 001 | 01 | 0111 | 100 |

Определить, являются ли данные кодовые комбинации комбинациями префиксного кода.

Ответ: не являются.

6.4.9. По каналу связи передается последовательность 110110101100110010 комбинаций префиксного кода

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 011 | 010 | 001 |

Произвести декодирование данной последовательности.

Ответ: $x_1x_3x_4x_1x_5x_2x_4$.

6.4.10. Алфавит кода состоит из двух символов $x_1$ и $x_2$, появляющихся с вероятностями $p$ и $q$. Построить префиксный код, если кодовые комбинации передаются блоками, состоящими из $n = 3$ символов.

Ответ: 00, 0100, 0101, 0110, 1000, 1000, 1010, 11, где подчеркнуты префиксы.

6.4.11. Закодировать блок $X=x_1x_2x_2x_1x_1x_1x_2x_1$ префиксным кодом при неизвестной статистике сообщений, если символы $x_1$ появляются с вероятностью $p$, а $x_2$ – с вероятностью $q$.

Ответ: $X$=0011100001.

6.4.12. Из канала связи принята кодовая комбинация $X$=0011100001 в префиксном коде с неизвестной статистикой сообщений. Декодировать данную кодовую комбинацию, если известно, что длина передаваемого блока равна $n$=8, а разрядность префикса равна четырем.

Ответ: $X=x_1x_2x_2x_1x_1x_1x_2x_1$.

6.4.13. Закодировать сообщение КРИПТОГРАММА методом простой подстановки, используя в качестве ключа буквы английского алфавита в соответствии с табл. 6.6.

Таблица 6.6

| А | Б | В | Г | Д | Е | Ж | З | И | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Ю | Я |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |

Ответ: IPJORNDPALLA.

6.4.14. Зашифровать сообщение ТЕЛЕМЕХАНИКА кодом Вижинера ключом ЭКЗАМЕН.
Ответ: РРУЖШМДЮЧСЛН.

# 7. КОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ПО ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛУ С ПОМЕХАМИ

## 7.1. Основные формулы

Число разрешенных кодовых комбинаций, если число информационных символов равно *k*:

$$N_1 = 2^k. \tag{7.1}$$

Общее число выходных кодовых комбинаций длиной *n*:

$$N_2 = 2^n. \tag{7.2}$$

Число запрещенных кодовых комбинаций (исправляемых ошибок):

$$N_3 = 2^n - 2^k. \tag{7.3}$$

Количество случаев появления необнаруживаемых ошибок

$$N_4 = 2^k(2^k - 1). \tag{7.4}$$

Количество случаев появления обнаруживаемых ошибок:

$$N_5 = 2^k(2^n - 2^k). \tag{7.5}$$

Общее количество возможных случаев передачи:

$$N_6 = 2^k \cdot 2^n. \tag{7.6}$$

Если производительность источника информации равна $\overline{H}(X)\ \frac{\text{áèò}}{\text{ñ}}$, то скорость передачи после кодирования:

$$V_k = \frac{\overline{H}(X)}{n}\ \frac{\text{áèò}}{\text{ñ}}. \tag{7.7}$$

Минимальное кодовое расстояние для обнаружения ошибок кратностью *m:*

$$d_{\min} \geq m + 1. \quad (7.8)$$

Минимальное кодовое расстояние для исправления ошибок кратностью *s:*

$$d_{\min} \geq 2s + 1. \quad (7.9)$$

Минимальное кодовое расстояние для обнаружения и исправления ошибок:

$$d_{\min} \geq m + s + 1. \quad (7.10)$$

Число проверочных символов, если известна общая длина кодовой комбинации *n:*

$$r_{d=3} \geq E\log(n+1), \quad (7.11)$$

$$r_{d=4} \geq E\log(2n). \quad (7.12)$$

Число проверочных символов, если известно число информационных символов:

$$r_{d=3} = E\log((k+1) + E\log(k+1)), \quad (7.13)$$

где $E$ – знак округления в большую сторону.

**Пример 7.1.** Для передачи сообщения используется код Хэмминга $n = 7$, $k$=4. Определить число разрешенных кодовых комбинаций, общее число $n$-разрядных кодовых комбинаций, число случаев появления необнаруженных ошибок, число случаев появления обнаруженных ошибок, число исправляемых ошибок и общее число возможных случаев передачи.

**Решение.** Число разрешенных кодовых комбинаций

$$N_1 = 2^k = 2^4 = 16.$$

Общее число кодовых комбинаций, которые могут быть представлены $n$-разряд-ным кодом

$$N_2 = 2^n = 2^7 = 128.$$

Число случаев появления необнаруживаемых ошибок

$$N_3 = 2^k \cdot (2^k - 1) = 2^4 \cdot (2^4 - 1) = 16 \cdot 15 = 240.$$

Число случаев обнаруживаемых ошибок

$$N_4 = 2^k \cdot (2^n - 2^k) = 2^4 \cdot (2^7 - 2^4) = 16(128 - 16) = 1792.$$

Число случаев исправленных ошибок

$$N_5 = (2^n - 2^k) = 2^7 - 2^4 = 128 - 16 = 112.$$

Общее число возможных случаев передачи

$$N_6 = 2^k \cdot 2^n = 2^4 \cdot 2^7 = 16 \cdot 128 = 2048.$$

**Пример 7.2.** Определить минимальное кодовое расстояние *d*, если код должен обнаруживать ошибки кратностью $m = 2$ или исправлять ошибки кратностью $S = 1$ обнаруживать и исправлять ошибки, указанной кратности.

**Решение.** При обнаружении ошибок кратностью $m = 2$:

$$d_{\min} = m + 1 = 2 + 1 = 3.$$

При исправлении ошибок кратностью $S = 1$.

$$d_{\min} = 2S + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

При обнаружении и исправлении ошибок

$$d_{\min} = S + m + 1 = 1 + 2 + 1 = 4.$$

## 7.2. Общие правила построения корректирующих кодов

7.2.1. Образующая матрица *M* систематического кода состоит из единичной матрицы размерностью $k \times k$ и приписанной к ней справа матрицей дополнений размерностью $k \times r$. Причем вес каждой строки матрицы дополнений должен быть не меньше чем $d_{min}$-1.

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kr} \end{Vmatrix}. \qquad (7.14)$$

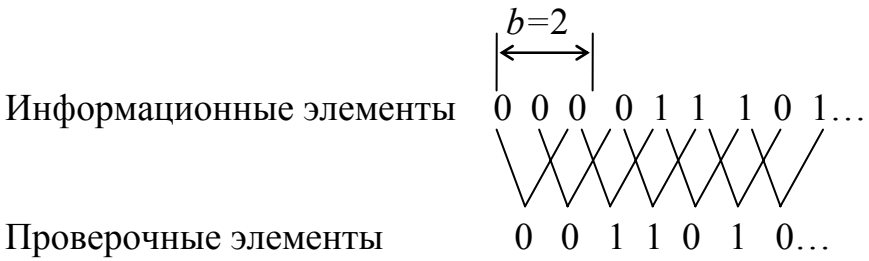
Проверочная матрица *N* строится из образующей матрицы M следующим образом. Строками матрицы *N* являются столбцы матрицы дополнений образующей матрицы *M*. К полученной матрице дописывается справа единичная матрица размерностью $r \times r$.

$$N = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{k1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{k2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{kr} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (7.15)$$

Единицы, стоящие в каждой строке, однозначно определяют, какие символы должны участвовать в определении значения контрольного разряда. Причем единицы в единичной матрице $N$ определяют номера контрольных разрядов.

Декодирование систематических кодов осуществляется с учетом правил кодирования.

7.2.2. Проверочные элементы в рекуррентном коде формируются путем сложения по модулю два двух информационных элементов, отстоящих друг от друга на шаг сложения, равный $b$.




В данном коде после каждого информационного элемента следует проверочный элемент.

Процесс декодирования заключается в выработке проверочных элементов из информационных, поступивших на декодер, и их сравнении с проверочными символами, пришедшими из канала связи. В результате сравнения вырабатывается корректирующая последовательность, которая и производит исправление информационных элементов.

**Пример 7.3.** Определить число контрольных символов, в коде, позволяющем обнаруживать двойные ошибки, если число информационных символов $k = 7$.

**Решение.** Определим минимальное кодовое расстояние:

$$d_{\min} = m + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Тогда число контрольных символов

$$r_{d=3} \geq E\log((k+1) + E\log(k+1)) = E\log((7+1) + E\log(7+1)) =$$
$$= E\log(8 + E\log 8) = E\log(8+3) = 4.$$

**Пример 7.4.** Получить алгоритм кодирования и декодирования кодовых комбинаций в систематическом коде, позволяющим обнаруживать двойные или исправлять одиночные ошибки, если число информационных символов $k = 3$.

**Решение.** Определим минимальное кодовое расстояние

$$d_{\min} = 2S + 1 = m + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Число контрольных символов

$$r_{d=3} \geq E\log((k+1) + E\log(k+1)) =$$
$$= E\log((3+1) + E\log(3+1)) = E\log(4+2) = 3.$$

Строим образующую матрицу.

$$M = \begin{Vmatrix} 100011 \\ 010101 \\ 001111 \end{Vmatrix}.$$

Из образующей матрицы строим проверочную

$$N = \begin{array}{c} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Из проверочной матрицы получаем алгоритм образования контрольных символов

$$a_4 = a_2 \oplus a_3;$$
$$a_5 = a_1 \oplus a_3;$$
$$a_6 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3.$$

На приемной стороне производятся $S_i$ проверки, которые составляются на основании алгоритма кодирования

$$S_1 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4;$$
$$S_2 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5;$$
$$S_3 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6.$$

Синдром $S_1 S_2 S_3$ – однозначно указывает на номер искажения разряда. Рассмотрим всевозможные состояния $S_1 S_2 S_3$:

| $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | – èñêàæåíèé íåò |
| 0 | 0 | 1 | – èñêàæåí $a_6$ |
| 0 | 1 | 0 | – èñêàæåí $a_5$ |
| 1 | 0 | 0 | – èñêàæåí $a_4$ |
| 1 | 0 | 1 | – èñêàæåí $a_3$ |
| 1 | 1 | 1 | – èñêàæåí $a_2$ |
| 0 | 1 | 1 | – èñêàæåí $a_1$ |

**Пример 7.5.** На основании алгоритма, полученного в примере 7.4, закодировать кодовую комбинацию $G(X) = 111$ в систематическом коде с кодовым расстоянием $d_{\min} = 3$.

**Решение.** Определим значения контрольных символов. Для чего пронумеруем символы входной комбинации

$$\begin{array}{c} a_1 a_2 a_3 \\ G(X) = 1\ 1\ 1. \end{array}$$

Тогда

$$a_4 = 1 \oplus 1 = 0;$$
$$a_5 = 1 \oplus 1 = 0;$$
$$a_6 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

В результате получим кодовую комбинацию

$$F(X) = 111001.$$

**Ответ:** $F(X) = 111001.$

**Пример 7.6.** На основании алгоритма для $S_i$ проверок, полученных в примере 7.4, декодировать комбинацию $F'(X) = 110001 \rightarrow a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$.

**Решение.** Определим значения $S_i$ проверок

$$S_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$
$$S_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$
$$S_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Синдром $S_1S_2S_3 = 111.$ указывает, что искажен символ $a_3$. Изменяем значение этого символа на противоположный и получаем исправленную кодовую комбинацию

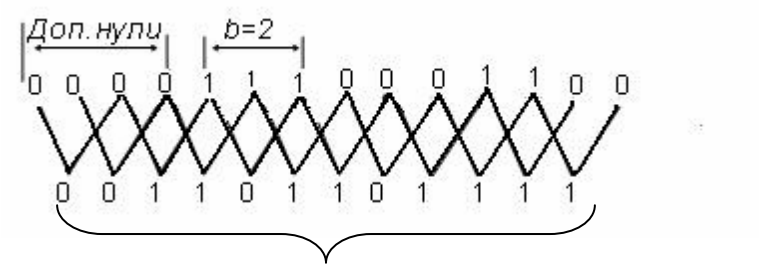
$$F(X) = 111001,$$

что совпадает с кодовой комбинацией примера 7.5.

**Ответ:** искажен $a_3$, $F(X) = 111001$.

**Пример 7.7.** Закодировать в рекуррентном коде последовательность информационных символов $G(X) = 1110001100.$ с шагом сложения $b = 2$.

**Решение.** Кодирование произведем с помощью кодера, структурная схема которого представлена на рис. 7.5 [3], из которой следует, что контрольные символы формируются с задержкой на $b$ тактов. По этому перед информационной последовательностью, подлежащей кодированию, необходимо приписать $2b$ нулей, т.е. четыре. Контрольные символы образуются путем сложения по модулю 2 двух информационных символов расположенных на расстоянии $b$ друг от друга. Процесс образования контрольных символов показан на рис. 7.1.




Контрольные символы

Рис. 7.1. Схема построения рекуррентного кода с $b = 2$.

В данном коде, как следует из рис.7.5 [3], после каждого информационного символа следует проверочный символ. Таким образом, на выходе получим последовательность символов $F(X) = 10101101000111100101$.

**Ответ:** Закодированная последовательность $F(X) = 10101101000111100101.$

### 7.3. Задачи и упражнения

7.3.1. По каналу связи передаются кодовые комбинации

$x_1 = 1001001,$
$x_2 = 1011011,$
$x_3 = 0110101.$

Определить минимальное кодовое расстояние.

Ответ: $d_{min} = 2$.

7.3.2. В качестве информационных последовательностей используется двоичный $k$=2 разрядный код. В канал связи передаются последовательности длиной $n$=9. Определить число разрешенных кодовых комбинаций; общее число
$n$-разрядных кодовых комбинаций; число случаев появления необнаруживаемых, обнаруживаемых и исправляемых ошибок; общее число возможных случаев передачи.

Ответ: $N_1 = 32$, $N_2 = 512$, $N_3 = 480$, $N_4 = 992$, $N_5 = 15360$, $N_6 = 16384$.

7.3.3. Определить число контрольных символов ($r$) в коде, позволяющем исправлять одинарную ошибку или обнаруживать двукратные искажения, если число информационных символов $k=5$.

Ответ: $r = 4$.

7.3.4. Определить число контрольных символов в коде, позволяющем обнаруживать двойные и исправлять единичные ошибки в кодовых комбинациях длиной $n = 9$.

Ответ: $r = 5$.

7.3.5. По условиям задачи 7.3.2 определить процент обнаруживаемых ошибочных кодовых комбинаций по отношению к общему числу возможных случаев передачи; процент исправления ошибочных кодовых комбинаций по отношению к числу обнаруживаемых ошибочных комбинаций, а также избыточность кода.

Ответ: процент обнаружения 93,75;
процент исправления 3,1;
избыточность 44%.

7.3.6. Получить алгоритм кодирования и декодирования кодовых комбинаций в систематическом коде, позволяющем обнаруживать двойные или исправлять единичные ошибки, если число информационных символов $k = 5$.

7.3.7. На основании алгоритма, полученного в задаче 7.3.6, закодировать кодовую комбинацию $G(X) = 11101$ в систематическом коде с кодовым расстоянием $d_{min}$=3.

7.3.8. На основании алгоритма для $S_i$ проверок, полученных в задаче 7.3.6, декодировать кодовую комбинацию $F'(X) = 111000011$.

7.3.9. Закодировать в рекуррентном коде последовательность информационных символов 1111000011111100 с шагом сложения $b = 3$. Привести функциональную электрическую схему кодирующего устройства и с ее помощью пояснить процесс образования контрольных символов.

Ответ: $F(X) = 10101011010100011111101111110000$.

7.3.10. Из канала связи с помехами поступила последовательность $F'(X) = 1001011101010001111110111111000$, закодированная в рекуррентном коде с шагом сложения $b = 3$. Декодировать данную последовательность. Привести функциональную электрическую схему декодера и с её помощью пояснить процесс декодирования.

Ответ*:* $G(X) = 1111000011111100$.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А1

Значения двоичных логарифмов целых чисел от 1 до 194

| $x$ | $\log_2 x$ | $x$ | $\log_2 x$ | $x$ | $\log_2 x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 30 | 4,907 | 60 | 5,907 |
| 1 | 0,000 | 31 | 4,954 | 61 | 5,931 |
| 2 | 1,000 | 32 | 5,000 | 62 | 5,951 |
| 3 | 1,585 | 33 | 5,044 | 63 | 5,977 |
| 4 | 2,000 | 34 | 5,087 | 64 | 6,000 |
| 5 | 2,322 | 35 | 5,129 | 65 | 6,022 |
| 6 | 2,585 | 36 | 5,170 | 66 | 6,044 |
| 7 | 2,807 | 37 | 5,209 | 67 | 6,066 |
| 8 | 3,000 | 38 | 5,248 | 68 | 6,087 |
| 9 | 3,170 | 39 | 5,285 | 69 | 6,109 |
| 10 | 3,332 | 40 | 5,322 | 70 | 6,129 |
| 11 | 3,459 | 41 | 5,358 | 71 | 6,150 |
| 12 | 3,585 | 42 | 5,392 | 72 | 6,170 |
| 13 | 3,700 | 43 | 5,426 | 73 | 6,190 |
| 14 | 3,807 | 44 | 5,459 | 74 | 6,209 |
| 15 | 3,907 | 45 | 5,492 | 75 | 6,229 |
| 16 | 4,000 | 46 | 5,524 | 76 | 6,248 |
| 17 | 4,087 | 47 | 5,555 | 77 | 6,267 |
| 18 | 4,170 | 48 | 5,585 | 78 | 6,285 |
| 19 | 4,248 | 49 | 5,615 | 79 | 6,304 |
| 20 | 4,322 | 50 | 5,644 | 80 | 6,322 |
| 21 | 4,392 | 51 | 5,672 | 81 | 6,340 |
| 22 | 4,459 | 52 | 5,700 | 82 | 6,358 |
| 23 | 4,524 | 53 | 5,728 | 83 | 6,375 |
| 24 | 4,585 | 54 | 5,755 | 84 | 6,392 |
| 25 | 4,644 | 55 | 5,781 | 85 | 6,409 |
| 26 | 4,700 | 56 | 5,807 | 86 | 6,426 |
| 27 | 4,755 | 57 | 5,833 | 87 | 6,443 |
| 28 | 4,807 | 58 | 5,858 | 88 | 6,459 |
| 29 | 4,858 | 59 | 5,883 | 89 | 6,470 |

Окончание табл. А1

| $x$ | $\log_2 x$ | $x$ | $\log_2 x$ | $x$ | $\log_2 x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 6,492 | 125 | 6,966 | 160 | 7,322 |
| 91 | 6,508 | 126 | 6,977 | 161 | 7,331 |
| 92 | 6,524 | 127 | 6,989 | 162 | 7,340 |
| 93 | 6,539 | 128 | 7,000 | 163 | 7,349 |
| 94 | 6,555 | 129 | 7,011 | 164 | 7,358 |
| 95 | 6,570 | 130 | 7,022 | 165 | 7,366 |
| 96 | 6,585 | 131 | 7,033 | 166 | 7,375 |
| 97 | 6,600 | 132 | 7,044 | 167 | 7,384 |
| 98 | 6,615 | 133 | 7,055 | 168 | 7,392 |
| 99 | 6,629 | 134 | 7,066 | 169 | 7,401 |
| 100 | 6,644 | 135 | 7,077 | 170 | 7,409 |
| 101 | 6,658 | 136 | 7,087 | 171 | 7,418 |
| 102 | 6,672 | 137 | 7,098 | 172 | 7,426 |
| 103 | 6,687 | 138 | 7,109 | 173 | 7,435 |
| 104 | 6,700 | 139 | 7,119 | 174 | 7,443 |
| 105 | 6,714 | 140 | 7,129 | 175 | 7,451 |
| 106 | 6,728 | 141 | 7,140 | 176 | 7,459 |
| 107 | 6,741 | 142 | 7,150 | 177 | 7,468 |
| 108 | 6,755 | 143 | 7,160 | 178 | 7,476 |
| 109 | 6,768 | 144 | 7,170 | 179 | 7,484 |
| 110 | 6,781 | 145 | 7,180 | 180 | 7,492 |
| 111 | 6,794 | 146 | 7,190 | 181 | 7,500 |
| 112 | 6,807 | 147 | 7,200 | 182 | 7,508 |
| 113 | 6,820 | 148 | 7,209 | 183 | 7,516 |
| 114 | 6,833 | 149 | 7,219 | 184 | 7,524 |
| 115 | 6,845 | 150 | 7,229 | 185 | 7,531 |
| 116 | 6,858 | 151 | 7,238 | 186 | 7,539 |
| 117 | 6,870 | 152 | 7,248 | 187 | 7,547 |
| 118 | 6,883 | 153 | 7,257 | 188 | 7,555 |
| 119 | 6,895 | 154 | 7,267 | 189 | 7,562 |
| 120 | 6,907 | 155 | 7,276 | 190 | 7,570 |
| 121 | 6,919 | 156 | 7,285 | 191 | 7,577 |
| 122 | 6,931 | 157 | 7,295 | 192 | 7,585 |
| 123 | 6,943 | 158 | 7,304 | 193 | 7,592 |
| 124 | 6,954 | 159 | 7,313 | 194 | 7,600 |

Таблица А2

Значение функций $-p \cdot \log_2 p$ и $-\log_2 p$

| $p$ | $-\log_2 p$ | $-p \cdot \log_2 p$ | $p$ | $-\log_2 p$ | $-p \cdot \log_2 p$ | $p$ | $-\log_2 p$ | $-p \cdot \log_2 p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | | 0,0000 | 0,35 | 1,5146 | 0,5301 | 0,70 | 0,5146 | 0,3602 |
| 0,01 | 6,6439 | 0,0664 | 0,36 | 1,4739 | 0,5306 | 0,71 | 0,4941 | 0,3508 |
| 0,02 | 5,6439 | 0,1129 | 0,37 | 1,4344 | 0,5307 | 0,72 | 0,4739 | 0,3412 |
| 0,03 | 5,0589 | 0,1518 | 0,38 | 1,3959 | 0,5304 | 0,73 | 0,4540 | 0,3314 |
| 0,04 | 4,6439 | 0,1858 | 0,39 | 1,3585 | 0,5298 | 0,74 | 0,4344 | 0,3215 |
| 0,05 | 4,3219 | 0,2161 | 0,40 | 1,3219 | 0,5288 | 0,75 | 0,4150 | 0,3113 |
| 0,06 | 4,0589 | 0,2435 | 0,41 | 1,2863 | 0,5274 | 0,76 | 0,3959 | 0,3009 |
| 0,07 | 3,9365 | 0,2686 | 0,42 | 1,2515 | 0,5256 | 0,77 | 0,3771 | 0,2903 |
| 0,08 | 3,6439 | 0,2915 | 0,43 | 1,2176 | 0,5236 | 0,78 | 0,3585 | 0,2796 |
| 0,09 | 3,4739 | 0,3127 | 0,44 | 1,1844 | 0,5211 | 0,79 | 0,3401 | 0,2687 |
| 0,10 | 3,3219 | 0,3322 | 0,45 | 1,1520 | 0,5184 | 0,80 | 0,3220 | 0,2575 |
| 0,11 | 3,1844 | 0,3503 | 0,46 | 1,1202 | 0,5153 | 0,81 | 0,3040 | 0,2462 |
| 0,12 | 3,0589 | 0,3671 | 0,47 | 1,0893 | 0,5120 | 0,82 | 0,2863 | 0,2348 |
| 0,13 | 2,9434 | 0,3826 | 0,48 | 1,0589 | 0,5083 | 0,83 | 0,2688 | 0,2231 |
| 0,14 | 2,8365 | 0,3971 | 0,49 | 1,0292 | 0,5043 | 0,84 | 0,2515 | 0,2113 |
| 0,15 | 2,7370 | 0,4105 | 0,50 | 1,0000 | 0,5000 | 0,85 | 0,2345 | 0,1993 |
| 0,16 | 2,6439 | 0,4230 | 0,51 | 0,9714 | 0,4954 | 0,86 | 0,2176 | 0,1871 |
| 0,17 | 2,5564 | 0,4346 | 0,52 | 0,9434 | 0,4906 | 0,87 | 0,2009 | 0,1784 |
| 0,18 | 2,4739 | 0,4453 | 0,53 | 0,9159 | 0,4854 | 0,88 | 0,1844 | 0,1623 |
| 0,19 | 2,3959 | 0,4552 | 0,54 | 0,8890 | 0,4800 | 0,89 | 0,1681 | 0,1496 |
| 0,20 | 2,3219 | 0,4644 | 0,55 | 0,8625 | 0,4744 | 0,90 | 0,1520 | 0,1368 |
| 0,21 | 2,2515 | 0,4728 | 0,56 | 0,8365 | 0,4684 | 0,91 | 0,1361 | 0,1238 |
| 0,22 | 2,1844 | 0,4806 | 0,57 | 0,8110 | 0,4623 | 0,92 | 0,1203 | 0,1107 |
| 0,23 | 2,1203 | 0,4877 | 0,58 | 0,7859 | 0,4558 | 0,93 | 0,1047 | 0,0974 |
| 0,24 | 2,0589 | 0,4941 | 0,59 | 0,7612 | 0,4491 | 0,94 | 0,0893 | 0,0839 |
| 0,25 | 2,0000 | 0,5060 | 0,60 | 0,7370 | 0,4422 | 0,95 | 0,0740 | 0,0703 |
| 0,26 | 1,9434 | 0,5053 | 0,61 | 0,7331 | 0,4350 | 0,96 | 0,0589 | 0,0565 |
| 0,27 | 1,8890 | 0,5100 | 0,62 | 0,6897 | 0,4276 | 0,97 | 0,0439 | 0,0426 |
| 0,28 | 1,8365 | 0,5142 | 0,63 | 0,6666 | 0,4199 | 0,98 | 0,0291 | 0,0286 |
| 0,29 | 1,7859 | 0,5179 | 0,64 | 0,6439 | 0,4121 | 0,99 | 0,0145 | 0,0143 |
| 0,30 | 1,7370 | 0,5211 | 0,65 | 0,6215 | 0,4040 | 1,00 | 0,0000 | 0,0014 |
| 0,31 | 1,6897 | 0,5238 | 0,66 | 0,5995 | 0,3957 | | | |
| 0,32 | 1,6439 | 0,5260 | 0,67 | 0,5778 | 0,3871 | | | |
| 0,33 | 1,5994 | 0,5278 | 0,68 | 0,5564 | 0,3784 | | | |
| 0,34 | 1,5564 | 0,5292 | 0,69 | 0,5353 | 0,3694 | | | |

# СОДЕРЖАНИЕ