

Учреждение образования «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Объект авторского права

УДК 629.735.33

БУМАЙ
Андрей Юрьевич

**ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ И СИНТЕЗ
АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ
АППАРАТОМ ПРИ ОБЛЕТЕ ЗАПРЕТНОЙ ЗОНЫ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук
по специальностям
05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации
05.13.06 – автоматизация и управление технологическими процессами и
производствами

Минск 2026

Научная работа выполнена в Белорусском национальном техническом университете

Научный руководитель **Лобатый Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Робототехнические системы» Белорусского национального технического университета

Официальные оппоненты: **Татур Михаил Михайлович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры электронных вычислительных машин учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Ильев Игорь Георгиевич, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры информационно-вычислительных систем учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»

Оппонирующая организация Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Защита состоится «14» мая 2026 г. в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.15.01 при учреждении образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» по адресу: 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, корпус 1, ауд. 232. e-mail: dissovet@bsuir.by, тел. +375-17-293-89-89,

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Автореферат разослан «8» апреля 2026 года

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 02.15.01
доктор технических наук, профессор



М. М. Татур

ВВЕДЕНИЕ

Одним из путей повышения эффективности применения беспилотных летательных аппаратов (БЛА) является обоснование принципов формирования траекторий полета БЛА, обеспечивающих оптимальное управление. Формирование траектории представляет собой важную задачу, которая включает в себя соблюдение различных ограничений, наложенных на конструкцию и систему управления БЛА, а также – эксплуатационных требований. В диссертации рассмотрены вопросы обоснования принципов формирования оптимальных траекторий БЛА, учитывающих наличие областей воздушного пространства, в которых запрещен полет любых БЛА (запретные зоны), а также предлагаются алгоритм комплексирования источников информации на борту БЛА, методика расчета эффективности и пути ее повышения на этапе предварительного проектирования БЛА.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема работы соответствует научному направлению кафедры «Информационные системы и технологии» Белорусского национального технического университета и ГПНИ «Цифровые и космические технологии, безопасность общества и государства» подпрограммы «Цифровые технологии и космическая информатика» по заданию 1.10.8 «Повышение надежности функционирования и совершенствование конструкции и систем управления беспилотных летательных аппаратов на основе цифровых моделей» (Рег.№ 20212499), заданию 8 ГНТП «Роботизированные комплексы и авиакосмические технологии», 2016–2020 годы и ГНТП «Роботизированные комплексы и системы», 2021–2025 годы.

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Цель исследования заключается в разработке методик и алгоритмов формирования траектории и синтеза элементов системы управления беспилотным летательным аппаратом, а также оценки его эффективности при облете бесполетных запретных зон.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ методик формирования траекторий беспилотных летательных аппаратов.
2. Разработать методики и алгоритмы построения оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства при облете запретных зон.
3. Провести аналитический синтез математической модели автопилота беспилотного летательного аппарата.

4. Провести анализ и исследование особенностей алгоритмической фильтрации в комплексах ориентации и навигации БЛА.

5. Разработать методику оценки вероятности попадания беспилотного летательного аппарата в запретную зону.

Объект исследования – система управления БЛА.

Предмет исследования – методики и алгоритмы формирования оптимальной траектории полета БЛА при облете запретных зон.

Научная новизна

1. Обоснованы и разработаны методики построения оптимальных параметров траектории пролета БЛА при облете запретных зон автоматически, отличающиеся аналитическим решением задачи оптимизации и заданием запретной зоны в виде заданных точек пространства, через которые должна проходить траектория БЛА, позволяющие учесть динамические характеристики БЛА, что обеспечивает отклонение траектории БЛА от заданных промежуточных точек пространства от 7 до 20 м в зависимости от углов и ориентации вектора скорости и является приемлемым для решения задач облета запретных зон на безопасном расстоянии.

2. Разработана методика и алгоритм поэтапного аналитического синтеза закона управления БЛА на начальных этапах разработки системы управления БЛА, обеспечивающие выполнение заданных требований к устойчивости и динамической точности управления БЛА, полученного на основе методов модального управления, и позволяющие на этапе предварительного проектирования произвести аналитический синтез математической модели автопилота БЛА.

3. Разработана методика апостериорного оценивания навигационных параметров БЛА на основе предложенного критерия максимума апостериорного правдоподобия, позволяющая повысить точность работы системы управления БЛА в условиях наличия неопределенностей в выходной информации датчиков.

4. Предложена методика оценки эффективности применения БЛА, отличающаяся учетом стохастической постановки задачи и основных возможных случайных факторов, позволяющая при однократном интегрировании системы дифференциальных уравнений для вероятностных моментов оценить вероятность попадания БЛА в запретную зону и невыхода из нее в течение заданного времени, характеризующего инерционность соответствующих контролируемых систем.

Положения, выносимые на защиту

1. Методика определения оптимальных параметров траектории пролета БЛА через заданные точки пространства при облете запретных зон.

2. Методика поэтапного аналитического синтеза закона управления БЛА на основе методов модального управления, позволяющая на этапе предварительного проектирования произвести аналитический синтез математической модели автопилота БЛА.

3. Метод комплексирования источников информации системы управления БЛА на основе алгоритмов оценивания навигационных параметров, отличающийся учетом неопределенностей в выходной информации различных датчиков.

4. Методика вероятностного анализа попадания БЛА в область пространства, запрещенную для полетов летательных аппаратов, позволяющая оценить выполнение заданных ограничений, наложенных на траекторию полета БЛА.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные результаты и положения, выносимые на защиту, получены лично автором. Научный руководитель принимал участие в постановке задач, определении возможных путей их решения, предварительном анализе, обсуждении результатов исследований, проведенных автором. В публикациях с соавторами вклад соискателя определяется рамками диссертационной работы.

Автор самостоятельно получил основные результаты диссертационной работы. Общая концепция исследований и отдельные теоретические методы разработаны совместно с научным руководителем.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на седьмой, восьмой международных научно-технических интернет-конференциях БНТУ «Информационные технологии в образовании, науке и производстве» 2019–2020 гг.; Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-33»; Международной конференции «Математическое моделирование», Московский авиационный институт 2020 г.; 19-й Международной конференции «Авиация и космонавтика», Московский авиационный институт 2020 г.; Международной конференции «Беспилотные летательные аппараты», Московский авиационный институт 2020 г.; IX Международной научно-практической конференции «Инновационные технологии, автоматизация и мехатроника в машино- и приборостроении», БНТУ 2020 г.; 10-й Международной научно-технической конференции «Информационные

технологии в промышленности, логистике и социальной сфере», ОИПИ НАН Беларуси 2021 г.

Результаты диссертации также докладывались на научных семинарах кафедры «Информационные системы и технологии» БНТУ.

Получен акт использования результатов научных исследований, приведенных в диссертационной работе в заключительном отчете ОКР «Шторм» по заданию 8 ГНТП «Роботизированные комплексы и авиакосмические технологии», 2016–2020 гг. и ГНТП «Роботизированные комплексы и системы», 2021–2025 гг., на Республиканском унитарном предприятии «Научно-производственный центр многофункциональных беспилотных комплексов» Национальной академии наук Беларуси.

Получен акт о практическом использовании результатов диссертационной работы на белорусско-китайском предприятии «Авиационные технологии и комплексы» при разработке концепции перспективного плана развития производства беспилотных летательных аппаратов самолетного типа, разработанного в рамках задания «Разработать и внедрить комплекс на базе беспилотного летательного аппарата для применения средств защиты растений в сельском хозяйстве» в рамках подпрограммы «Роботизированные комплексы и системы» государственной научно-технической программы «Цифровые технологии и роботизированные комплексы», 2021–2025 гг.

Получен акт о практическом использовании результатов диссертационной работы в образовательном процессе Белорусского национального технического университета, что подтверждает научную и практическую значимость диссертации.

Опубликованность результатов диссертации

По результатам выполненных исследований опубликовано 15 научных работ общим объемом 4,4 авторского листа. Из них 7 статей объемом 3,3 авторского листа в научных изданиях, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, 5 статей в сборниках материалов конференций, 3 статей в сборниках тезисов докладов конференций объемом 1,1 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, общей характеристики работы, 4 глав, заключения, списка использованных источников, 5 приложений. Список использованных источников включает библиографический список из 123 наименований и список публикаций соискателя ученой степени из 15 наименований. Общий объем диссертации 154 страницы, из них 99 страниц основного текста, 38 рисунков на 21 странице, 5 приложений на 20 страницах, 1 таблица на 3 страницах.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во введении показана актуальность темы, обоснована необходимость проведения работы по анализу и аналитическому синтезу построенных на новых принципах систем управления (СУ) БЛА, показана практическая значимость работы.

В **первой главе** представлено современное состояние изучаемого вопроса, проводится анализ БЛА, их летно-технических характеристик и принципов построения СУ БЛА.

Формирование траектории БЛА является актуальной задачей, которая зависит от множества факторов и ограничений. В ряде научных исследований рассматриваются различные методы формирования траекторий, основывающиеся в большинстве случаев на принципах, не учитывающих время полета, затраты энергии, динамические свойства БЛА. Задание траектории в пространстве, а также критериев оптимальности зависит от функционального назначения БЛА и решаемой им задачи. По этой причине представляется целесообразным для математического синтеза оптимального управления БЛА обосновать минимизируемый функционал качества и систему ограничений, накладываемых на траекторию полета БЛА.

Во **второй главе** представлен метод аналитического синтеза закона управления БЛА, на основе которого сформирована траектория полета БЛА, проходящая через определенные точки пространства. Данный метод дает возможность на стадии предварительного обоснования общего вида системы управления БЛА получить закон управления, являющийся оптимальным для заданного критерия качества управления.

Рассмотрена задача формирования траектории, состоящей из отдельных интервалов, на каждом из которых обеспечивается управление БЛА оптимальным образом и выполняются основные требования к СУ. При этом обеспечивается заданная точность приближения траектории полета к заданным точкам пространства, а также минимизируются интегральные потери, обусловленные маневрированием и изменениями управляющего ускорения. В соответствии с поставленной задачей сформирован критерий оптимизации, который включает в себя как составляющую, характеризующую точность достижения поставленной цели, так и составляющую, характеризующую интегральные потери в течение времени управления процессом полета.

В кинематической схеме процесса наведения БЛА отражено, что в каждой заданной точке пространства учитывается направление траектории на последующую точку, что обеспечивает оптимальную кривизну траектории при заданной скорости полета БЛА. Для данной постановки задачи

определен следующий критерий оптимальности – квадратичный функционал, который для горизонтальной плоскости имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \left[c_1 (v_z^{(k)} - v_{зад}^{(k)})^2 + c_2 (z^{(k)} - z_{зад}^{(k)})^2 \right]_{t=t_k} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} c_3 (a_z^{(k)})^2 dt, \quad (1)$$

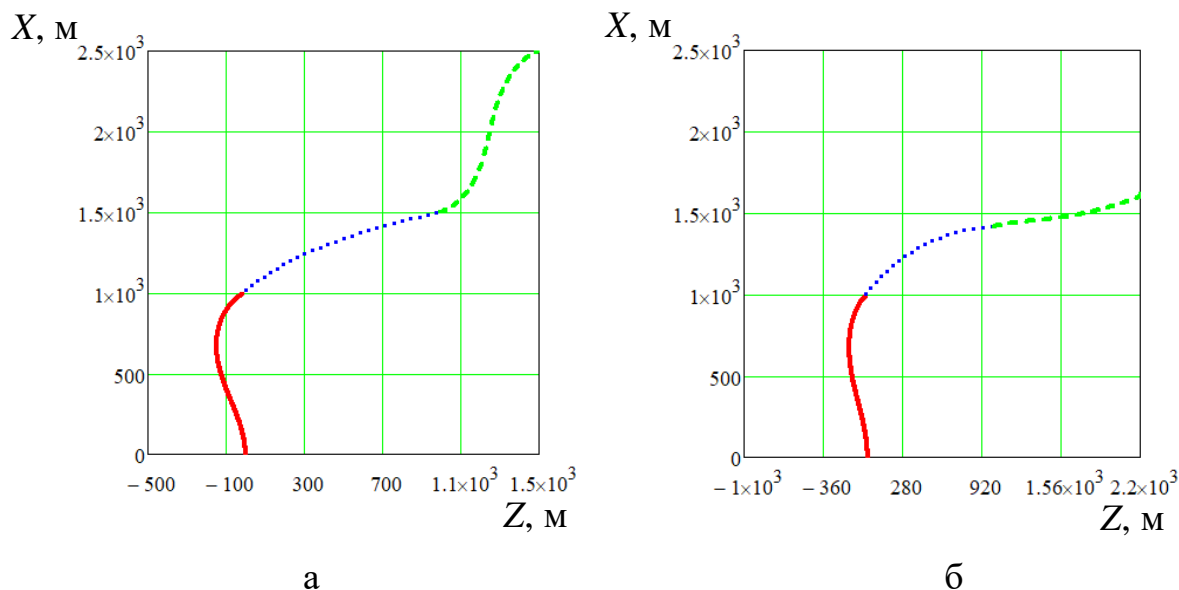
где t_k – момент времени достижения летательным аппаратом определенной k -й точки пространства; $v_{зад}^{(k)}$ – величина проекции скорости БЛА на ось $O^{(k)}Z^{(k)}$ для инерциальной системы отсчета на k -м участке в момент t_k ; $z_{зад}^{(k)}$ – боковая координата заданной k -й точки траектории полета БЛА в момент времени t_k ; c_1, c_2, c_3 – нормировочные коэффициенты, которые задаются с учетом размерности параметров функционала (1).

Для того чтобы решить поставленную задачу, необходимо определить оптимальное боковое ускорение $a_z^{(k)}$, которое, минимизирует функционал (1). Здесь применен метод аналитического конструирования применительно к вышеописанной постановке задачи, где для каждого интервала оптимизации, решение имеет следующий вид

$$a_z(v_z, z, t) = -\Lambda_v(t)[v_z(t) - v_{зад}] - \Lambda_z(t)[z(t) - z_{зад}], \quad (2)$$

где $\Lambda_v(t), \Lambda_z(t)$ – переменные коэффициенты зависящие от коэффициентов c_1, c_2, c_3 функционала (1), скорости БЛА и дальности до очередной заданной точки траектории.

В качестве примера рассмотрено построение оптимальной траектории полета БЛА в горизонтальной плоскости при пролете БЛА через заданные точки пространства со следующими координатами: $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$; $x^{(1)} = 1000$ м, $z^{(1)} = 0$; $x^{(2)} = 1500$ м, $z^{(2)} = 1000$ м; $x^{(3)} = 2500$ м, $z^{(3)} = 1500$ м; (рисунок 1, а) и $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$; $x^{(1)} = 1000$ м, $z^{(1)} = 0$; $x^{(2)} = 1500$ м, $z^{(2)} = 1000$ м; $x^{(3)} = 1600$ м, $z^{(3)} = 2200$ м (рисунок 1, б). Результаты математического моделирования представлены на рисунке 1.



а – траектория (вариант 1); б – траектория (вариант 2)

Рисунок 1 – Траектории полета БЛА

Как показали результаты моделирования данного примера, величины отклонений траектории БЛА от заданных промежуточных точек маршрута составили от 7 до 20 м в зависимости от скорости полета БЛА и кривизны траектории. В реальных условиях применения БЛА при облете запретных зон на безопасном расстоянии такой результат является вполне приемлемым.

Решена задача аналитического синтеза управляющего ускорения БЛА при полете его по траектории, состоящей из последовательно расположенных участков горизонтального полета, находящихся на разной высоте относительно земной поверхности. Задача решается как аналитическое определение оптимального управления при заданном минимизируемом функционале качества для вертикальной плоскости, при заданных ограничениях, наложенных на траекторию полета и систему управления. Закон изменения оптимального управления БЛА (ускорение $a_y(t)$) на каждом из вертикальных участков траектории его полета имеет вид

$$a_y = -\frac{4v_y}{t_{\text{ост}}} - \frac{6(y - y_{\text{зад}})}{(t_{\text{ост}})^2} + g. \quad (3)$$

В выражении (3) v_y – значение проекции скорости БЛА на вертикальную ось Y , соответствующей инерциальной (стартовой) системы координат в момент t_k окончания полета (окончания заданного участка траектории); $y_{\text{зад}}$ – вертикальная координата заданной точки траектории

полета БЛА в момент t_k ; $t_{\text{ост}}$ – время, которое необходимо для достижения БЛА очередной заданной точки пространства; g – гравитационное ускорение.

В качестве примера рассмотрено математическое моделирование данной задачи при следующих заданных значениях: $v = 50 \text{ м/с} = \text{const.}$ Заданы следующие координаты точек, через которые должен пролететь БЛА: $x_0 = 0 \text{ м}$, $y_0 = 500 \text{ м}$; $x_1 = 850 \text{ м}$, $y_1 = 200 \text{ м}$; $x_2 = 1700 \text{ м}$, $y_2 = 200 \text{ м}$; $x_3 = 2550 \text{ м}$, $y_3 = 500 \text{ м}$. На рисунке 2 представлена оптимальная траектория БЛА, полученная в результате компьютерного моделирования.

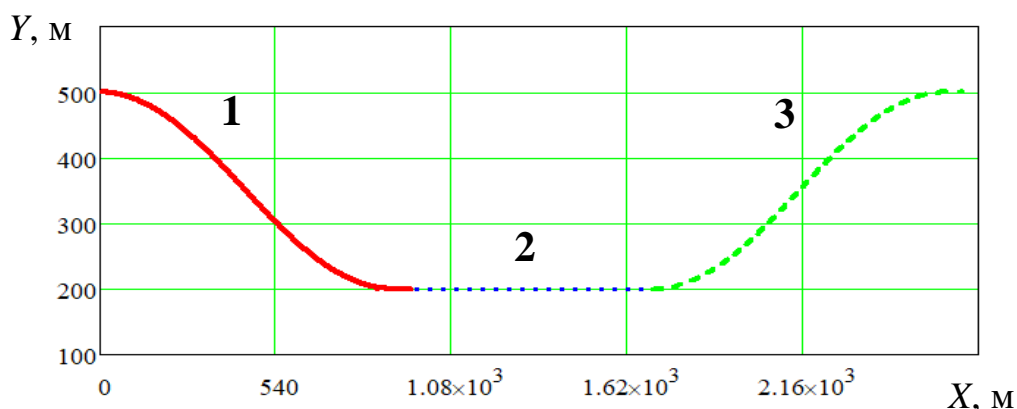
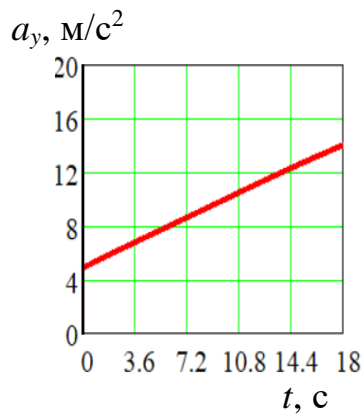


Рисунок 2 – Результаты моделирования траектории полета БЛА

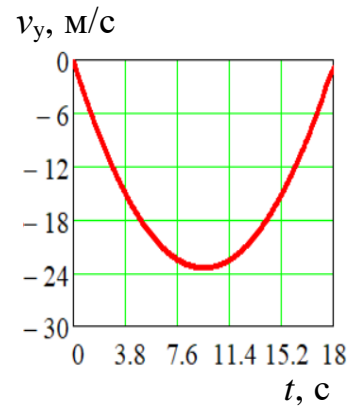
На рисунке 3 представлены графики изменения управляющего вертикального ускорения $a_y(t)$ и вертикальной скорости $v_y(t)$ БЛА на трех приведенных на рисунке 2 участках траектории полета.

Данный подход в определении управляющего ускорения БЛА применим и для решения пространственной задачи наведения БЛА. Это может производиться отдельным решением двух плоских задач с последующим их объединением или решением задачи в новой заданной вращающейся системе координат.

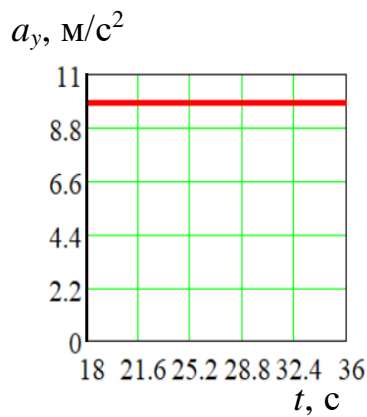
Применяя предложенную методику построения траектории с учетом проведенного анализа бесполетных зон, рассмотрен пример формирования траектории полета БЛА в горизонтальной плоскости при облете БЛА запретной зоны № 181, которая представляет собой запретную зону аэропорта Минск-2. Заданы точки пролета БЛА со следующими координатами: $x^{(0)} = z^{(0)} = 0$; $x^{(1)} = 17000 \text{ м}$, $z^{(1)} = 13000 \text{ м}$; $x^{(2)} = 40000 \text{ м}$, $z^{(2)} = 7000 \text{ м}$; $x^{(3)} = 53000 \text{ м}$, $z^{(3)} = 13000 \text{ м}$. Моделирование проведено для математической модели траектории БЛА (рисунок 4).



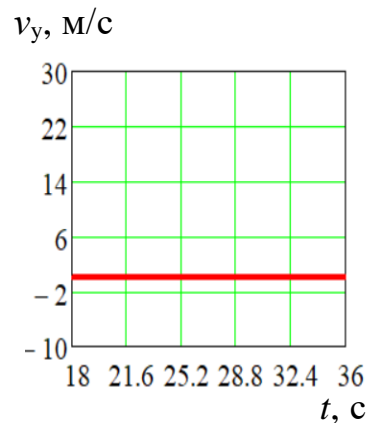
а



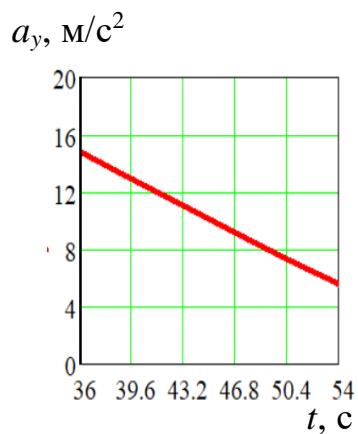
б



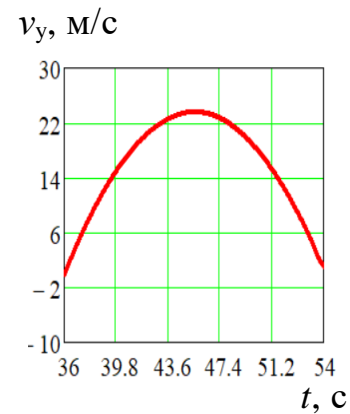
в



г



д



е

**а, б – ускорение и скорость на участке 1 траектории полета;
в, г – ускорение и скорость на участке 2 траектории полета;
д, е – ускорение и скорость на участке 3 траектории полета
Рисунок 3 – Графики изменения вертикального ускорения и
вертикальной скорости БЛА**

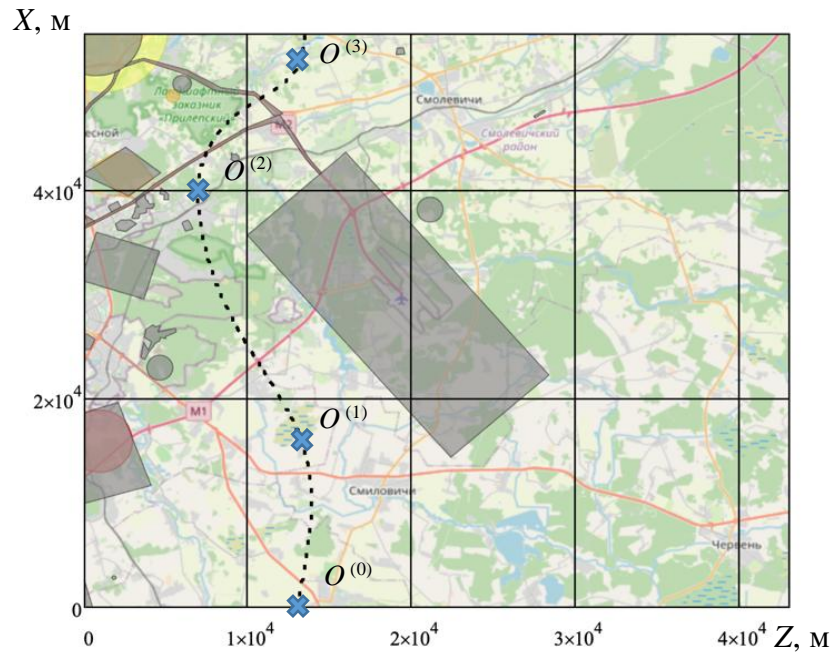


Рисунок 4 – Траектория БЛА при облете запретной зоны №181

Третья глава посвящена разработке методики поэтапного аналитического синтеза математической модели автопилота БЛА. Рассмотрена задача синтеза скалярного управления БЛА в предположении наличия математической модели движения БЛА в вертикальной плоскости вида

$$a_y = \frac{1}{m} (C_y^a S_a q \alpha - C_x S_a q + P \cos \alpha), \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{1}{J_{zz}} (m_z^a \alpha + m_z^\omega \omega_z + m_z^\delta \delta) S_a q l_a. \quad (5)$$

В выражениях (4) – (5) a_y – вертикальное ускорение БЛА; ω_z – угловая скорость вращения БЛА относительно оси Z ; δ – отклонение рулевой поверхности; m – масса БЛА; J_{zz} – момент инерции БЛА; S_a – площадь аэродинамической поверхности, создающей подъемную силу; l_a – характерный линейный размер (хорда крыла); α – угол атаки; $q = \rho V^2 / 2$ – скоростной напор; $C_y^a, C_x, m_z^a, m_z^\omega, m_z^\delta$ – известные аэродинамические коэффициенты БЛА.

Векторно-матричное уравнение состояния объекта управления (БЛА) имеет вид

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (6)$$

где матрицы A и B имеют вид $A = \begin{bmatrix} -1,54 & 75 \\ -0,55 & -17 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -170 \end{bmatrix}$.

В выражении (6) значения элементов матриц A и B рассматривались для конкретного типового БЛА.

Для заданной математической модели проведен синтез модального регулятора, который обеспечил замкнутой системе желаемый спектр. При сравнении характеристического полинома спроектированной замкнутой системы с желаемым полиномом подтверждено, что регулятор (автопилот) спроектирован и представлен верно ($\varphi_{A+BK^*}(s) = \varphi^*(s)$). Таким образом, аналитически получен закон управления БЛА, который с учетом введенных обозначений для данной постановки задачи имеет вид

$$\delta = -0,003141a_y - 0,101\omega_z. \quad (7)$$

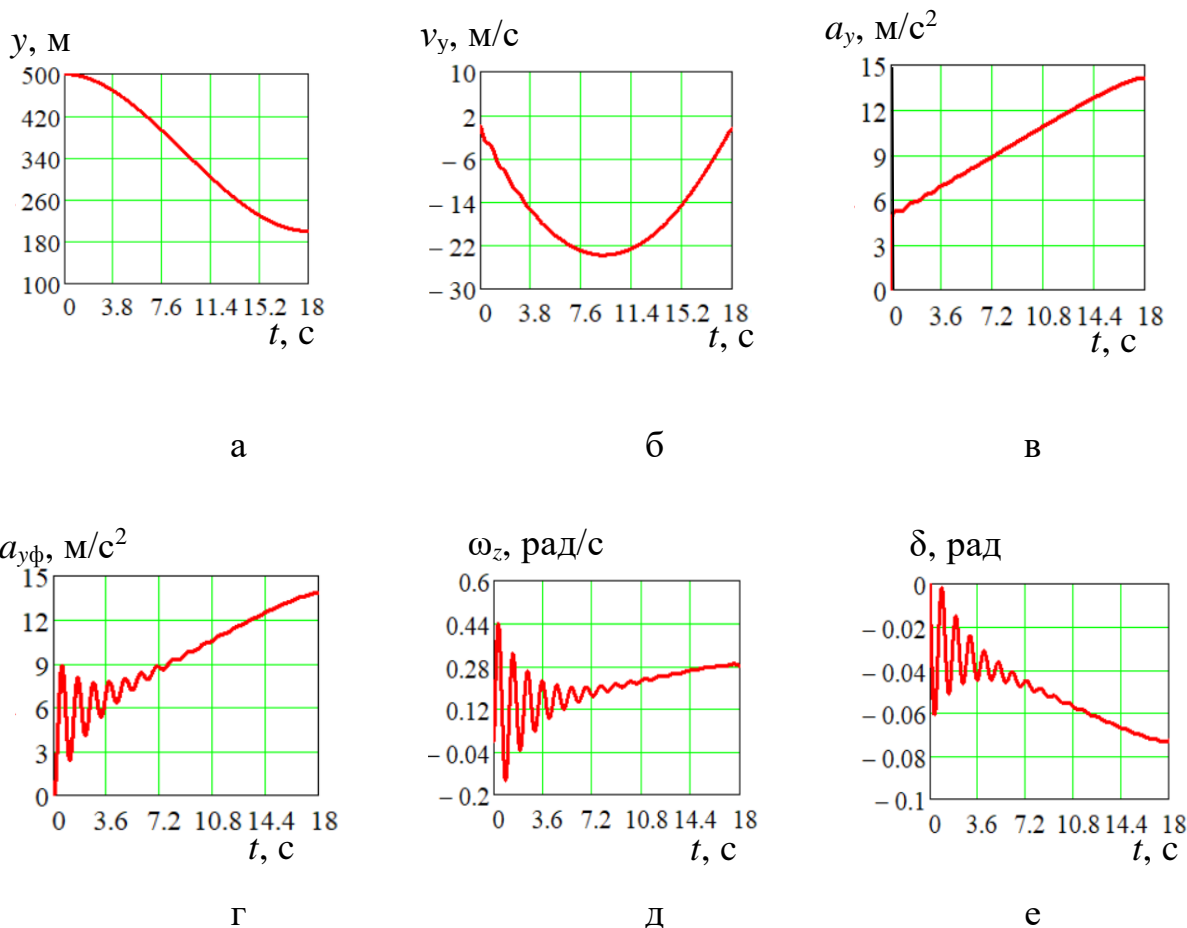
Данный закон управления (7) обеспечивает необходимую траекторную устойчивость БЛА для полученного аналитически управляющего ускорения, при полете БЛА по заданной траектории.

В качестве примера рассмотрено математическое моделирование данной задачи при заданной скорости полета БЛА: $v = 50 \text{ м/с} = \text{const}$. Были заданы следующие координаты точек пространства, через которые должен пролететь БЛА: $x_0 = 0 \text{ м}$, $y_0 = 500 \text{ м}$; $x_1 = 850 \text{ м}$, $y_1 = 200 \text{ м}$. Результаты математического (компьютерного) моделирования в виде графиков изменения во времени переменных, характеризующих полет БЛА, представлены на рисунке 5. Как видно из графиков, результаты моделирования свидетельствуют о работоспособности данной методики синтеза закона управления БЛА.

На следующем этапе синтеза СУ рассмотрена задача оценивания параметров, используемых для управления БЛА как задача комплексирования измерителей и фильтров.

При наличии нескольких измерителей и соответственно нескольких алгоритмов фильтрации процесса $X(t)$ для синтеза алгоритма комплексирования рассмотрена условная апостериорная плотность вероятности $f(X|\hat{X})$:

$$f(X|\hat{X}) = \prod_{k=1}^m f(X|Z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \prod_{k=1}^m R_k}} \exp \left\{ -\sum_{k=1}^m \frac{(x_k - \hat{x}_k)^2}{2R_k} \right\}. \quad (8)$$



а – график изменения вертикальной траектории; б – график вертикальной скорости; в – график потребного ускорения; г – график фактического ускорения; д – график угловой скорости вращения; е – график отклонения рулевой поверхности
Рисунок 5 – Результаты компьютерного моделирования

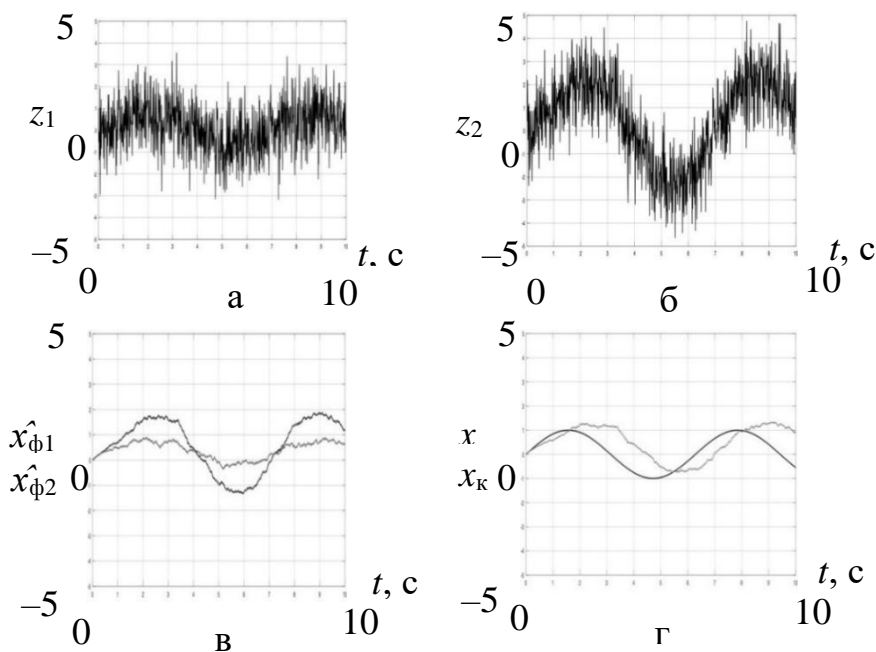
В выражении (8) R_k и \hat{x}_k – апостериорные вероятностные моменты k -х выходов фильтров Калмана. В качестве критерия комплексирования (оптимальной оценки процесса $X(t)$) здесь предложен новый критерий – максимум апостериорного правдоподобия (МАП), которому соответствует выражение

$$\hat{X}_{\text{МАП}}(t) = \underset{\hat{X}}{\operatorname{argmax}} f(X|\hat{X}). \quad (9)$$

При m независимых наблюдениях $z_k(t)$ и m фильтров Калмана ($k = \overline{1, m}$) значения апостериорных характеристик $\hat{x}_{\text{МАП}}$ и $R_{\text{МАП}}$ случайного процесса $x(t)$ при использовании критерия МАП вычисляются на основе выражений (8) и (9).

$$\hat{x}_{\text{МАП}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{x}_k, \quad R_{\text{МАП}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m R_k. \quad (10)$$

В качестве примера рассмотрена для наглядности одномерная система с двумя измерителями. На рисунке 6 представлены результаты математического моделирования процессов выходных сигналов измерителей и фильтров.



- а** – график изменения выходного сигнала измерителя z_1 ;
- б** – график изменения выходного сигнала измерителя z_2 ;
- в** – графики изменения выходных сигналов фильтров \hat{x}_{ϕ_1} и \hat{x}_{ϕ_2} ;
- г** – графики входного сигнала $x(t)$ и сигнала, полученного в результате комплексирования двух фильтров $x_k = x_k(t) = \hat{x}_{\text{МАП}}$

Рисунок 6 – Результаты математического моделирования процессов выходных сигналов измерителей и фильтров

Необходимо отметить, что в условиях наличия неопределенностей точность апостериорного оценивания по критерию МАП в соответствии с выражениями (10) будет тем выше, чем больше число измерителей и фильтров.

Четвертая глава посвящена разработке методики оценки эффективности БЛА. В соответствии с основными задачами БЛА, проведено обоснование показателя оценки эффективности БЛА в виде вероятности регистрации БЛА в запретной зоне – невыхода БЛА из запретной области U_3 в течение заданного времени $\tau_3 = t_{i+1} - t_i$ при условии нахождения его в области U_3 в начальный момент времени t_0 .

Вероятность захвата (регистрации) $P_3(t_r)$ к моменту времени t_r вычисляется по формуле полной вероятности, которая в данном случае имеет вид

$$P_3(t_r) = 1 - \prod_{i=1}^r \left[1 - P_1(t_i) P_2(t_i + \tau_3 | X(t_i) \in U_3) \right], \quad (11)$$

где введены соответствующие обозначения: $P_1(t_i) = P_1(X(t_i) \in U_3)$ вероятность нахождения $X(t)$ в области U_3 в каждый текущий момент времени t_i ; $P_2(t_i + \tau_3 | X(t_i) \in U_3)$; $r = 0 \dots k - 1$; $k = t_k - t_0 / \tau_3$ вероятность невыхода $X(t)$ из области U_3 в течение времени τ_3 .

Расчеты были проведены для простейшей стохастической модели полета БЛА при гауссовой аппроксимации плотности вероятности распределения координат, характеризующих положения БЛА. На рисунке 7 изображены вычисленные значения $P_3(t_r)$ ($r = 1 \dots 4$), соединенные интерполяционной кривой.

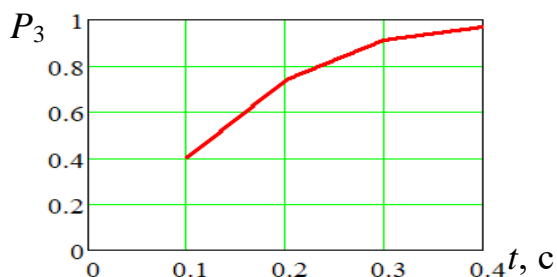


Рисунок 7 – Значения $P_3(t_r)$, соединенные интерполяционной кривой

Рисунок 4.5 демонстрирует, что вероятность фиксации нарушения запретной зоны носит накопительный характер и возрастает с увеличением времени пребывания БЛА внутри зоны. В физическом смысле это обусловлено инерционностью системы слежения за воздушным пространством, поскольку регистрация БЛА требует его нахождения в пределах зоны в течение заданного интервала времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Проведен анализ БЛА, их летно-технических характеристик и принципов построения траекторий полета. Обосновано, что задание траектории в пространстве, а также критериев оптимальности зависит от функционального назначения БЛА и основных задач, решаемых беспилотной авиацией. Выявлено, что для решения рассмотренных задач требуется улучшение способов формирования траектории с учетом пространственно-временных ограничений.

Проведен анализ бесполетных зон, который дает представление об ограничениях, связанных с навигационными картами при составлении маршрута БЛА и траектории его полета. Принципы формирования бесполетных зон, представляющих простые геометрические фигуры с четкими очертаниями, позволяют создавать программы реагирования автопилота для типовых случаев облета запретных зон [6–А; 7–А].

2. Синтезирован закон управления БЛА для случая, когда происходит наведение его по траектории, которая задана опорными точками пространства в инерциальной системе отсчета. Обоснован критерий оптимизации в общем виде и представление его в форме минимизируемого квадратичного функционала качества, удобного для аналитического синтеза управления. В качестве составляющих функционала рассмотрены параметры отклонения траектории полета БЛА от заданных точек пространства, а также – прогнозируемые параметры вектора скорости и управляющее нормальное ускорение. При этом в каждой заданной точке пространства учитывается направление траектории на последующую точку, что обеспечивает оптимальную кривизну траектории при заданной скорости полета летательного аппарата. В результате аналитического синтеза получены математические зависимости для определения управляющего ускорения, которые позволяют на борту БЛА получить заданный оптимальный закон управления, который в отличие от известных методов формирования траектории движения БЛА учитывает изменения скорости и координат в процессе наведения БЛА [10–А; 14–А].

Решена задача аналитического синтеза управляющего ускорения БЛА при полете его по сложной траектории, состоящей из последовательно расположенных участков полета. Особенностью предлагаемой методики решения задачи является обоснование оригинального вида минимизируемого функционала и параметров, входящих в полученный известными методами закон изменения управляющего ускорения. Проведенное компьютерное моделирование полученных аналитически результатов в виде траектории

полета БЛА и процессов изменения ускорения и скорости БЛА показало, что отклонение траектории БЛА от заданных промежуточных точек пространства составили от 7 до 20 м в зависимости от скорости и кривизны траектории БЛА и является приемлемым для решения задач облета запретных зон на безопасном расстоянии. Предлагаемая методика является перспективной для использования на первоначальном этапе синтеза системы управления БЛА [1–А; 5–А; 6–А; 7–А; 9–А; 10–А; 12–А; 14–А].

3. Решена задача поэтапного синтеза математической модели автопилота БЛА. На первом этапе производится аналитический синтез управляющего ускорения, приложенного к центру масс БЛА, для формирования заданной траектории его полета. На основе использования полученных на первом этапе результатов на последующих этапах решена задача синтеза математической модели автопилота БЛА при заданных требованиях к обеспечению устойчивости и динамической точности управления БЛА. При синтезе математической модели автопилота БЛА использован метод модального управления системой при заданной математической модели объекта. Для заданной модели движения и аэродинамических характеристик БЛА аналитически получен закон отклонения управляющей рулевой поверхности, зависящий от параметров поступательного и вращательного перемещения БЛА [4–А; 9–А; 12–А].

4. Решена задача оценивания информации, используемой для управления БЛА и содержащейся в случайных сигналах, поступающих от различных источников – измерителей. Проведен анализ аналитических методов и алгоритмов оценивания, основанных на определении основных вероятностных характеристик случайного процесса как априорными, так и апостериорными методами при различных критериях оптимальности. На основе проведенного анализа сформулирована и решена задача комплексирования информации с различных измерителей случайного процесса, решение которой основано на использовании предложенного нового критерия – максимума апостериорного правдоподобия, который объединяет в себе критерий максимума правдоподобия и критерий максимума апостериорной вероятности. Данный подход к построению алгоритмов оценивания многомерных случайных процессов позволяет повысить точность оценивания, так как учитывает дополнительную информацию и комплексную ее обработку [3–А; 8–А; 11–А; 13–А].

5. Решена задача вероятностного анализа пересечения беспилотным летательным аппаратом границы зоны, запретной для полетов. Условием для констатации факта нарушения границы запретной зоны считается нахождение БЛА в ее пределах в течение заданного времени. Проведено обоснование математической модели для проведения исследований в виде

линеаризованного векторного стохастического уравнения. Задача решается на основе применения теории марковских процессов случайной структуры с поглощением реализаций на границе заданной области. Особенностью данного подхода является одновременное рассмотрение двух плотностей вероятности распределения фазовых координат, характеризующих граничные условия. При этом решаются две системы уравнений для вероятностных моментов: с учетом поглощения реализаций и без учета данного поглощения соответственно. Рассмотрена вероятность попадания объекта в заданную область и невыход из нее в течение времени, необходимого для фиксации БЛА в запретной зоне [2–А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученную в диссертационной работе совокупность научных результатов можно квалифицировать как возможное направление в области задач аналитического анализа и синтеза систем управления беспилотных летательных аппаратов, в том числе применительно к решению задач оценки их эффективности для формирования требований к характеристикам БЛА на этапе их разработки и подготовки производства.

Результаты диссертационных исследований были применены при выполнении государственных научно-технических программ «Роботизированные комплексы и авиакосмические технологии», 2016–2020 годы, ГНТП «Роботизированные комплексы и системы», 2021–2025 годы и государственной программы научных исследований «Цифровые и космические технологии, безопасность общества и государства» подпрограммы «Цифровые технологии и космическая информатика» по заданию 1.10.8 «Повышение надежности функционирования и совершенствование конструкции и систем управления беспилотных летательных аппаратов на основе цифровых моделей» (Рег.№ 20212499), что подтверждает научную и практическую значимость диссертации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях, соответствующих требованиям пункта 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий

1–А. Бумай, А. Ю. Формирование оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, Д. Цзюнь // Доклады БГУИР. – 2019. – № 7–8 (172). – С. 50–57.

2–А. Бумай, А. Ю. Вероятностный анализ попадания беспилотного летательного аппарата в запретную зону / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, Ю. Ф. Яцына, В. Ю. Степанов // Системный анализ и прикладная информатика. – 2019. – № 4. – С. 46–54.

3–А. Бумай, А. Ю. Особенности построения алгоритмов оценивания параметров многомерных случайных процессов / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Системный анализ и прикладная информатика. – 2020. – № 1. – С. 24–32.

4–А. Бумай, А. Ю. Поэтапный аналитический синтез математической модели автопилота беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, С. С. Прохорович // Системный анализ и прикладная информатика. – 2021. – № 1. – С. 21–28.

5–А. Бумай, А. Ю. Аналитический синтез управляющего ускорения беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, С. С. Прохорович // Наука и техника. – 2021. – Т. 20, № 4. – С. 338–344.

6–А. Бумай, А. Ю. Формирование траектории беспилотного летательного аппарата при облете запретных зон / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый, А. М. Авсиевич // Системный анализ и прикладная информатика. – 2021. – № 4. – С. 47–53.

7–А. Бумай, А. Ю. Методы построения траекторий движения беспилотных летательных аппаратов при облете заданных областей пространства / А. Ю. Бумай // Системный анализ и прикладная информатика. – 2024. – № 2. – С. 25–29.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

8–А. Бумай, А. Ю. Интервально-оптимальное программное управление летательным аппаратом / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Информационные технологии в образовании, науке и производстве : докл. VII Междунар. науч.-техн. интернет-конф., Минск, 16–17 нояб. 2019 г. / Белорус. нац. техн. ун-т ; сост.: Е. В. Кондратёнок. – Минск, 2019. – С. 181–184.

9–А. Бумай, А. Ю. Критерии оптимального оценивания при комплексировании / А. Ю. Бумай // Математические методы в технике и технологиях // – ММТТ. – 2020. – Т. 12-3. – С. 44–48.

10–А. Бумай, А. Ю. Задача оптимального управления беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай // Информационные технологии в образовании, науке и производстве : докл. VIII Междунар. науч.-техн. интернет-конф., Минск, 21–22 нояб. 2020 г. / Белорус. нац. техн. ун-т ; сост.: Е. В. Кондратёнок. – Минск, 2020. – С. 203–206.

11–А. Бумай, А. Ю. Комплексирование измерителей случайного процесса / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Инновационные технологии,

автоматизация и мехатроника в машино- и приборостроении : тез. докл. IX Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 7 апр. 2021 г. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2021. – С. 7–8.

12–А. Бумай, А. Ю. Аналитический синтез закона управления беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай, А. А. Лобатый // Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере : тез. докл. 10-й Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 26–27 мая 2021 г. / Объед. ин-т проблем информатики Нац. акад. наук Беларуси. – Минск, 2021. – С. 10–12.

Статьи в сборниках тезисов докладов научных конференций

13–А. Бумай, А. Ю. Комплексование параметров многомерных случайных процессов / А. Ю. Бумай // Математическое моделирование : тез. докл. Междунар. конф., Москва, 17 нояб. 2020 г. / Московск. авиац. ин-т. – М., 2020. – С. 535–536.

14–А. Бумай, А. Ю. Формирование оптимальной траектории беспилотного летательного аппарата / А. Ю. Бумай // Авиация и космонавтика : тез. докл. 19-й Междунар. конф., Москва, 23 нояб. 2020 г. / Московск. авиац. ин-т. – М., 2020. – С. 253–254.

15–А. Бумай, А. Ю. Вероятность пересечения беспилотным летательным аппаратом границы заданной области / А. Ю. Бумай // Беспилотные летательные аппараты : тез. докл. Междунар. конф., Москва, 24 нояб. 2020 г. / Московск. авиац. ин-т. – М., 2020. – С. 44–45.



РЭЗІЮМЭ

Бумай Андрэй Юр'евіч

Фарміраванне аптымальнай траекторыі і сінтэз алгарытмаў кіравання беспілотным лятальным апаратам пры аблёце забароненай зоны

Ключавыя словы: аптымальная траекторыя, беспалётная забароненая зона, сістэма кіравання, аўтапілот, камплексаванне, фільтраванне, эфектыўнасць

Мэта працы: распрацоўка методык і алгарытмаў фармавання траекторыі і сінтэзу элементаў кіравання БЛА, а таксама адзнакі яго эфектыўнасці пры аблёце забароненых зон.

Метады даследавання і выкарыстаная апаратура: класічныя і сучасныя метады аналізу і сінтэзу сістэм кіравання па зададзеным крытэрыям, метады ацэнкі стану стахастычных сістэм, метады тэорыі сістэмнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна: распрацаваны метадыкі і алгарытмы пабудовы аптымальных параметраў траекторыі пралёта БЛА праз зададзеныя кропкі прасторы пры аблёце забароненых зон. Прадстаўлена метадыка паэтапнага аналітычнага сінтэзу закона кіравання БЛА якая дазваляе на этапе папярэдняга праектавання забяспечыць выкананне зададзеных патрабаванняў да забеспячэння ўстойлівасці і дынамічнай дакладнасці кіравання БЛА. Прапанавана метадыка камплексавання розных крыніц інфармацыі БЛА на аснове прапанаванага крытэрыя аптымальнага ацэньвання выходных сігналаў, якая дазваляе забяспечыць эфектыўную працу сістэмы кіравання БЛА ва ўмовах наяўнасці нявызначанасцяў у выходнай інфармацыі датчыкаў. Прыведзена метадыка, якая дазваляе набліжана вырашаць практычныя задачы імавернаснага аналізу траплення БЛА ў зададзеныя вобласці прасторы, у прыватнасці, – у зоны, забароненыя для палётаў.

Рэкамендацыі па выкарыстанні: распрацаваныя метадыкі і алгарытмы могуць быць выкарыстаны ў арганізацыях, якія займаюцца пытаннямі аналізу і сінтэзу сістэм кіравання тэхнічнымі аб'ектамі.

Вобласць ужывання: атрыманая ў дысертацыйнай працы сукупнасць навуковых вынікаў з'яўляецца магчымым напрамкам у галіне задач аналізу і аналітычнага сінтэзу сістэм кіравання БЛА, які забяспечвае павышэнне эфектыўнасці іх прымянення.

РЕЗЮМЕ

Бумай Андрей Юрьевич

Формирование оптимальной траектории и синтез алгоритмов управления беспилотным летательным аппаратом при облете запретной зоны

Ключевые слова: оптимальная траектория, бесполетная запретная зона, система управления, автопилот, комплексирование, фильтрация, эффективность

Цель работы: разработка методик и алгоритмов формирования траектории и синтеза элементов управления БЛА, а также оценки его эффективности при облете запретных зон.

Методы исследования и использованная аппаратура: классические и современные методы анализа и синтеза систем управления по заданным критериям, методы оценки состояния стохастических систем, методы теории системного анализа.

Полученные результаты и их новизна: разработаны методики и алгоритмы построения оптимальных параметров траектории пролета БЛА через заданные точки пространства при облете запретных зон. Представлена методика поэтапного аналитического синтеза закона управления БЛА позволяющая на этапе предварительного проектирования обеспечить выполнение заданных требований к обеспечению устойчивости и динамической точности управления БЛА. Предложена методика комплексирования различных источников информации БЛА на основе предложенного критерия оптимального оценивания выходных сигналов, позволяющая обеспечить эффективную работу системы управления БЛА в условиях наличия неопределенностей в выходной информации датчиков. Приведена методика, позволяющая приближенно решать практические задачи вероятностного анализа попадания БЛА в заданные области пространства, в частности, – в зоны, запрещенные для полетов.

Рекомендации по использованию: разработанные методики и алгоритмы могут быть использованы в организациях, занимающихся вопросами анализа и синтеза систем управления техническими объектами.

Область применения: полученная в диссертационной работе совокупность научных результатов является возможным направлением в области задач анализа и аналитического синтеза систем управления БЛА, обеспечивающим повышение эффективности их применения.

SUMMARY

Bumai Andrei Yrevich

Formation of the optimal trajectory and synthesis of control algorithms for an unmanned aerial vehicle when flying around a restricted area

Keywords: optimal trajectory, restricted area, control system, autopilot, complexing, filtering, efficiency

Purpose of research: development of methods and algorithms for forming the trajectory and synthesis of UAV control elements, as well as assessing its effectiveness when flying around restricted areas.

Research methods and equipment used: classical and modern methods of analysis and synthesis of control systems according to a given criterion, methods for assessing the state of stochastic systems, methods of the theory of system analysis.

The results obtained and their novelty: methods and algorithms have been developed for constructing optimal parameters for the flight path of a UAV through given points in space when flying over restricted areas. A method of step-by-step analytical synthesis of the UAV control law at the initial stages of system development is presented and allows, at the preliminary design stage, to ensure the fulfillment of the specified requirements for ensuring the stability and dynamic accuracy of UAV control. A method for complexing various sources of UAV information is proposed based on the proposed criterion for optimal evaluation of output signals, which allows for the efficient operation of the UAV control system in the presence of uncertainties in the output information of the sensors. A methodology is presented that allows for the approximate solution of practical problems of probabilistic analysis of UAVs entering specified areas of space, in particular, no-fly zones.

Recommendation for using: the developed methods and algorithms can be used in organizations involved in the analysis and synthesis of control systems for technical objects.

Scope: the summation of scientific results is a possible direction in problems of analysis and analytical synthesis of control systems UAV, providing increased efficiency of their application.

Научное издание

**Бумай
Андрей Юрьевич**

**ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ И СИНТЕЗ
АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ
АППАРАТОМ ПРИ ОБЛЕТЕ ЗАПРЕТНОЙ ЗОНЫ**

Автореферат

**диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук
по специальностям**

**05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации
05.13.06 – автоматизация и управление технологическими процессами и
производствами**

Подписано в печать 27.03.2026. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 60 экз. Заказ 44.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.

Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск