1. Во время испытаний два беспилотных грузовых автомобиля движутся по прямой автостраде навстречу друг другу с постоянными скоростями. Скорость первого автомобиля 60 км/ч, скорость второго – 70 км/ч. В момент, когда расстояние между автомобилями равно 80 км, с первого автомобиля взлетает диагностический дрон и движется по прямой ко второму автомобилю со скоростью 170 км/ч. Долетев до второго автомобиля, дрон на три минуты стыкуется с установленной на этом автомобиле док-станцией, и затем возвращается на первый автомобиль, вновь двигаясь со скоростью 170 км/ч. Сколько минут дрон отсутствовал на первом автомобиле?

Ответ: $30\dfrac{20}{23}$.

2. Найдите произведение всех целых значений параметра $a \in \left[-7,7\right]$, при которых уравнение

$$x\left(x+1\right)\left(x+a\right)\left(x+1+a\right) = a^2$$

имеет четыре различных действительных решения.
Ответ: -44100.

3. Найдите произведение всех действительных решений уравнения $2\left(x^2+2\right) = 5\sqrt{x^3+1}$.

Ответ: -3.

4. Найдите сумму решений уравнения $\operatorname{ctg}^4 2x - \cos^2 4x = 1$, принадлежащих отрезку $\left[0, 2\pi\right]$.

Ответ: 8π.

5. Найдите наименьшее действительное решение уравнения $\sqrt{e^{2x}-0,5} + 2\sqrt{e^{2x}-1} = e^x$.

Ответ: $\ln\dfrac{7}{4\sqrt{3}}$.

6. Определите количество натуральных чисел из отрезка $\left[1, 1000\right]$, представимых в виде

$$\left[n+\sqrt{n}+1/2\right]$$

при некотором $n \in \mathbb{N}$. Здесь $\left[x\right]$ – целая часть числа x.

Ответ: 969.

7. В последовательности натуральных чисел каждый член, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих. Какое наибольшее число членов может иметь такая последовательность, если каждый её член не превосходит 2025?

Ответ: 3039.

8. Какое наибольшее число членов (после приведения подобных) может содержать многочлен сотой степени от трёх переменных x, y, z?

Ответ: 176851.

9. Каждой паре $\left(x, y\right)$ целых чисел сопоставили некоторое целое число и обозначили его через $x \circ y$. При этом числа $x \circ y$ и $y \circ x$ могут быть различными. Оказалось, что для любых целых чисел a, b, c и d выполняется равенство $\left(a \circ b + d\right) \circ c = \left(a - b\right) \circ \left(c - d\right) + 1$. Найдите значение $2025 \circ 1991$.

Ответ: 34.

10. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек принимало участие в турнире? (Турнир проводился по круговой системе, т. е. каждый участник играл с каждым; за победу давалось одно очко, за ничью – пол-очка, за поражение – ноль очков).

Ответ: 9.

11. На плоскости даны 19 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы не получилось ни одного треугольника с вершинами в этих точках?

Ответ: 90.

12. Из каждой вершины основания равностороннего треугольника со стороной 6 см проведены два луча, образующих с этим основанием углы $15°$ и $30°$. Найдите площадь (в см^2) четырёхугольника, вершинами которого являются точки пересечения построенных лучей.

Ответ: $27 - 15\sqrt{3}$.

13. Выпуклый четырёхугольник площадью 25 см^2 разбит диагоналями на четыре треугольника. Найдите площадь (в см^2) четырёхугольника, вершинами которого являются точки пересечения медиан указанных треугольников.

Ответ: $\dfrac{50}{9}$.

14. В шар радиуса 2 см вписана правильная четырёхугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Определите наибольшее возможное значение площади (в см^2) поверхности шара, вписанного в пирамиду.

Ответ: $2\pi\left(4 - \sqrt{7}\right)$.

15. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна высоте основания пирамиды и равна единице. Сфера касается плоскости основания пирамиды, двух её боковых рёбер и продолжения третьего бокового ребра за вершину пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$.

16. Найдите определитель трёхдиагональной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ размера 10×10, элементы главной диагонали которой равны 10, а элементы соседних с ней диагоналей равны 4 ($a_{ij} = 0$, если $\left|i - j\right| > 1$).

Ответ: 1431655424.

17. Найдите эксцентриситет кривой второго порядка, заданной уравнением

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

18. На рёбрах AA_1 и CC_1 параллелепипеда расположены соответственно точки M и N так, что $\left|AM\right| : \left|AA_1\right| = 1 : 4$, $\left|CN\right| : \left|CC_1\right| = 4 : 5$. Плоскость P, проходящая через точки M и N параллельно диагонали BD основания, пересекает ребро BB_1 в точке K. Найдите $\left|BK\right| : \left|KB_1\right|$.

Ответ: $\dfrac{21}{19}$.

19. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{2025} - \sqrt[n+1]{2025}\right)$.

Ответ: $2\ln 45$.

20. Функция $y = f\left(x\right)$ определена при $x > 0$ и ограничена на каждом интервале $\left(0, a\right)$. Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x+1\right) - f\left(x\right)}{x^{13}} = 13$. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x^{14}}$.

Ответ: $\dfrac{13}{14}$.

21. Найдите минимум функции $f\left(x\right) = \max\left\{2\left|x\right|, \left|1 + x\right|\right\}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

22. Снегопад начался ещё до полудня и продолжался до вечера, не усиливаясь и не уменьшаясь. Ровно в полдень бригада дорожных рабочих вышла на дорогу и начала убирать снег. За первые два часа работники расчистили от снега 2 км дороги, а за следующие два часа они убрали только 1 км. За одинаковые промежутки времени бригада убирала одинаковые объёмы снега. За какое время (в часах) до полудня начался снегопад?

Ответ: $\sqrt{5}-1$.

23. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 x^{-\ln x-1}\ln x dx$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

24. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\operatorname{tg}^{\sqrt{5}}x}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

25. Пусть $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y=y_3(x)$ – решения дифференциального уравнения

$$y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$$

такие, что $y_1^2(x)+y_2^2(x)+y_3^2(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$. Пусть $f(x)=\left(y_1'(x)\right)^2+\left(y_2'(x)\right)^2+\left(y_3'(x)\right)^2$ и пусть a и b – такие действительные постоянные, что $y=f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'+ap(x)y=br(x)$. Найдите сумму постоянных a и b.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

26. Пусть $y=y(x)$ – решение уравнения $\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt=x-y$. Найдите $y(1)$.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

27. Вычислите объём тела, ограниченного поверхностью, заданной уравнением

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=4\left(x^2+y^2-z^2\right).$$

Ответ: $\sqrt{2}\pi^2$.

28. Найдите длину пространственной кривой, заданной уравнениями $x^2+y^2=z$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}z$, от начала координат до точки с аппликатой $z=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}(\pi+6)}{12}$.

29. Найдите сумму ряда $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots$.

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

30. При каком наибольшем целом значении параметра a ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^a}-1\right)$ сходится?

Ответ: -2.