1. Утром, в 25 минут десятого, пешеход отправился из пункта A в пункт B. Идя с постоянной скоростью, в тот же день, в четверть второго, он прибыл в пункт B. На следующий день в 11 утра он отправился обратно, из B в A. Идя равномерно, но несколько скорее, чем он шёл накануне, пешеход прибыл в пункт A без двадцати три. Зная, что расстояние между пунктами 12 километров, определите, на каком расстоянии (в километрах) от A находится то место, через которое пешеход проходил в одно и то же время в каждый из этих дней.
Ответ: $8{,}4$.

2. Найдите сумму всех действительных решений (или решение, если оно одно) уравнения

$$64\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^3-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^3=63.$$

Ответ: $-\dfrac{11}{5}$.

3. Найдите наименьшее действительное решение уравнения $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.
Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Найдите сумму действительных решений уравнения $\sin\left(\pi\cos x\right)=\cos\left(\pi\sin x\right)$, принадлежащих отрезку $\left[0,\pi\right]$.
Ответ: $2\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

5. Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$2^{2x+2}-3\left(2x^2-4x+5\right)2^{x+1}+9x\left(x^3-4x^2+9x-10\right)+56=0.$$

Ответ: 10.

6. Найдите сумму всех действительных решений уравнения $\left|1-\lg x\right|+\left|1+\lg x\right|=4\left(1-\dfrac{\left|x-5\right|}{5}\right)$.
Ответ: 10.

7. Найдите среднее арифметическое всех действительных решений уравнения $x=\sum\limits_{n=2}^{2026}\left[\dfrac{x}{n}\right]$, где $\left[x\right]$ – целая часть x.
Ответ: 3.

8. Известно, что в некоторой арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, произведение второго и третьего её членов равно десятому её члену. Найдите наибольшее возможное значение её пятого члена.
Ответ: 13.

9. Найдите натуральное шестизначное число (в десятичной системе счисления), которое при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 даёт числа, написанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке.
Ответ: 142857.

10. Сколькими различными способами можно представить один миллион в виде произведения трёх натуральных чисел? Представления, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются тождественными.
Ответ: 139.

11. Клетчатый квадрат 8×8 разбили на прямоугольники, состоящие из двух клеток. Два прямоугольника разбиения назовём соседними, если они граничат между собой по отрезку длины один или два. В каждый прямоугольник записали количество соседних с ним прямоугольников. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех записанных чисел.
Ответ: 158.

12. Длины боковых сторон AB и CD прямоугольной трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 см и 17 см. Прямая, параллельная основаниям трапеции, рассекает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите длину (в см) большего основания трапеции $ABCD$.
Ответ: 16.
13. Две окружности радиусов 5 см и 20 см имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найдите длину (в см) отрезка BC, если длина хорды AB равна 30 см.
Ответ: $15\sqrt{5}$.
14. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор с углом в $120°$; в конус вписана треугольная пирамида, углы основания которой составляют арифметическую прогрессию с разностью $15°$. Определите угол наклона к плоскости основания наименьшей из боковых граней.
Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.
15. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC, причём $AB = BC$, $\angle ASC = 90°$, $AS = SC$. Грани ASC и ABC взаимно перпендикулярны. Радиус шара, вписанного в пирамиду, равен $\dfrac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{3}}$. Найдите расстояние от центра шара, описанного около пирамиды, до плоскости ABS.
Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.
16. Вычислите определитель порядка 2026, у которого на главной диагонали все элементы равны пяти, на второй диагонали все элементы равны трём, а все остальные элементы равны нулю.
Ответ: 2^{4052}.
17. Какую наибольшую размерность может иметь подпространство пространства матриц размера 9×9 над полем действительных чисел, состоящее только из вырожденных матриц?
Ответ: 72.
18. Найдите расстояние между фокусами эллипса, заданного уравнением

$$19x^2 + 49y^2 + 30\sqrt{3}xy - 256 = 0.$$

Ответ: $4\sqrt{15}$.
19. Последовательность (a_n) определена рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n + \sqrt{1+a_n^2}$, $a_1 = 1$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{a_n}$.
Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.
20. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{5}(2n-1)^x\right)^{\frac{1}{x}}$.
Ответ: $\sqrt[5]{945}$.
21. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\sin x^3} - x}{x^7}$.
Ответ: $-\dfrac{1}{18}$.
22. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{(x^2-x+1)^3}{x^6-x^3+1}$ на промежутке $(0,+\infty)$.
Ответ: $2\sqrt{3}-3$.

23. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(4-\sin^2 x\right)dx$.

Ответ: $\pi \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

24. Пусть $y = y(x)$ – решение интегрального уравнения $y(x) = x^3 + \int\limits_0^x \sin(x-\xi)y(\xi)d\xi$. Найдите $y(2)$.

Ответ: $\frac{48}{5}$.

25. Человек выпил чашку фильтр-кофе, содержащую 100 мг кофеина. Кофеин быстро и полностью всасывается в кровь. Объём распределения кофеина в организме составляет в среднем 35 л (из расчёта $0,5$ л/кг для человека массой 70 кг). Период полувыведения кофеина из организма составляет 5 часов, выведение пропорционально концентрации. Рассчитайте концентрацию кофеина в плазме крови (в мкг/мл) через 3 часа после приёма. Объём распределения – это условный объём жидкости, в котором нужно было бы растворить всю дозу вещества, чтобы получить такую же концентрацию, как в плазме крови.

Ответ: $\frac{20}{7\sqrt[5]{8}}$.

26. Пусть $y = y(x)$ – решение дифференциального уравнения $xy' - (2x+1)y + x^2 + y^2 = 0$, удовлетворяющее условию $y(1) = 0$. Найдите $y(-1)$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

27. Квадрат $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 1+h,\ 4 < y < 4+h\right\}$ посредством системы функций $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \sqrt{xy}$ преобразуется в область D'. Найдите предел отношения площади области D' к площади области D при $h \to 0$.

Ответ: 12.

28. При каком наибольшем действительном значении параметра p все решения уравнения

$$z^3 + 12\left(1+i\sqrt{3}\right)z + p = 0 \ (z \in \mathbb{C})$$

лежат на одной прямой?

Ответ: $32\sqrt{2}$.

29. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot 5^{-\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. Здесь $[x]$ – целая часть x.

Ответ: 2.

30. Непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ разложена в ряд: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^2}$.

Дополнительно известно, что $f(0) = 0$. Найдите $f(\pi)$.

Ответ: $4-\pi$.