Теория и применение цифровой обработки сигналов

Дискретизация непрерывных сигналов (ч.2)

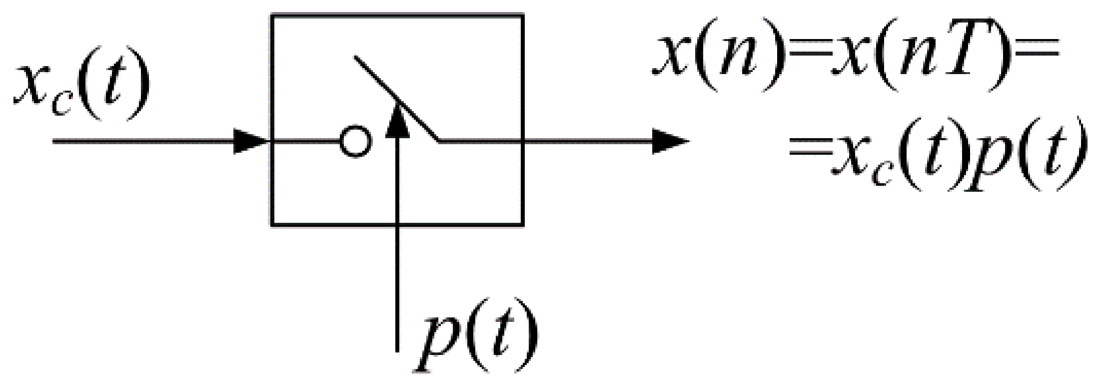
д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Математическое описание процесса дискретизации

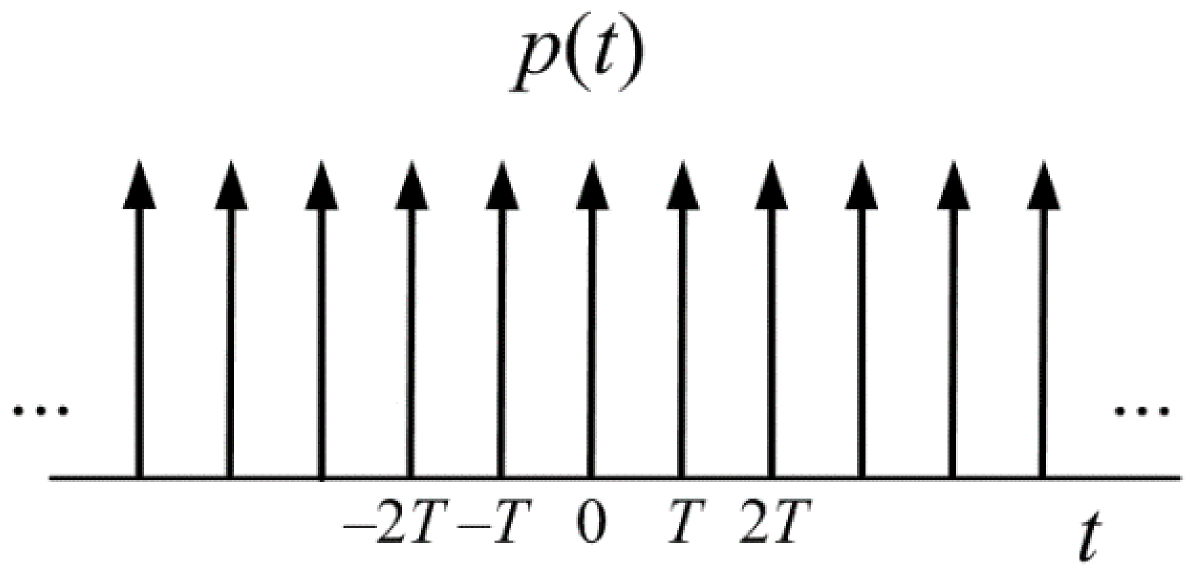
Схема идеального непрерывно-дискретного преобразования



$x_c(t)$ – непрерывный сигнал, $x(n)$ – дискретный сигнал,

$p(t)$ – выборочная функция:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

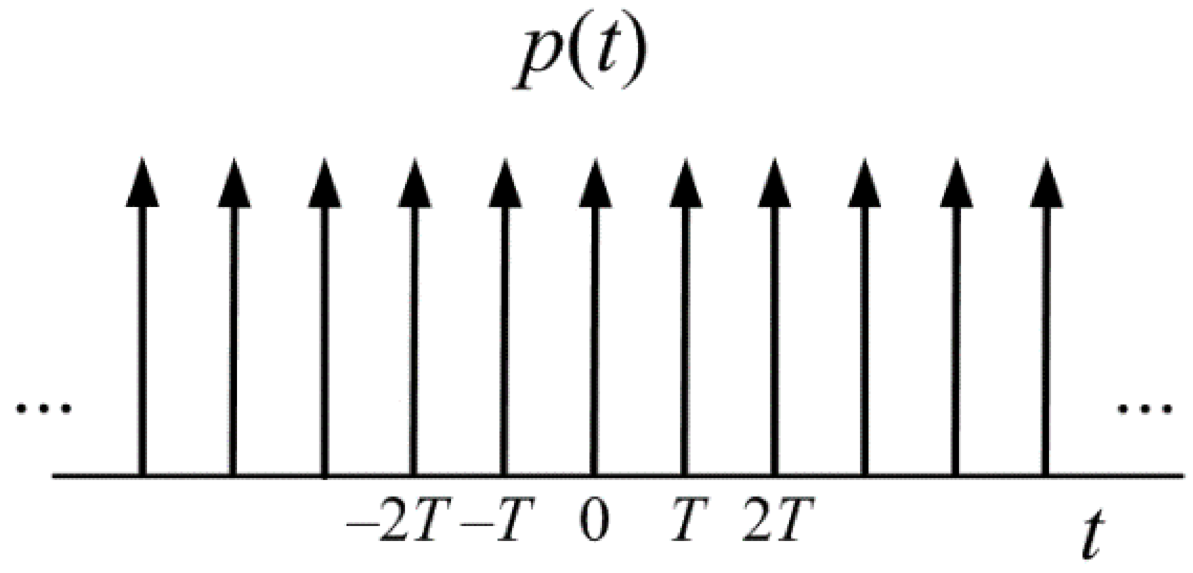


Математическое описание процесса дискретизации

ПФ от последовательности дельта-импульсов

Для дальнейшего изложения нам необходимо найти ПФ от последовательно-сти дельта-импульсов:

$$P(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right\} = \cdots$$



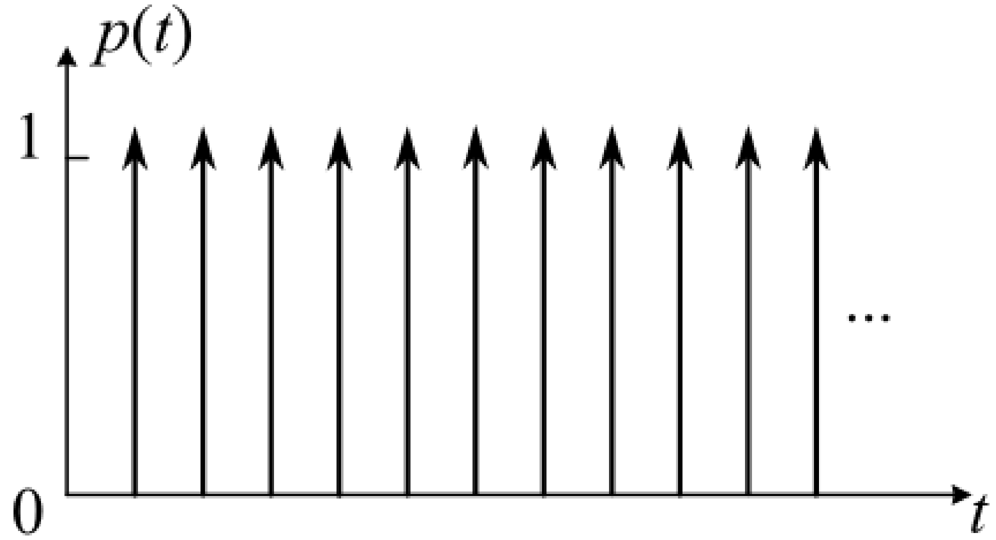
Математическое описание процесса дискретизации

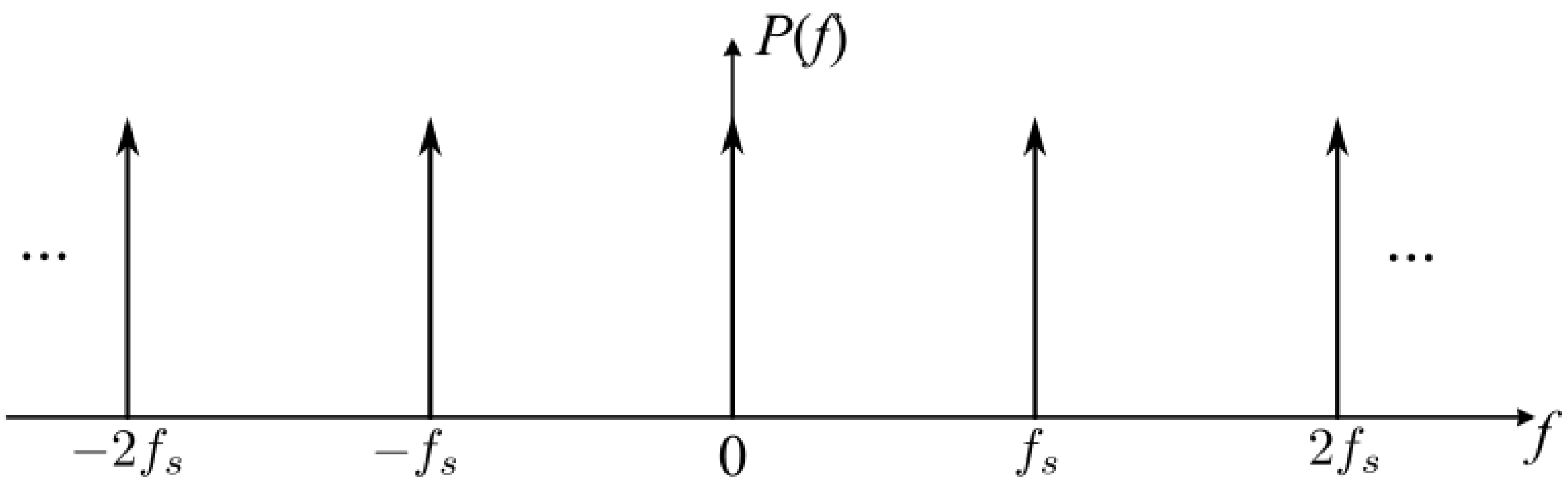
ПФ от последовательности дельта-импульсов

Известно, что преобразование Фурье периодической последовательности импульсов является снова периодической цепочкой импульсов

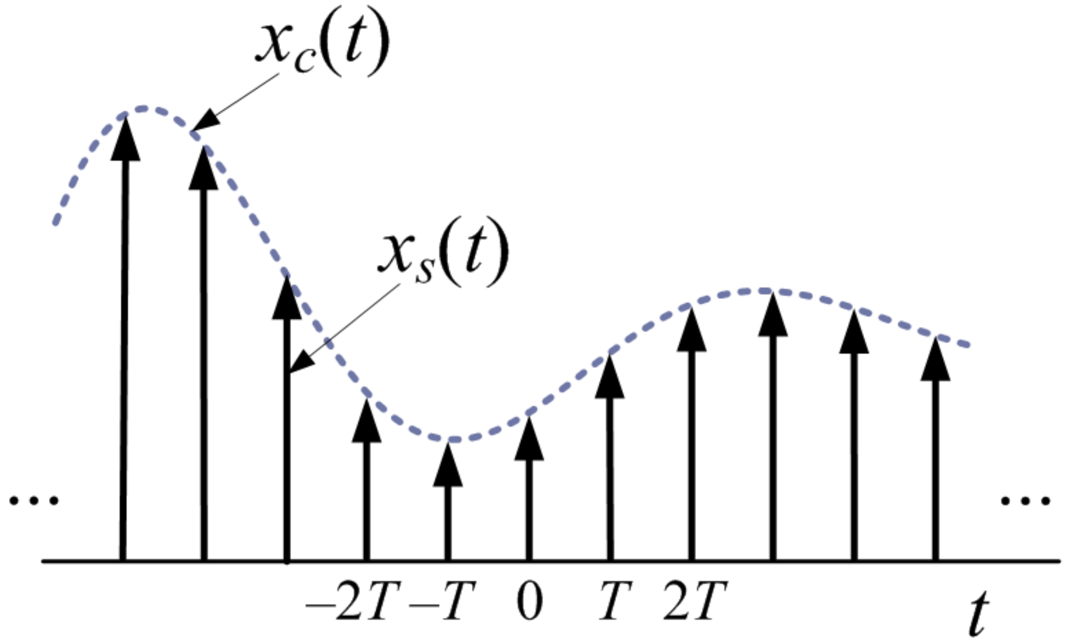
$$P(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_s}\right) e^{-j2\pi f t} dt =$$

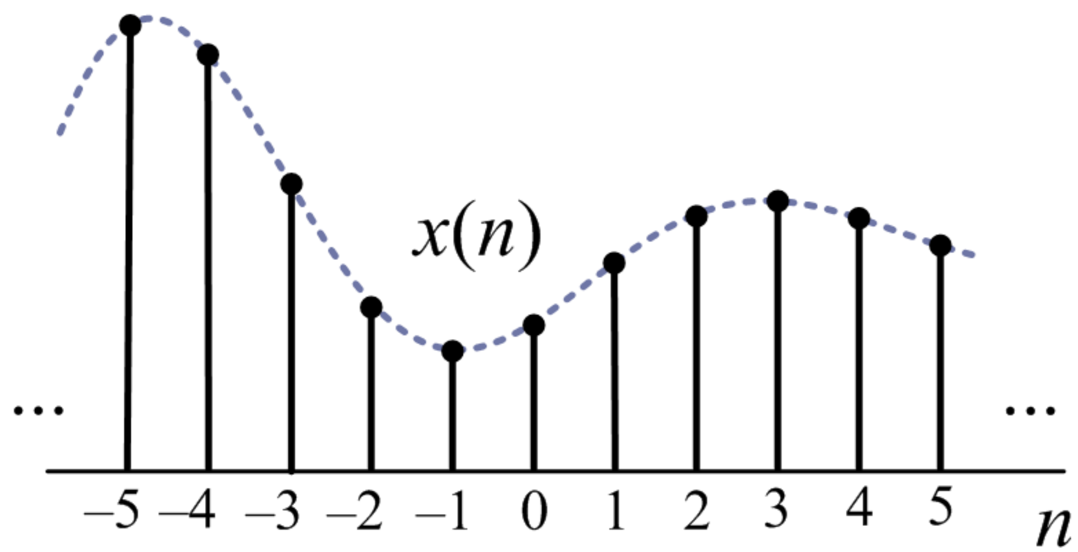
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \frac{n}{f_s}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s).$$





Дискретизации непрерывного сигнала





Описание процесса дискретизации разбивают на два этапа:

1) формирование импульсного сигнала $x_c(t) \rightarrow x_s(t)$.

2) формирование дискретной последовательности $x_s(t) \rightarrow x(n)$.

$$x_s(t) = x_c(t)p(t) = x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)\delta(t-nT).$$

Процесс дискретизации в частотной области

Умножение сигналов во временной области соответствует свертке их Фурье-образов в частотной области:

$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\{x_c(t)p(t)\} = X_s(f) = X_c(f) * P(f), \qquad (1)$$

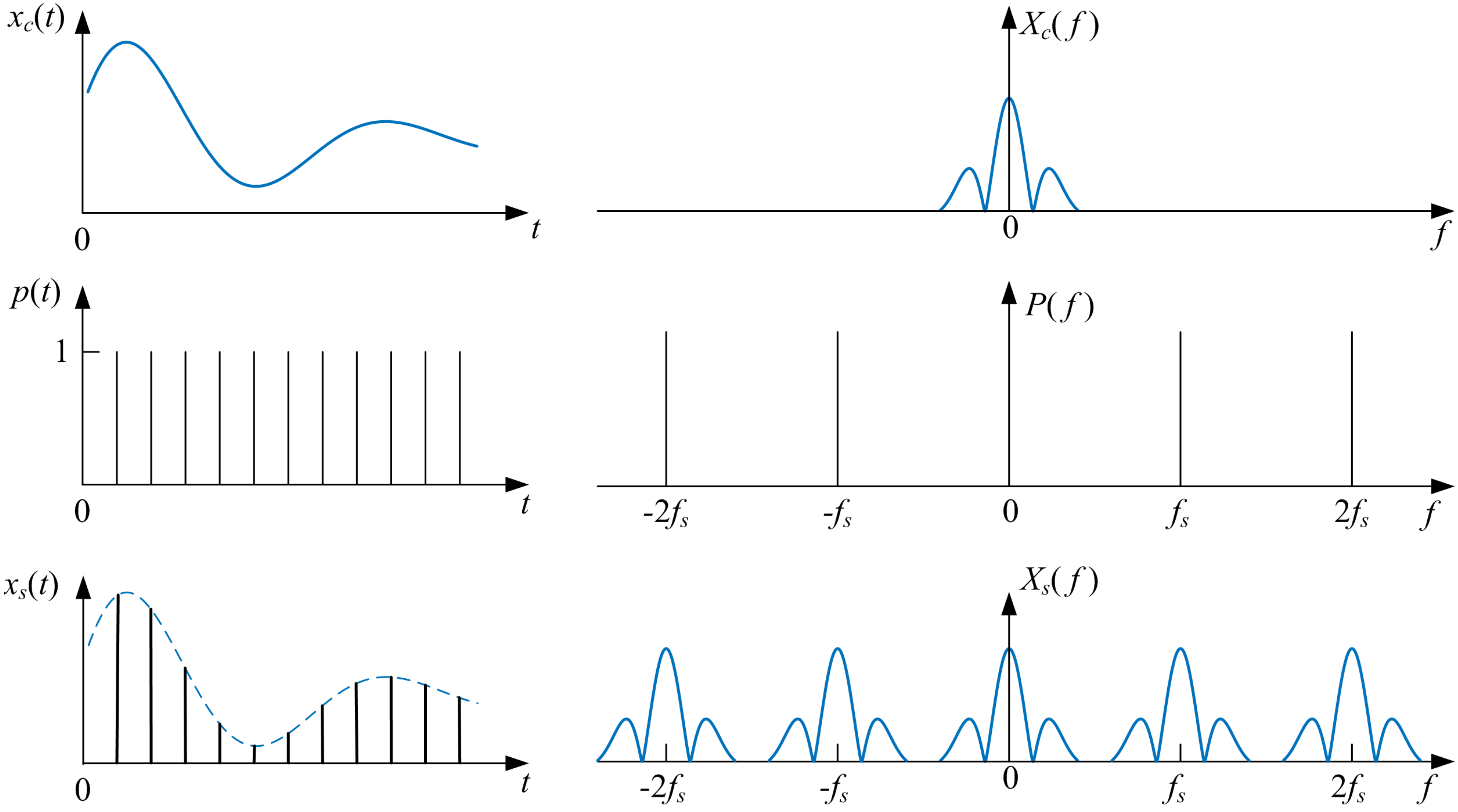
Поскольку

$$P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

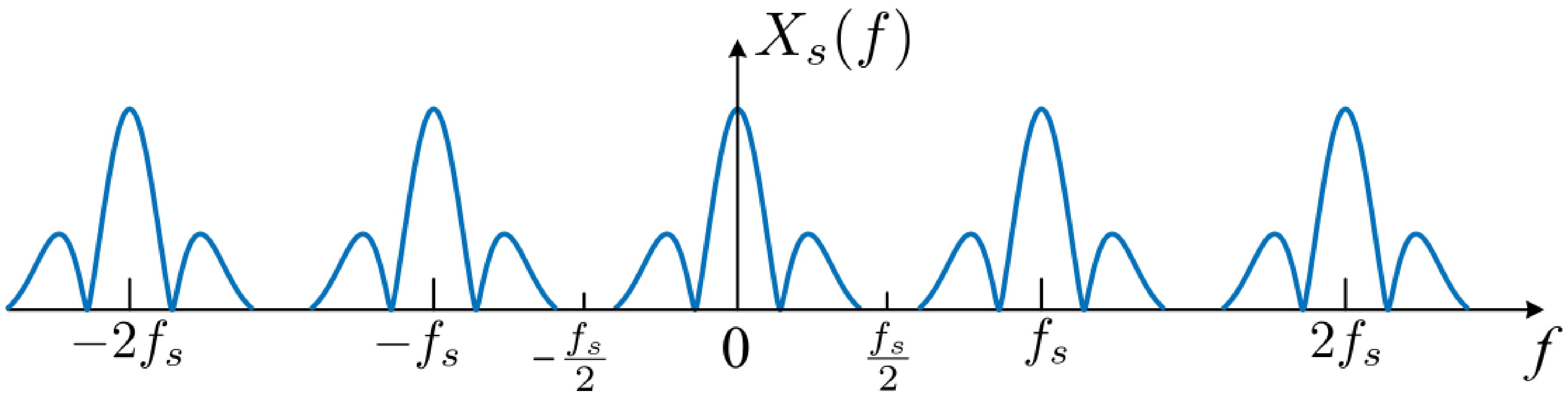
то

$$X_s(f) = X_c(f) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - nf_s). \qquad (2)$$

Процесс дискретизации в частотной области

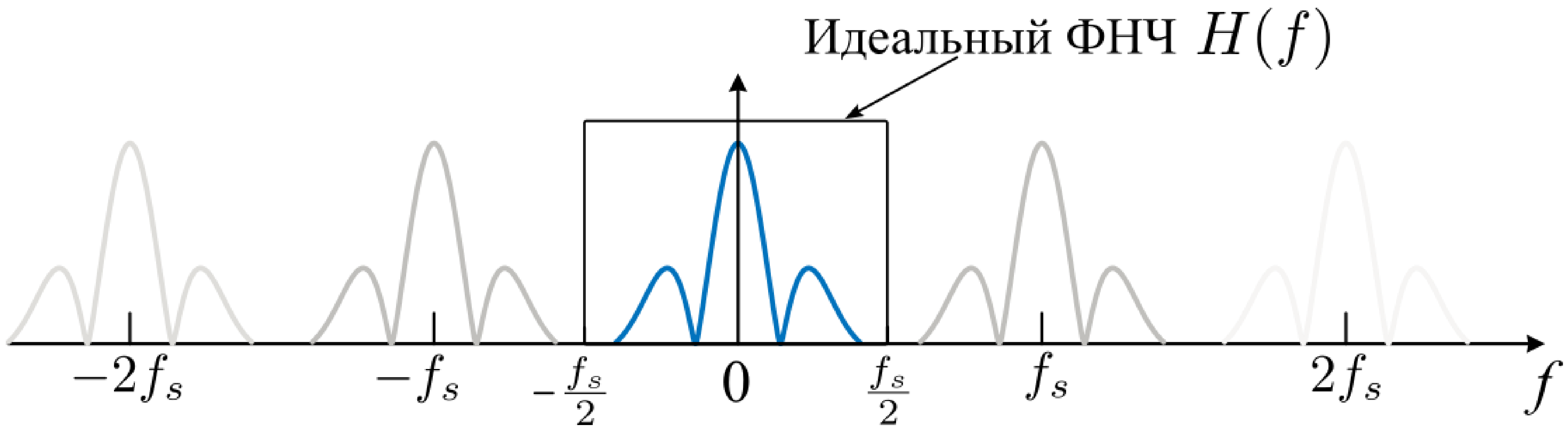


Процесс дискретизации в частотной области



Очевидно, что если исходный сигнал содержит компоненты с частотой $B > f_s/2$, то в результате свертки в спектре $X_s(f)$ будет происходить наложение (перекрытие) двух соседних копий спектра $X_c(f)$, что будет приводить к искажению информации.

Восстановление сигнала

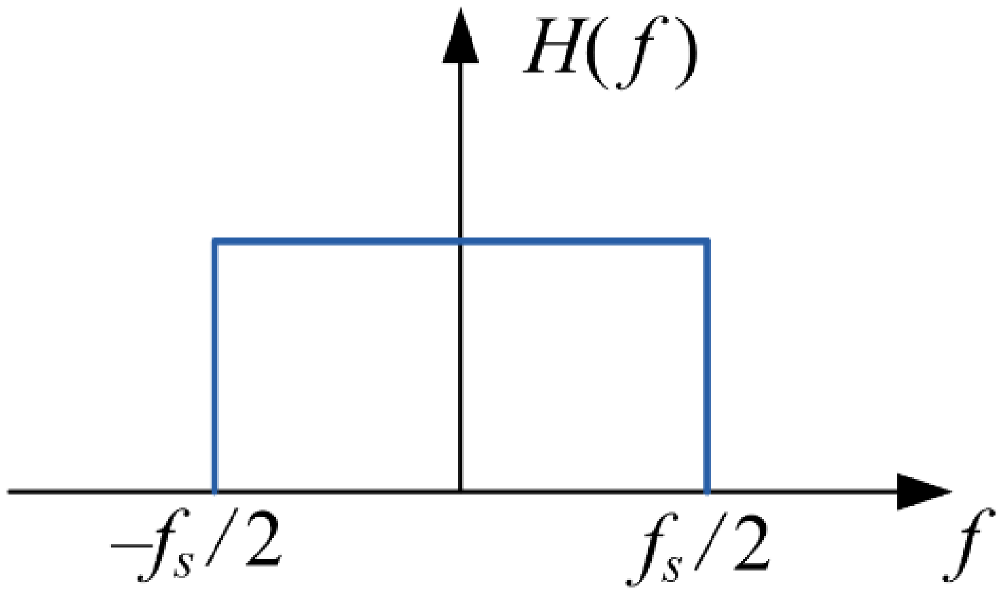


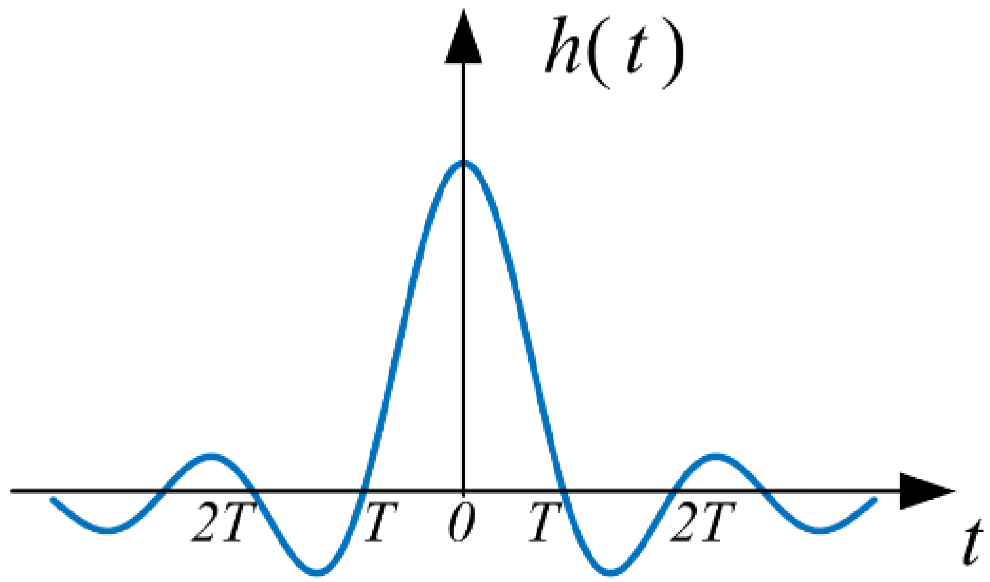
Для восстановления сигнала его необходимо пропустить через идеальный фильтр нижних частот:

$$\hat{X}(f) = X_s(f)H(f).$$

Идеальный фильтр нижних частот

Обозначим идеальный фильтр как $h(t)$. Для того, чтобы сохранить все компоненты исходного сигнала неизменными его частотная характеристика должны иметь вид прямоугольного импульса $H(f)$ в частотной области.





$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right).$$

Зная, что $\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{rect}(f)] = \mathrm{sinc}\, t$ и используя теорему о масштабировании получим

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)\right] = \mathrm{sinc}\, f_s t = \frac{\sin \pi f_s t}{\pi f_s t}.$$

Теорема отсчетов

Пусть $X_c(f)$, преобразование Фурье функции $x_c(t)$, равно нулю для всех значений $|f| > f_s/2$, тогда

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)h(t - nT),$$

где

$$h(t) = \frac{\sin \pi f_s t}{\pi f_s t}.$$