## *ЦИФРОВАЯ СВЯЗЬ*

*УДК 621.391*

# АДАПТИВНОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ДВУХМЕРНОГО КОДА ХЭММИНГА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК В ДЕКОДИРУЕМОЙ МАТРИЦЕ

С.Х. ЖЭНЬ, В.Ю. ЦВЕТКОВ, В.К. КОНОПЕЛЬКО

*Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», ул. П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 2 сентября 2022*

Рассматривается задача повышения эффективности декодирования двухмерных помехоустойчивых кодов Хэмминга. Они строятся на базе обычных одномерных кодов Хэмминга, в которых на четыре информационных приходятся три проверочных символа, и позволяют теоретически исправить до четырех ошибок. Однако, известные двухэтапные и трехэтапные декодеры обычного двухмерного кода Хэмминга гарантированно исправляют меньшее количество ошибок. Целью работы является достижение потенциальной корректирующей способности обычного двухмерного кода Хэмминга.

*Ключевые слова:* помехоустойчивое кодирование, двухмерные коды Хэмминга, двухэтапное декодирование, трехэтапное декодирование.

**Введение.** Для защиты данных от ошибок при передаче по каналам связи используется помехоустойчивое кодирование. При помехоустойчивом кодировании к передаваемым данным добавляется проверочная информация, позволяющая при декодировании обнаружить и исправить некоторое количество ошибок. Помехоустойчивые коды отличаются различной обнаруживающей, исправляющей способностью, избыточностью, вычислительной сложностью и имеют поэтому различную эффективность для определенных условий использования [1, 2]. При небольшой вероятности ошибки передачи и невысоких требованиях к безошибочной передаче данных могут использоваться простые помехоустойчивые коды, декодеры которых имеют низкую вычислительную сложность. К таким кодам относятся коды Хэмминга. Обычный код Хэмминга позволяет исправить одну ошибку в четырех информационных битах при добавлении к ним трех проверочных бит [3]. Для повышения корррективующих способностей предложены двухмерные коды Хэмминга [4]. Они строятся на базе обычных кодов Хэмминга и позволяют теоретически исправить до четырех ошибок. Однако известные декодеры обычного двухмерного кода Хэмминга гарантированно исправляют меньшее количество ошибок [4]. Для повышения корректирующей способности предложен расширенный код Хэмминга [3], двухмерная модификация которого гарантирует исправление четырех ошибок, но за счет значительного увеличения избыточности [5].

Целью исследования является достижение потенциальной корректирующей способности обычного двухмерного кода Хэмминга за счет улучшения схемы декодирования.

**Постановка задачи.** Код Хэмминга $\mathrm{C}(n,k)$ имеет длину $n$ бит, содержит $k$ информационных и $r=n-k$ проверочных бит, позволяет обнаружить $t_D \le d-1$ и исправить $t_C \le (d-1)/2$ ошибок в любой позиции кодового слова при кодовой избыточности $\eta=r/n$ и скорости кода $R=k/n$, где $d$ – минимальное кодовое расстояние, определяемое минимальным числом позиций, на которых не совпадают все возможные пары кодовых слов кода $\mathrm{C}(n,k)$ [6]. Обычный код Хэмминга имеет параметры $\{n=7, k=4\}$, обозначается С(7,4), имеет $d=3$, позволяет обнаружить две и исправить одну ошибку при $\eta = 3/7 = 0{,}43$ и $R=0{,}57$. Расширенный код Хэмминга С(8,4) позволяет обнаружить три и исправить одну ошибку [3].

Для повышения корректирующей способности предложен двухмерный код Хэмминга $\mathrm{C}_1(n_1,k_1)\times \mathrm{C}_2(n_2,k_2)$ – код произведения. Он формируется на основе исходной информационной матрицы $D_{k_1\times k_2}$ размером $k_1\times k_2$ бит, которая расширяется до исходной кодовой матрицы $M_{n_1\times n_2}$ размером $n_1\times n_2$ бит за счет добавления к строкам, затем к столбцам по $r_1$ и $r_2$ проверочных бит соответственно [3]. При стандартных параметрах код $\mathrm{C}_1(7,4)\times \mathrm{C}_2(7,4)$ имеет $\eta=0{,}67$ и $R=0{,}33$, позволяет обнаружить до 8 и исправить до 4 ошибок. Двухмерный код, сформированный на основе расширенного кода Хэмминга С(8,4), позволяет обнаружить до 15 и исправить до 7 ошибок при увеличении избыточности $(\eta=0{,}75)$ и уменьшении скорости кода $(R=0{,}25)$ [5]. При теоретическом пределе $(d_1 d_2-1)/2$ реальное количество исправляемых ошибок в двухмерном коде Хэмминга зависит от метода декодирования.

Двухэтапное декодирование (2 stage Hamming Decoder, HD2) двухмерных итеративных кодов [4] основано на формировании матриц синдромов строк $S^{\mathrm{R}}_{n\times r} = \left[s^{\mathrm{R}}(j,p)\right]_{\left(j=\overline{1,n},\, p=\overline{1,r}\right)}$ (на первом этапе) и столбцов $S^{\mathrm{C}}_{n\times r} = \left[s^{\mathrm{C}}(i,p)\right]_{\left(i=\overline{1,n},\, p=\overline{1,r}\right)}$ (на втором этапе) с помощью выражений:

$$S^{\mathrm{R}}_{n\times r} = \tilde{M}_{n\times n} H^{\mathrm{T}}_{r\times n}, \tag{1}$$

$$S^{\mathrm{C}}_{n\times r} = \left(\hat{M}^{(1)}_{n\times n}\right)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}}_{r\times n}, \tag{2}$$

где $H_{r\times n}$ – проверочная матрица Хэмминга, $H_{r\times n} = \left[h(j,i)\right]_{\left(j=\overline{1,r},\, i=\overline{1,n}\right)}$; $\tilde{M}_{n\times n}$ – декодируемая матрица (формируется из исходной матрицы $M_{n\times n}$ после передачи), $\tilde{M}_{n\times n} = \left[\tilde{m}(j,i)\right]_{\left(j=\overline{1,n},\, i=\overline{1,n}\right)}$; $\hat{M}^{(1)}_{n\times n}$ – декодированная на первом этапе кодовая матрица, $\hat{M}^{(1)}_{n\times n} = \left[\hat{m}^{(1)}(j,i)\right]_{\left(j=\overline{1,n},\, i=\overline{1,n}\right)}$.

На основе синдромов формируются векторы ошибок строк $E^{\mathrm{R}}_{n\times 1}$ и столбцов $E^{\mathrm{C}}_{n\times 1}$ матриц $\tilde{M}_{n\times n}$ и $\hat{M}^{(1)}_{n\times n}$, $E^{\mathrm{R}}_{n\times 1} = \left[e^{\mathrm{R}}(j)\right]_{\left(j=\overline{1,n}\right)}$, $E^{\mathrm{C}}_{n\times 1} = \left[e^{\mathrm{C}}(i)\right]_{\left(i=\overline{1,n}\right)}$. Значения элементов $e^{\mathrm{R}}(j)$ $\left(e^{\mathrm{C}}(i)\right)$ указывают на номер ошибочного символа в *j*-й строке (*i*-м столбце) матрицы $\tilde{M}_{n\times n}$ $\left(\hat{M}^{(1)}_{n\times n}\right)$ и вычисляются с помощью выражений:

$$e^{\mathrm{R}}(j) = \sum_{p=1}^{r} 2^{p-1} s^{\mathrm{R}}(j,p), \tag{3}$$

$$e^{\mathrm{C}}(i) = \sum_{p=1}^{r} 2^{p-1} s^{\mathrm{C}}(i,p). \tag{4}$$

На первом этапе значения элементов $\hat{m}^{(1)}(j,i)$ декодированной матрицы $\hat{M}^{(1)}_{n\times n}$ определяются с помощью выражения:

$$\tilde{m}^{(1)}(j,i)=\begin{cases}\mathring{m}(j,i) \text{ при } i \ne e^{\mathrm{R}}(j),\\ \overline{\mathring{m}(j,i)} \text{ при } i = e^{\mathrm{R}}(j)\end{cases} \qquad (5)$$

при $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$.

На втором этапе значения элементов $\tilde{m}^{(2)}(j,i)$ декодированной матрицы $\tilde{M}^{(2)}_{n\times n}$ определяются с помощью выражения:

$$\tilde{m}^{(2)}(j,i)=\begin{cases}\tilde{m}^{(1)}(j,i) \text{ при } j \ne e^{\mathrm{C}}(i),\\ \overline{\tilde{m}^{(1)}(j,i)} \text{ при } j = e^{\mathrm{C}}(i)\end{cases} \qquad (6)$$

при $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$.

Временная $C_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{HD2})}$ и пространственная $C_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{HD2})}$ сложности двухэтапного декодирования двухмерного кода Хэмминга определяются с помощью выражений $C_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{HD2})}=4n(rn+r+2)$, $C_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{HD2})}=2n\left(2(n+r)+\lceil \log_2(n)\rceil\right)$, где $\lceil\ \rceil$ – операция округления до целого с избытком.

Предложенная в [4] схема двухэтапного декодирования не позволяет исправить все варианты распределения 4-х ошибок в декодируемой матрице для обычного и расширенного кодов Хэмминга. На рис. 1 показаны фрагменты NCE1, NCE2 и NCE3 бинарной матрицы (образа) ошибок (единичные элементы указывают на ошибочные символы, нулевые элементы – на правильные символы), показывающие распределение 4-х ошибок в пространстве декодируемой матрицы для кодов $\mathrm{C}_1(7,4)\times\mathrm{C}_2(7,4)$ и $\mathrm{C}_1(8,4)\times\mathrm{C}_2(8,4)$, исправление которых невозможно. В поле матрицы 7×7 с учетом всех возможных вариантов перестановки строк и столбцов фрагмент NCE1 может быть представлен 441-ю способами, фрагменты NCE2 и NCE3 – 4410 способами каждый.

$$\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{matrix}$$

а) б) в)

Рис. 1. Комбинации неисправляемых ошибок:
а – NCE1; б – NCE2; в – NCE3

Трехэтапное декодирование (3 stage Hamming Decoder, HD3) двухмерных кодов Хэмминга [7] дополнительно к выражениям (1) – (6) описывается выражением, определяющим значения элементов $\tilde{m}^{(3)}(j,i)$ декодированной матрицы $\tilde{M}^{(3)}_{n\times n}$ на третьем этапе декодирования:

$$\tilde{m}^{(3)}(j,i)=\begin{cases}\tilde{m}^{(2)}(j,i) \text{ при } i \ne e^{\mathrm{R3}}(j),\\ \overline{\tilde{m}^{(2)}(j,i)} \text{ при } i = e^{\mathrm{R3}}(j)\end{cases} \qquad (7)$$

при $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$,

где $e^{\mathrm{R3}}(j)$ – элемент вектора $E^{\mathrm{R3}}_{n\times 1}$ ошибок строк в кодовой матрице $\tilde{M}^{(2)}_{n\times n}$, формируемого на третьем этапе декодирования на основе матрицы синдромов $S^{\mathrm{R3}}_{n\times r}$ с помощью выражений, аналогичных (1) и (3), $S^{\mathrm{R3}}_{n\times r}=\left[s^{\mathrm{R3}}(j,p)\right]_{\left(j=\overline{1,n},\ p=\overline{1,r}\right)}$, $E^{\mathrm{R3}}_{n\times 1}=\left[e^{\mathrm{R3}}(j)\right]_{\left(j=\overline{1,n}\right)}$.

Временная $C_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{HD3})}$ и пространственная $C_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{HD3})}$ сложности трехэтапного декодирования двухмерного кода Хэмминга определяется аналогично двухэтапному декодированию с помощью выражений $C_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{HD3})} = 6n(rn + r + 2)$, $C_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{HD2})} = 3n\left(2(n+r) + \lceil \log_2(n) \rceil\right)$.

В случае декодирования расширенного кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(8,4) \times \mathrm{C}_2(8,4)$ для вычисления синдромов используются выражения (1) и (2), но проверочная матрица $H_{r \times n}$ отличается от проверочной матрицы кода $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$.

Временная $C_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{HD3E})}$ и пространственная $C_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{HD3E})}$ сложности трехэтапного декодирования расширенного кода Хэмминга определяются с помощью выражений $C_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{HD3E})} = n^2(6r+4) + n(3r+13) + 2$, $C_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{HD3E})} = 2\left(3n^2 + n\left(3r + \lceil \log_2(n) \rceil + 1\right)\right)$.

Для кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$ трехэтапное декодирование позволяет исправить все ошибки типа NCE3 (4410 ошибок) и большую часть ошибок типа NCE3 (3528 ошибок). Для кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(8,4) \times \mathrm{C}_2(8,4)$ трехэтапное декодирование исправляет все возможные распределения 4-х ошибок в кодовой матрице $\tilde{M}_{8 \times 8}$. При этом по сравнению с кодом $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$ в 1,12 раза увеличивается кодовая избыточность, в 1,32 раза уменьшается скорость кода, в 1,74 раза увеличивается временная и в 1,33 раза пространствення сложность. Таким образом, актуальной задачей является разработка декодера кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$, исправляющего любые комбинации ошибок до 4-х включительно.

**Адаптивное декодирование двухмерного кода Хэмминга.** Важным свойством двухмерных кодов Хэмминга является независимость значений формируемой кодовой матрицы от очередности кодирования строк и столбцов [8]. С учетом данного свойства предлагается структура адаптивного декодера кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$ на основе анализа распределения ошибок в строках и столбцх декодируемой матрицы $\tilde{M}_{n \times n}$ (RCDOS – Rows, Columns processing and error Deletions Order Selection). Сущность предлагаемого адаптивного декодирования состоит в выборе варианта обработки кодовых матриц на различных этапах декодирования в зависимости от соотношения количества ошибок $N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}}$ в строках и $N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}$ в столбцах декодируемой матрицы $\tilde{M}_{n \times n}$ (рис. 2): а) декодирование строк, столбцов, строк (R-C-R) при $N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} > N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}$ или $N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} = N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} > 2$; б) декодирование столбцов, строк, столбцов (C-R-C) при $N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} < N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}}$; в) стирание ошибок, декодирование строк (CLR-R) при $N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{R}} = N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{C}} \leq 2$.

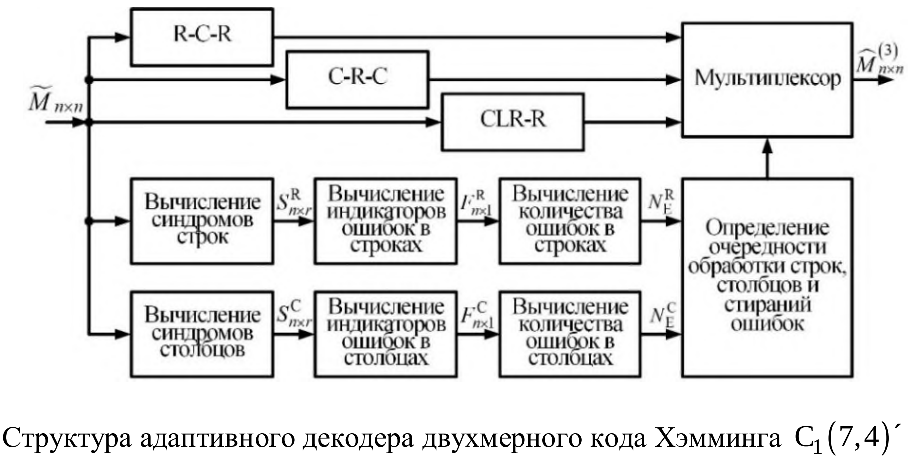



Рис. 2. Структура адаптивного декодера двухмерного кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$

В результате формирование декодированной матрицы $\hat{M}^{(3)}_{n\times n}$ описывается с помощью выражения:

$$
\hat{M}^{(3)}_{n\times n} = \begin{cases} F_{\mathrm{R}}\left(F_{\mathrm{C}}\left(F_{\mathrm{R}}\left(\tilde{M}_{n\times n}\right)\right)\right) \text{ при } \left(N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} > N^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}\right) \vee \left(\left(N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} = N^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} > 2\right)\right), \\ F_{\mathrm{C}}\left(F_{\mathrm{R}}\left(F_{\mathrm{C}}\left(\tilde{M}_{n\times n}\right)\right)\right) \text{ при } N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} < N^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}, \\ F_{\mathrm{R}}\left(F_{\mathrm{CLR}}\left(\tilde{M}_{n\times n}\right)\right) \text{ при } \left(N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} = N^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}\right) \wedge \left(N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} \le 2\right), \end{cases}
$$

где $F_{\mathrm{R}}$ – функция декодирования строк кодовой матрицы; $F_{\mathrm{C}}$ – функция декодирования столбцов кодовой матрицы; $F_{\mathrm{CLR}}$ – функция стирания ошибок, определяющая значения элементов $\hat{m}^{\mathrm{CLR}}(j,i)$ декодированной матрицы $\hat{M}^{\mathrm{CLR}}_{n\times n}$ на основе значений элементов $\tilde{m}(j,i)$ декодируемой матрицы $\tilde{M}_{n\times n}$ и синдромов $S^{\mathrm{R}}_{n\times r}$ строк и $S^{\mathrm{C}}_{n\times r}$ столбцов с помощью выражения:

$$
\hat{m}^{\mathrm{CLR}}(j,i) = \begin{cases} \tilde{m}(j,i) \text{ при } \left(f^{\mathrm{R}}(j)=0\right) \vee \left(f^{\mathrm{C}}(i)=0\right), \\ \overline{\tilde{m}(j,i)} \text{ при } \left(f^{\mathrm{R}}(j)=1\right) \wedge \left(f^{\mathrm{C}}(i)=1\right) \end{cases}
$$

при $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$,
где $f^{\mathrm{R}}(j)$, $f^{\mathrm{C}}(i)$ – индикаторы ошибок в строках и столбцах декодируемой матрицы – элементы векторов $F^{\mathrm{R}}_{n\times 1} = \left[f^{\mathrm{R}}(j)\right]_{\left(j=\overline{1,n}\right)}$ и $F^{\mathrm{C}}_{n\times 1} = \left[f^{\mathrm{C}}(i)\right]_{\left(i=\overline{1,n}\right)}$ индикаторов ошибок, определяемые с помощью выражений:

$$
f^{\mathrm{R}}(j) = \begin{cases} 0 \text{ при } \sum_{p=1}^{r} s^{\mathrm{R}}(j,p) = 0, \\ 1 \text{ при } \sum_{p=1}^{r} s^{\mathrm{R}}(j,p) > 0, \end{cases} \qquad f^{\mathrm{C}}(i) = \begin{cases} 0 \text{ при } \sum_{p=1}^{r} s^{\mathrm{C}}(i,p) = 0, \\ 1 \text{ при } \sum_{p=1}^{r} s^{\mathrm{C}}(i,p) > 0 \end{cases}
$$

при $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$.

Значения $N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}}$ и $N^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}$ вычисляются с помощью выражений $N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}} = \sum_{j=1}^{n} f^{\mathrm{R}}(j)$ и $N^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{n} f^{\mathrm{C}}(i)$ при $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$.

Из декодированной матрицы $\hat{M}^{(3)}_{n\times n}$ выделяется декодированная информационная подматрица $\hat{D}_{k\times k}$, соответствующая исходной информационной матрице $D_{k\times k}$.

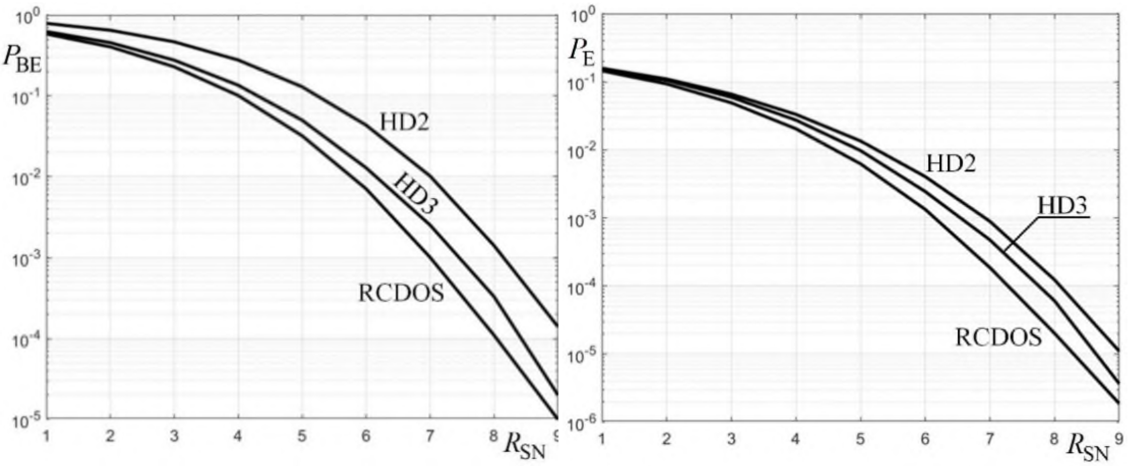
Временная $C^{(\mathrm{RCDOS})}_{\mathrm{T}}$ и пространственная $C^{(\mathrm{RCDOS})}_{\mathrm{S}}$ сложности предложенного адаптивного декодирования двухмерного кода Хэмминга определяются с помощью выражений $C^{(\mathrm{RCDOS})}_{\mathrm{T}} = 10rn^2 + 8rn + 18n + 5$, $C^{(\mathrm{RCDOS})}_{\mathrm{S}} = 8n^2 + 10rn + n\left(2 + 3\left\lceil \log_2(n) \right\rceil\right) + 2$.

Для кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$ можно получить, что $C^{(\mathrm{RCDOS})}_{\mathrm{T}} = 2268$ и $C^{(\mathrm{RCDOS})}_{\mathrm{S}} = 681$. Адаптивное декодирование проигрывает трехэтапному декодированию кода Хэмминга $\mathrm{C}_1(7,4) \times \mathrm{C}_2(7,4)$ во временной сложности в 2,08 раза, в пространственной сложности в 1,41 раза. По сравнению с трехэтапным декодированием расширенного кода

Хэмминга $C_1(8,4) \times C_2(8,4)$ проигрыш адаптивного декодировния составляет 1,19 раза во временной сложности и 1,06 раза в пространственой сложности.

**Оценка эффективности декодеров двухмерного кода Хэмминга.** Проведены исследования трех декодеров двухмерного кода Хэмминга $C_1(7,4) \times C_2(7,4)$: двухэтапного HD2 [1], трехэтапного HD3 [2] и предложенного RCDOS, для которых определены значения вероятностей блочных $P_{BE}(\mathrm{HD2})$, $P_{BE}(\mathrm{HD3})$, $P_{BE}(\mathrm{RCDOS})$ и битовых $P_E(\mathrm{HD2})$, $P_E(\mathrm{HD3})$, $P_E(\mathrm{RCDOS})$ ошибок. Вероятности ошибок определяются в равных условиях для каналов трех типов: аналогового с белым гауссовым шумом и контролируемым значением $R_{SN}$ отношения сигнал-шум; цифрового симметричного с контролируемым значением $P_{TE}$ вероятности битовой ошибки передачи; цифрового с контролируемым значением $N_{BTE}$ количества ошибочных бит в каждом передаваемом кодовом блоке.

На рис. 3 приведены зависимости вероятностей блочных и битовых ошибок на выходе декодера от отношения $R_{SN}$ сигнал-шум в аналоговом канале с белым гауссовым шумом. Из них следует, что при изменении $R_{SN}$ в диапазоне [1, 3] адаптивный декодер RCDOS обеспечивает существенное снижение вероятностей ошибок: блочных – в 2,4–16,7 раз по сравнению с HD2 и в 1,2–5,5 раза по сравнению с HD3; битовых – в 1,5–6,1 раза по сравнению с HD2 и в 1,3–3,0 раза по сравнению с HD3.




а) б)

Рис. 3. Зависимости вероятностей ошибок декодирования от $R_{SN}$ для модели аналогового канала с белым гауссовым шумом:
а – для блочных ошибок; б – для битовых ошибок

Аналогичные зависимости получены для цифрового симметричного канала с контролируемым значением $P_{TE}$ вероятности битовой ошибки передачи. Из них следует, что при изменении $P_{TE}$ в диапазоне [0,1, 0,03] адаптивный декодер RCDOS обеспечивает существенное снижение вероятностей ошибок: блочных – в 2,9–8,0 раз по сравнению с HD2 и в 1,2–2,0 раза по сравнению с HD3; битовых – в 1,7–3,3 раза по сравнению с HD2 и в 1,4–2,0 раза по сравнению с HD3.

В табл. для цифрового канала передачи с контролируемым значением $N_{BTE}$ количества ошибочных бит в каждом передаваемом кодовом блоке приведены значения количества блочных ошибок на выходе декодера и рассчитанные на их основе значения вероятностей ошибок для $N_{BTE}$ битовых ошибок передачи в каждом кодовом блоке $B \le 49$. Для $N_{BTE} = [1, 4]$ использованы все $49!/((49 - N_{BTE})!N_{BTE}!)$ возможных комбинаций ошибок. Для $N_{BTE} = [5, 10]$

использованы 300 000 случайных кодовых комбинаций, каждая из которых или не содержит ошибок, или содержит ровно $N_{\text{BTE}}$ ошибочных бит.

Таблица

**Характеристики декодеров для модели цифрового канала передачи с контролируемым значением количества ошибочных бит в каждом передаваемом кодовом блоке**

| $N_{\text{BTE}}$ | $N_{\text{BE}}$ | Количество ошибок на выходе декодера | | | Вероятность ошибки на выходе декодера | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | HD2 | HD3 | RCDOS | HD2 | HD3 | RCDOS |
| 1 | 49 | 0 | 0 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 2 | 1176 | 0 | 0 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 3 | 18424 | 0 | 0 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 4 | 211876 | 9261 | 1323 | 0 | $1{,}67\times10^{-11}$ | $2{,}35\times10^{-12}$ | 0,00 |
| 5 | £ 300 000 | 55497 | 10949 | 5584 | $1{,}85\times10^{-1}$ | $3{,}65\times10^{-2}$ | $1{,}86\times10^{-2}$ |
| 6 | | 126283 | 37416 | 18847 | $4{,}21\times10^{-1}$ | $1{,}23\times10^{-1}$ | $6{,}28\times10^{-2}$ |
| 7 | | 201927 | 90915 | 54419 | $6{,}73\times10^{-1}$ | $3{,}03\times10^{-1}$ | $1{,}81\times10^{-1}$ |
| 8 | | 256916 | 165576 | 133169 | $8{,}56\times10^{-1}$ | $5{,}52\times10^{-1}$ | $4{,}44\times10^{-1}$ |
| 9 | | 283679 | 232975 | 221631 | $9{,}46\times10^{-1}$ | $7{,}77\times10^{-1}$ | $7{,}39\times10^{-1}$ |
| 10 | | 294158 | 272692 | 271361 | $9{,}81\times10^{-1}$ | $9{,}09\times10^{-1}$ | $9{,}05\times10^{-1}$ |

Из табл. следует, что предложенный декодер RCDOS, в отличие от декодеров HD2 и HD3, исправляет все ошибки кратностью 4. При ошибках большей кратности декодер RCDOS показывает лучшую исправляющую способность по сравнению с декодерами HD2 и HD3.

**Заключение.** Для достижения потенциальной корректирующей способности обычного двухмерного кода Хэмминга предложены структура адаптивного декодера и математическая модель декодирования, основанные на анализе распределения ошибок в декодируемой матрице. Их отличием от известных структур является выбор одного из трех вариантов обработки кодовых матриц на различных этапах декодирования: а) декодирование строк, столбцов, строк при преобладании ошибок в строках или при равном количестве более двух ошибок в строках и столбцах декодируемой матрицы; б) декодирование столбцов, строк, столбцов при преобладании ошибок в столбцах декодируемой матрицы; в) стирание ошибок, декодирование строк при равном количестве менее трех ошибок в строках и столбцах декодируемой матрицы. Данные отличия позволили исправить все ошибки кратностью четыре и повысить исправляющую способность при ошибках большей кратности по сравнению с двухэтапным и трехэтапным декодированием.

## ADAPTIVE DECODING OF A TWO–DIMENSIONAL HAMMING CODE BASED ON THE ANALYSIS OF THE DISTRIBUTION OF ERRORS IN THE DECODED MATRIX

X.H. REN, V.YU. TSVIATKOU, V.K. KANAPELKA

### Abstract

The problem of increasing the efficiency of decoding two-dimensional error-correcting Hamming codes is considered. They are built on the basis of conventional one-dimensional Hamming codes, in which there are three check symbols per four information symbols, and theoretically allow up to four errors to be corrected. However, known two-stage and three-stage decoders of the conventional two-dimensional Hamming code are guaranteed to correct fewer errors. The aim of the work is to achieve the potential corrective ability of the conventional two-dimensional Hamming code.

**Список литературы**

1. Mercier, H. A survey of error-correcting codes for channels with symbol synchronization errors / H. Mercier, V. K. Bhargava, V. Tarokh // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2010. – № 1 (12). – P. 87–96.

2. Jeong, S. Iterative Channel Detection With LDPC Product Code for Bit-Patterned Media Recording / S. Jeong, J. Lee // IEEE Transactions on Magnetics. – 2017. – № 11 (53). – P. 1–4.

3. Hamming, R. W. Error detecting and error correcting codes / R. W. Hamming // Bell System Technical Journal. –1950. – № 2 (29). – P. 147–160.

4. Elias, P. Error–free coding / P. Elias // IEEE Trans Inf Theory. – 1954. – № 4 (4). – P. 29–37.

5. Chiaraluce, F. Extended Hamming product codes analytical performance evaluation for low error rate applications / F. Chiaraluce, R. Garello // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2004. – № 6 (3). – P. 2353–2361.

6. Chitode, J. S. Digital communications / J. S. Chitode // Technical Publications. – 2020. – 653 p.

7. Bo, F. On Hamming Product Codes with Type-II Hybrid ARQ for On-Chip Interconnects / F. Bo, P. Ampadu // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. – 2009. – Vol. 56. – № 9. – P. 2042–2054.

8. Shu, L. Error Control Coding / L. Shu, J. Daniel. – 2004. – 1886 p.