Теория и применение цифровой обработки сигналов

Дискретные синусоиды

д.т.н. Вашкевич Максим Иосифович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Синусоида

Непрерывный синусоидальный сигнал

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$

где A – амплитуда, Ω – круговая частота синусоиды (рад/с), φ – начальная фаза (в радианах).

Синусоида

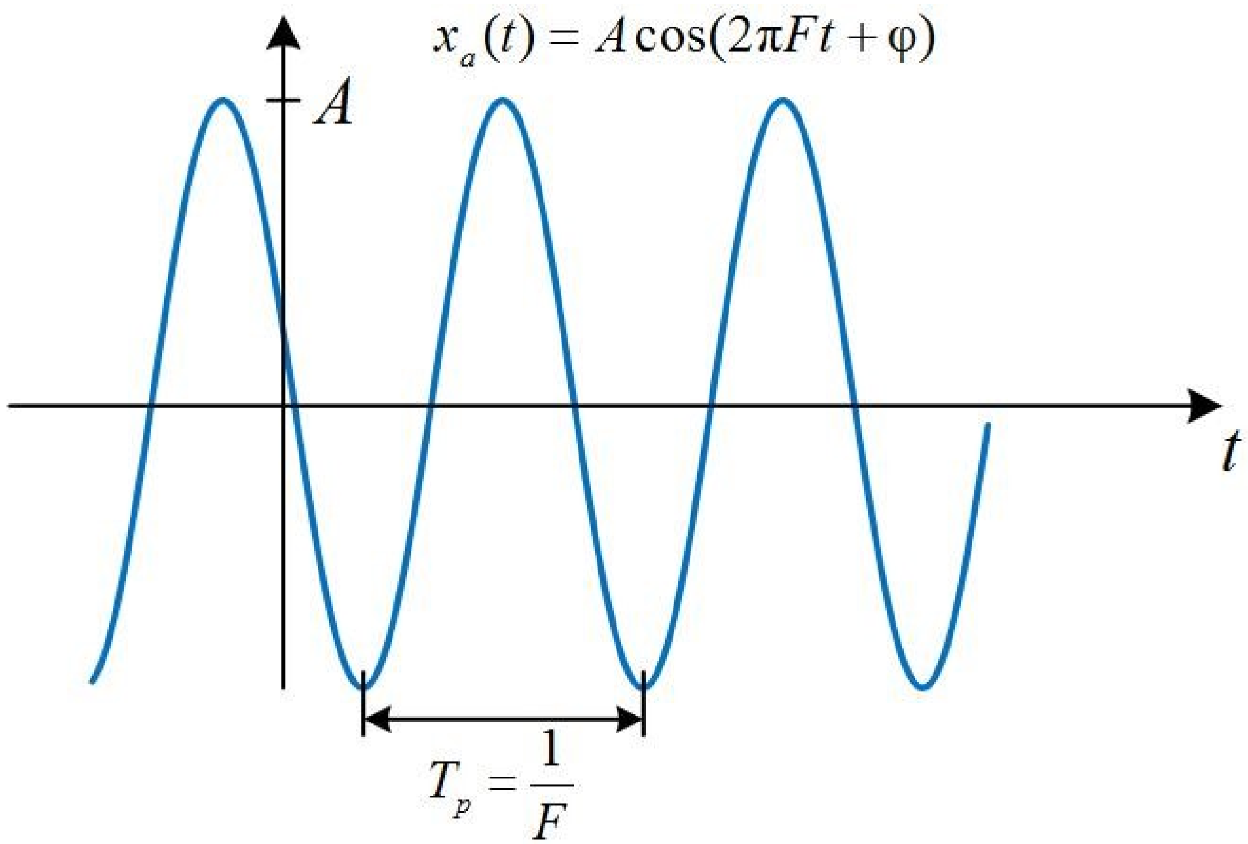
Непрерывный синусоидальный сигнал

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$

где A – амплитуда, Ω – круговая частота синусоиды (рад/с), φ – начальная фаза (в радианах).

Используя $\Omega = 2\pi F$, можно переписать предыдущее выражение

$$x_a(t) = A\cos(2\pi Ft + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$



Синусоида

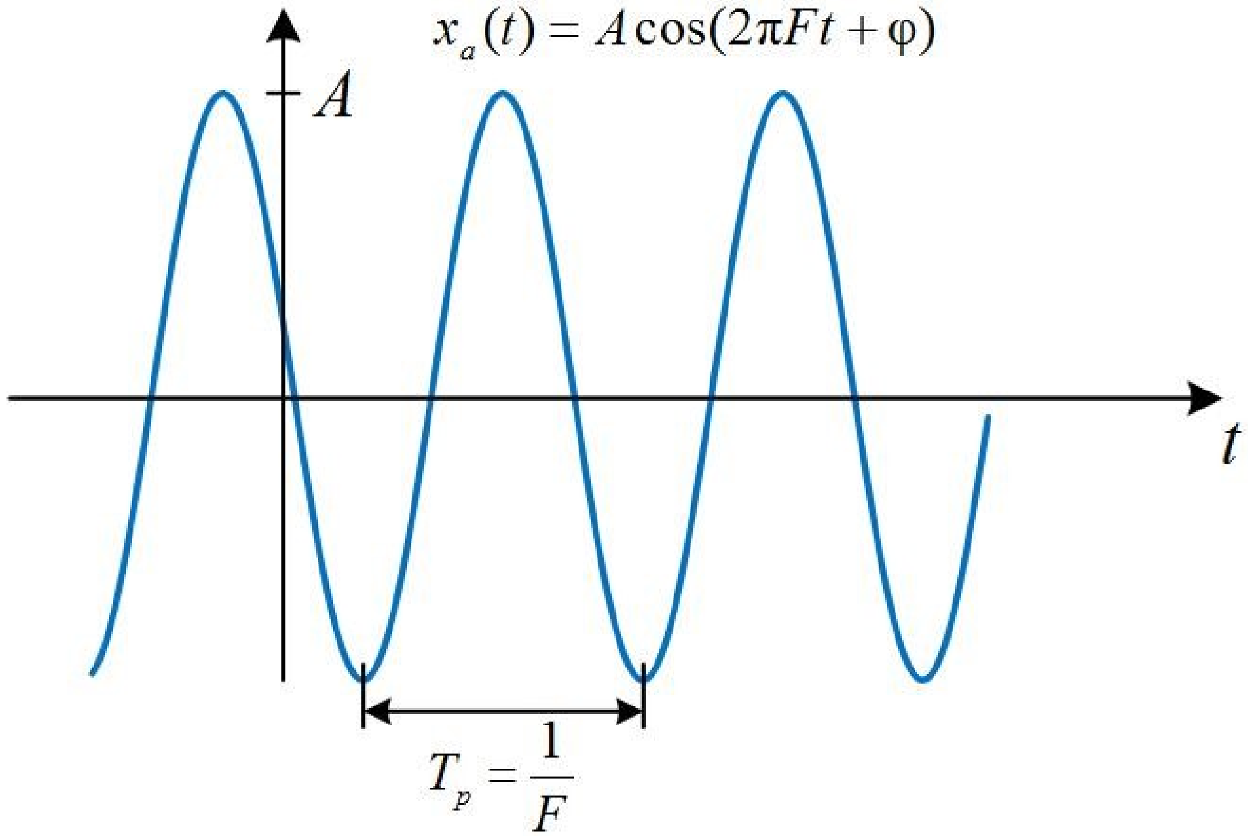
Непрерывный синусоидальный сигнал

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$

где A – амплитуда, Ω – круговая частота синусоиды (рад/с), φ – начальная фаза (в радианах).

Используя $\Omega = 2\pi F$, можно переписать предыдущее выражение

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty,$$



Свойство периодичности

Синусоида всегда периодична

$$x_a(t) = x_a(t + T_0).$$

Понятие частоты для дискретных сигналов (1)

Дискретизация непрерывной синусоиды:

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi FnT + \varphi) = A\cos\left(2\pi\frac{F}{f_s}n + \varphi\right).$$

Понятие частоты для дискретных сигналов (1)

Дискретизация непрерывной синусоиды:

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi FnT + \varphi) = A\cos\left(2\pi \frac{F}{f_s} n + \varphi\right). \quad (1)$$

Запись дискретной синусоиды через круговую частоту:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \varphi)\,, \qquad \omega = 2\pi \frac{F}{f_s}. \quad (2)$$

- ✓ Между аналоговой частотой Ω и нормированной частотой ω есть разница: частота Ω измеряется в ***рад/сек***, а ω в ***рад/отсчет***.
- ✓ Величина n в отличие от времени t являются безразмерной и принимает только целые значения.

Понятие частоты для дискретных сигналов (1)

Дискретизация непрерывной синусоиды:

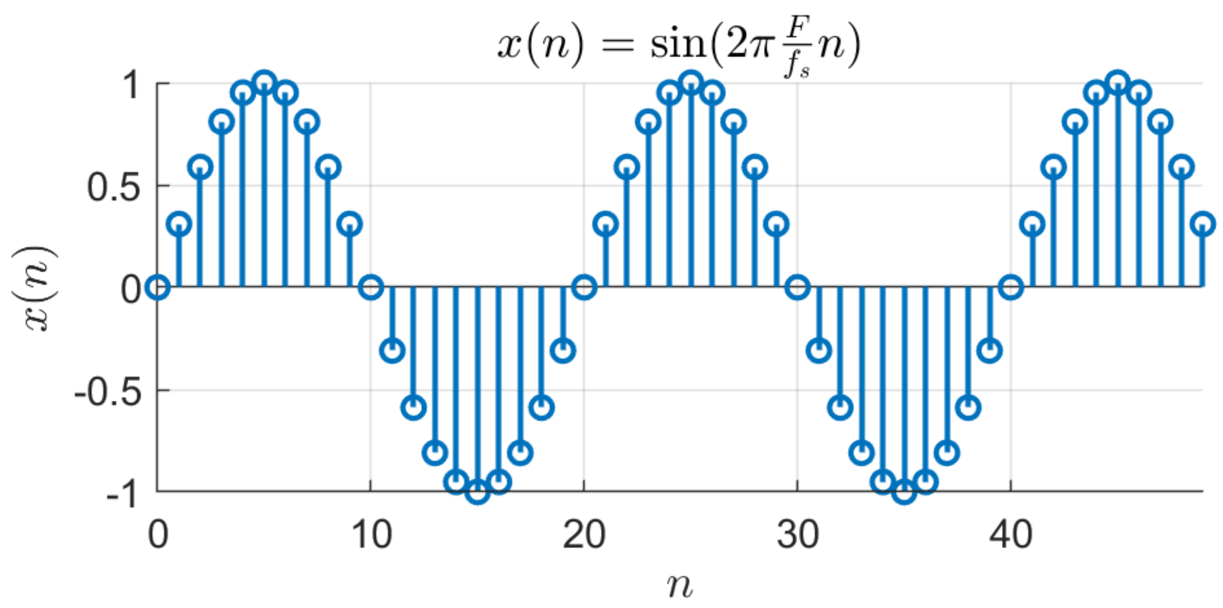
$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi F n T + \varphi) = A\cos\left(2\pi \frac{F}{f_s} n + \varphi\right). \tag{1}$$

Запись дискретной синусоиды через круговую частоту:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \varphi), \qquad \omega = 2\pi \frac{F}{f_s}. \tag{2}$$

Пример на MATLAB

```
fs = 100; % Гц
F = 5; % Гц
n = 0:50-1;
x = sin(2*pi*(F/fs)*n);
stem(n, x);
```



Понятие частоты для дискретных сигналов (2)

Тот факт, что переменная n принимает только целые значения, подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных синусоид. Эта разница особенно заметна при частоте $(\omega + 2\pi)$:

$$x(n) = \cos((\omega + 2\pi)n) = \cos(\omega n + 2\pi n) = \cos(\omega n). \tag{3}$$

!!! *для дискретной синусоиды частоты* ω *и* $\omega + 2\pi$ *неразличимы*.

Цифровая частота

При рассмотрении дискретных синусоид необходимо ограничится интервалом частот величиной 2π. Обычно берут либо положительные частоты в интервале $\omega \in [0,\ 2\pi]$, либо – симметричный интервал $\omega \in [-\pi,\ \pi]$.

Понятие частоты для дискретных сигналов (2)

Тот факт, что переменная n принимает только целые значения, подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных синусоид. Эта разница особенно заметна при частоте $(\omega + 2\pi)$:

$$x(n) = \cos((\omega + 2\pi)n) = \cos(\omega n + 2\pi n) = \cos(\omega n). \quad (4)$$

!!! *для дискретной синусоиды частоты* ω *и* $\omega + 2\pi$ *неразличимы*.

Синусоидальная последовательность

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \varphi) = A\cos(\omega n + \varphi), \qquad (5)$$

где A – амплитуда, f – частота, ω – круговая частота, φ – начальная фаза.

Дискретная синусоида всегда является периодическим сигналом?

Применим условие периодичности $x(n) = x(n + N_0)$ к (5):

$$\cos(2\pi f n) = \cos\big(2\pi f(n + N_0)\big) = \cos(2\pi f n + 2\pi f N_0). \qquad (6)$$

Равенство (6) возможно только если $f N_0 = m \in \mathbb{Z}$.

Т.е. ***дискретная синусоида является периодической, если***

$$f = \frac{m}{N_0} \quad \text{или} \quad \omega = 2\pi\frac{m}{N_0}, \qquad m, N_0 \in \mathbb{Z} \qquad (7)$$

Из (7) следует, что за исключением случая, когда $m = 1$, частота дискретной синусоиды $f = m/N_0$ не равна частоте соответствующей непрерывной синусоиды $F = 1/N_0$.

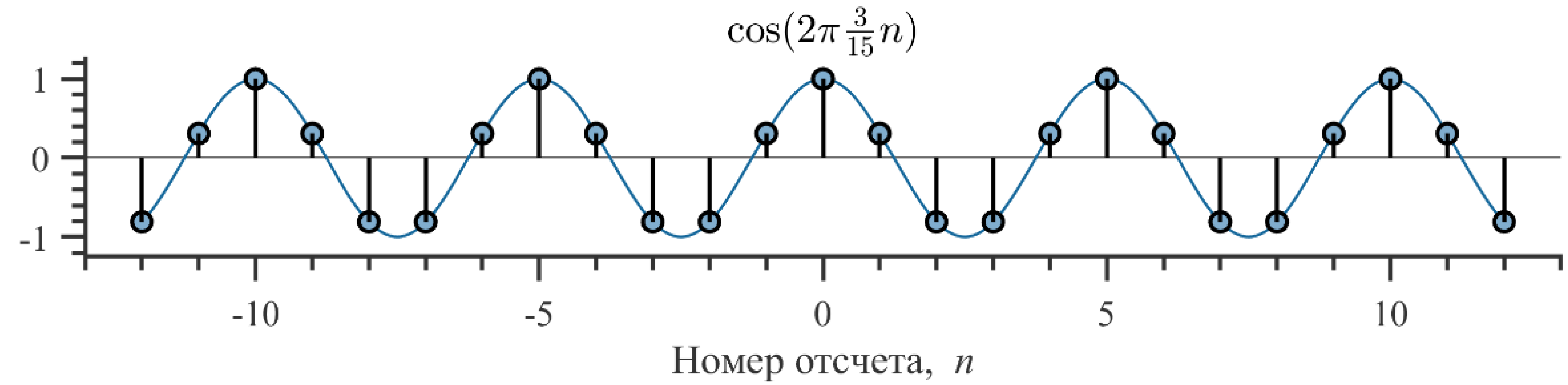
Примеры дискретных синусоид (1)

Пример 1. Постройте графики дискретной синусоиды $\cos(2\pi f n)$ для:
а) $f = 3/15$, б) $f = \frac{1}{1{,}7\pi}$, в) $f = \frac{1}{5{,}5}$.

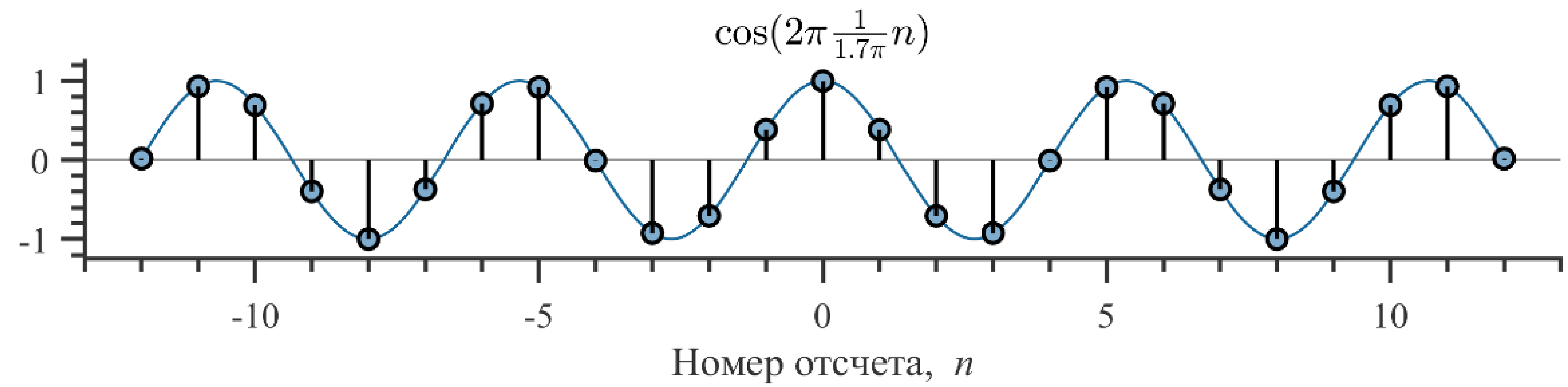
В каждом случае определите является ли сигнал периодическим. В случае, если это верно, определите основной период N_0 и определите является ли *основная частота* сигнала равной частоте синусоиды f.

Примеры дискретных синусоид (2)

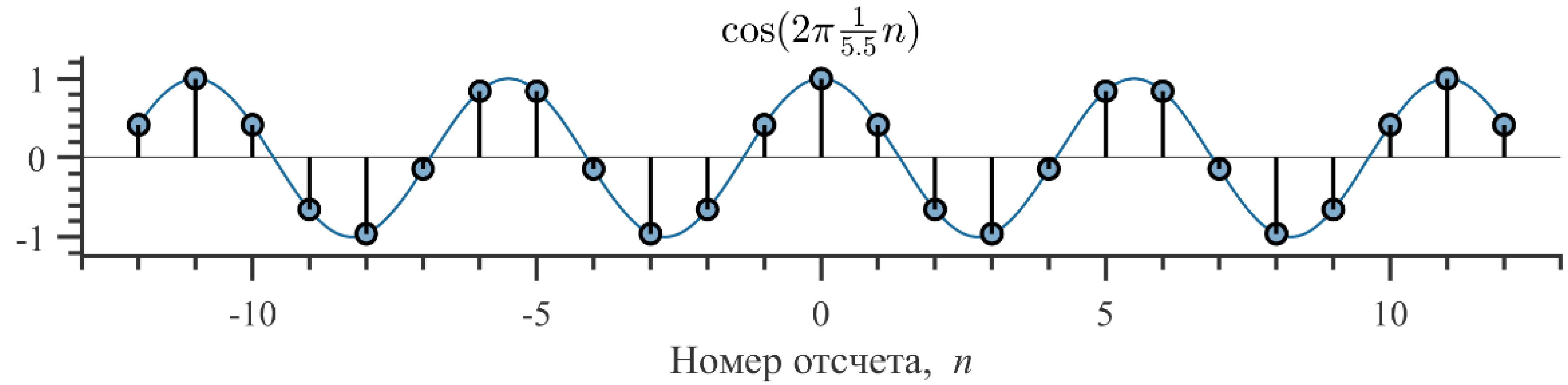
а)



б)



в)



Дискретные синусоиды из примера

Применение дискретных синусоид

DTMF сигналы или тоны передаются при нажатии кнопок на номеронабирателе и используются, как правило, для [до]набора внутреннего номера абонента офисной АТС или для навигации по голосовому меню (IVR).