

3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. РЯДЫ ФУРЬЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ – изучить метод анализа периодических функций с использованием ряда Фурье в пакете MATLAB.

3.1 Теоретические сведения

Общие понятия

Фурье-анализ является важным инструментом для решения широкого круга задач обработки сигналов. *Жан Батист Жозеф Фурье* (1768–1830) предложил концепцию представления **периодической** функции $x(t)$ (рис. 3.1) в виде тригонометрического ряда из косинусов и синусов:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)), \quad (3.1)$$

где $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_0}$; T_0 – период функции.

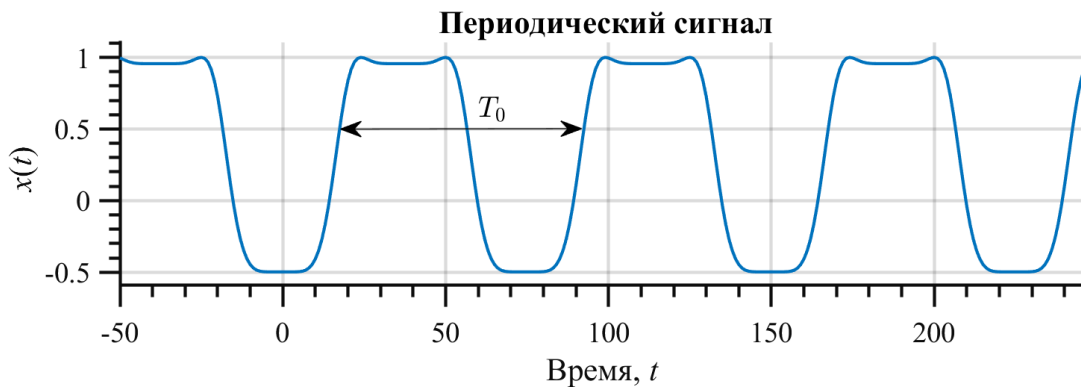


Рис. 3.1 – Пример периодического сигнала

Самая **низкочастотная составляющая** сигнала, которая входит в (3.1), называется *основной частотой*, или *частотой основного тона*

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ или } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.2)$$

поскольку все остальные частоты кратны ей, т.е. $\omega_k = k\omega_1$. Частотные компоненты сигнала называются *гармониками*. Например, частотная компонента

$$(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t), \quad (3.3)$$

является 2-й гармоникой. Слагаемое $a_0/2$ в выражении (3.1) является постоянной составляющей и представляет собой *среднее значение* сигнала за период. Причина, по которой стремятся представить сигнал в форме (3.3), заключается в том, что часто необходимо представить «сложный» сигнал в виде суммы более «простых» сигналов – в данном случае косинусов и синусов. Не следует думать, что периодические сигналы редкость в природе. Например, на рис. 3.2 показан участок речевого сигнала (звук /а/), форма которого близка к периодической. Такой же периодичностью обладают все гласные звуки.

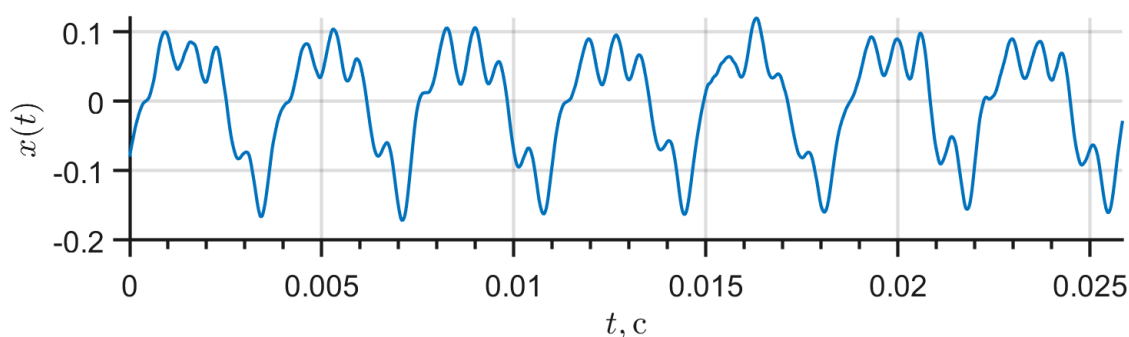


Рис. 3.2 – Пример речевого сигнала

Ортогональность

Иногда возникает вопрос, почему для разложения функции в ряд (3.1) выбраны именно функции \sin и \cos ? Так происходит потому, что эти функции обладают важным свойством *ортогональности*. Ортогональность известна нам из курса геометрии, где она относилась к векторам. Оказывается, между функциями и векторами существует аналогия: как произвольный вектор можно представить в виде суммы ортогональных векторов (составляющих базис), так и произвольную функцию можно представить в виде суммы ортогональных функций (рис. 3.3).

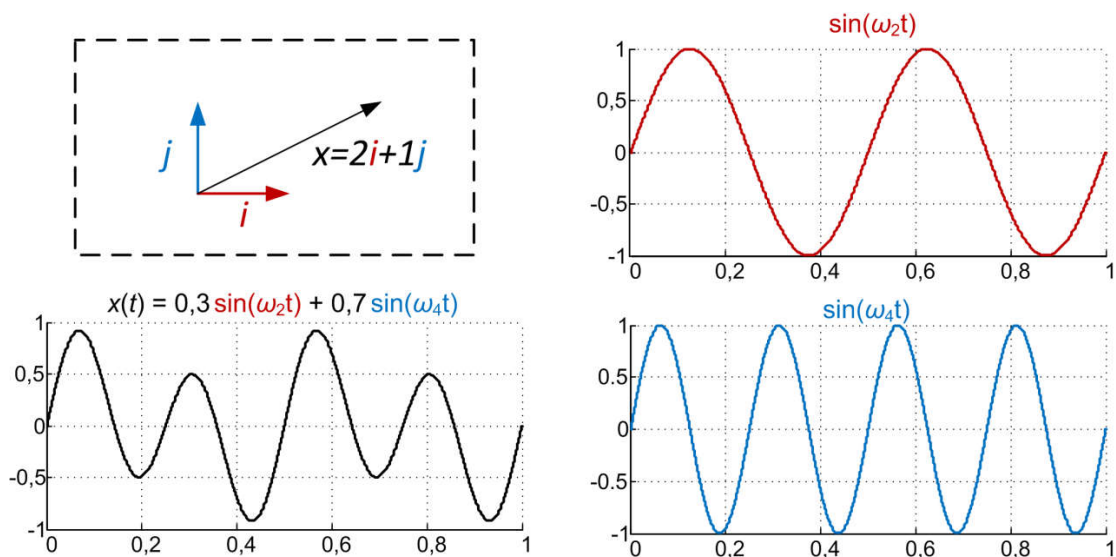


Рис. 3.3 – Разложение в ортогональный базис вектора и функции

В левом верхнем углу на рис. 3.3 представлено разложение вектора \mathbf{x} в виде взвешенной суммы базисных векторов $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$. Аналогичным образом периодическая функция $x(t)$, показанная в нижнем левом углу может быть представлена в виде взвешенной суммы функций $\sin(\omega_2 t)$ и $\sin(\omega_4 t)$. В данном случае, для получения $x(t)$ требуется $\sin(\omega_2 t)$ умножить на коэффициент 0,3, а $\sin(\omega_4 t)$ на коэффициент 0,7. Как видно из формулы (3.1), в общем случае в разложении периодической $x(t)$ участвуют базисные «элементы» вида $a_k \cos(\omega_k t)$ и $b_k \sin(\omega_k t)$. Причем набор частот ω_k фиксирован, он зависит от периода сигнала $x(t)$, а вот коэффициенты a_k и b_k – это то, что необходимо определить исходя из заданной функции $x(t)$. Расчёт коэффициентов a_k и b_k и есть центральная задача Фурье-анализа.

Возвращаясь к примеру, показанному на рис. 3 нужно сказать, что различие в разложении вектора и функции в том, что количество базисных векторов конечно, а число базисных функций в общем случае бесконечно.

Ортогональность и скалярное произведение

Как определить, является ли одна функция ортогональной по отношению к другой? Известно, что ортогональные векторы имеют нулевую проекцию друг на друга. С понятием проекции связано понятие скалярного произведения векторов

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \dots + a_n b_n^* = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*, \quad (3.4)$$

которое равно нулю для ортогональных векторов. Для функций также есть аналог скалярного произведения:

$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \int_a^b f_1(t) \cdot f_2^*(t) dt. \quad (3.5)$$

Это выражение равно нулю, если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ ортогональны на интервале $[a, b]$, иначе получаемое число показывает *проекцию* одной функции на другую. Исходя из того, что геометрический смысл интеграла – площадь под кривой, на рис. 3.4 иллюстрируется понятие скалярного произведения функций.

На верхней панели рис. 3.4 показана функция $s_1(t)$, состоящая из одного периода синуса. Графически проиллюстрировано, что скалярное произведение $s_1(t)$ на саму себя равно 0,5. На нижней панели приведена функция $s_2(t)$, состоящая из двух периодов синуса. Рядом графически представлено произведение $s_1(t) \cdot s_2(t)$, которое состоит из двух симметричных участков, суммарная площадь которых с учетом знака равна нулю. Таким образом, можно сделать вывод, что функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$ ортогональны друг другу на интервале $[0, 1]$.

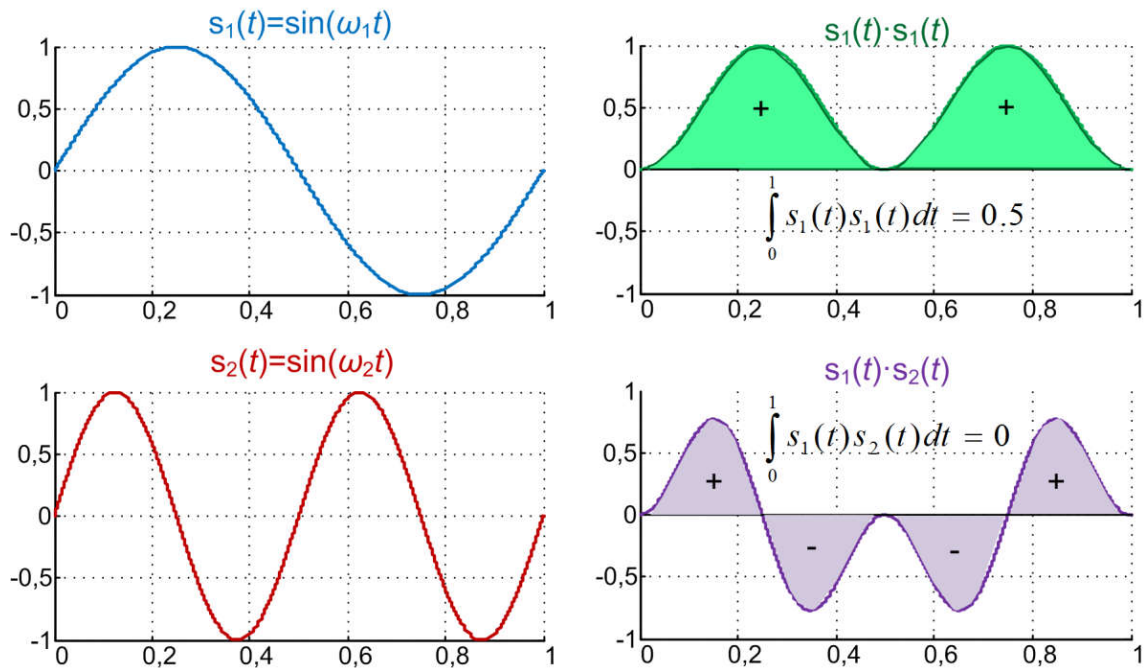


Рис. 3.4 – Скалярное произведение функций

Учитывая введенные вначале обозначения, свойство ортогональности функций \sin и \cos записываются следующим образом:

$$\int_0^{T_0} \cos \omega_k t \sin \omega_m t dt = 0, \quad \forall k, m, \quad (3.6)$$

$$\int_0^{T_0} \cos \omega_k t \cos \omega_m t dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0/2, & k = m, \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} \sin \omega_k t \sin \omega_m t dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0/2, & k = m. \end{cases}$$

Попробуйте самостоятельно доказать данные выражения.

Фурье-анализ

Основная задача Фурье-анализа найти коэффициенты a_k и b_k в выражении (3.1). Чтобы получить значение конкретного коэффициента a_m необходимо найти *проекцию* $x(t)$ на базисную функцию $\cos \omega_m t$, т.е.

$$a_m = \langle x(t), \cos(\omega_m t) \rangle.$$

Учитывая (3.5) для нахождения проекции необходимо умножить левую и правую части (3.1) на $\cos \omega_m t$, а затем проинтегрировать левую и правую часть, используя свойство ортогональности синусов и косинусов. Итак, умножая левую и правую части (3.1) на $\cos \omega_m t$ получим:

$$x(t) \cos \omega_m t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t \cos \omega_m t + b_k \sin \omega_k t \cos \omega_m t).$$

Интегрируя обе части по переменной $t \in [0, T_0]$, получаем

$$\int_0^{T_0} x(t) \cos \omega_m t dt = \frac{a_0}{2} \int_0^{T_0} \cos \omega_m t dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^{T_0} \cos \omega_k t \cos \omega_m t dt + b_k \int_0^{T_0} \sin \omega_k t \cos \omega_m t dt \right).$$

Используя свойство ортогональности (3.6), легко можно найти выражения для коэффициентов a_m :

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos \omega_m t dt.$$

В полученном выражении можно для удобства заменить индекс m на k .

Коэффициенты b_k находятся аналогичным образом, только выражение (3.1) умножается на $\sin \omega_m t$:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T_0} x(t) \sin \omega_k t dt.$$

Иногда бывает полезным следующее разложение функции $x(t)$, которое может быть получено из (3.1):

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (3.7)$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right).$$

A_k – амплитуда компоненты сигнала на частоте ω_k ; φ_k – фаза компоненты сигнала на частоте ω_k .

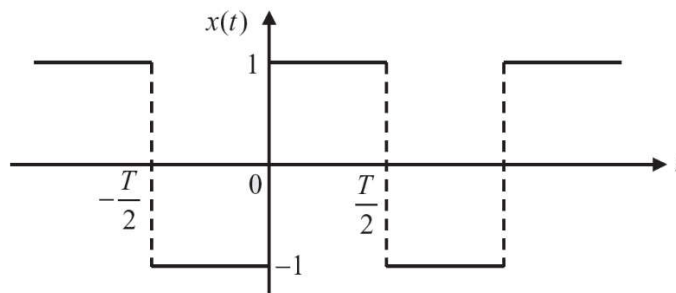


Рис. 3.5 – Прямоугольный сигнал

Пример разложения в ряд Фурье прямоугольного сигнала

В качестве примера рассмотрим ряд Фурье для периодического сигнала $x(t + nT) = x(t)$, который определен следующим образом (рис. 3.5):

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T/2, \\ -1, & T/2 < t < T. \end{cases} \quad (3.8)$$

Легко заметить, что среднее значение сигнала равно нулю:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0,$$

а коэффициенты a_k и b_k равны

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(\omega_k t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_k t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \cos(\omega_k t) dt \right] = 0, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(\omega_k t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_k t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \sin(\omega_k t) dt \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi k} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{\pi k} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \Big|_{\frac{T}{2}}^T \\ &= \frac{1}{\pi k} (-\cos(\pi k) + 1 + \cos(2\pi k) - \cos(\pi k)) = \frac{2}{\pi k} (1 - \cos(\pi k)). \end{aligned}$$

Если принять $T = 1$, то b_k принимает следующий вид

$$b_k = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)).$$

Подставляя полученные значения в (3.1), получим выражение для сигнала:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]. \quad (3.9)$$

Необходимо отметить, что в разложении участвуют только функции \sin . Это происходит из-за того, что прямоугольный сигнал является нечетной функцией и для его представления не нужны четные функции \cos .

Полезно рассмотреть, как частичные суммы (3.9) аппроксимируют исходный сигнал $x(t)$. Обозначим через $S_n(t)$ сумму первых n членов в (3.9). Ниже приведен код, который использовался для получения графиков частичных сумм.

Графики первых трех частичных сумм приведены на рис. 3.6. Можно заметить, что при увеличении числа гармоник n результирующая форма функции $S_n(t)$ становится все ближе к оригиналу $x(t)$.

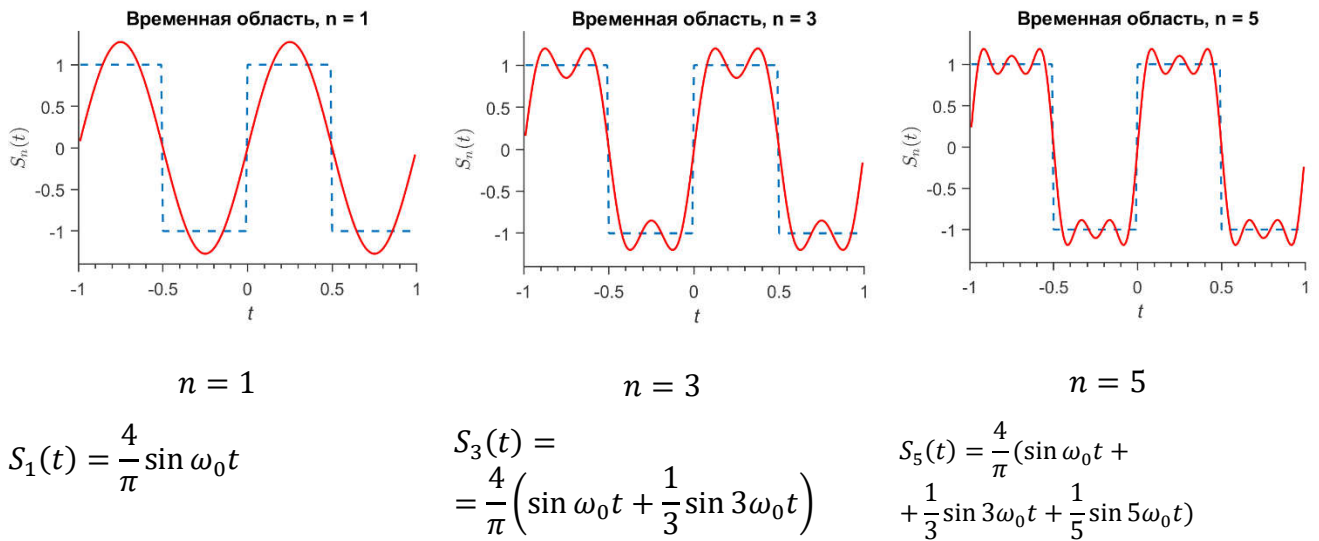


Рис. 3.6 – Частичные суммы, аппроксимирующие прямоугольный сигнал

```

T = 1
t = -T:0.001:T;
% вычисление исходного сигнала
x = square(2*pi*(1/T)*t);
% число гармоник
n = 20;

S_n = zeros(1,length(x));
b = zeros(1,n);

for k = 1:n
    b(k) = 2/(pi*k)*(1-cos(k*pi));
    S_n = S_n + b(k)*sin(2*pi*k/T*t);
end

%% Graphics
FontSize = 14;
figure('Units','pixels', 'Position',[100 100 450 320]);
plot(t,x,'--');
hold on;
plot(t,S_n,'r');

title(['Временная область, n = ' num2str(n)]);

ylabel('$S_n(t)$','Interpreter','latex');
xlabel('\it t');

```


Эффект Гиббса

Поведение частичных сумм ряда Фурье $S_n(t)$ в точке разрыва функции называют *эффектом Гиббса*. Создается впечатление, что колебания в точках разрыва исчезнут, если просуммировать больше членов ряда, однако этого не происходит (рис. 3.7). Заметьте, что от количества слагаемых в ряде Фурье амплитуда выброса не изменяется.

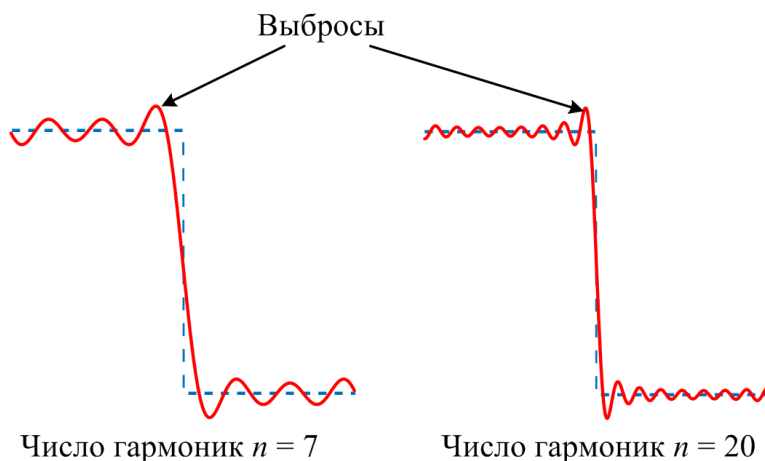


Рис. 3.7– Эффект Гиббса

Комплексная запись ряда Фурье

Наиболее часто ряд Фурье записывается в терминах комплексных экспонент $e^{j\omega_k t}$. Переход к комплексной форме записи ряда Фурье можно выполнить, если учесть, что

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad \text{и} \quad \sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}). \quad (3.10)$$

Используя эти соотношения, выражение (3.1) можно преобразовать к виду

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_k t}, \quad (3.11)$$
$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j\omega_k t} dt,$$

где комплексные коэффициенты c_k связаны с a_k и b_k следующим образом:

$$c_k = (a_k - jb_k)/2.$$

Коэффициент c_k несет в себе информацию об амплитуде синусной и косинусной волны k -й компоненты разложения Фурье (или k -й гармоники). Форма (3.11) связана с разложением

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (3.12)$$

следующим образом:

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_k, \quad \arg(c_k) = \varphi_k.$$

Напомним, что аргумент комплексного числа $z = x + jy$ удовлетворяет условию

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

И вычисляется следующим образом:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \quad y < 0, \\ \pi/2, & \text{если } x = 0, \quad y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

В MATLAB для вычисления модуля комплексного числа используется функция `abs`, а для аргумента – функция `angle`.

Заметим, что в (3.11) «кирпичиками», из которых складывается сигнал, являются *комплексные экспоненты* $e^{-j\omega_k t}$. Коэффициенты c_k также имеют комплексные значения и несут в себе информацию не только об амплитуде, но и о фазе k -й гармоники. Кроме того, в (3.11) возникают компоненты с «отрицательной частотой». Понятие отрицательной частоты имеет чисто математическую природу и берет свои истоки в (3.10).

Спектр сигнала

Для пояснения понятия спектра сигнала обратимся к комплексной форме ряда Фурье (3.11). График зависимости $|c_k|$ от частоты ω_k называется *амплитудным спектром* сигнала $x(t)$. График зависимости фаз частотных компонент $\arg c_k$ от частоты ω_k называется *фазовым спектром* сигнала $x(t)$. Примеры амплитудного и фазового спектров показаны на рис. 3.8.

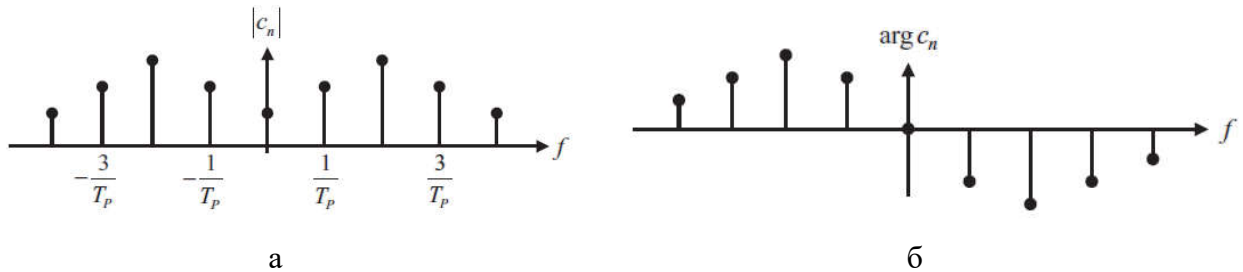


Рис. 3.8 – Спектры: а) амплитудный; б) фазовый

Альтернативным способом изобразить спектр сигнала является построение графиков для A_k и φ_k из выражения (3.12).

Теоремы о свертке

Интересно попробовать ответить на вопрос: а как будет выглядеть разложение в ряд Фурье произведения двух функций? Ограничимся рассмотрением случая вещественных функций и для простоты будем полагать, что их период равен 2π . В этом случае имеем:

$$x(t)h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jmt}. \quad (3.13)$$

Выполняя подстановку $n = k + m$ и вынося комплексные экспоненты за знак суммы получаем:

$$x(t)h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k} \right). \quad (3.14)$$

Полученное выражение (3.14) имеет вид ряда Фурье, причем n -й член разложения имеет вид:

$$r_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}. \quad (3.15)$$

Это выражение называется *сверткой* последовательностей c_k и d_k . Иногда свертку сокращенно обозначают:

$$r_n = c_k * d_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}. \quad (3.16)$$

Если представить, что в свертке (3.16) все c_k равны нулю, за исключением одного, например $c_0 = 1$, то сумма превращается в один член, а именно в d_k . Другими словами, при

$$c_k = \delta(k), \quad r_n = c_k * d_k = d_n. \quad (3.17)$$

Таким образом, свертка с одиночным импульсом на выходе дает члены второй последовательности.

Мы получили свертку в результате перемножения двух функций, это наталкивает на мысль о нахождении функции, которая соответствует произведению соответствующих коэффициентов двух разложений:

$$g_k = c_k d_k.$$

Чтобы отыскать эту функцию мы должны ввести понятие свертки двух периодических функций:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (3.18)$$

Найдем коэффициенты Фурье для (3.18):

$$\begin{aligned}
g_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) e^{-jkt} dt = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) h(t - \tau) e^{-jkt} e^{jk\tau} e^{-jk\tau} dt d\tau \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau}_{=c_k} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t - \tau) e^{-jk(t-\tau)} dt}_{=d_k} = c_k d_k.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.2 Порядок выполнения работы

Задание 1

Найдите аналитические выражения для коэффициентов a_k, b_k разложения в ряд Фурье периодического сигнала $x(t)$ согласно варианту. На графиках приведен один период сигнала.

Вариант 1.

Сигнал имеет вид (рис. 3.9):

$$x(t) = \sin^2(2\pi t) u(0,5 - t), \quad t \in [0, 1].$$

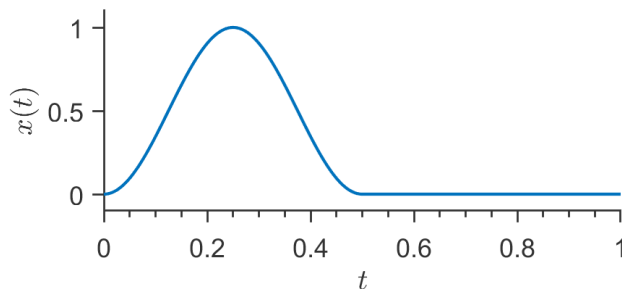


Рис. 3.9 – Сигнал для варианта 1

Вариант 2.

Сигнал имеет вид (рис. 3.10):

$$x(t) = u(t - 0,2) - u(t - 0,8), \quad t \in [0, 1].$$

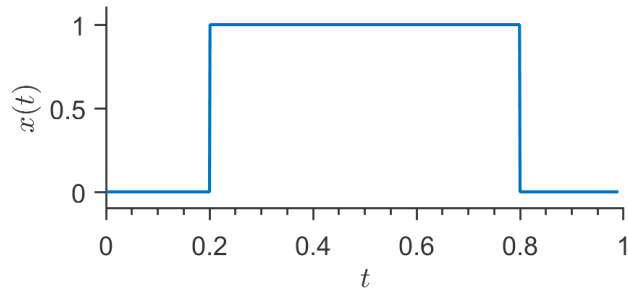


Рис. 3.10 – Сигнал для варианта 2

Вариант 3.

Сигнал имеет вид (рис. 3.11):

$$x(t) = (1 - 2t)(u(t - 0,2) - u(t - 0,8)), \quad t \in [0, 1].$$

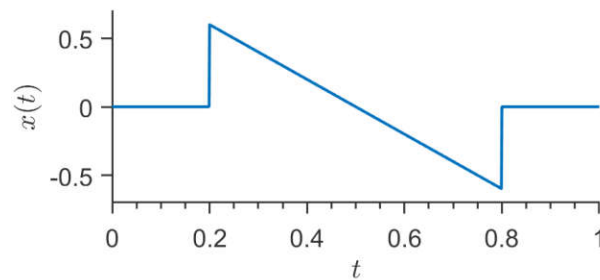


Рис. 3.11 – Сигнал для варианта 3

Вариант 4.

Сигнал имеет вид (рис. 3.12):

$$x(t) = 2t \cdot u(-t + 0,5) + u(t - 0,5), \quad t \in [0, 1].$$

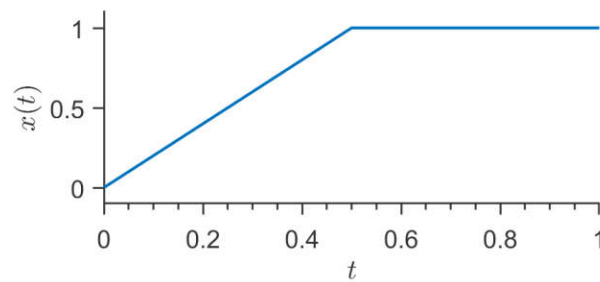


Рис. 3.12 – Сигнал для варианта 4

Вариант 5.

Сигнал имеет вид (рис. 3.13):

$$x(t) = (2 - 2t) \cdot u(t + 0,5) + u(-t + 0,5), \quad t \in [0, 1].$$

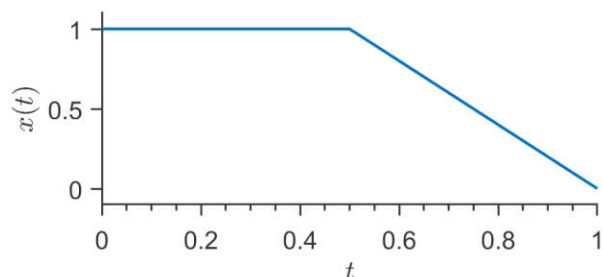


Рис. 3.13 – Сигнал для варианта 5

Вариант 6.

Сигнал имеет вид (рис. 3.14):

$$x(t) = 2t \cdot u(-t + 0,5) + (2 - 2t) \cdot u(t - 0,5), \quad t \in [0, 1].$$

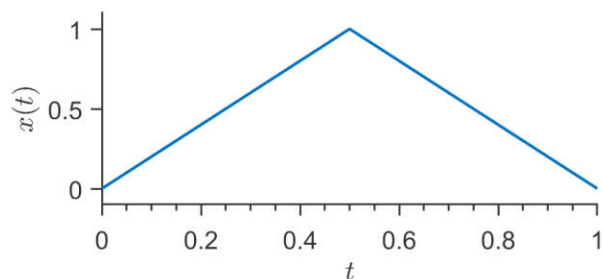


Рис. 3.14 – Сигнал для варианта 6

Вариант 7.

Сигнал имеет вид (рис. 3.15):

$$x(t) = \cos(2\pi 4t) \cdot u(t - 0,25) + u(t - 0,75), \quad t \in [0, 1].$$

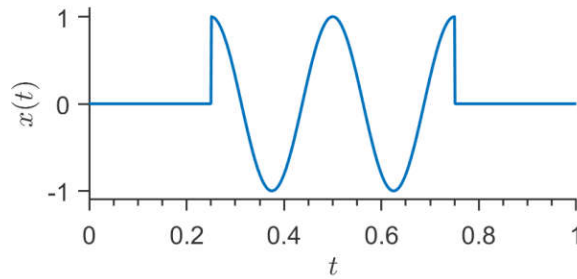


Рис. 3.15 – Сигнал для варианта 7

Вариант 8.

Сигнал имеет вид (рис. 3.16):

$$x(t) = \sin(2\pi 6t) \cdot u(t - 0,25) + u(t - 0,75), \quad t \in [0, 1].$$

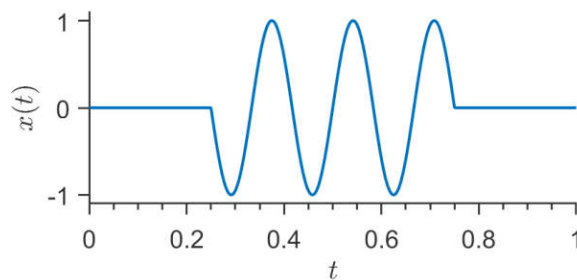


Рис. 3.16 – Сигнал для варианта 8

Задание 2

Рассчитайте коэффициенты a_k, b_k ($k = 0, 1, \dots, 20$). Постройте графики для a_k и b_k , подпишите оси.

Задание 3

Постройте графики частичных сумм

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$$

аппроксимирующих исходный сигнал $x(t)$ на интервале $t = [-T, 2T]$ для $n \in \{1, 3, 10, 30\}$. Наблюдается ли в данном случае эффект Гиббса? Если да, то какова причина его появления?

Для вариантов 4 и 5: постройте отдельно графики для $S_{200}(t)$ используя только 1) коэффициенты a_k и 2) используя только коэффициенты b_k .

Задание 4

Постройте графики сигналов ошибки аппроксимации:

$$\epsilon_n(t) = |x(t) - S_n(t)|$$

для n из задания 3.

Для $n \in \{1, 2, \dots, 30\}$ вычислите энергию сигнала-ошибки

$$E_n = \sum_{t \in [0, 1]} \epsilon_n^2(t).$$

Уменьшается ли E_n по мере увеличения n ?

Задание 5

Найдите спектр сигнала, рассчитав параметры A_k , φ_k гармонической формы ряда Фурье (3.7) для $k = 0, 1, \dots, 20$. Постройте графики для A_k и φ_k , подпишите оси.

Компонента с какой частотой (в герцах) имеет наибольшую амплитуду?

3.3 Дополнительные задания

1) Почему в варианте 2 при разложении функции в ряд Фурье коэффициенты b_k равны нулю? Можно ли было это предвидеть, не производя вычислений?

2) Показать, что косинусы ортогональны на интервале $0 \leq t \leq \pi$.

3) Показать, что синусы ортогональны на интервале $0 \leq t \leq \pi$.

4) Разложить в ряд Фурье функцию $x(t) = e^{-a|t|}$, $|t| \leq \pi$.

5) Найдите коэффициенты разложения в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π :

$$x(t) = 1 \text{ при } 0 < x < \pi \text{ и } x(-t) = -x(t).$$