# Теория и применение цифровой обработки сигналов

## КИХ-фильтры: базовые понятия

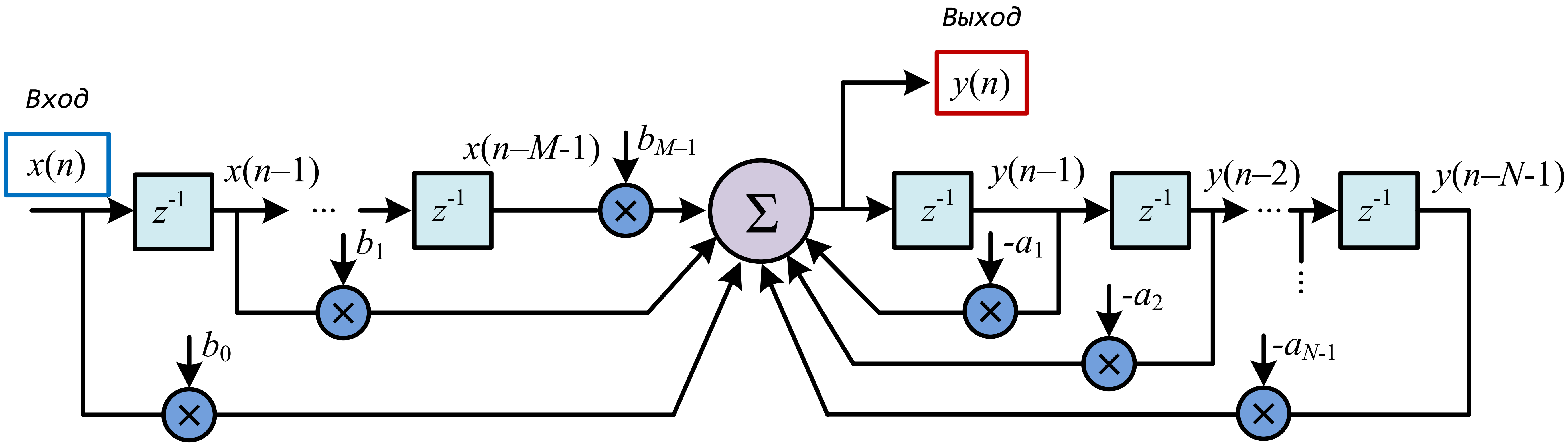
д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

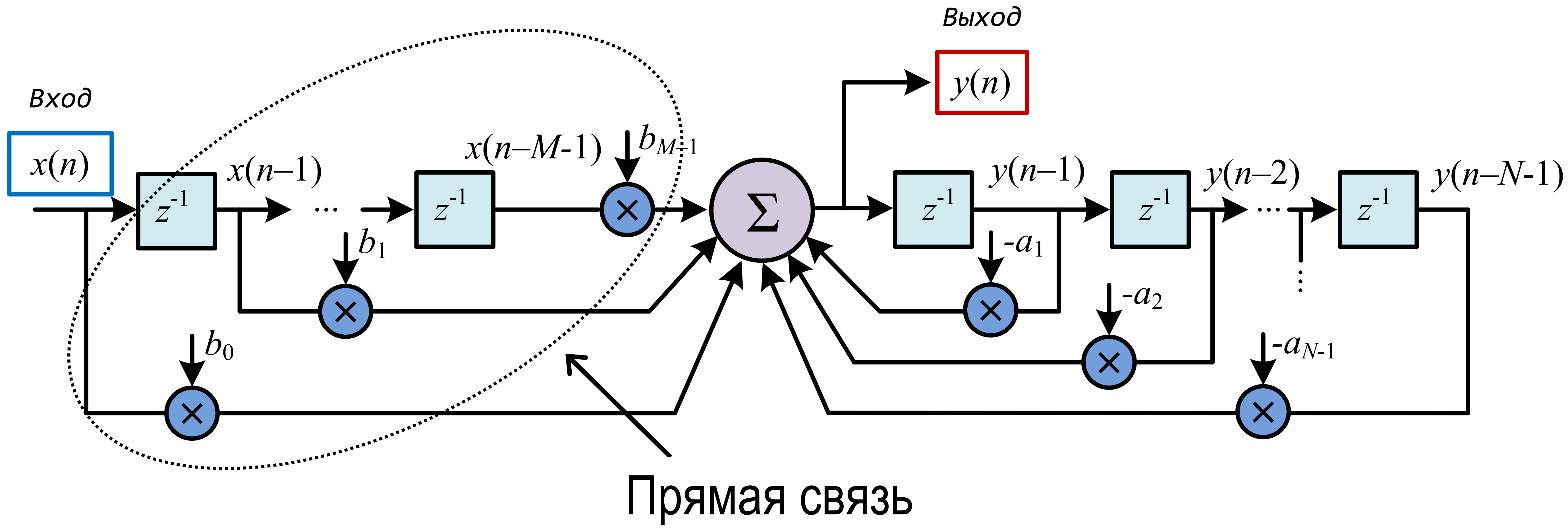
Кафедра электронных вычислительных средств

# Цифровой фильтр



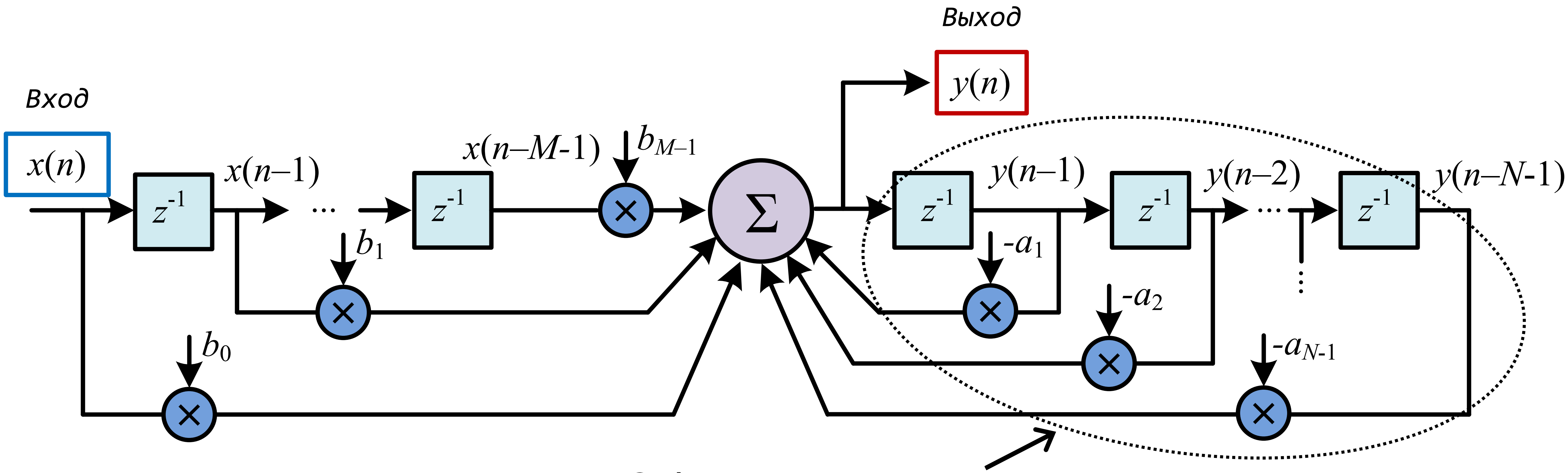

$$y(n) = \cdots$$

# Цифровой фильтр




$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) + \cdots$$

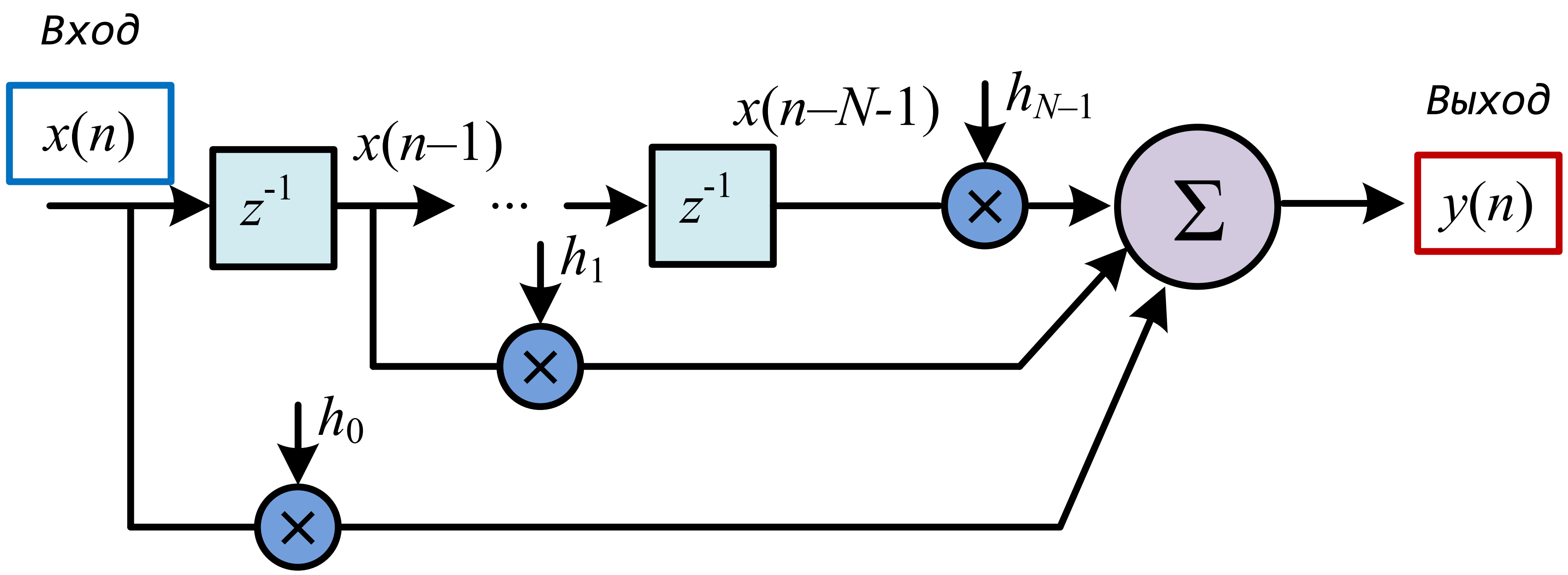
# Цифровой фильтр




Обратная связь

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k)$$

# Цифровой КИХ-фильтр




$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k)$$

# Фильтр скользящего среднего (пример)

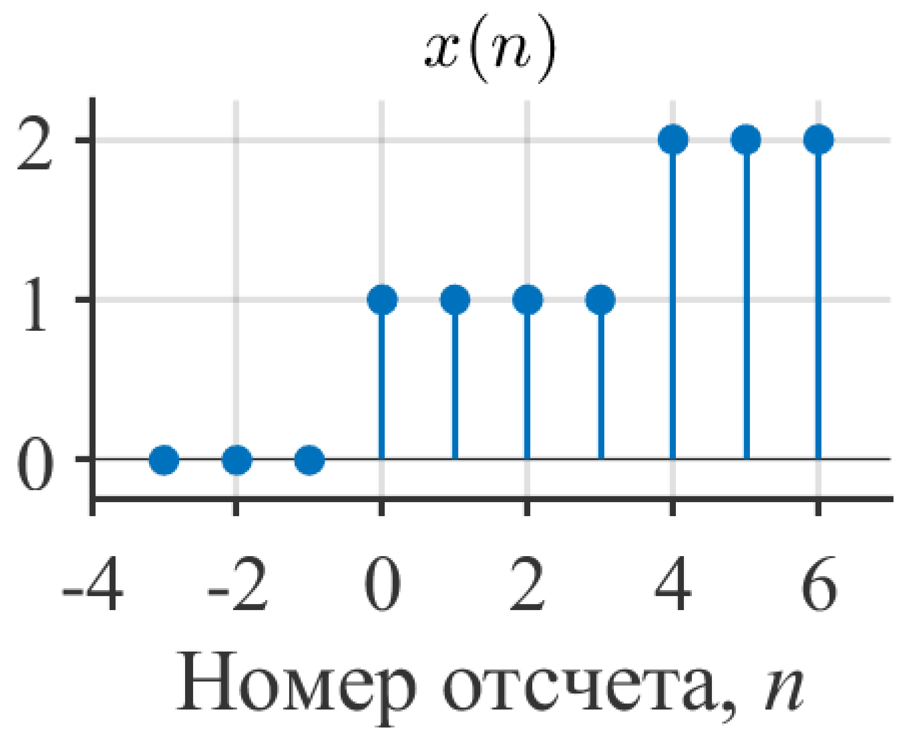
Рассмотрим задачу вычисления скользящего среднего для последовательности $x(n)\ n = 0, 1, \ldots$ . Выполним усреднение по 3 точкам

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

# Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

Пусть на вход подается сигнал



# Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

## Расчет выходных значений

| $n$ | $< -3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(n)$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| $y(n)$ | $0$ | $?$ | | | | | | | | |

# Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

## Расчет выходных значений

| $n$ | $< -3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(n)$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| $y(n)$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | ? | | | | | | | |

# Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

## Расчет выходных значений

| $n$ | $< -3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(n)$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| $y(n)$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $?$ | | | | | | |

# Фильтр скользящего среднего

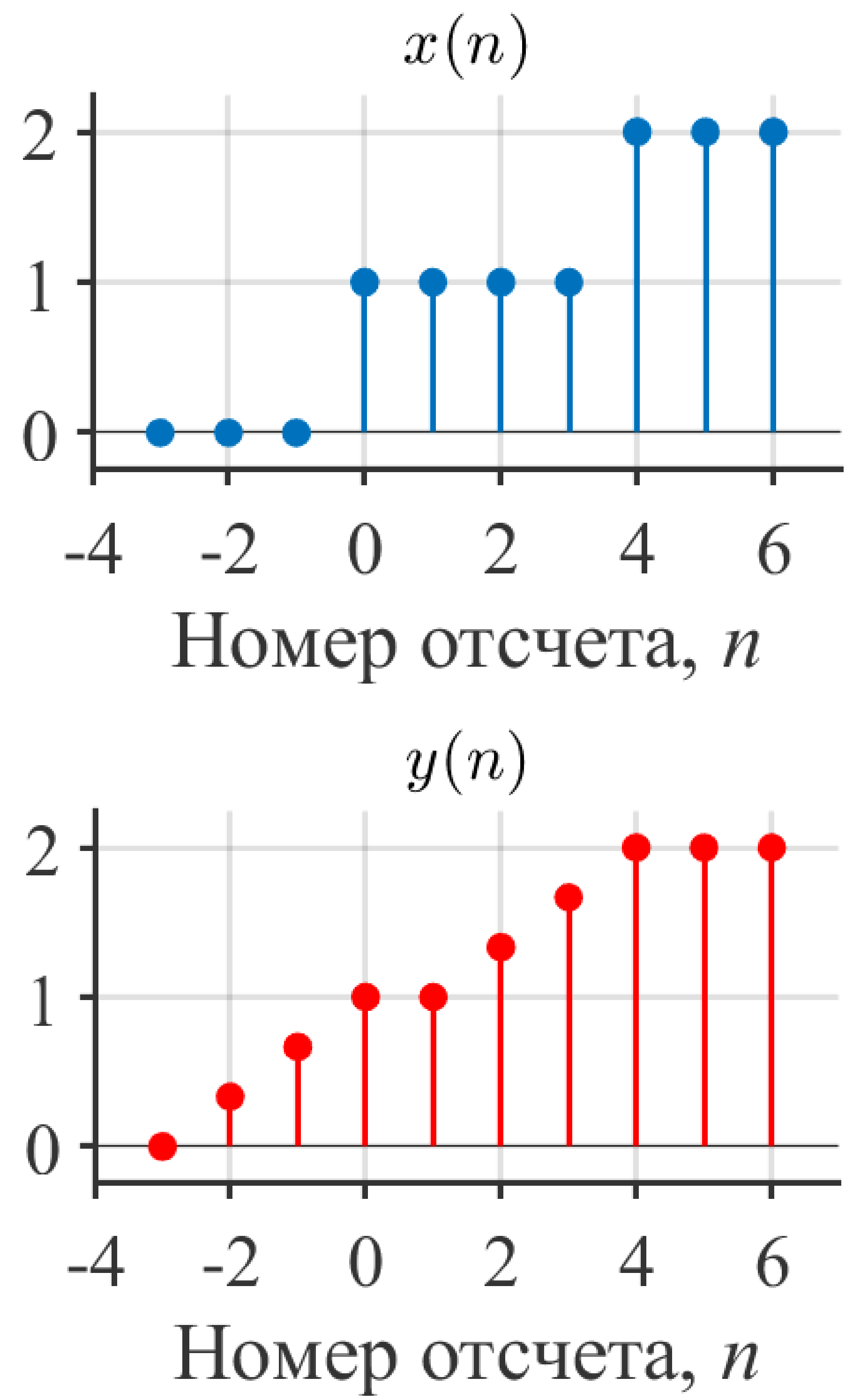
$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

## Расчет выходных значений

| $n$ | $< -3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(n)$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| $y(n)$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $1$ | $1$ | $1\frac{1}{3}$ | $1\frac{2}{3}$ | $2$ | $2$ | $2$ |

# Фильтр скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$



# Фильтр скользящего среднего

– Обычно $n$ – означает время. В этом случае желательно, чтобы фильтр был ***детерминированным*** (каузальным). Это означает, что выход не должен опережать вход.

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n) + x(n+1) + x(n+2))$$

– У данного фильтра выход «опережает» выход. Такие фильтры называют ***недетерминированными*** и обычно не используют на практике.

– недетерминированные фильтры нельзя реализовать в системах реального времени.

# Детерминированный фильтр скользящего среднего

***Детерминированная*** версия фильтра скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n-2) + x(n-1) + x(n))$$

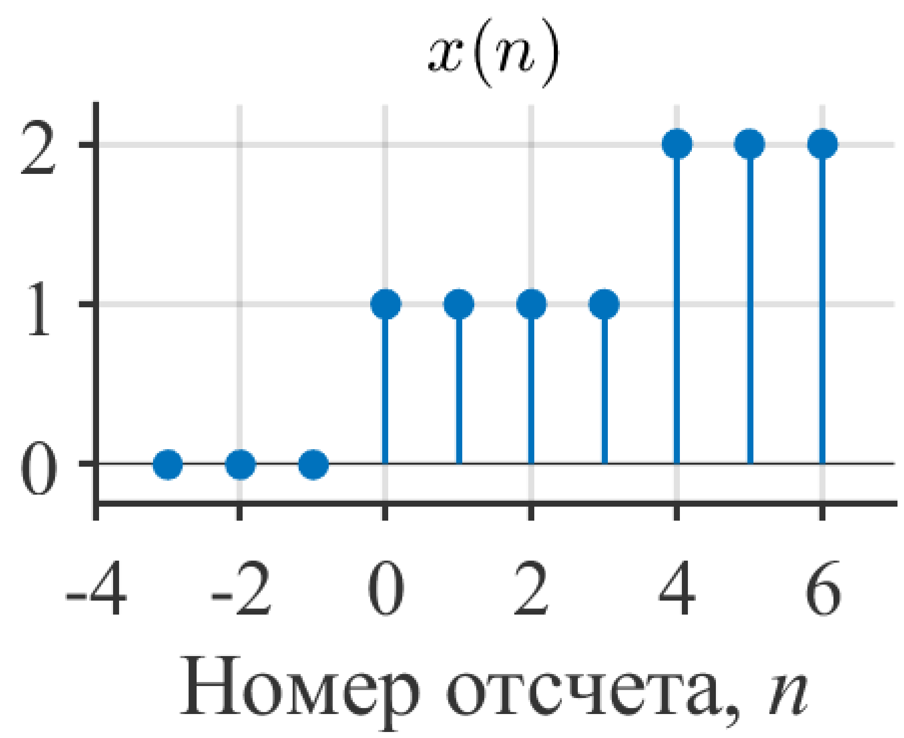
| $n$ | $< -3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(n)$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| $y(n)$ | $0$ | | | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $1$ | $1$ | $1\frac{1}{3}$ | $1\frac{2}{3}$ | $2$ |

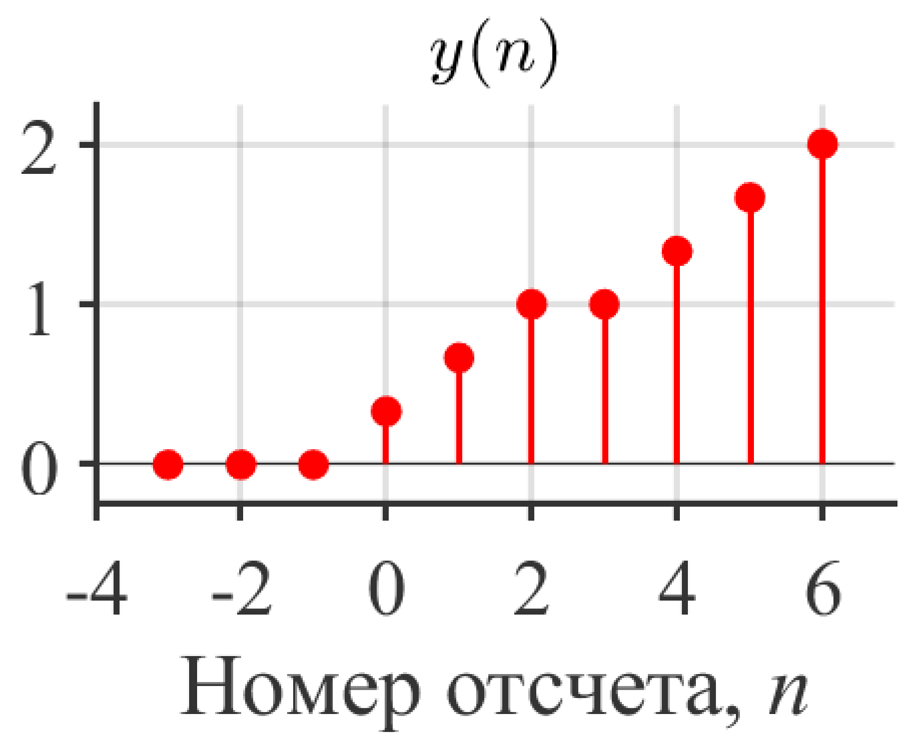
# Детерминированный фильтр скользящего среднего

***Детерминированная*** версия фильтра скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{3}(x(n-2) + x(n-1) + x(n))$$

| $n$ | $< -3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(n)$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| $y(n)$ | $0$ | | | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $1$ | $1$ | $1\frac{1}{3}$ | $1\frac{2}{3}$ | $2$ |



# Общая формула КИХ-фильтра

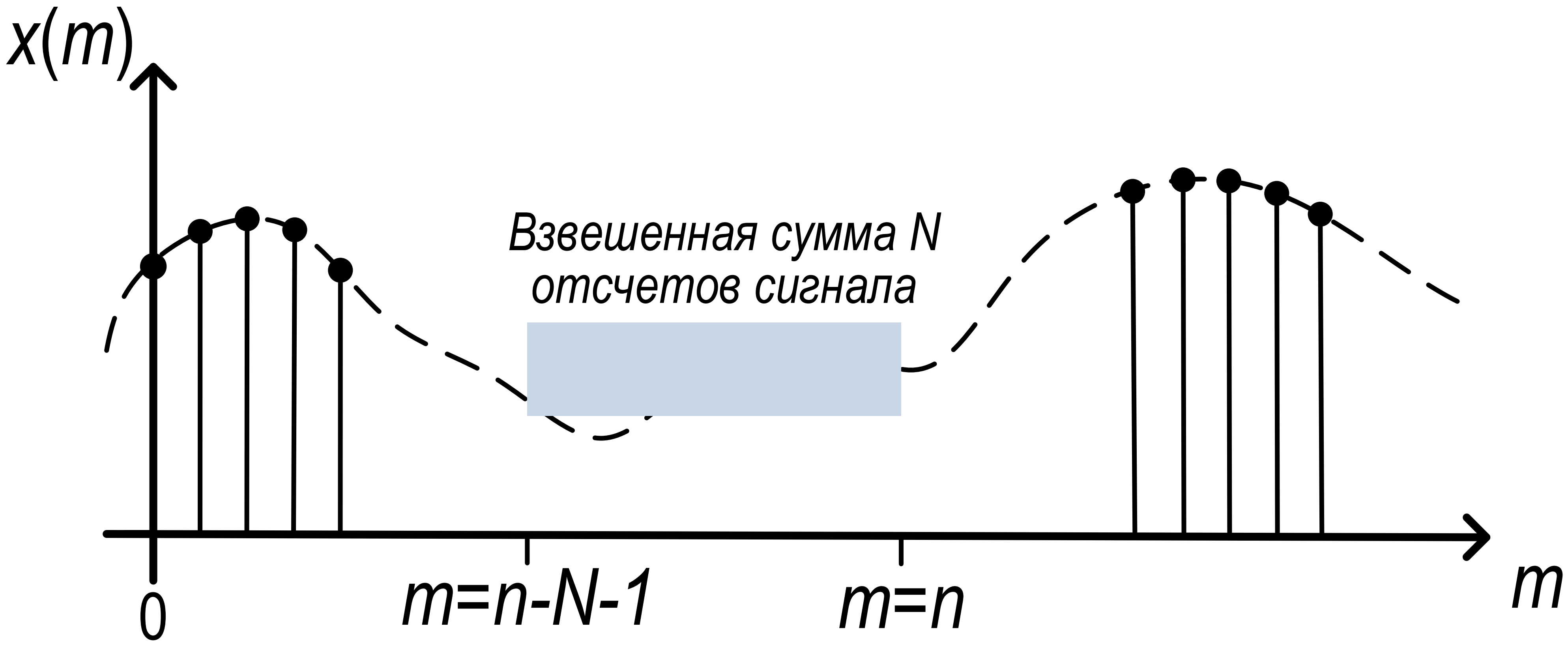
Фильтр скользящего среднего представляет собой частный случай цифрового КИХ-фильтра

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h_k,$$

у которого все коэффициенты $h_k$ имеют значения $1/N$.

# КИХ-фильтр

Выход КИХ-фильтра представляет собой взвешенную сумму данных внутри скользящего «окна» данных




$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h_k,$$

# Пример работы КИХ-фильтра

Пусть на вход поступает сигнал

$$x(n) = \begin{cases} (1.02)^n + 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right), & 0 \le n \le 40 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для фильтрации будем использовать $N$-точечный усредняющий фильтр

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

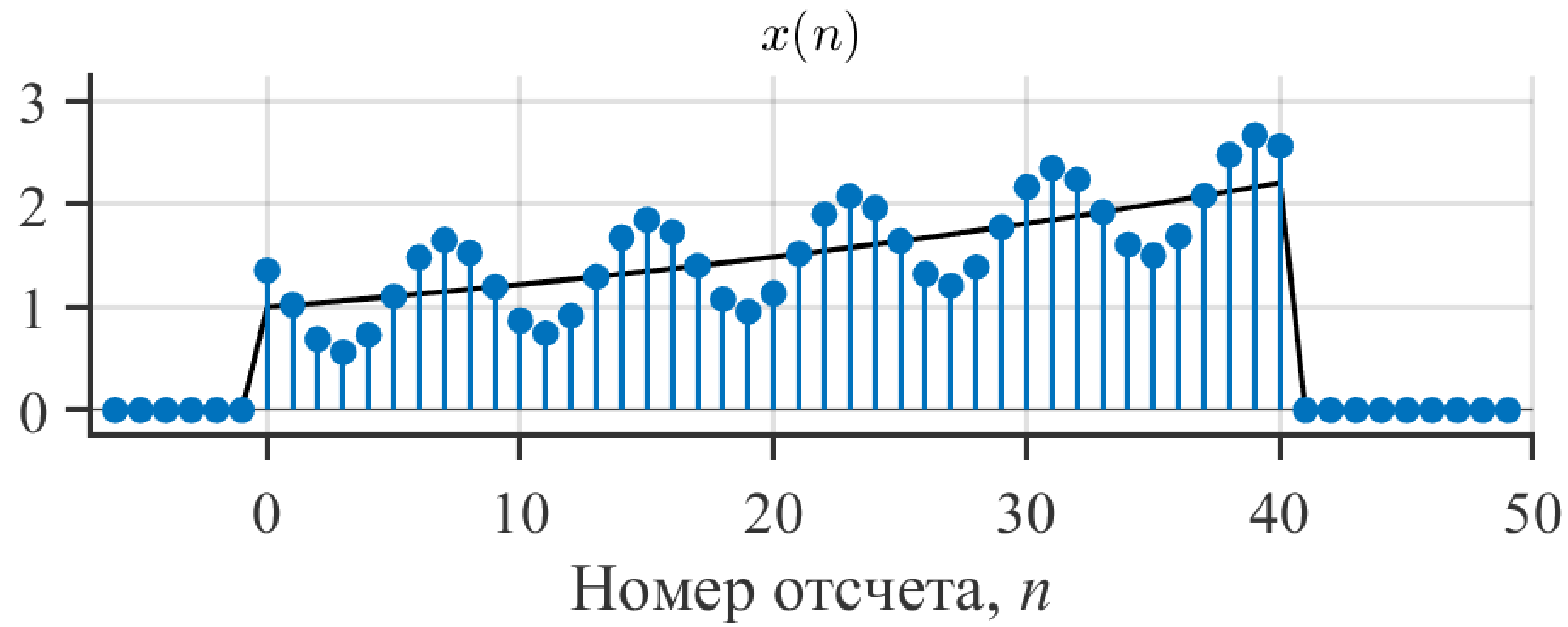
# Пример работы КИХ-фильтра

Пусть на вход поступает сигнал

$$x(n) = \begin{cases} (1.02)^n + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{8} + \frac{\pi}{4}\right), & 0 \le n \le 40 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

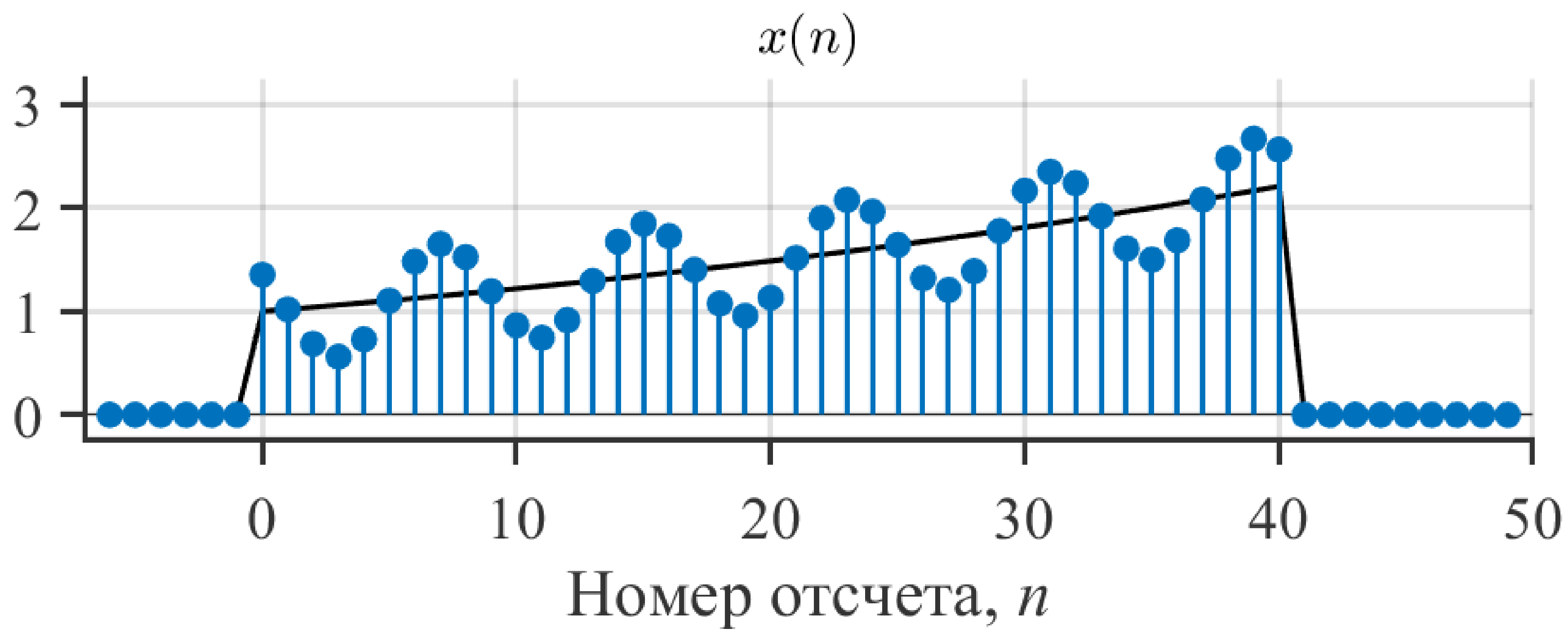
Для фильтрации будем использовать $N$-точечный усредняющий фильтр

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

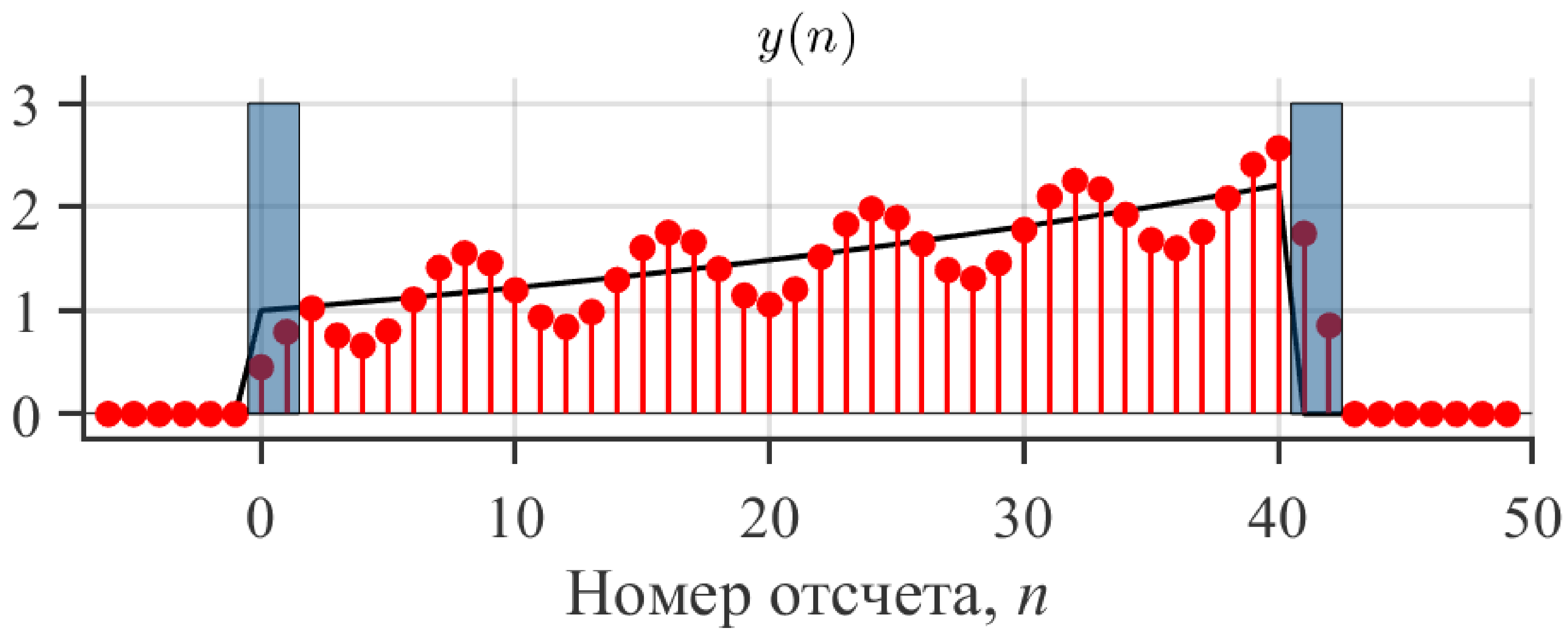


# Пример работы КИХ-фильтра

## Входной сигнал

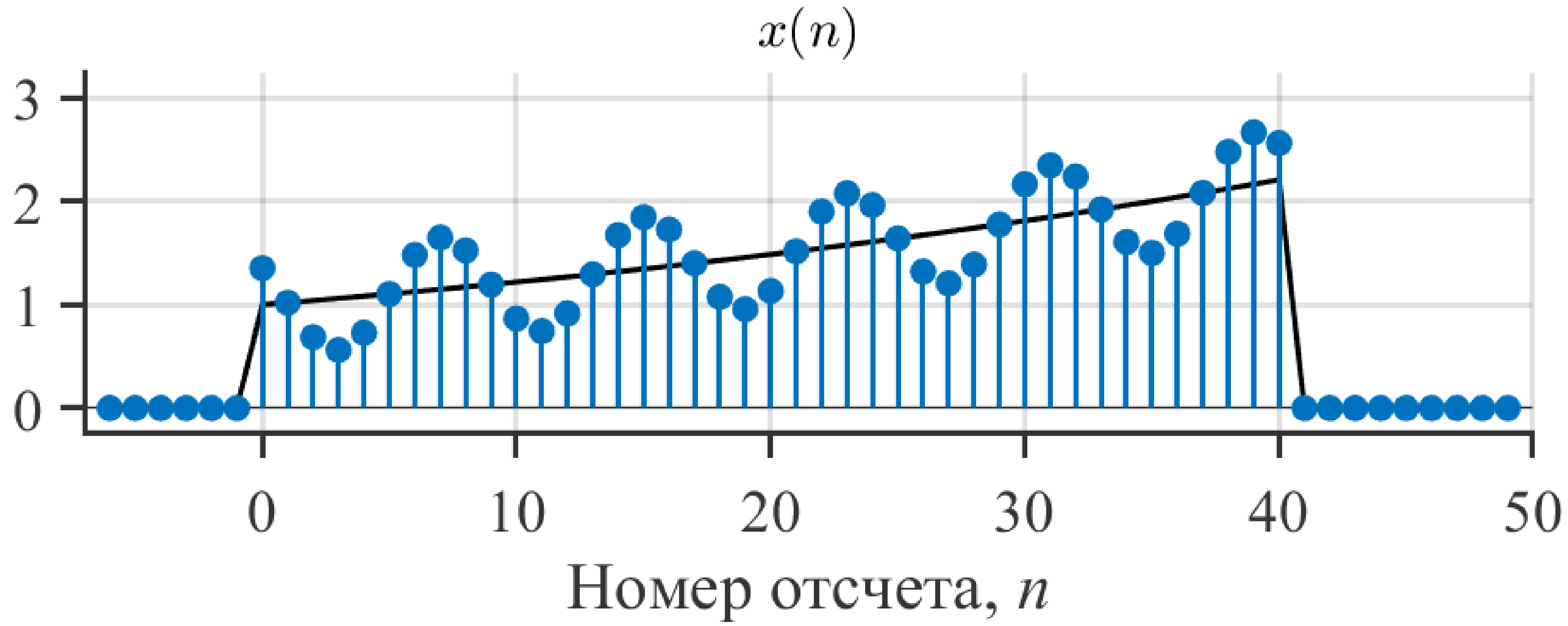



## Выходной сигнал ($N = 3$)

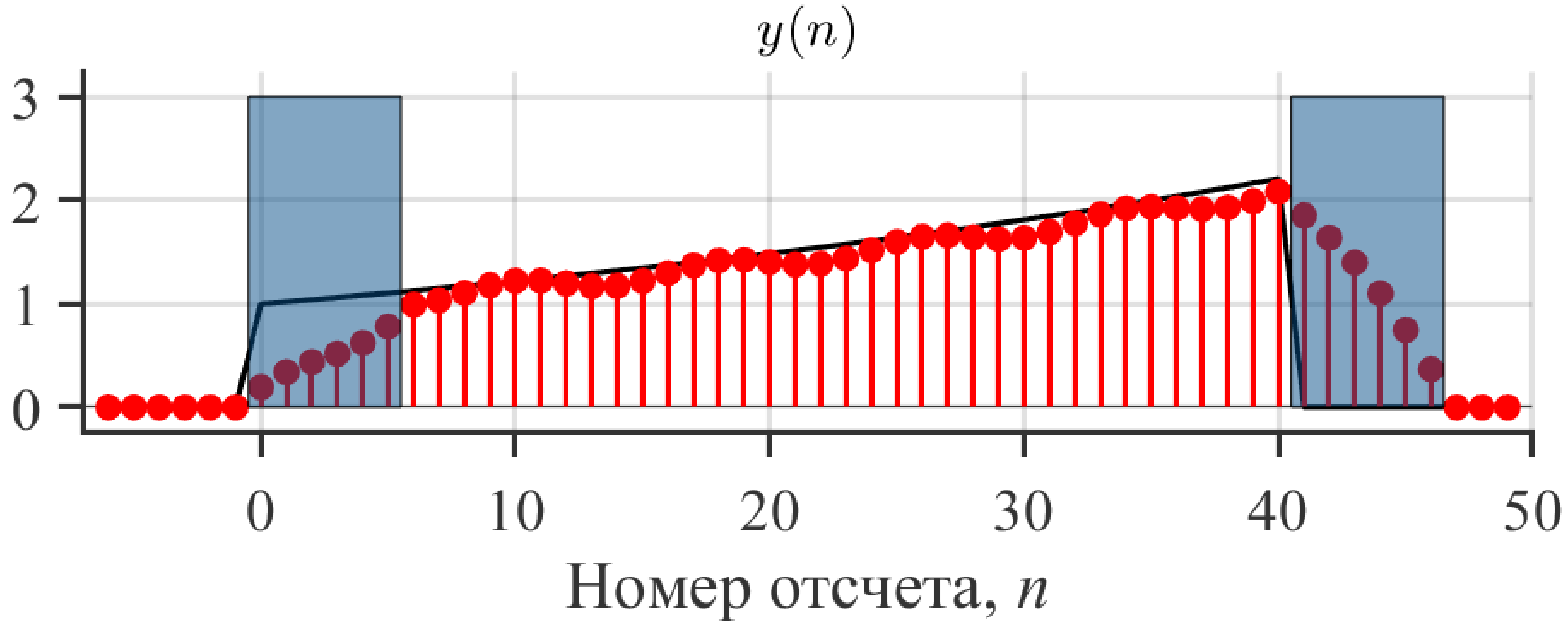


# Пример работы КИХ-фильтра

## Входной сигнал




## Выходной сигнал ($N = 7$)



# КИХ-фильтр в частотной области

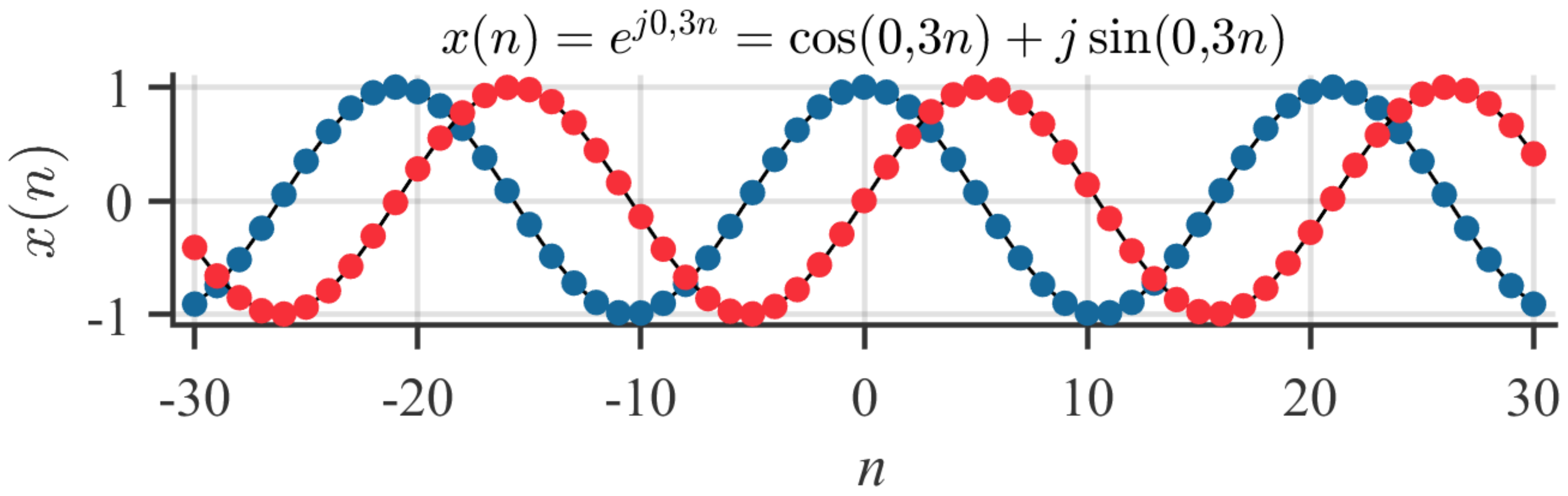
Чем является обработка сигнала при помощи КИХ-фильтра

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h_k,$$

с частотной точки зрения?

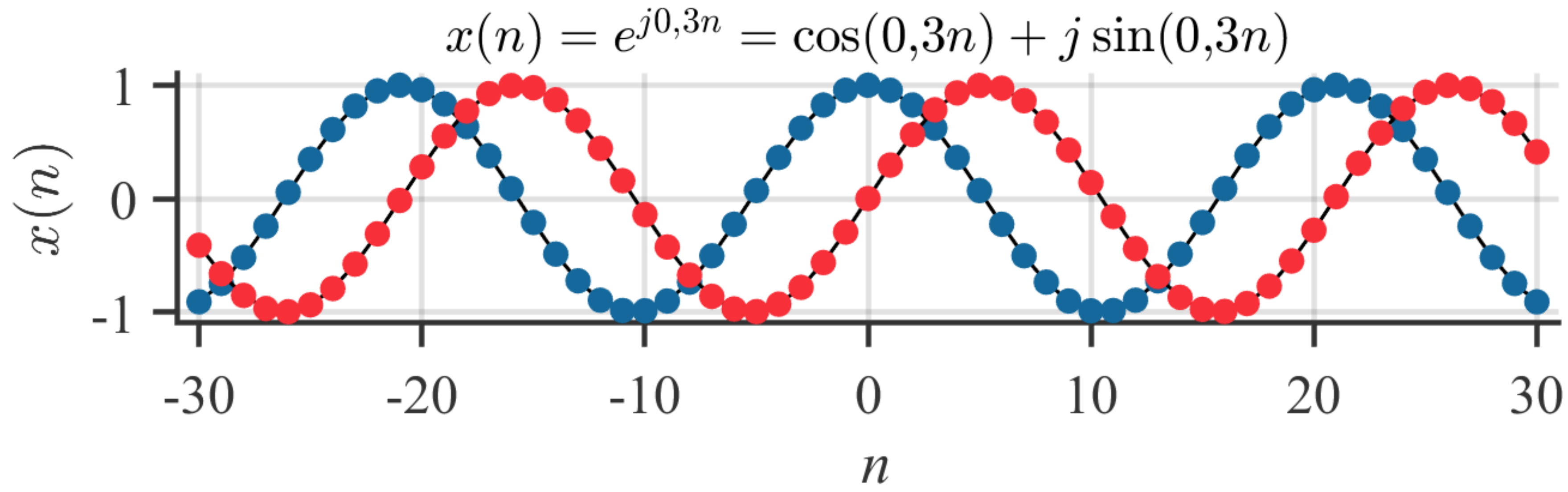
# КИХ-фильтр в частотной области

Предположим, что входной сигнал $x(n) = e^{j\omega n}$



# КИХ-фильтр в частотной области

Предположим, что входной сигнал $x(n) = e^{j\omega n}$




Если $x(n) = e^{j\omega n}$, то

$$y(n) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} x(n-k)\Bigg|_{x(n)=e^{j\omega n}} = \frac{1}{3}\left(e^{j\omega n} + e^{j\omega(n-1)} + e^{j\omega(n-2)}\right)$$

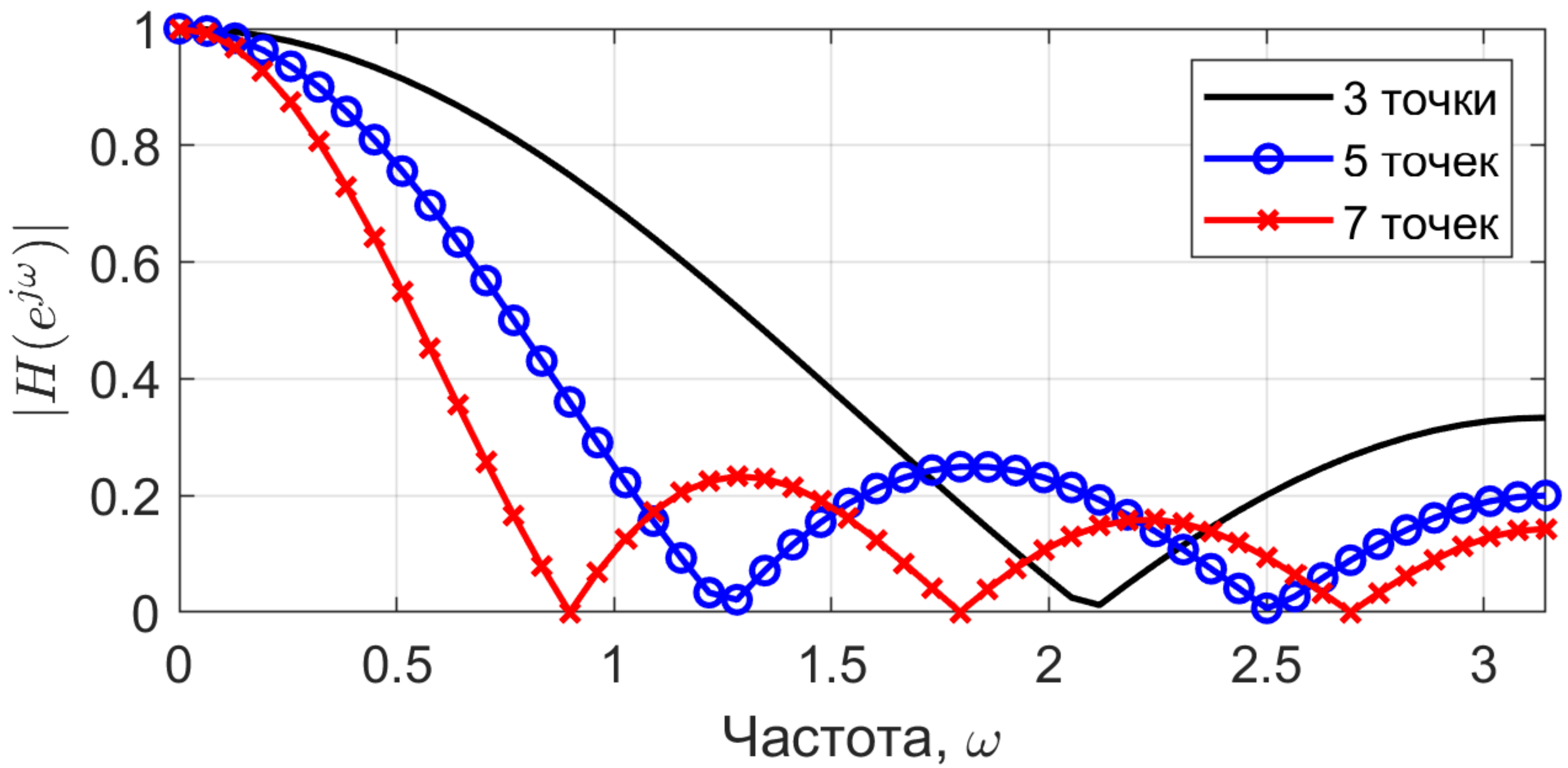
$$= \frac{e^{j\omega(n-1)}}{3}\left(e^{-j\omega} + 1 + e^{j\omega}\right) = e^{j\omega n}\frac{e^{-j\omega}}{3}(1 + 2\cos\omega) = x(n)H(e^{j\omega})$$

где

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\omega}}{3}(1 + 2\cos\omega).$$

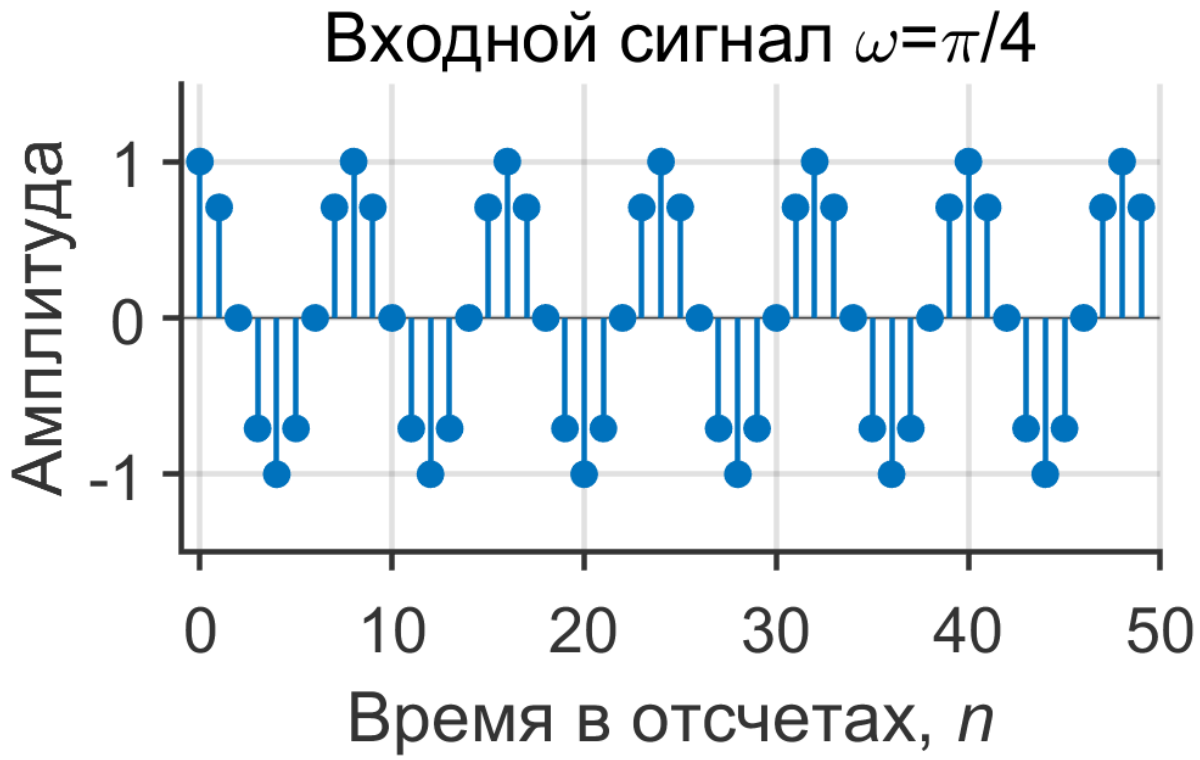
# Частотная характеристика КИХ-фильтра

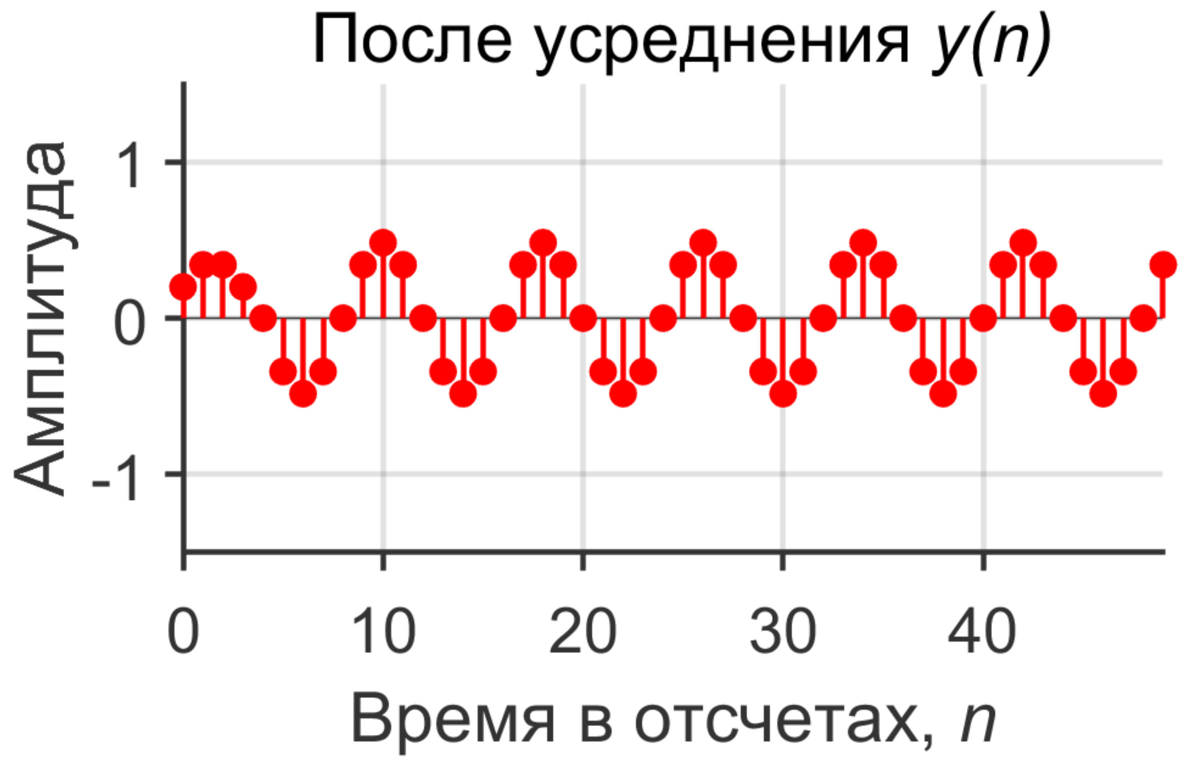
Частотная характеристика $|H(e^{j\omega})|$ показывает, что происходит, когда усредняются данные с частотой $\omega$. Сглаживание можно выполнять и по 5, 7 и т.д. точкам.



# Пример работы КИХ-фильтра

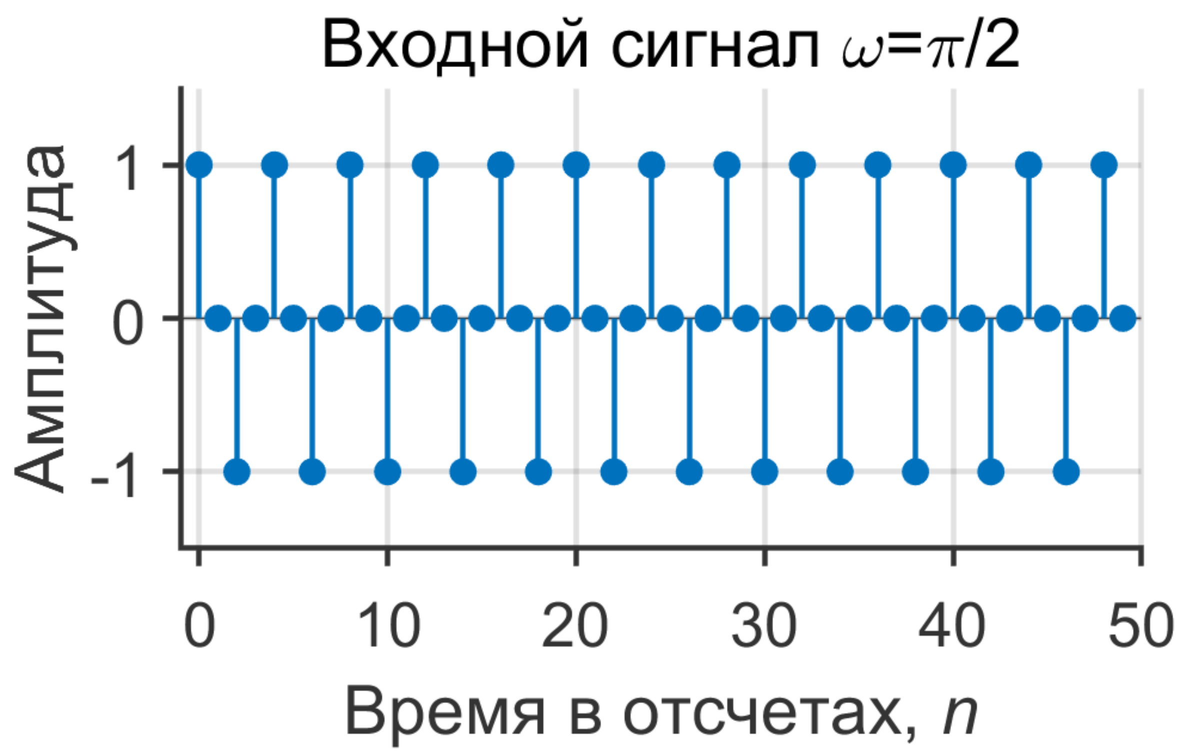
Усреднение по 5 точкам синусоиды ($\omega = \dfrac{\pi}{4}$ рад/с)

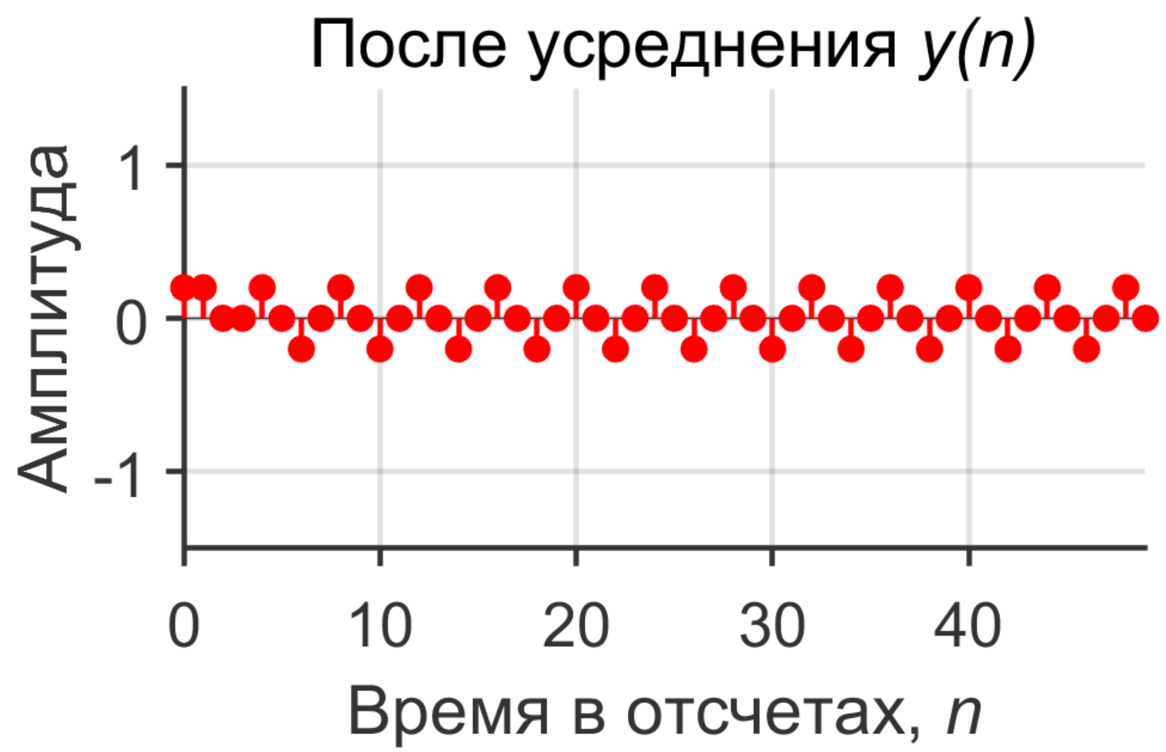


# Пример работы КИХ-фильтра

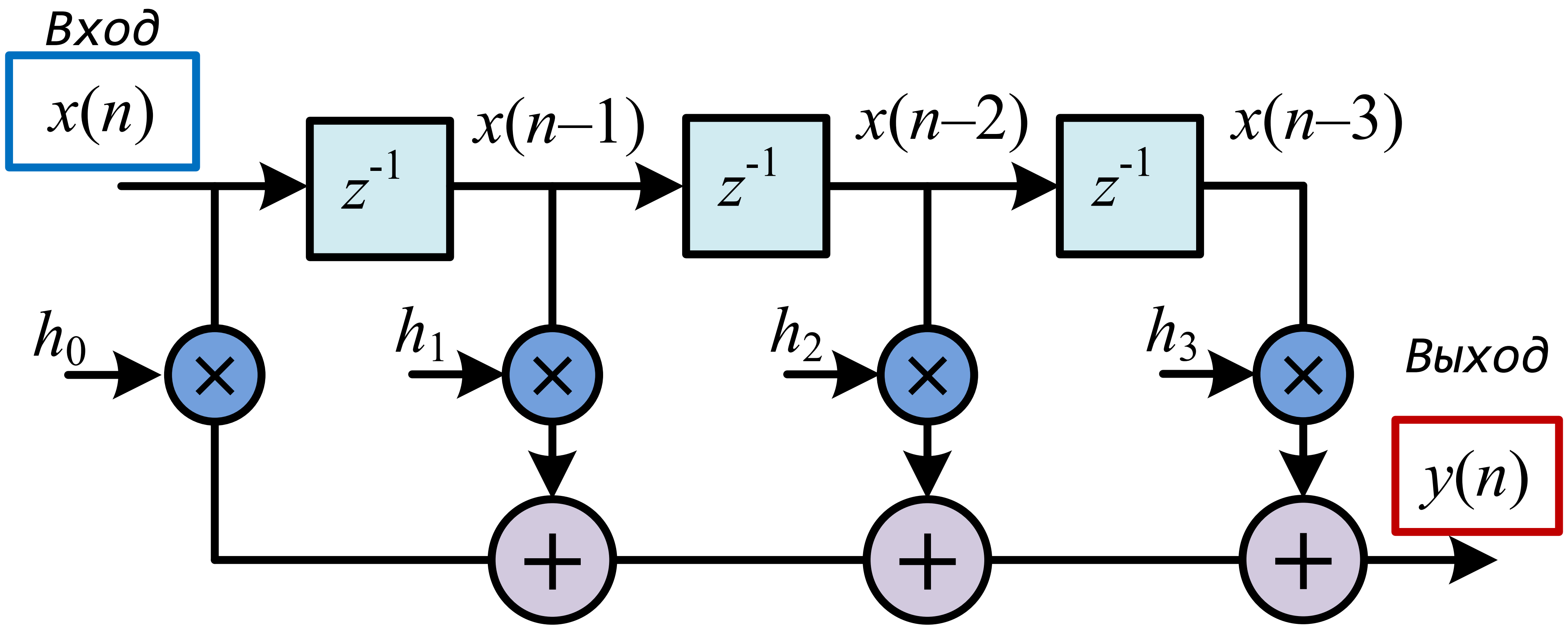
Усреднение по 5 точкам синусоиды ($\omega = \frac{\pi}{2}$ рад/с)



# Реализация КИХ-фильтра

## Прямая форма



# Реализация КИХ-фильтра

## Транспонированная форма