Теория и применение цифровой обработки сигналов

Расчет КИХ-фильтров методом оконного взвешивания

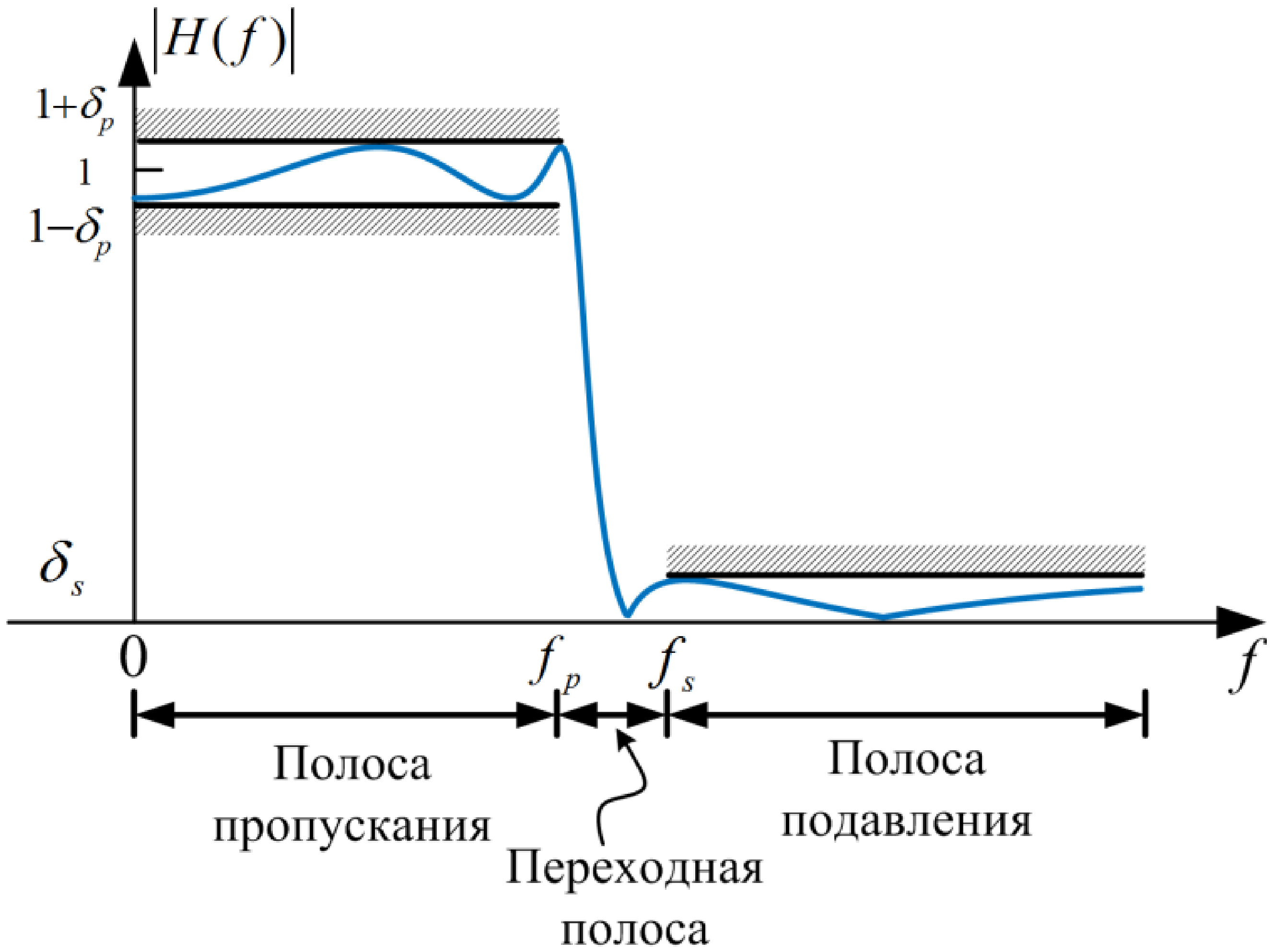
д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

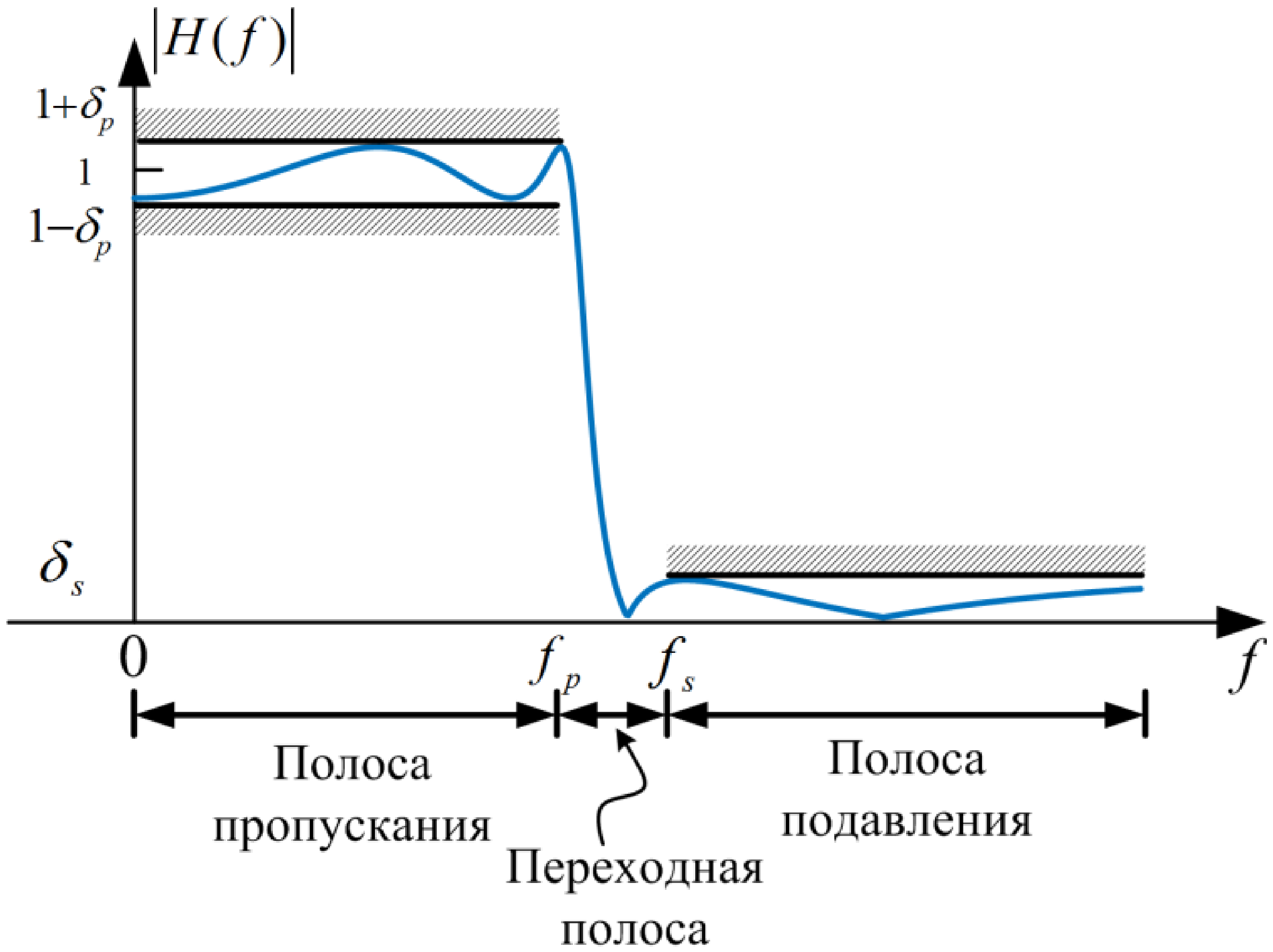
Кафедра электронных вычислительных средств

Спецификация на фильтр



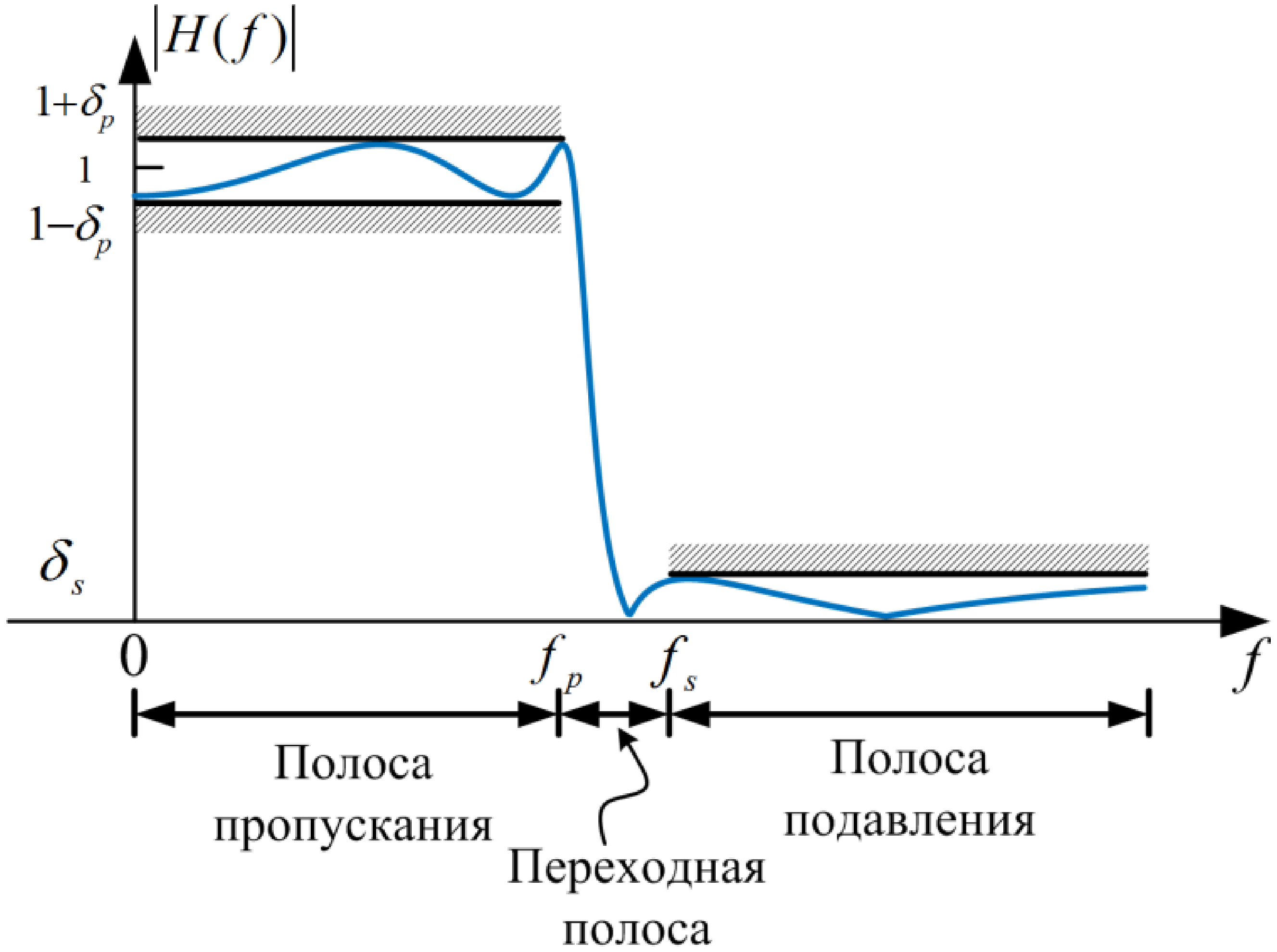
δ_s – отклонение в полосе подавления;

Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;
δ_p – отклонение в полосе пропускания;

Спецификация на фильтр

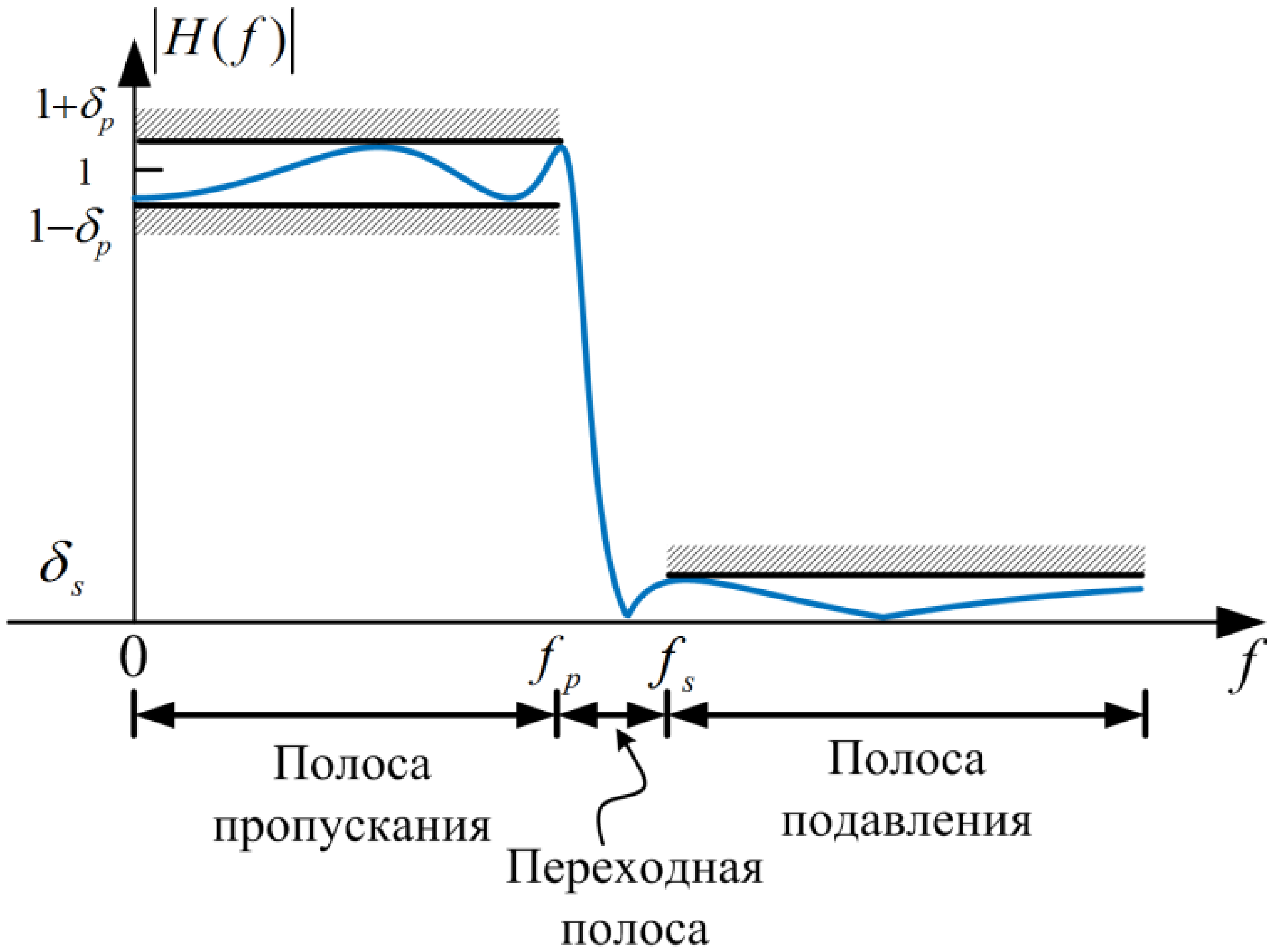


δ_s – отклонение в полосе подавления;

δ_p – отклонение в полосе пропускания;

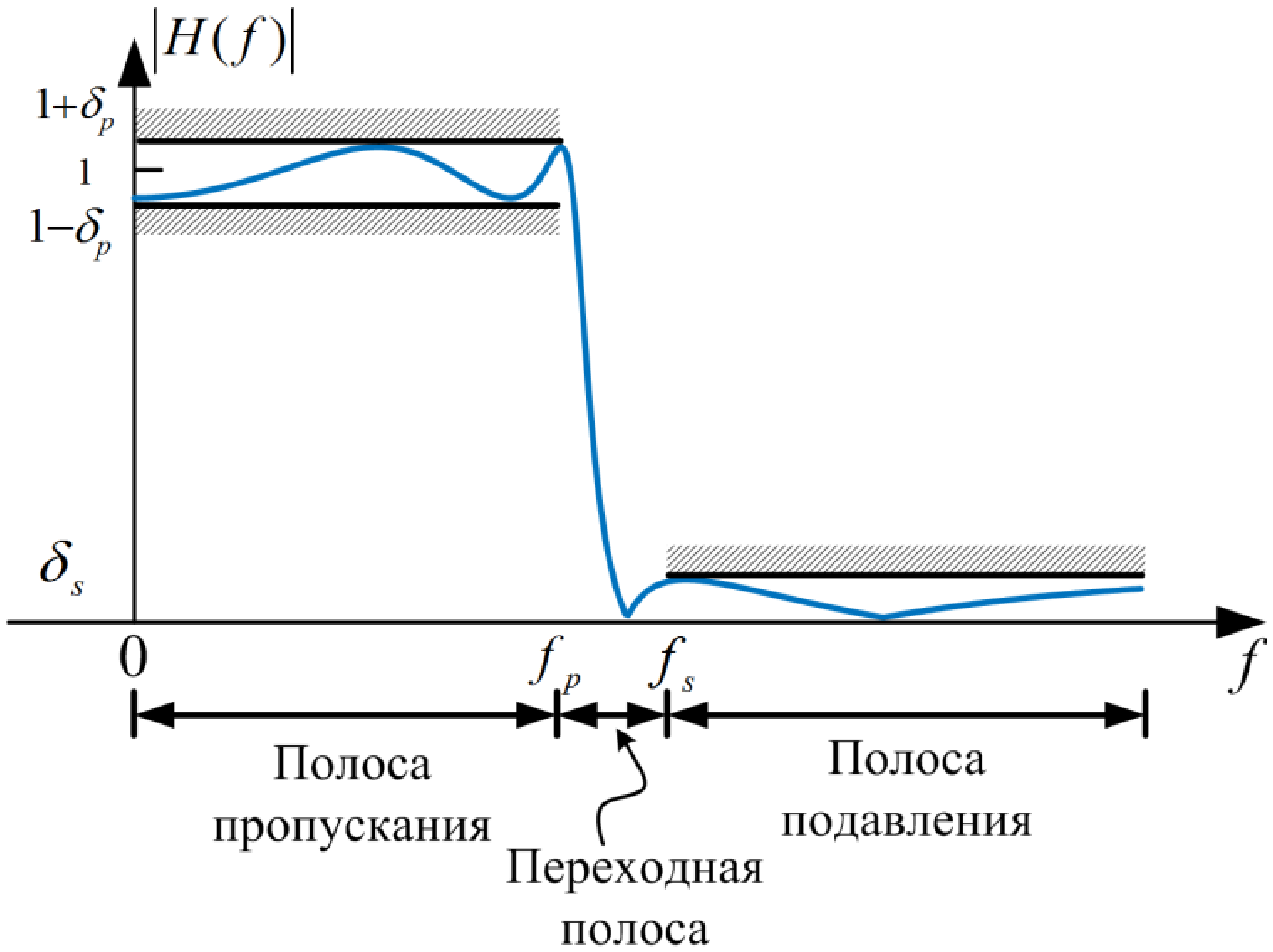
f_p – граничная частота полосы пропускания;

Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;
δ_p – отклонение в полосе пропускания;
f_p – граничная частота полосы пропускания;
f_s – граничная частота полосы подавления.

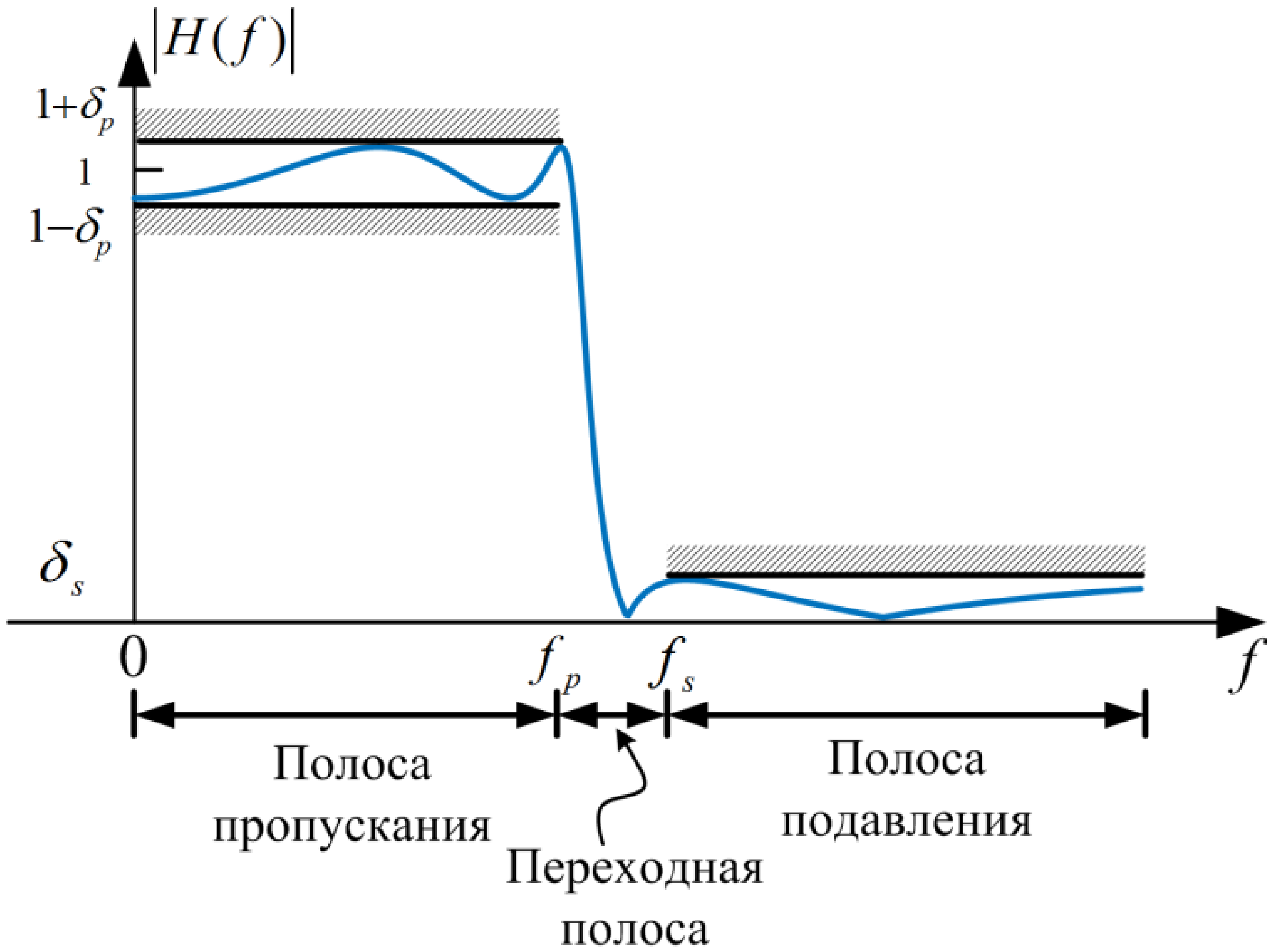
Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;
δ_p – отклонение в полосе пропускания;
f_p – граничная частота полосы пропускания;
f_s – граничная частота полосы подавления.

Обычно граничные частоты задаются в нормированной форме, т.е. как доля частоты дискретизации (f/F_s) или от частоты Найквиста (f/F_N).

Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;

δ_p – отклонение в полосе пропускания;

f_p – граничная частота полосы пропускания;

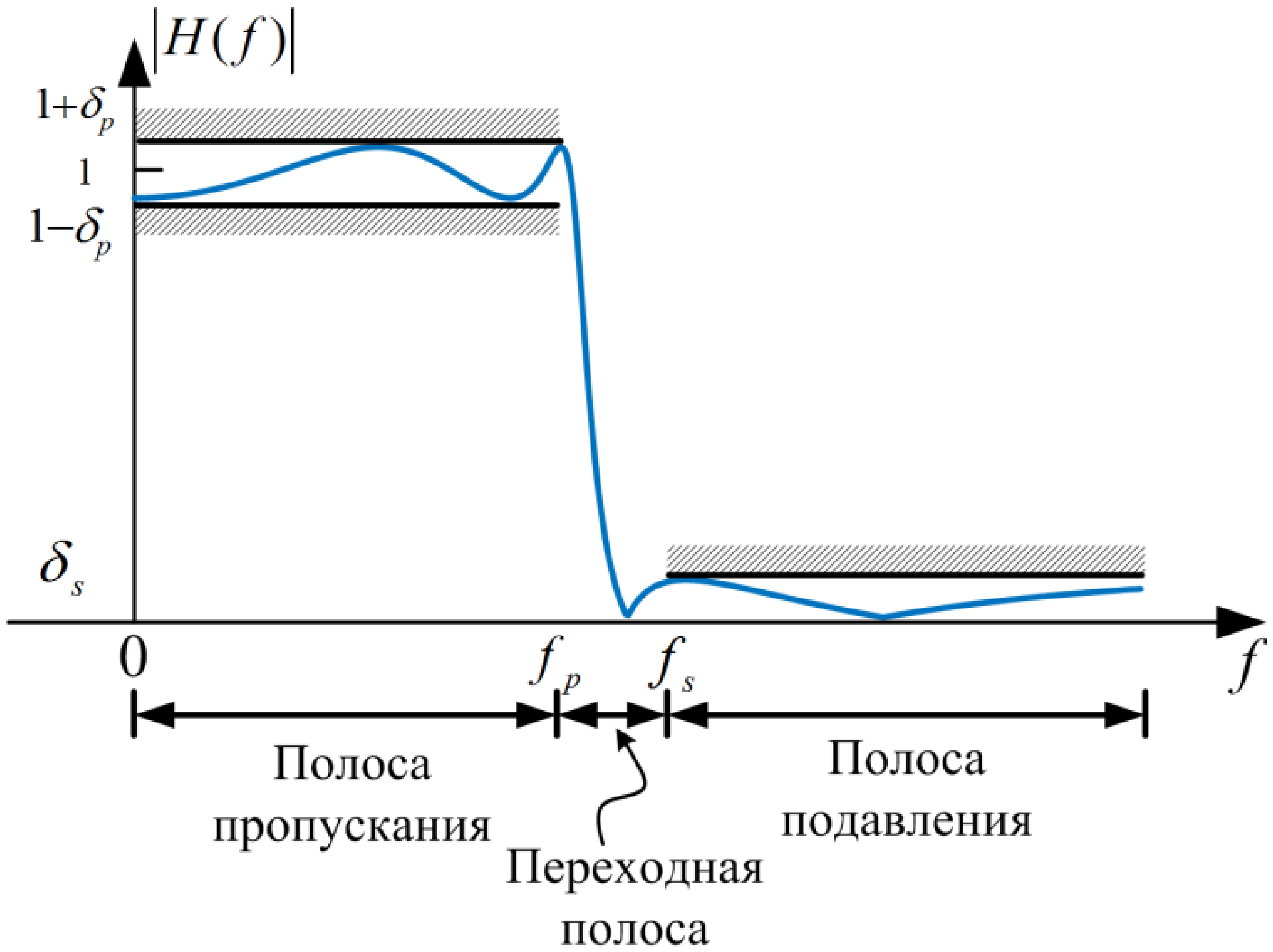
f_s – граничная частота полосы подавления.

Обычно граничные частоты задаются в нормированной форме, т.е. как доля частоты дискретизации (f/F_s) или от частоты Найквиста (f/F_N).

Неравномерность в полосе пропускания

$$A_p = 20\log_{10}(1+\delta_p).$$

Спецификация на фильтр



δ_s – отклонение в полосе подавления;
δ_p – отклонение в полосе пропускания;
f_p – граничная частота полосы пропускания;
f_s – граничная частота полосы подавления.

Обычно граничные частоты задаются в нормированной форме, т.е. как доля частоты дискретизации ($f\,/F_S$) или от частоты Найквиста ($f\,/F_N$).

Неравномерность в полосе пропускания

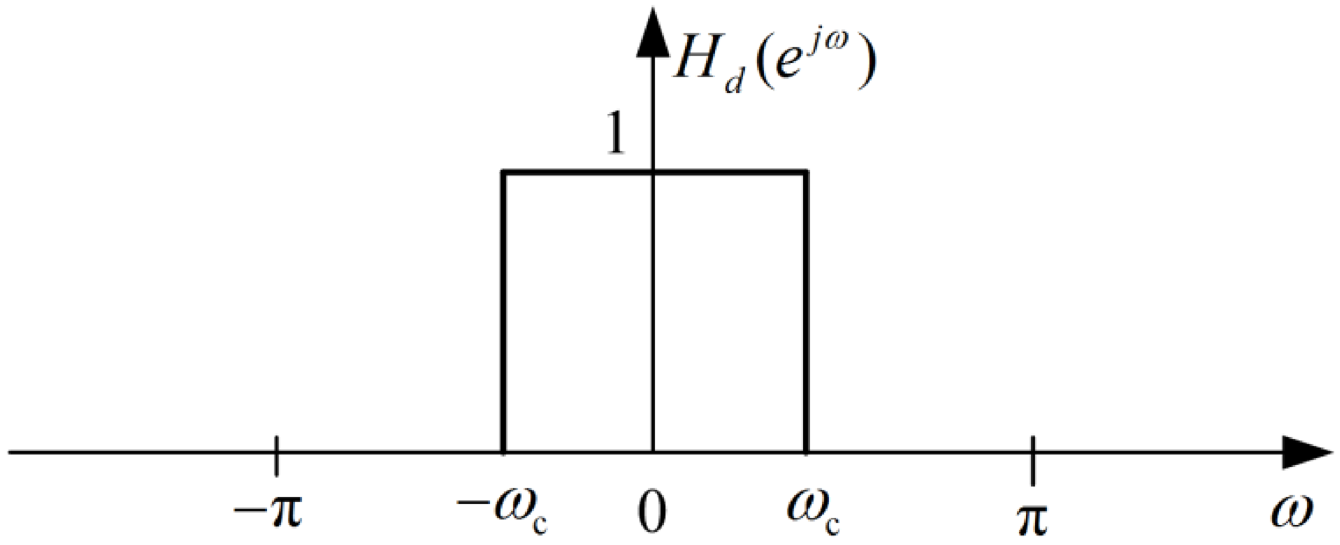
$$A_p = 20\log_{10}(1+\delta_p).$$

Минимальное затухание в полосе подавления:

$$A_s = -20\log_{10}\delta_s.$$

Метод оконного взвешивания (1)

Рассмотрим задачу расчёта КИХ-фильтра с нижних частот

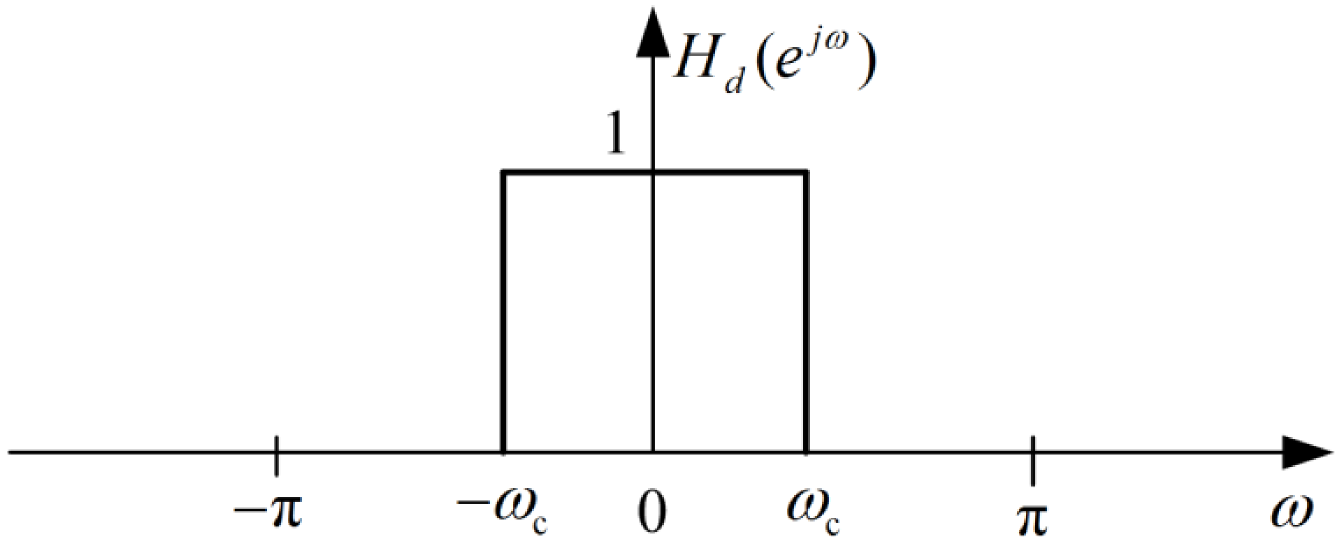


Мы ищем коэффициенты дискретного фильтра $h_d(n)$, которые связаны с $H_d(e^{j\omega})$ дискретным временным преобразованием Фурье (ДВПФ).

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = ?$$

Метод оконного взвешивания (1)

Рассмотрим задачу расчёта КИХ-фильтра с нижних частот

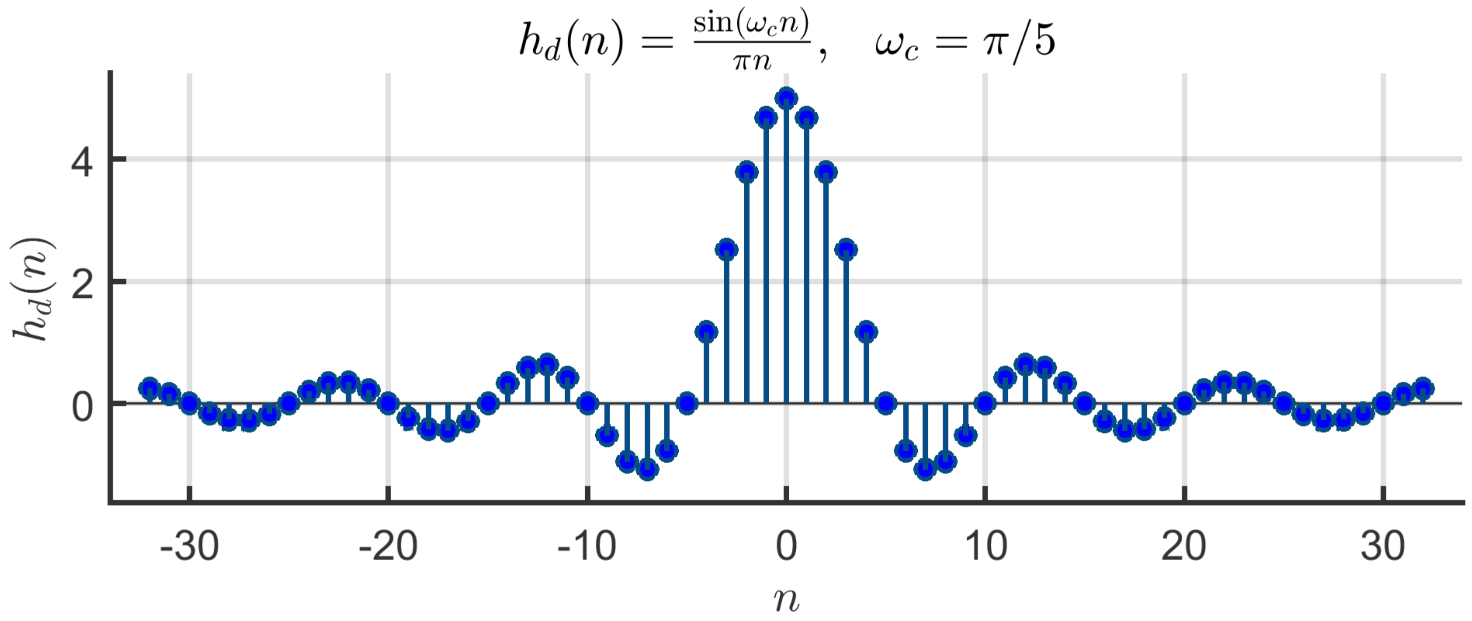


Мы ищем коэффициенты дискретного фильтра $h_d(n)$, которые связаны с $H_d(e^{j\omega})$ дискретным временным преобразованием Фурье (ДВПФ).

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}.$$

Метод оконного взвешивания (2)

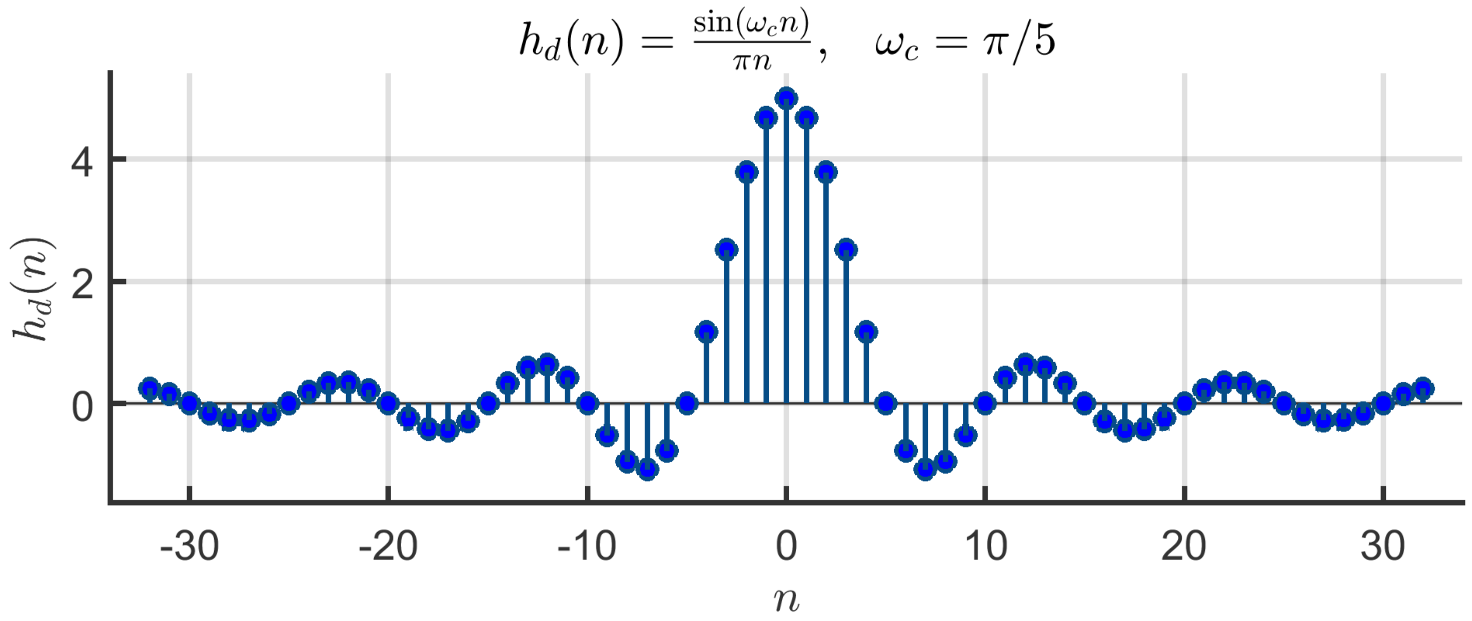
Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)



Число коэффициентов фильтра бесконечно ….

Метод оконного взвешивания (2)

Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)

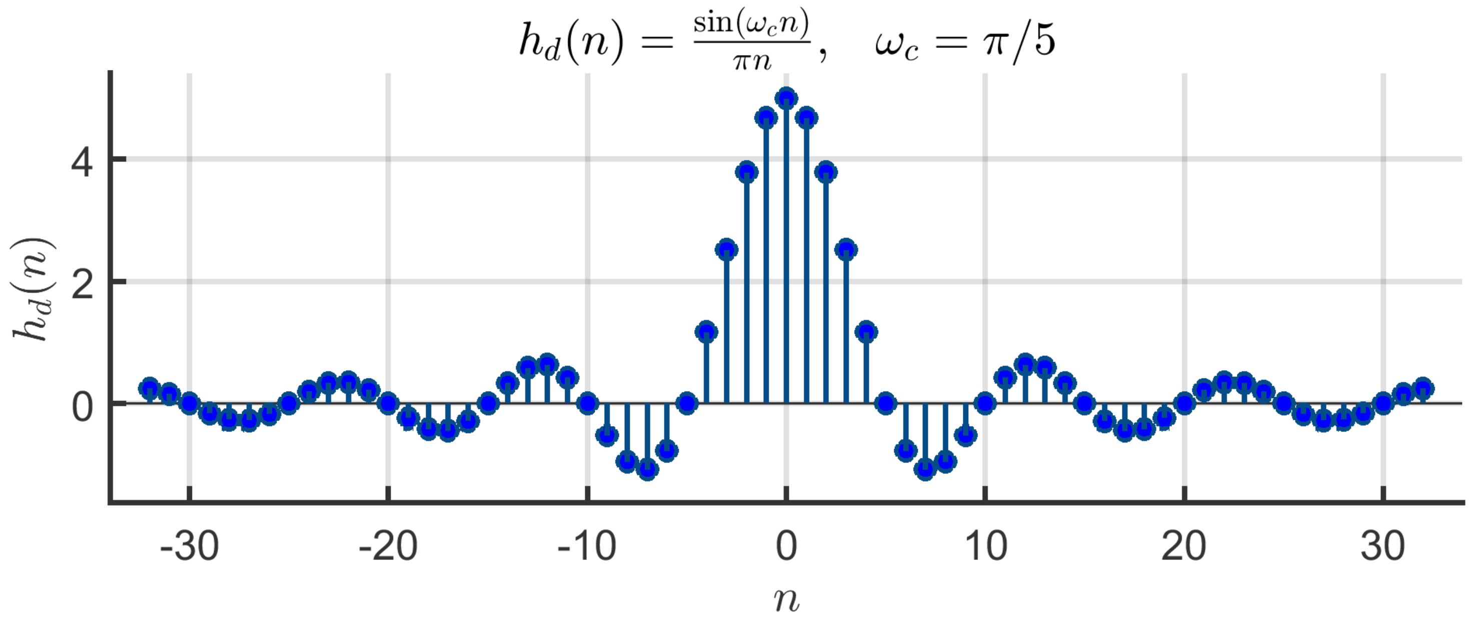


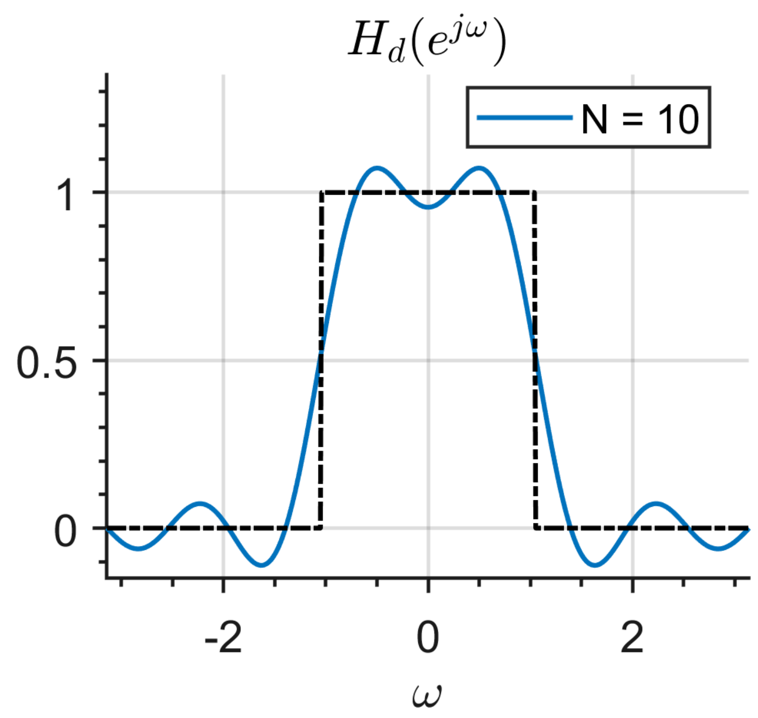
Восстановление после усечения импульсной характеристики

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n) e^{j\omega n}$$

Метод оконного взвешивания (2)

Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)



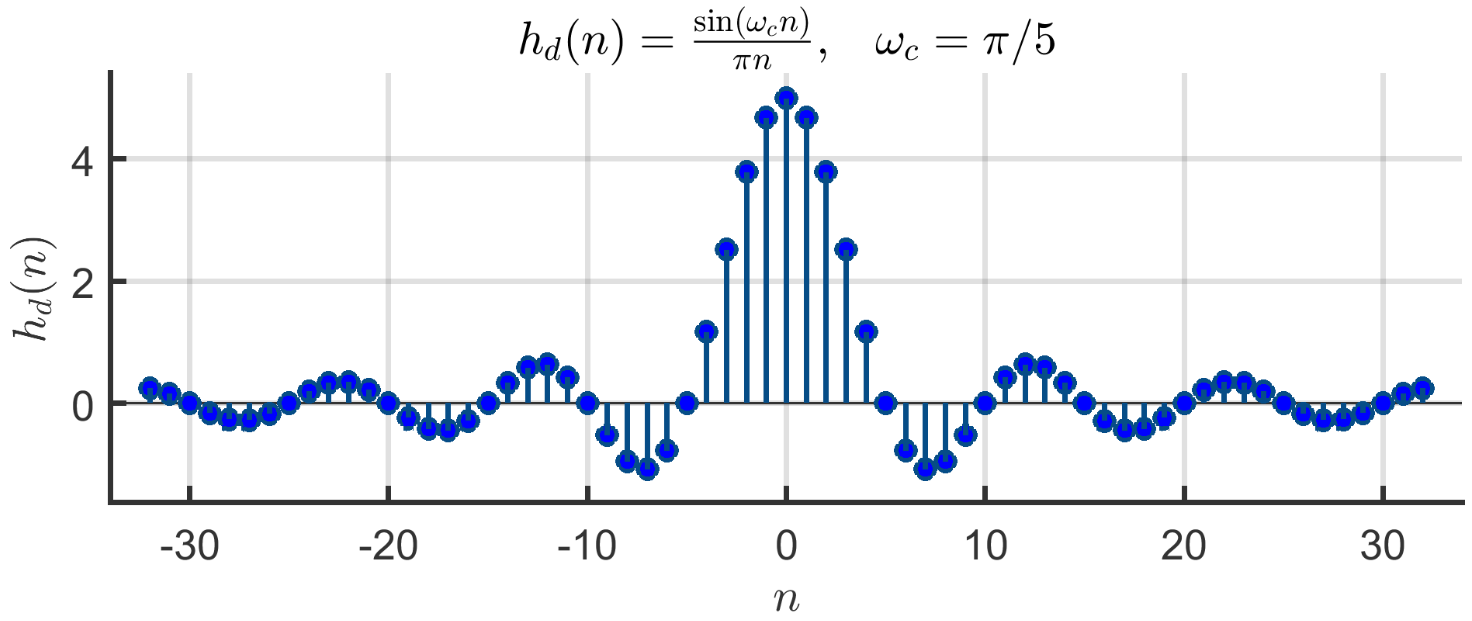


Восстановление после усечения импульсной характеристики

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n) e^{j\omega n}$$

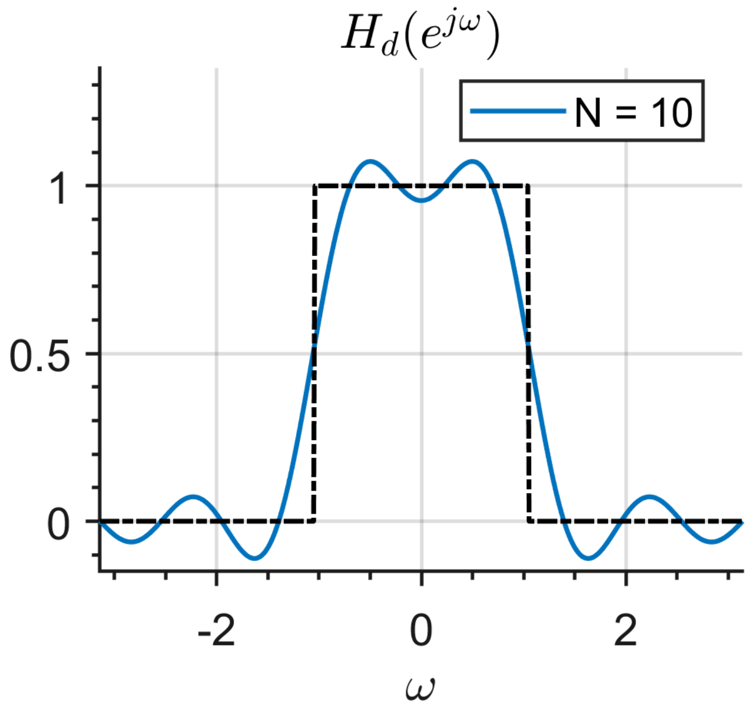
Метод оконного взвешивания (2)

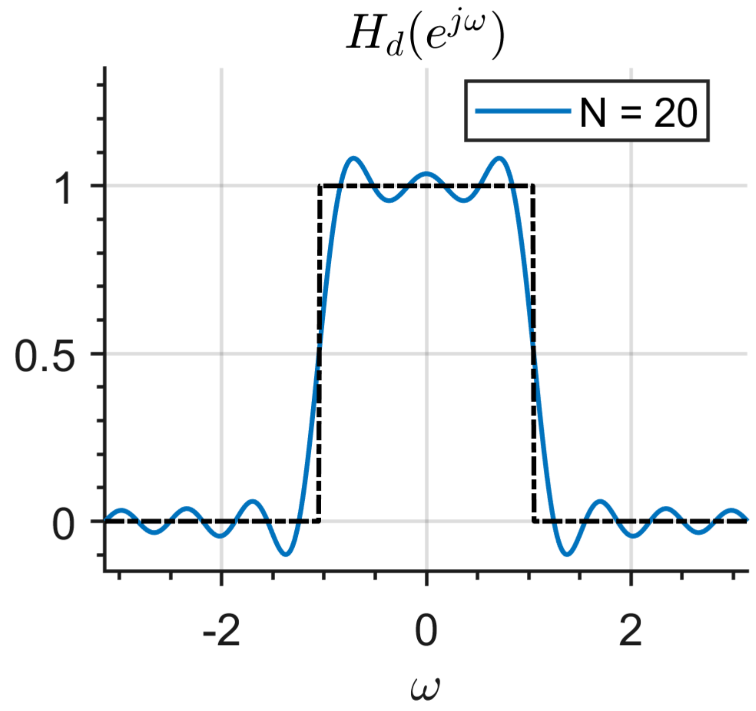
Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)



Восстановление после усечения импульсной характеристики

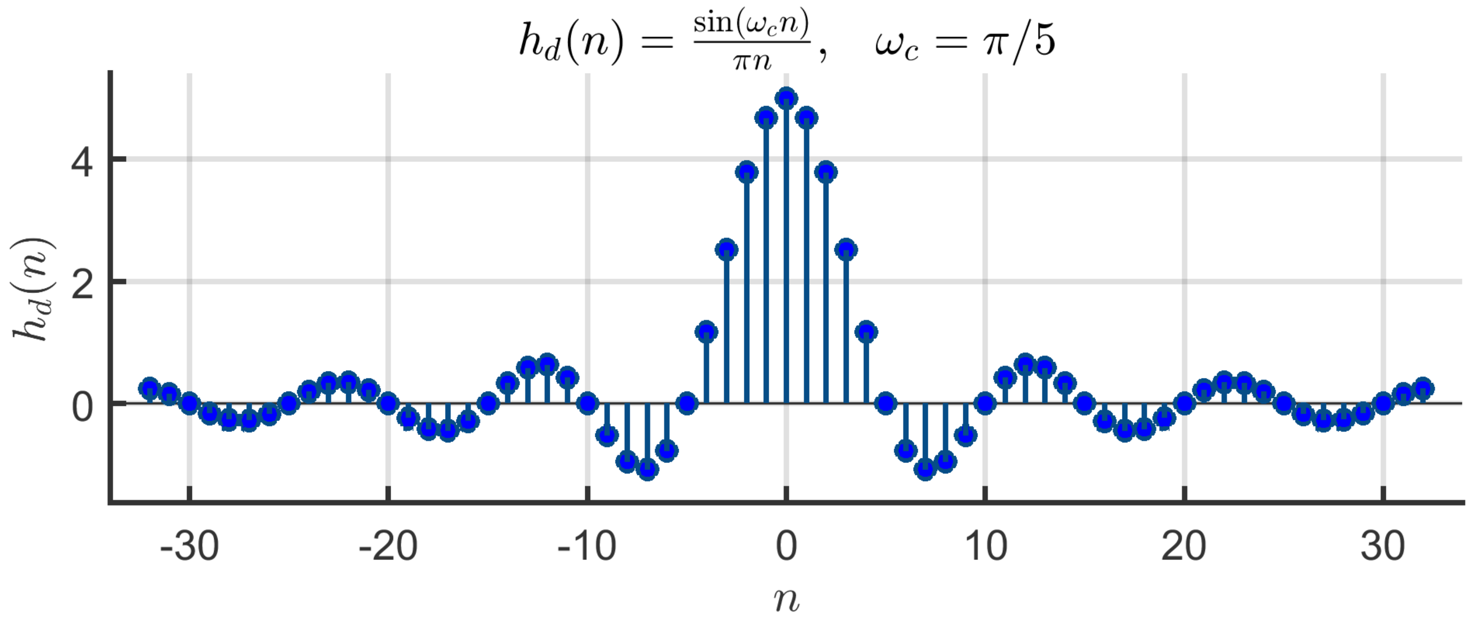
$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n) e^{j\omega n}$$





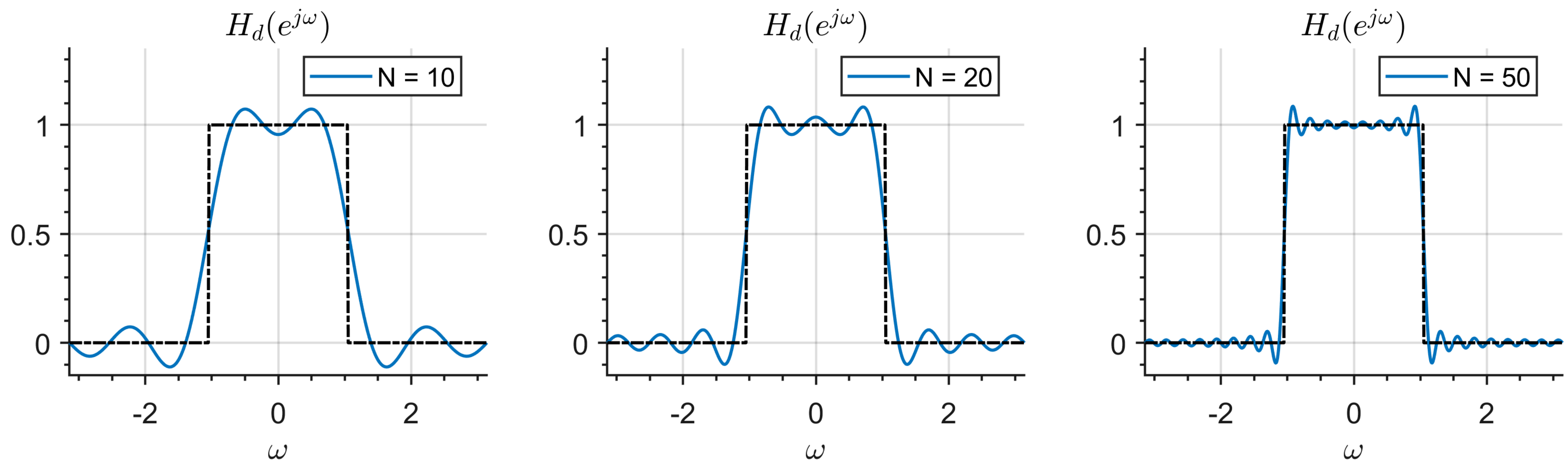
Метод оконного взвешивания (2)

Вид идеальной импульсной характеристики (коэффициентов фильтра)



Восстановление после усечения импульсной характеристики

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} h_d(n) e^{j\omega n}$$



Метод оконного взвешивания (3)

В методе оконного взвешивания импульсная характеристика фильтра получается умножением импульсной характеристики идеального фильтра $h_d(n)$ на оконную функцию $w(n)$:

$$h(n) = h_d(n)w(n).$$

Метод оконного взвешивания (3)

В методе оконного взвешивания импульсная характеристика фильтра получается путем умножения импульсной характеристики идеального фильтра $h_d(n)$ на оконную функцию $w(n)$:

$$h(n) = h_d(n)w(n).$$

Это равносильно свертке в частотной области

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_d\left(e^{j\omega}\right) * W\left(e^{j\omega}\right).$$

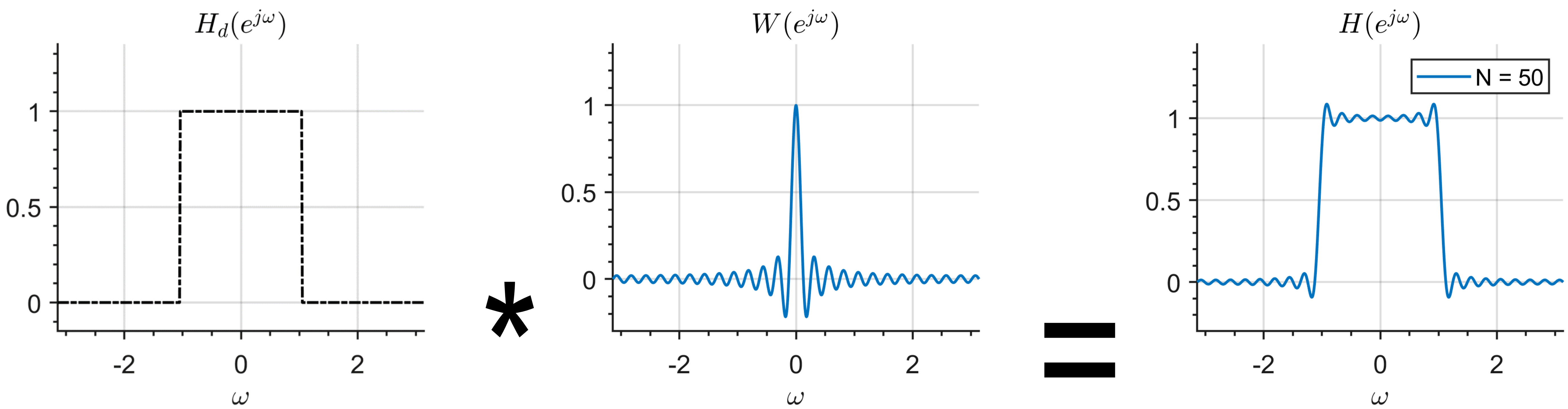
Метод оконного взвешивания (3)

В методе оконного взвешивания импульсная характеристика фильтра получается путем умножения импульсной характеристики идеального фильтра $h_d(n)$ на оконную функцию $w(n)$:

$$h(n) = h_d(n)w(n).$$

Это равносильно свертке в частотной области

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}).$$



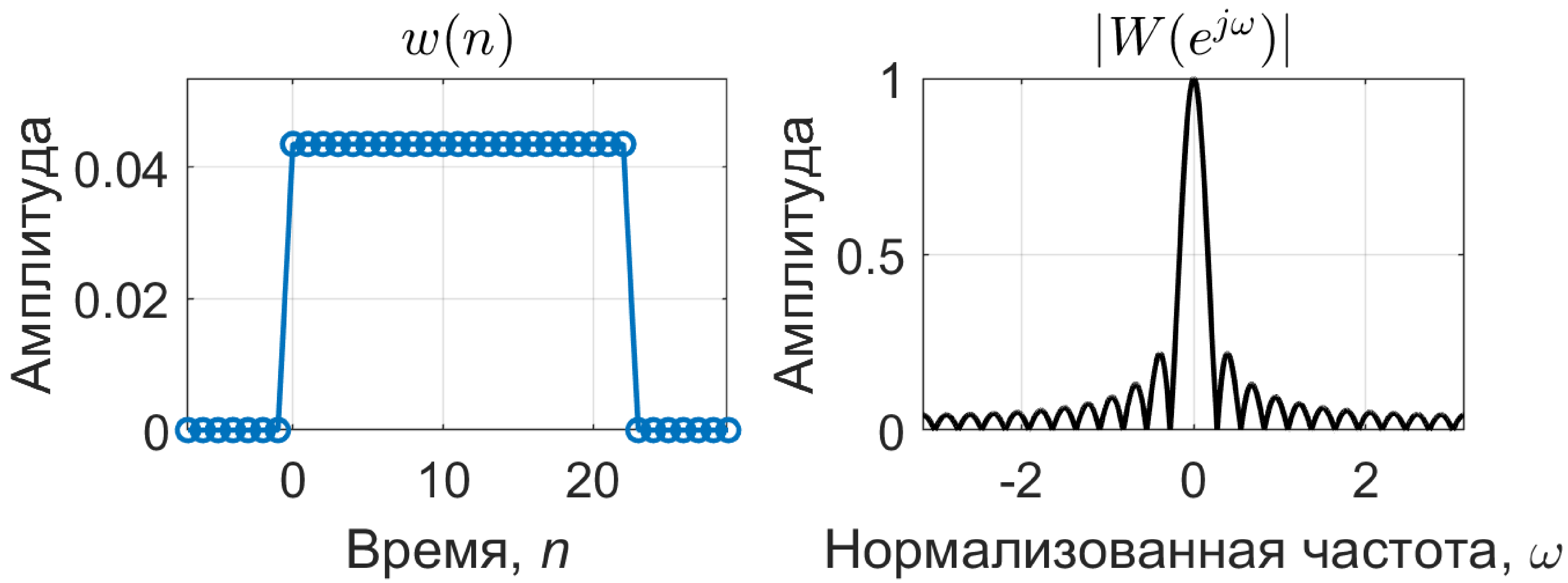
Прямоугольное окно

$$w(n) = \begin{cases} 1, & N \leq n \leq N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Частотная характеристика

$$W\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-jn\omega} = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}(2N+1)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Для вычисления прямоугольного окна в `Matlab` есть функция `boxcar(N)`.



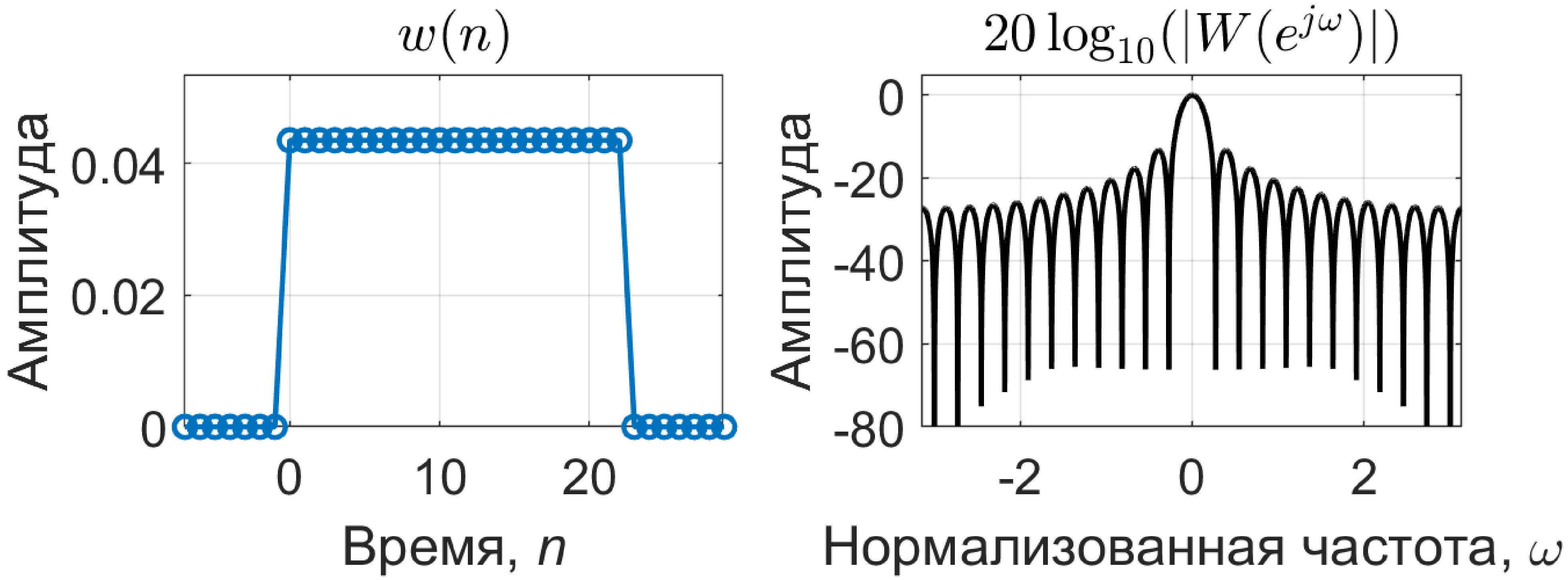
а б

Прямоугольное окно: представление во временной $w(n)$ (а) и частотной (б) областях $W(e^{j\omega})$

Прямоугольное окно

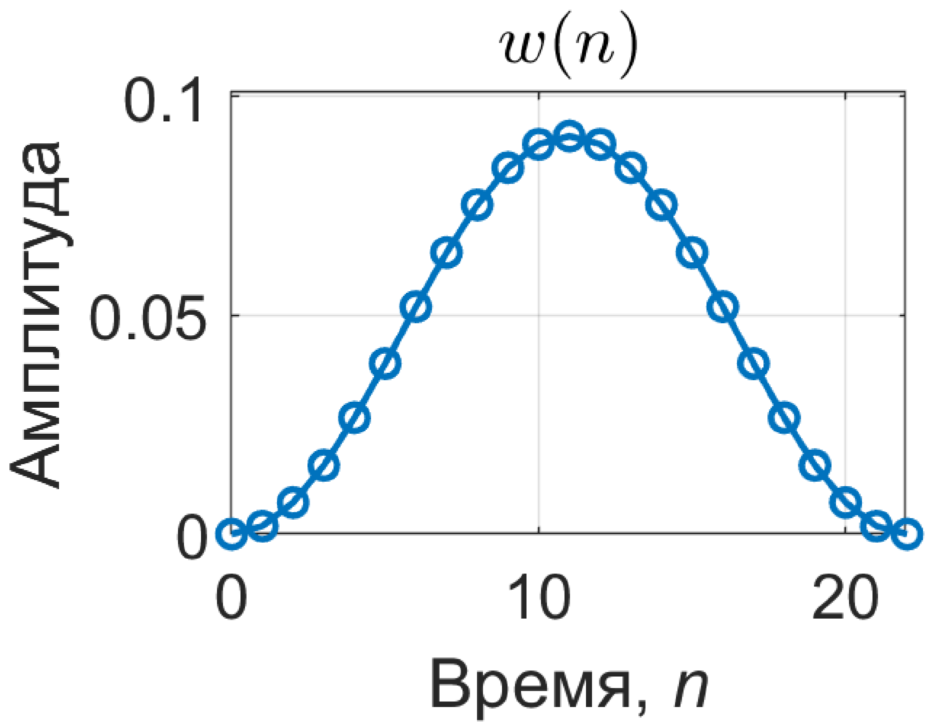
Перевод в децибелы

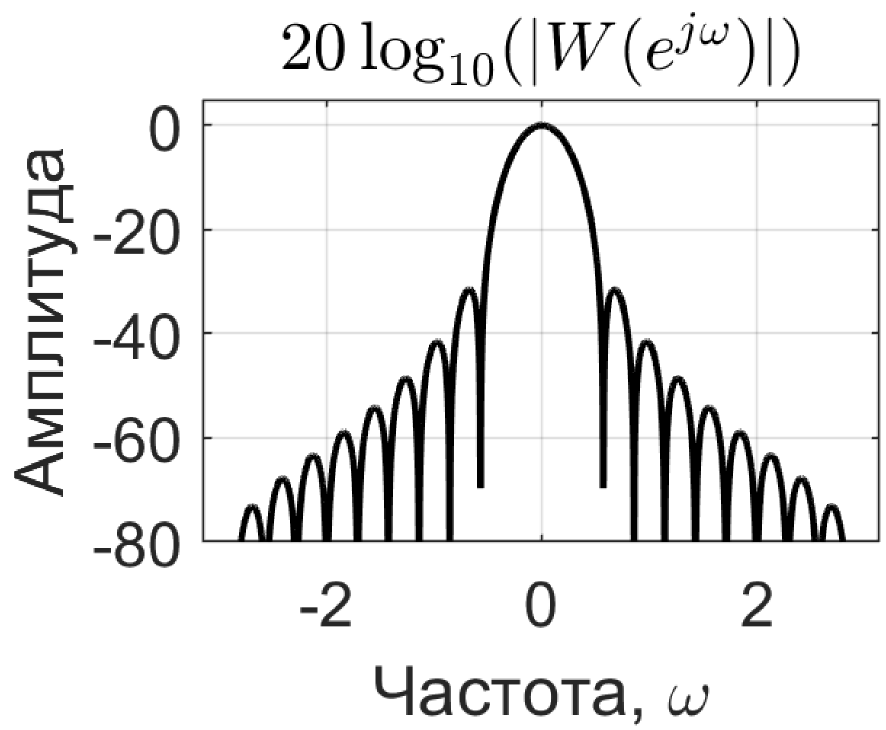
$$20\log_{10}|W(e^{j\omega})|$$



Окно Ханна

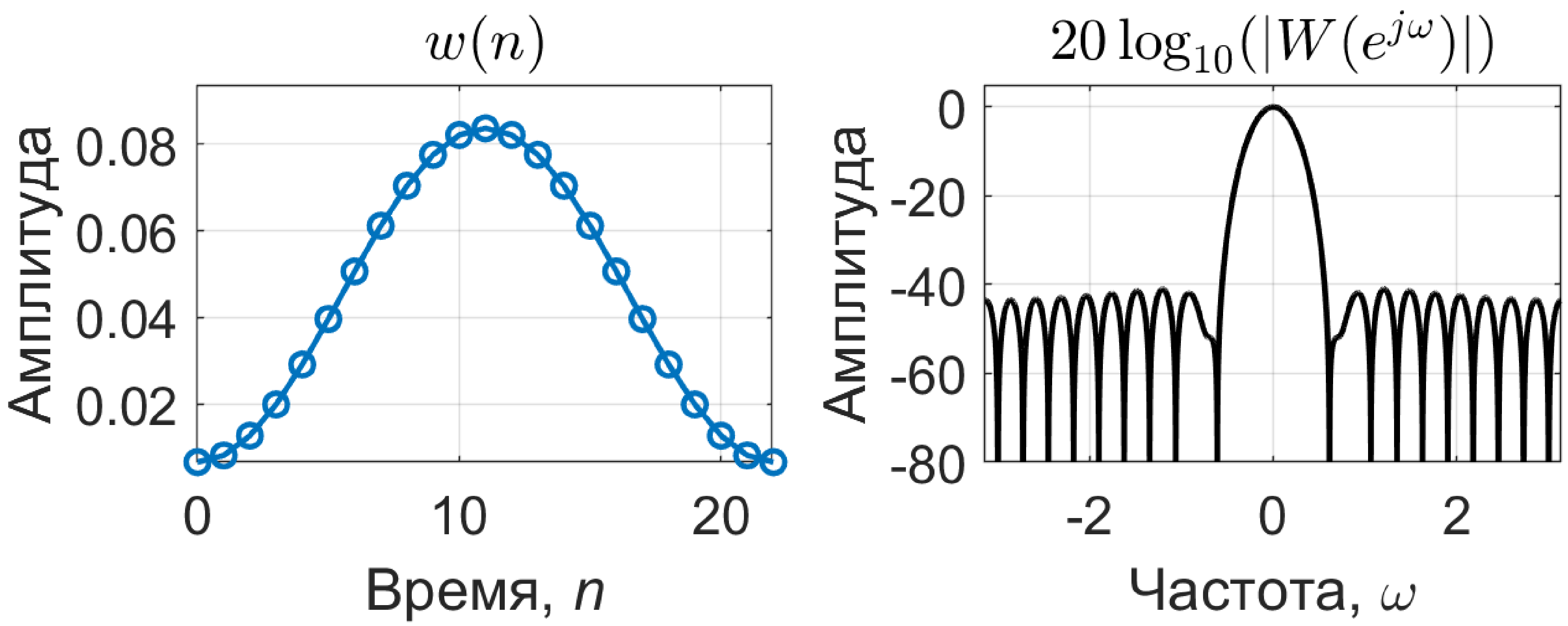
$$w(n) = 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$





Окно Хемминга

$$w(n) = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Сравнение оконных функций

Для сравнения оконных функций можно использовать отношение уровня главного лепестка к боковому (англ. peak-to-sidelobe ratio – PSLR)

$$PSLR = \left|\frac{W(0)}{W(e^{j\omega_1})}\right|,$$

где ω_1 – частота на которой боковой лепесток достигает максимума.

PSLR прямоугольного окна

Для прямоугольного окна $\omega_1 = \frac{3\pi}{(2N+1)}$. Следовательно

$$PSLR = (2N+1)\sin\left(\frac{3\pi}{2(2N+1)}\right)$$

Для больших N

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2(2N+1)}\right) \approx \frac{3\pi}{2(2N+1)}$$

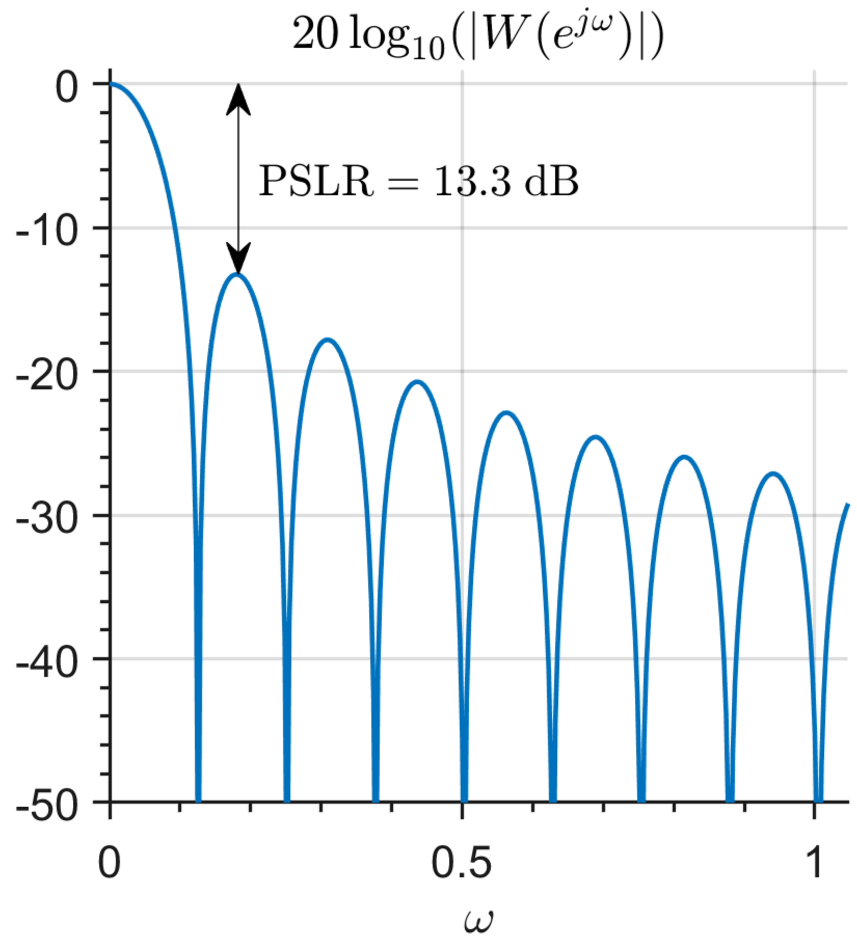
Поэтому отношение равно

$$PSLR \approx \frac{3\pi}{2} = 13.5\ dB.$$

Сравнение оконных функций

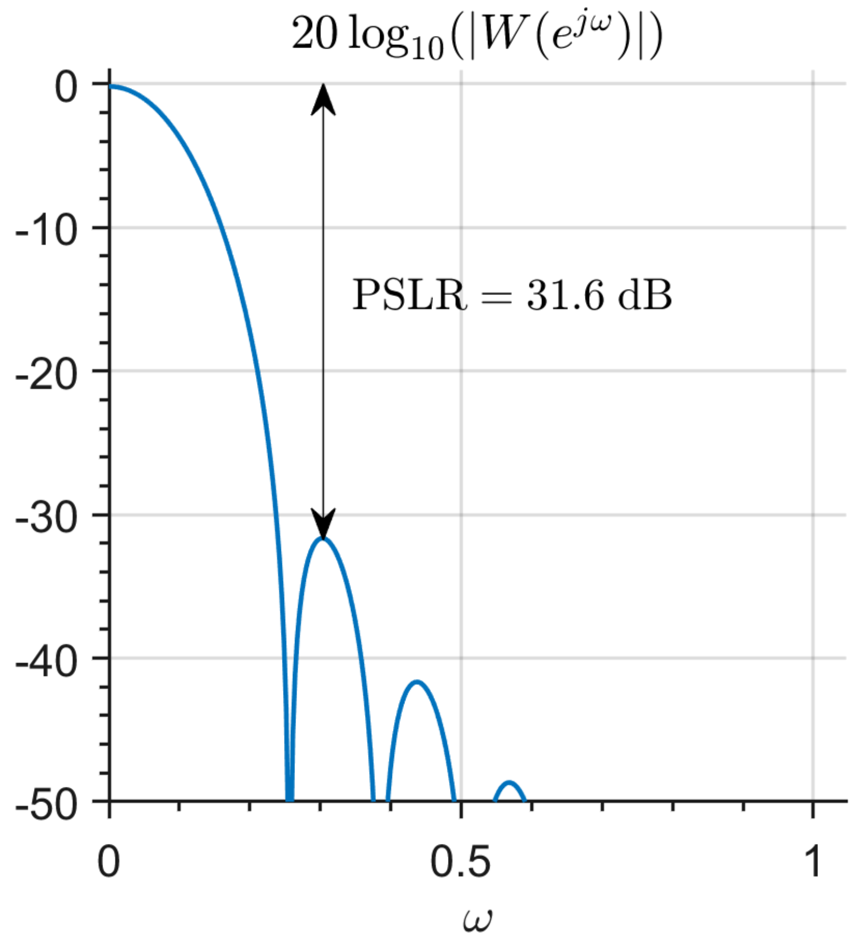
Прямоугольное окно

$$w(n) = u(n) - u(n - N + 1)$$



Окно Ханна

$$w(n) = 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Окно Хемминга

$$w(n) = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$