Теория и применение цифровой обработки сигналов

Свойства ДПФ

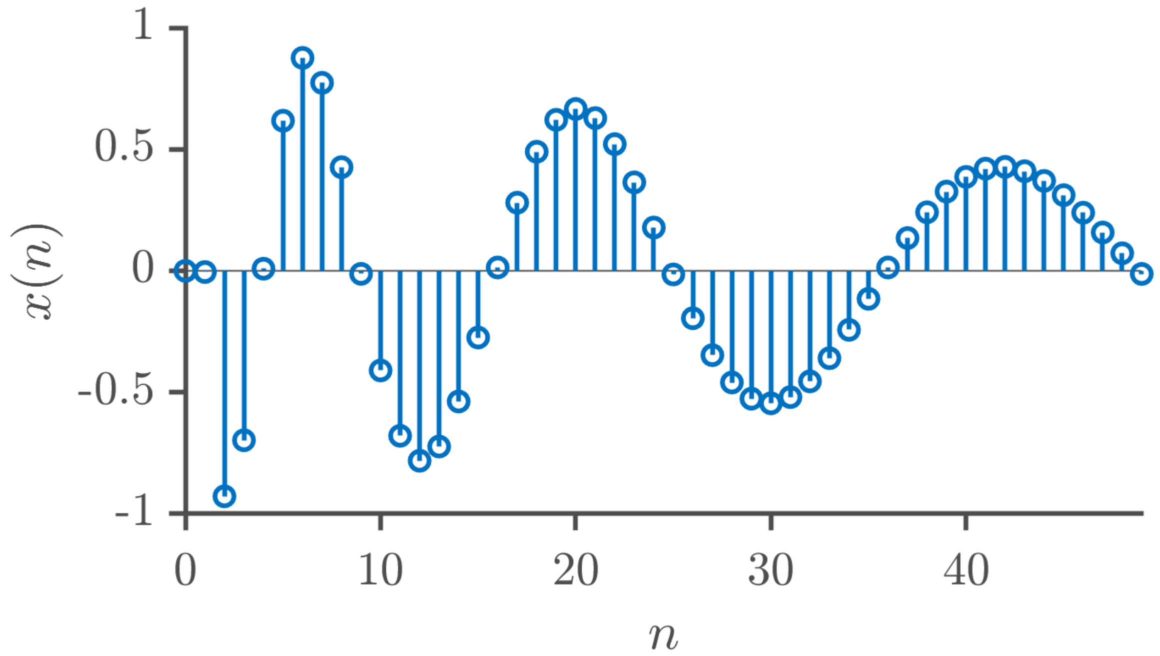
д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

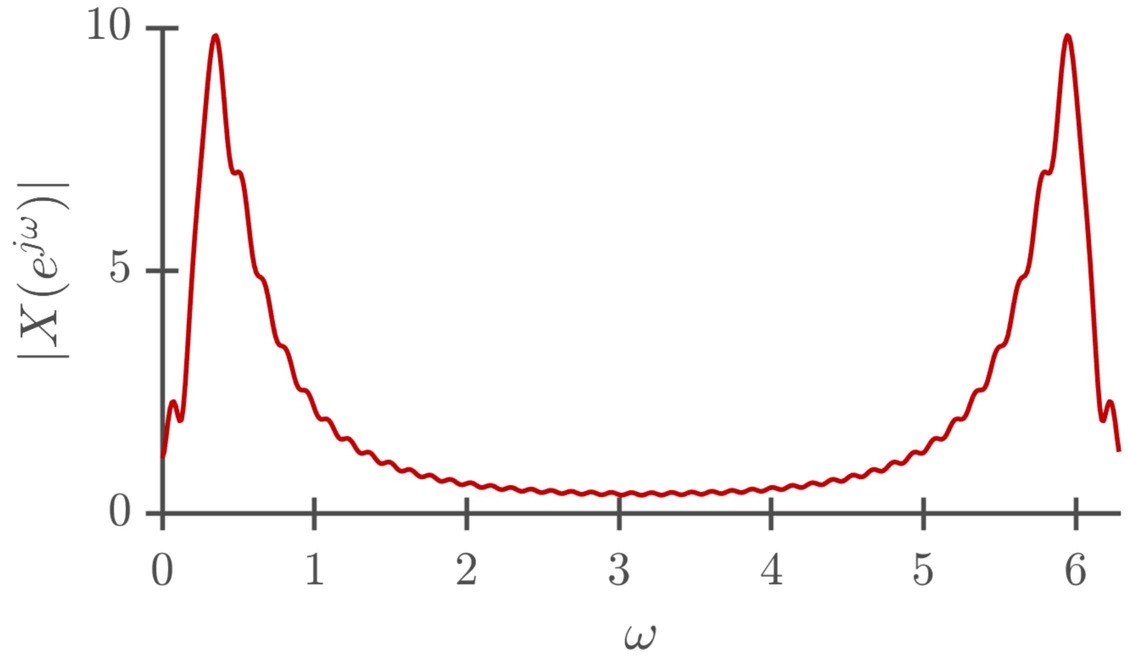
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

ДПФ и ДВПФ

$$X_{DTFT}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

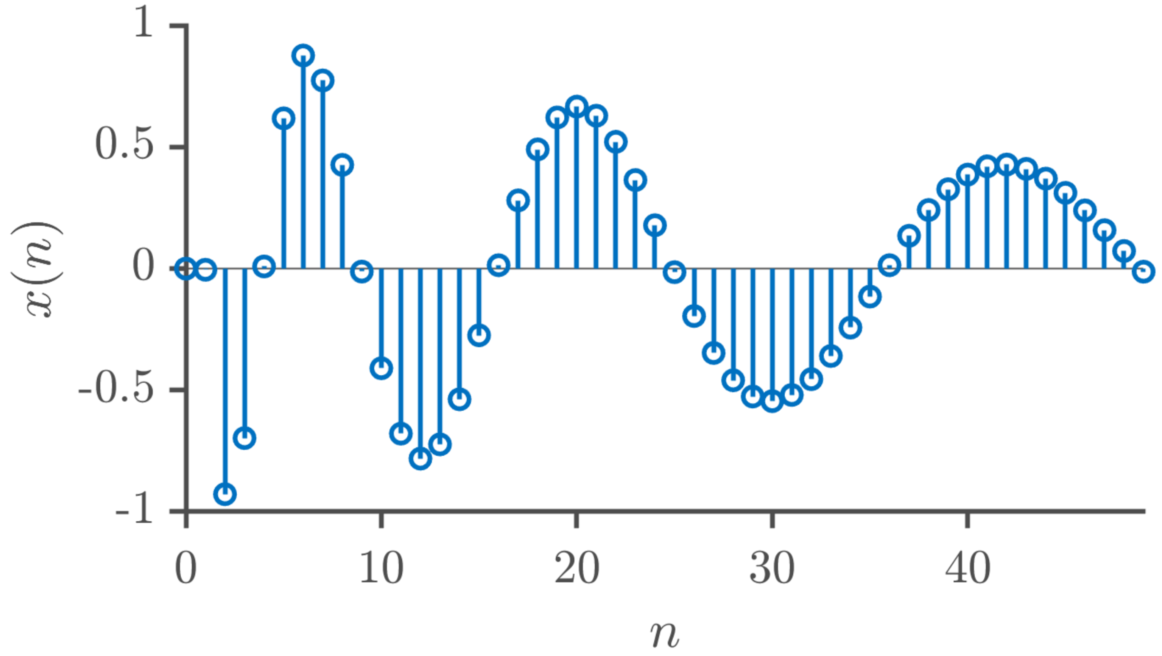


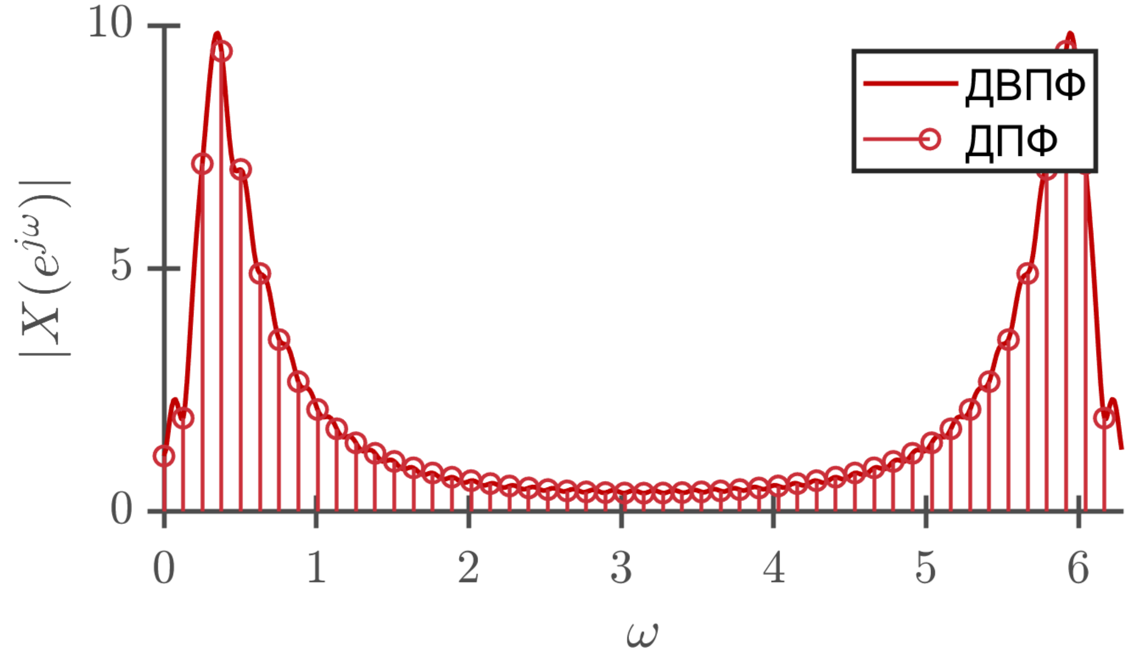


ДПФ и ДВПФ

ДПФ эквивалентов вычислению ДВПФ на фиксированной частотной сетке $\omega_k = \frac{2\pi}{N}$:

$$X_{DTFT}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \rightarrow X(k) = X_{DTFT}(e^{j\omega_k})\Big|_{\omega_k=\frac{2\pi}{N}}$$





Таким образом, ДПФ:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}.$$

Связь между ДПФ и ДВПФ

ДПФ

$$X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi k}{N} n}, \qquad 0 \le k < N - 1.$$

ДВПФ

$$X_{DTFT}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \qquad 0 \le \omega \le \pi.$$

Связь

$$X(k) = X_{DTFT}\left(e^{j\omega_k}\right)\Big|_{\omega_k = \frac{2\pi}{N}}$$

- Индекс k ДПФ $\longrightarrow$ цифровая круговая частота $2\pi \frac{k}{N}$ радиан/отсчет
- Индекс k ДПФ $\longrightarrow$аналоговая круговая частота $2\pi \frac{k}{NT_S}$ радиан/сек

T_S – интервал (шаг) дискретизации.

Интерпретация k в обозначении ДПФ $X(k)$?

После вычисления ДПФ последовательности $x(n)$, которая получается путем дискретизации сигнала $x(t)$ нас может интересовать значение частоты для максимальной амплитуды $X(k)$. Выводя график $|X(k)|$ обычно по оси Ox мы откладываем частотный индекс k. Но как этот индекс соотносится с реальной физической частотой, которая содержалась в исходном сигнале $x(t)$?

Преобразование индекса k в значение аналоговой частоты выполняется по формуле:

$$f_k = \frac{f_s}{N} k \text{ [Гц]},$$

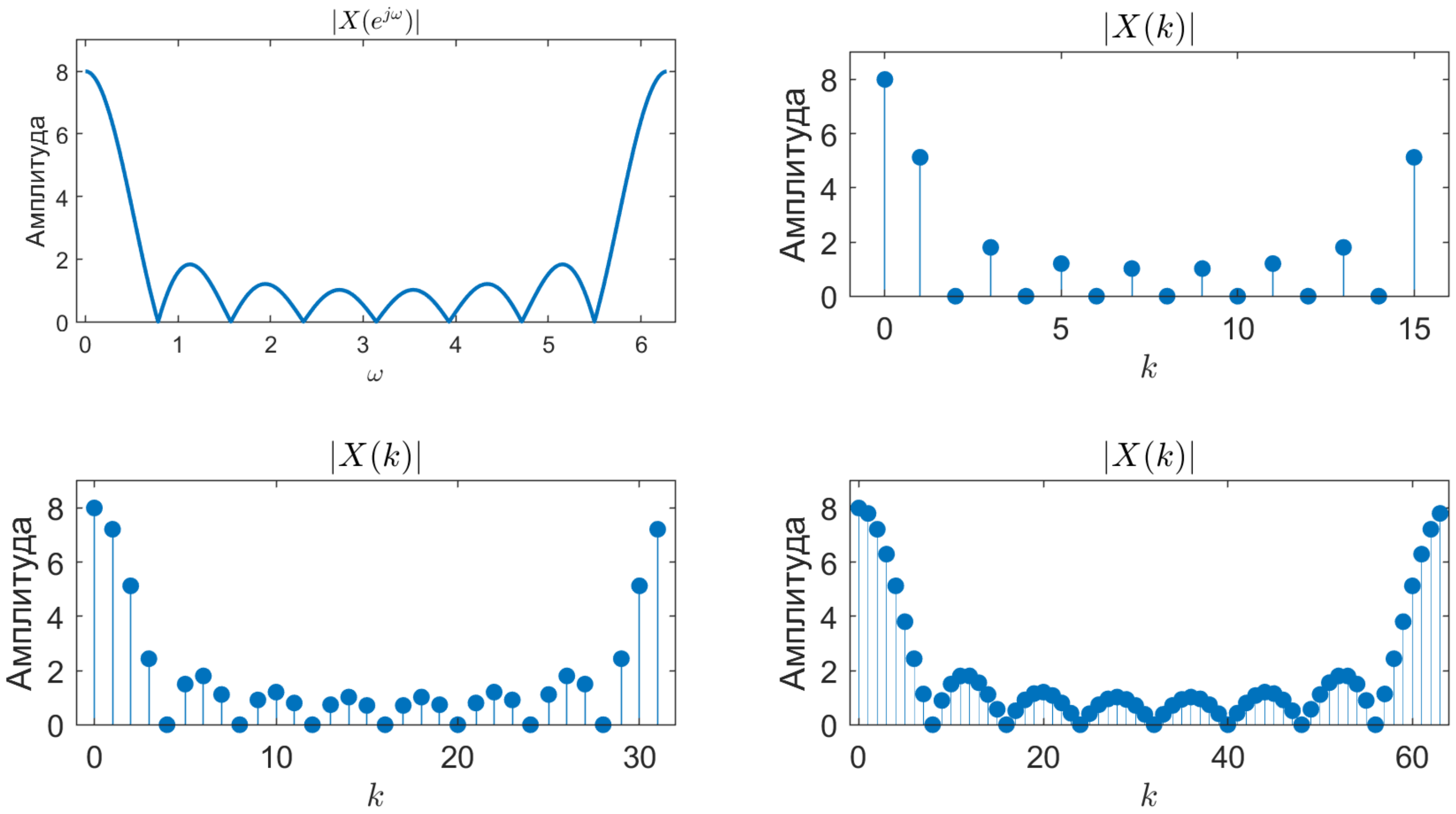
где f_s – частота дискретизации, N – число отсчетов сигнала.

ДПФ: частотное разрешение

- Частотное разрешение: расстояние между двумя частотными бинами:

$$\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{2\pi}{N}.$$

Чем больше значение $N \longrightarrow$ тем меньше $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} \longrightarrow$ лучше частотное разрешение. Пример: $x(n) = u(n) - u(n-8)$



Свойство периодичности ДПФ в частотной области

- Напомним, что ДВПФ является периодичным $X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$
- ДПФ $X(k)$ также является периодичным с периодом N:

$$X(k) = X(k+N)$$

- Доказательство: ?

Свойство периодичности ДПФ во временной области

- Временной сигнал $x(n)$, восстанавливаемый посредством ОДПФ

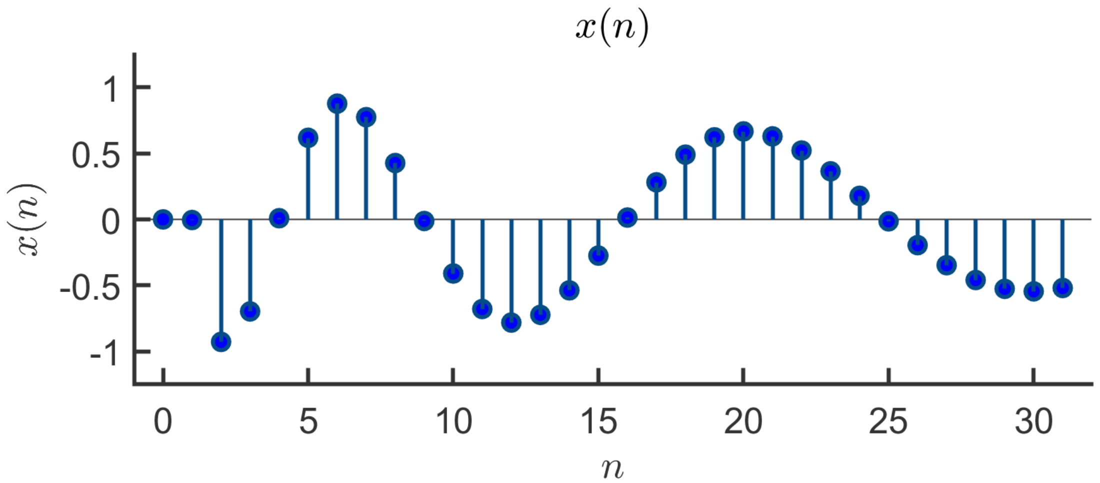
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

является периодическим:

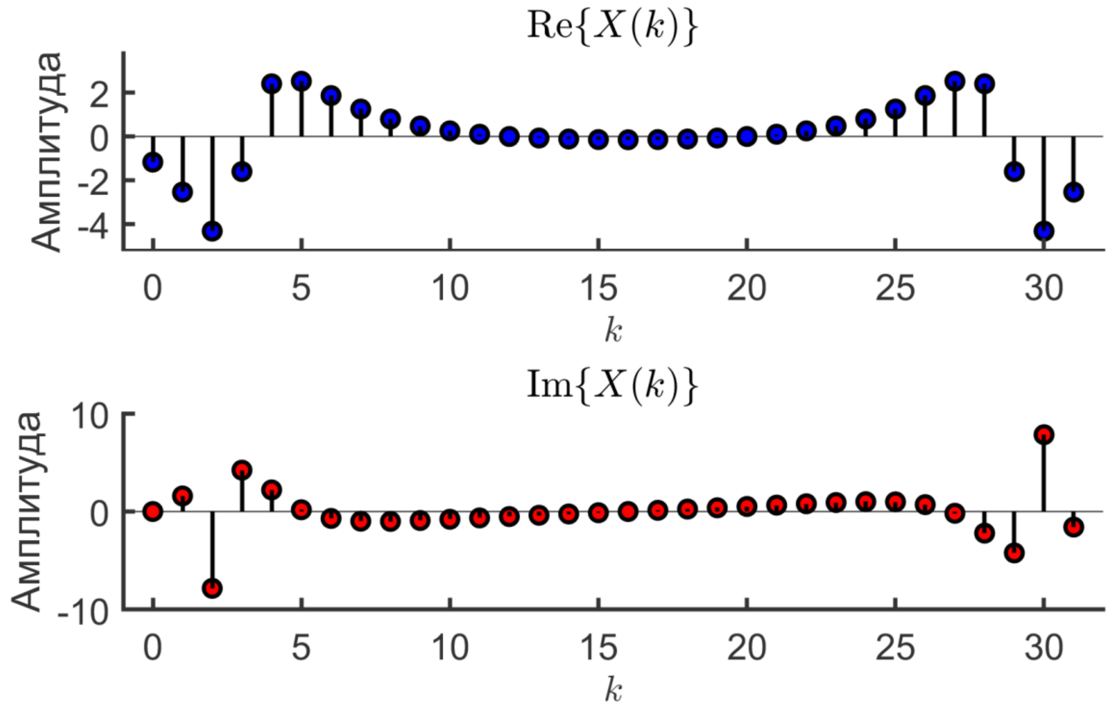
$$x(n) = x(n+N).$$

- Доказательство: ?

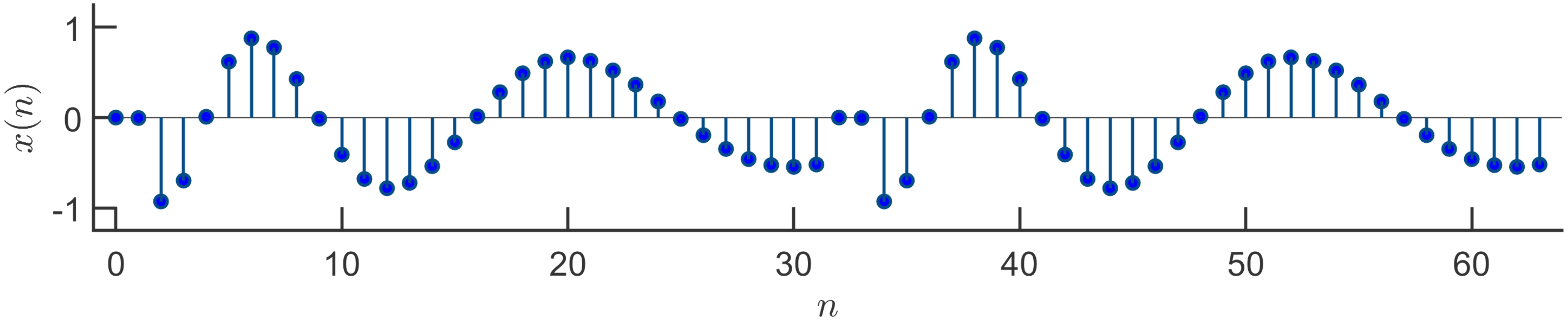
Периодическое продолжение сигнала



DFT $\longleftrightarrow$



$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \qquad n = 0,1 \dots 2N-1$$



Симметрия ДПФ

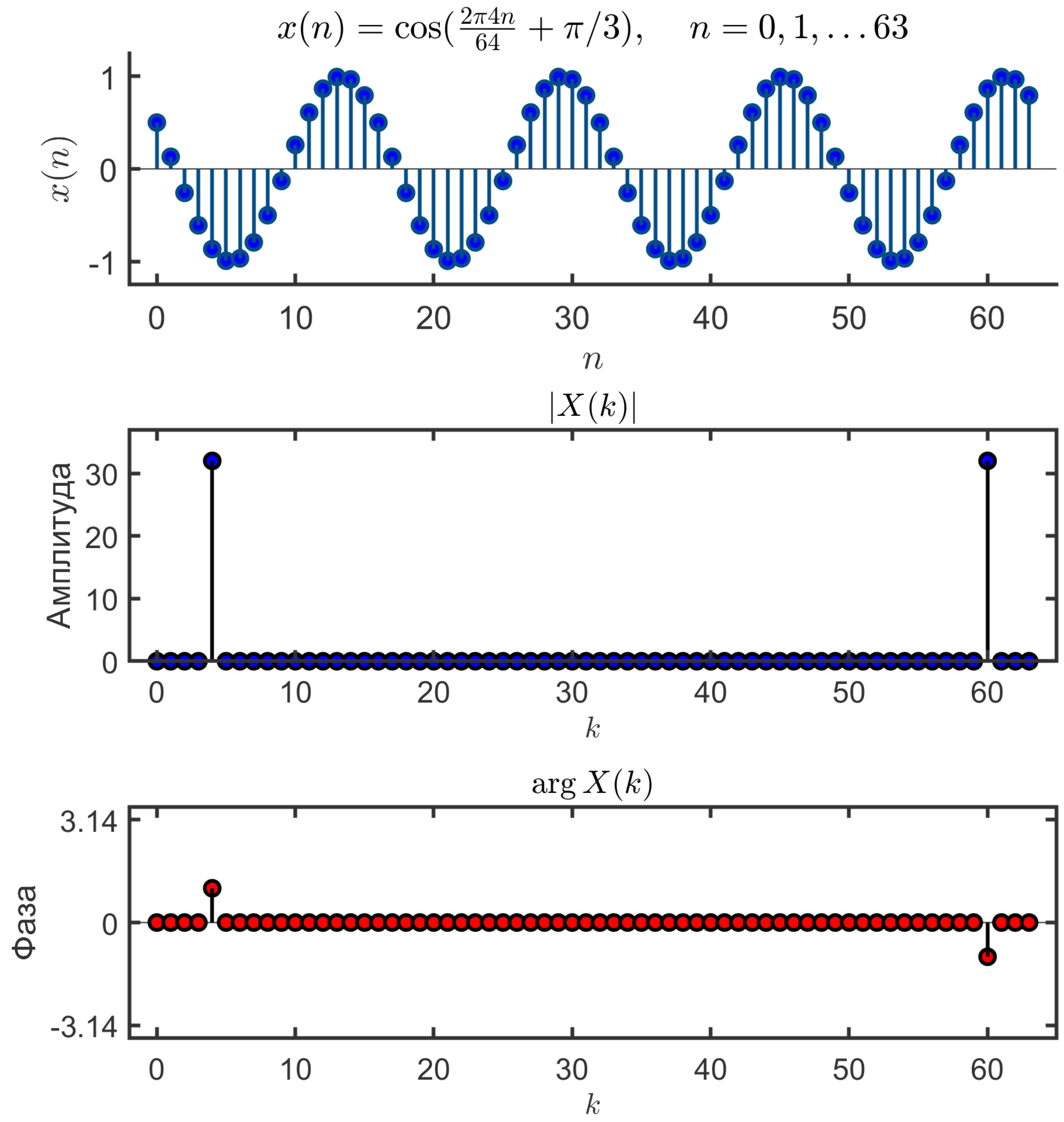
Если сигнал $x(n)$ принимает **вещественные значения**, то его ДПФ $X(k)$ удовлетворяет условиям симметрии:

$$\mathrm{Re}[X(k)] = \mathrm{Re}[X(N-k)],$$

$$\mathrm{Im}[X(k)] = -\mathrm{Im}[X(N-k)],$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|,$$

$$\arg X(k) = -\arg X(N-k).$$



ДПФ четных и нечетных сигналов

$x(n)$ – четный сигнал

$$x_{\text{ч}}(n) = x_{\text{ч}}(N - n)$$

$$\mathrm{DFT}\{x_{\text{ч}}(n)\} = X_{\text{ч}}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{\text{ч}}(n) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

ДПФ четных и нечетных сигналов

$x(n)$ – четный сигнал

$$x_{ч}(n) = x_{ч}(N-n)$$

$$\mathrm{DFT}\{x_{ч}(n)\} = X_{ч}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{ч}(n)\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

$x(n)$ – нечетный сигнал

$$x_{н}(n) = -x_{н}(N-n)$$

$$\mathrm{DFT}\{x_{н}(n)\} = X_{н}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{н}(n)\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

ДПФ четных и нечетных сигналов

$x(n)$ – четный сигнал

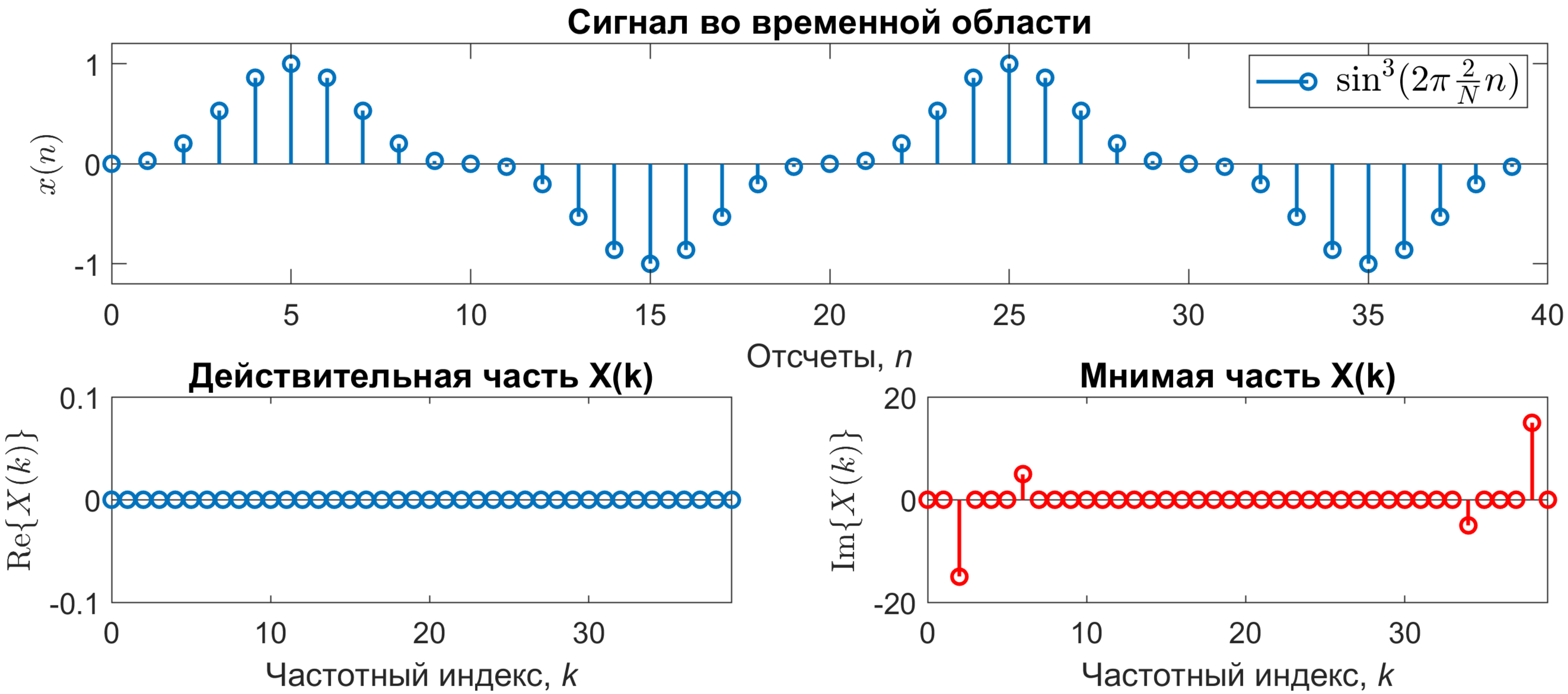
$$x_ч(n) = x_ч(N-n)$$

$$\mathrm{DFT}\{x_ч(n)\} = X_ч(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_ч(n)\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$

$x(n)$ – нечетный сигнал

$$x_н(n) = -x_н(N-n)$$

$$\mathrm{DFT}\{x_н(n)\} = X_н(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_н(n)\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right).$$



Теорема Парсеваля

Закон «сохранения энергии»

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

Теорема Парсеваля

Закон «сохранения энергии»

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

Пример. Рассмотрим ДПФ 2-х точечного сигнала:

$$X(0) = x(0) + x(1),$$

$$X(1) = x(0) - x(1).$$

Проверка теоремы Парсеваля:

$$X^2(0) + X^2(1)$$
$$= \left(x(0) + x(1)\right)^2 - \left(x(0) - x(1)\right)^2$$
$$= 2\left(x^2(0) + x^2(1)\right).$$

Теорема Парсеваля

Закон «сохранения энергии»

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

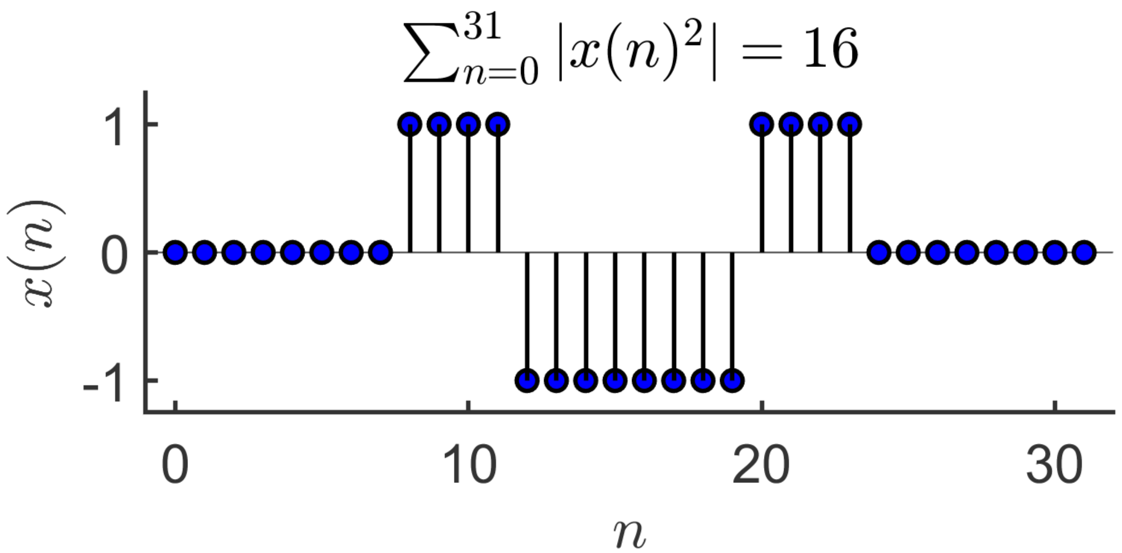
Пример. Рассмотрим ДПФ 2-х точечного сигнала:

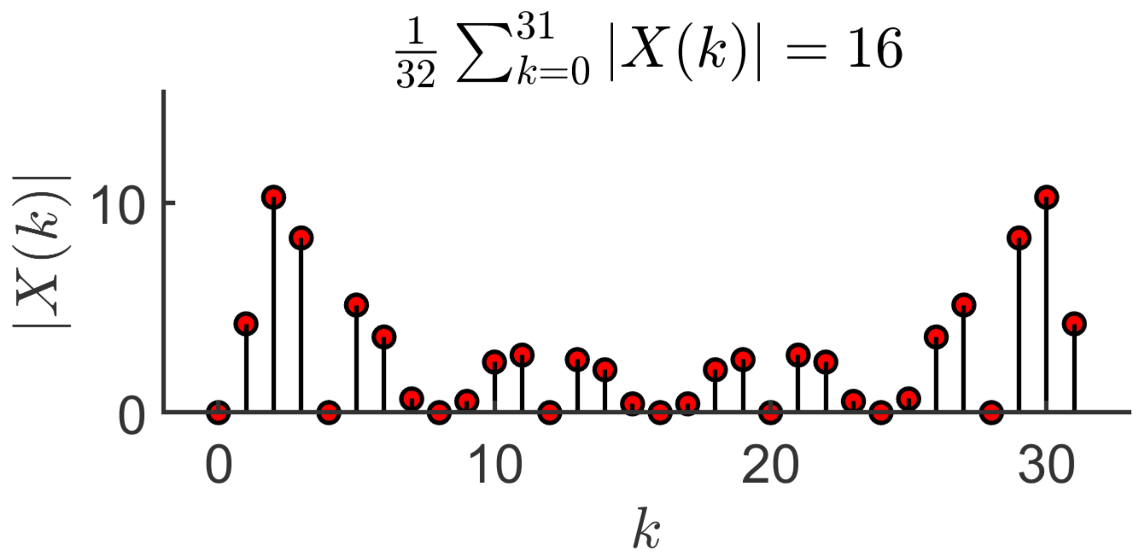
$$X(0) = x(0) + x(1),$$

$$X(1) = x(0) - x(1).$$

Проверка теоремы Парсеваля:

$$X^2(0) + X^2(1)$$
$$= \big(x(0) + x(1)\big)^2 - \big(x(0) - x(1)\big)^2$$
$$= 2\big(x^2(0) + x^2(1)\big).$$





Свойства ДПФ

Линейность

Пусть $x(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k)$ и $y(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} Y(k)$ тогда для любых констант α и β:

$$\alpha x(n) + \beta y(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} \alpha X(k) + \beta Y(k) \tag{1}$$

Предполагается, что длина $x(n)$ и $y(n)$ совпадают.

Свойства ДПФ

Двойственность

Для любого результата преобразования $x(n)$ в $X(k)$ можно найти **двойственный** результат, в котором $x(n)$ и $X(k)$ меняются ролями.

$$\text{если} \quad x(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k), \quad \text{то} \quad X(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} Nx(\langle -k \rangle_N). \tag{2}$$

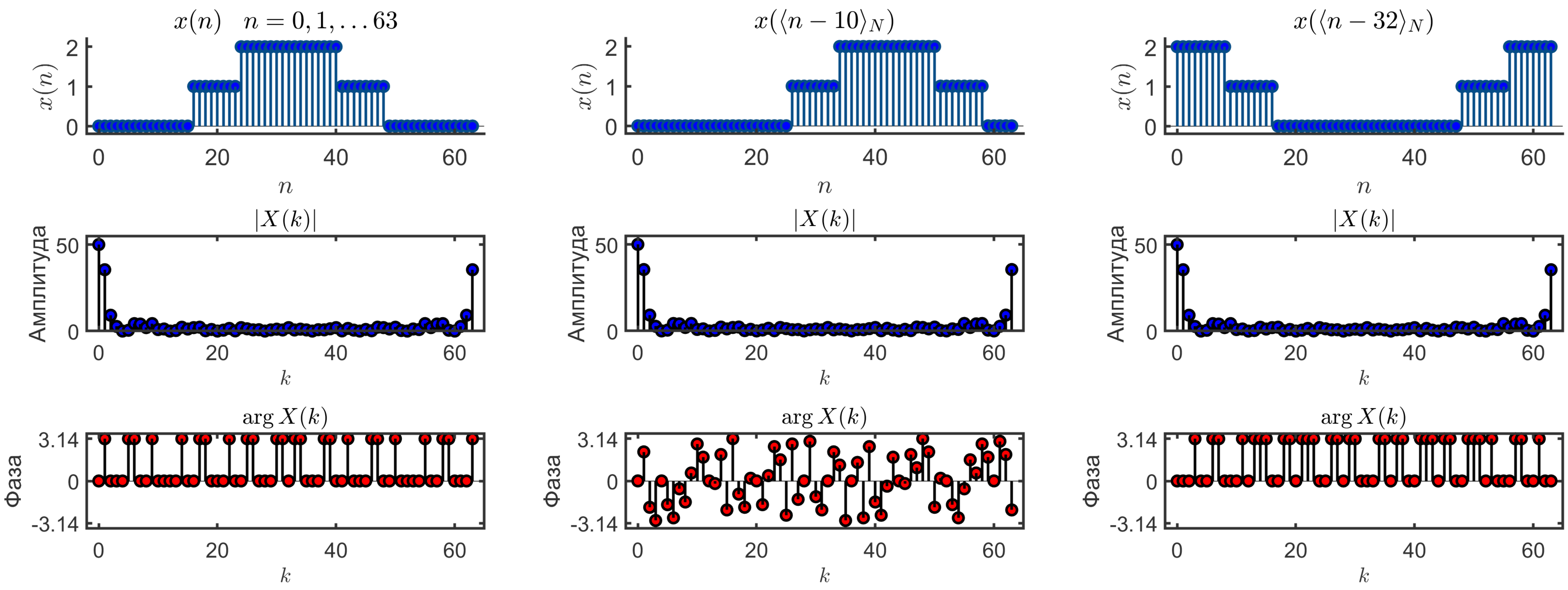
где $\langle a \rangle_N = a \bmod N$.

Свойства ДПФ

Временной циклический сдвиг

Пусть $x(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k)$ тогда

$$\mathrm{DFT}\{x(\langle n-m\rangle_N)\} = X(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

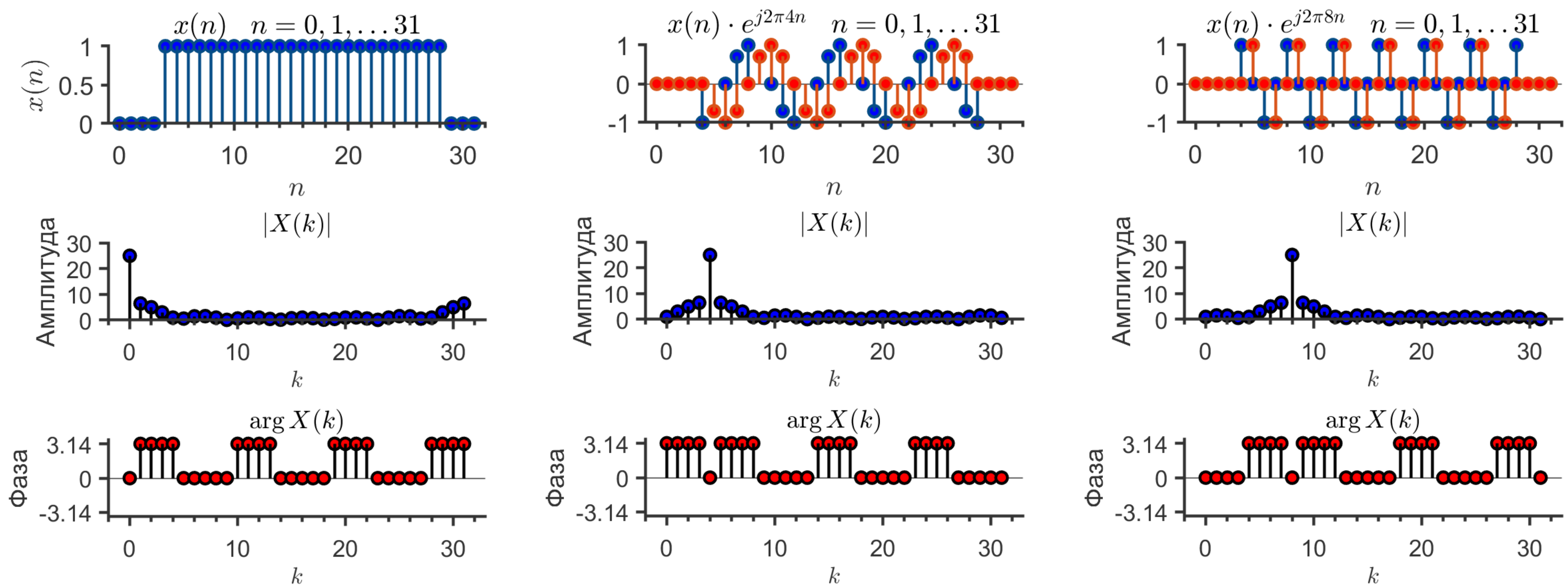


Свойства ДПФ

Частотный сдвиг

Пусть $x(n) \overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k)$ тогда

$$\mathrm{DFT}\left\{x(n)e^{j\frac{2\pi mn}{N}}\right\} = X(\langle k-m\rangle_N). \tag{4}$$



Свойства ДПФ

Свойство обращения времени

$$\mathrm{DFT}[x(\langle -n\rangle_N)] = X^*(k). \tag{5}$$

Заметим, что $|X(k)| = |X^*(k)|$. Т.е. амплитудный спектр сигнала не меняется при обращении времени.

Свойства ДПФ

Циклическая свертка во временной области

Для двух сигналов $x(n)$ и $y(n)$ длины N, ***циклическая свертка*** определяется как

$$x(n) \circledast y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(\langle n-m \rangle_N) \tag{6}$$

Пример

$x(n) = \{1,\ 2, -1,\ 3\},\quad y(n) = \{0, 1, 2, 3\},\quad z(n) = x(n) \circledast y(n)$

n	m	0	1	2	3	$z(n)$
	$x(m)$	1	2	-1	3	
0						
1						

Свойства ДПФ

Циклическая свертка во временной области

Для двух сигналов $x(n)$ и $y(n)$ длины N, ***циклическая свертка*** определяется как

$$x(n) \circledast y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(\langle n-m \rangle_N) \tag{7}$$

Пример

$x(n) = \{1,\ 2, -1,\ 3\}$, $y(n) = \{0, 1, 2, 3\}$, $z(n) = x(n) \circledast y(n)$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{m}$	**0**	**1**	**2**	**3**	$\boldsymbol{z(n)}$
	$x(m)$	1	2	-1	3	
0	$\boldsymbol{y}(\langle -m \rangle_N)$	0	3	2	1	$1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$
1	$\boldsymbol{y}(\langle 1-m \rangle_N)$	1	0	3	2	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 4$

Свойства ДПФ

Циклическая свертка во временной области

Пусть $x(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k)$ и $y(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} Y(k)$ тогда

$$x(n) \circledast y(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k)Y(k)$$

Циклическая свертка в частотной области

$$x(n)y(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} X(k) \circledast Y(k).$$

Свойства ДПФ

Циклическая (круговая) корреляция

Круговую корреляционную функцию

$$r_{cxy}(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(\langle n + \ell \rangle_N)$$

можно вычислить с использованием ДПФ:

$$r_{cxy}(\ell) \overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X^*(k) Y(k).$$

Энергия сигнала

$$r_{cxx}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) x^*(\langle n \rangle_N) = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = E_x.$$

Вычисление линейная корреляции через круговую

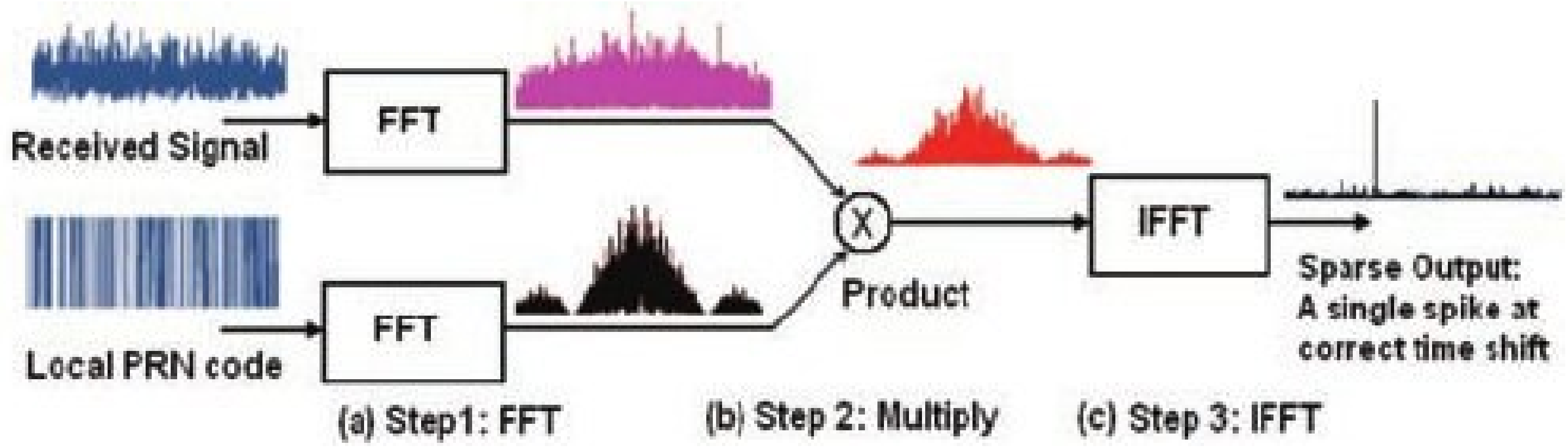
- Круговую корреляцию можно преобразовать в линейную с помощью дополняющих нулей. Для последовательностей $x(n)$ и $y(n)$ длиной N_1 и N_2 их линейная корреляция будет иметь длину $N_1 + N_2 - 1$. Для вычисления $x(n)$ заменяют на $x_{zp}(n) = [x(n), \underbrace{0,0, \dots ,0}_{N_2-1}]$, $y(n)$ заменяют на $y_{zp}(n) = [y(n), \underbrace{0,0, \dots ,0}_{N_1-1}]$.

$$r_{xy}(\ell) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X^*_{zp}(k) Y_{zp}(k).$$

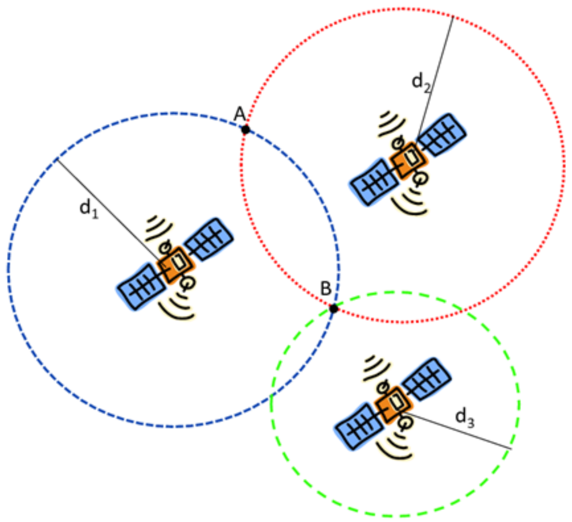
- Аналогичным образом можно вычислять линейную свертку.

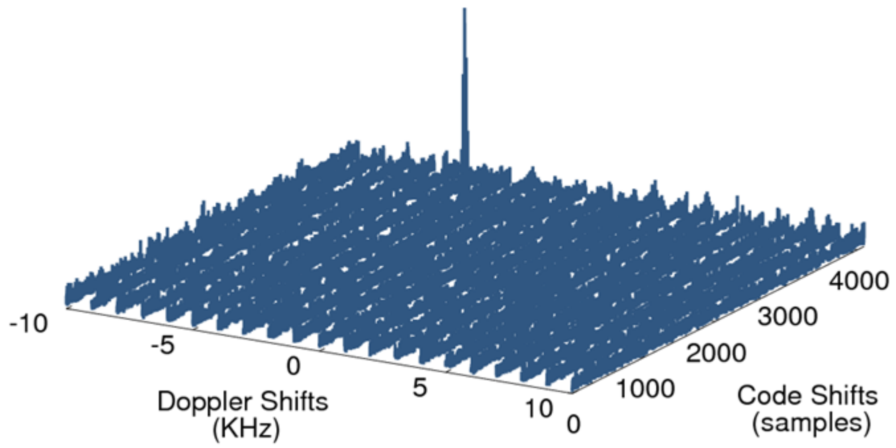
Пример использования ДПФ

Обнаружение GPS-сигналов



Параллельный поиск спутникового сигнала





На частоту несущей влияет доплеровский эффект – изменения частоты вследствие движения спутника относительно приемника или приемника относительно спутника либо движение и приемника и спутника. Изменения частоты может достигать ± 10 кГц.

Что будет, если взять ДПФ от сигнала 4 раза?

1) $\mathrm{DFT}\{x(n)\} = X(k)$

2) $\mathrm{DFT}\{X(k)\} = \left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}\right)^*\right)^* = \Big|(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}\right)^* = (N\ \mathrm{IDFT}\{X^*(k)\})^* = (Nx(-n))^* = Nx(-n)$$

3) $\mathrm{DFT}\{Nx(-n)\} = N \cdot \mathrm{DFT}\{x(-n)\} = NX^*(k)$

4) $\mathrm{DFT}\{N \cdot X^*(k)\} = N\left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}\right)^*\right)^* =$

$$= N\left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}\right)^* = (N^2\ \mathrm{IDFT}\{X(k)\})^* = (N^2 x(n))^* = N^2 x(n)$$