

СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ МЕДИАДААННЫХ ФИЛЬТРАЦИЯ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

к.т.н., доцент Вашкевич М. И.

vashkevich@bsuir.by



Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Кафедра электронных вычислительных средств

Преобразование Фурье: обзор

$$s(x) = \sin(2\pi f x + \phi_i) = \sin(\omega x + \phi_i)$$

Как можно проанализировать, что фильтр $h(x)$ будет делать с низкими, средними и высокими частотами?

Преобразование Фурье: обзор

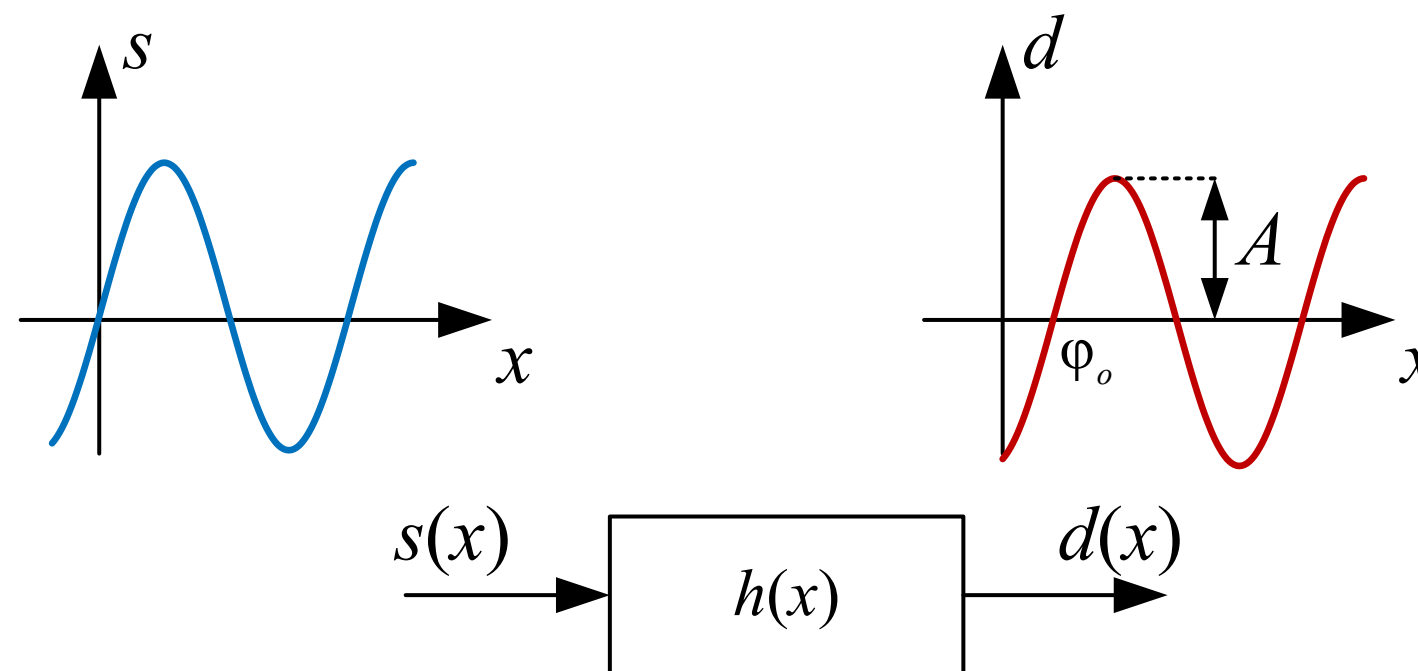
$$s(x) = \sin(2\pi f x + \varphi_i) = \sin(\omega x + \varphi_i)$$

Как можно проанализировать, что фильтр $h(x)$ будет делать с низкими, средними и высокими частотами?

Ответ: нужно пропустить синусоиду с заданной частотой через фильтр и посмотреть насколько она будет ослаблена/усилена.

«пропустить сигнал $s(x)$ через фильтр $h(x)$ » = «найти свертку $s(x)$ и $h(x)$ »

$$d(x) = h(x) * s(x) = A \sin(\omega x + \varphi_o)$$



Преобразование Фурье: обзор

Комплексная синусоида:

$$s(x) = e^{j\omega x} = \cos \omega x + j \sin \omega x$$

Выход фильтра в этом случае

$$d(x) = h(x) * s(x) = A e^{j(\omega x + \varphi)} = s(x) A e^{j\varphi}.$$

Преобразование Фурье фильтра $h(x)$ – это “таблица” амплитудных A и фазовых φ значений получаемых при подаче на вход синусоид с различными частотами ω :

$$\mathcal{F}\{h(x)\} = H(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (1)$$

Выражение (1) показывает «рецепт» вычисления преобразования Фурье.

Пара Фурье преобразований записывается как

$$h(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(\omega)$$

Преобразование Фурье: обзор

Интегральная форма ПФ

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$\omega \in (-\infty, \infty)$$

Дискретная форма ПФ

$$H(k) = \sum_{x=0}^{N-1} h(x) e^{-j\frac{2\pi}{N} x k}$$

$k \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]$ – основной диапазон
 $k \in [0, \dots, N - 1]$ – альтернативный.

Фурье преобразование для 1D изображений

- 1D изображение из N пикселей это вектор размерности N
- Каждый базисный вектор должен иметь N пикселей
- Базис должен состоять из N векторов
- n -й элемент k -ого базисного вектора стандартного базиса

$$E_k(n) = \delta(n - k)$$

- n -й элемент k -ого базисного вектора Фурье-базиса

$$W_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$$

Фурье преобразование для 1D изображений

ДПФ = переход от *стандартного* базиса к *базису Фурье*

$$X(k) = \langle x(n), W_k(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

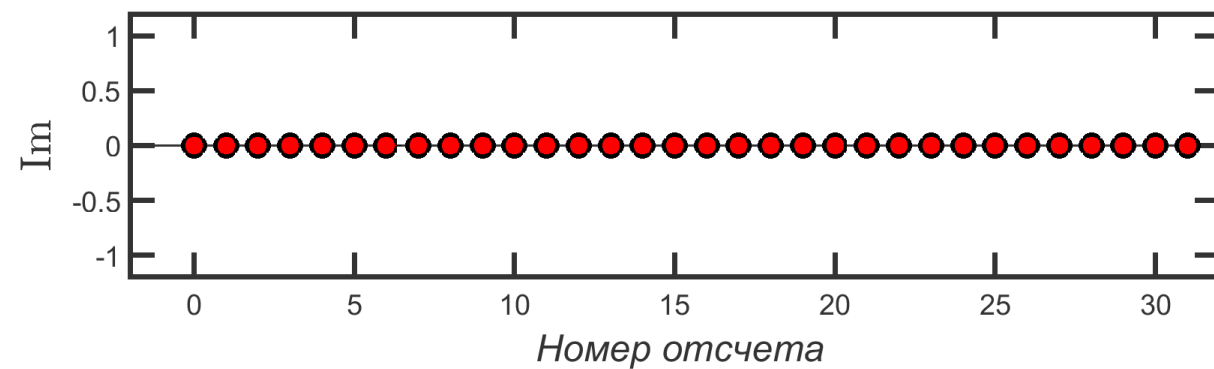
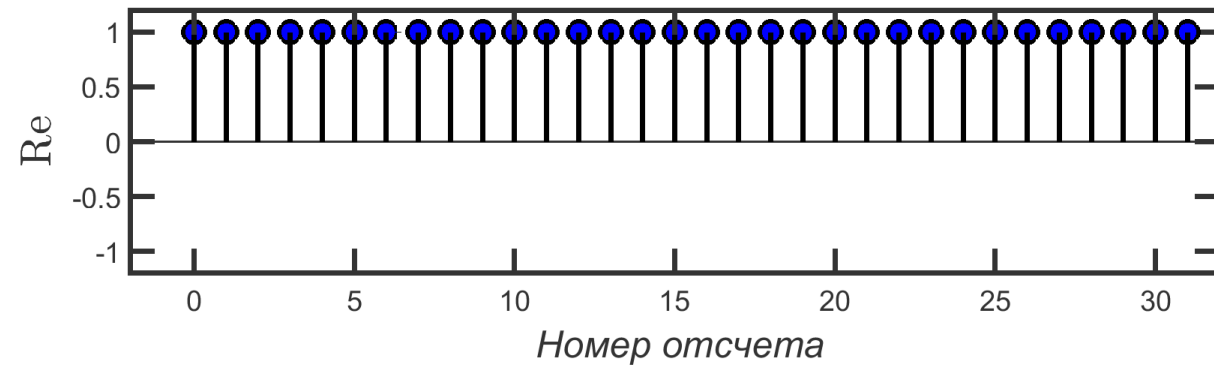
ДПФ можно записать в матричной форме:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} - & W_0 & - \\ - & W_1 & - \\ & \vdots & \\ - & W_{N-1} & - \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

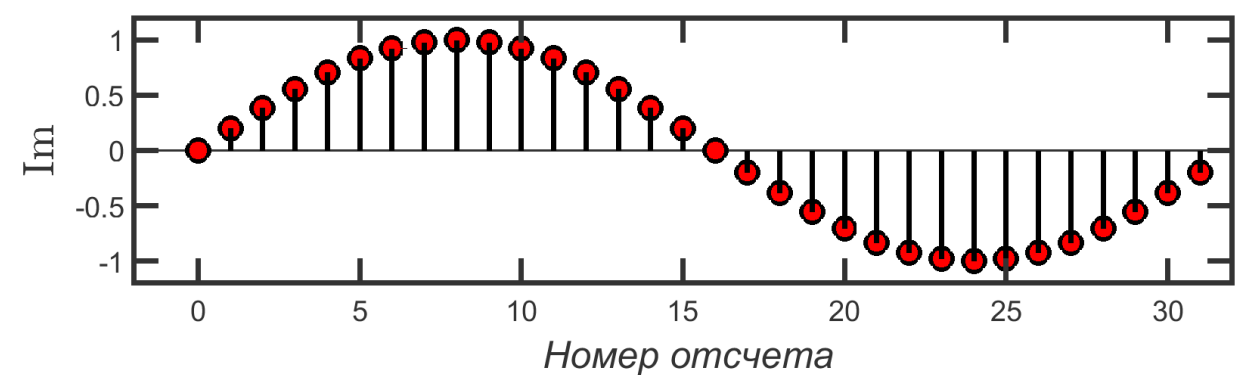
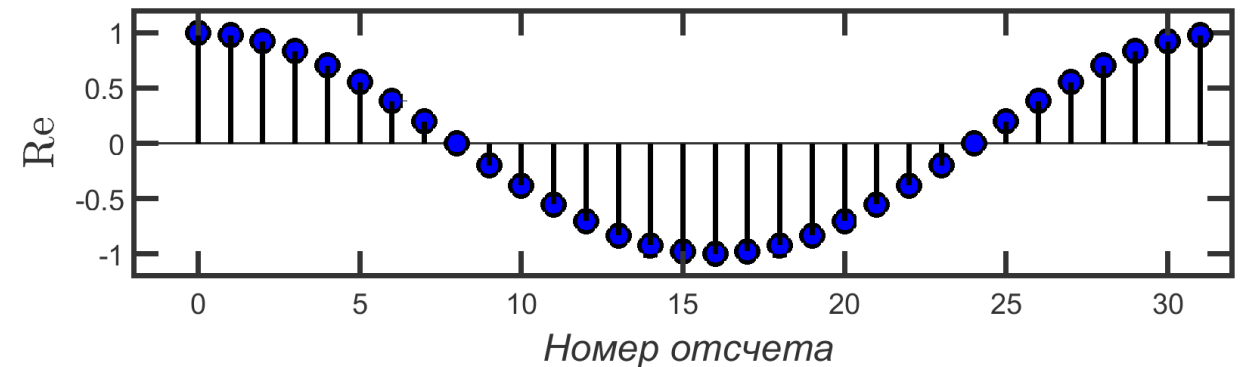
Обратное ДПФ = переход от *базиса Фурье* к *стандартному базису*

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Примеры базисных векторов ДПФ

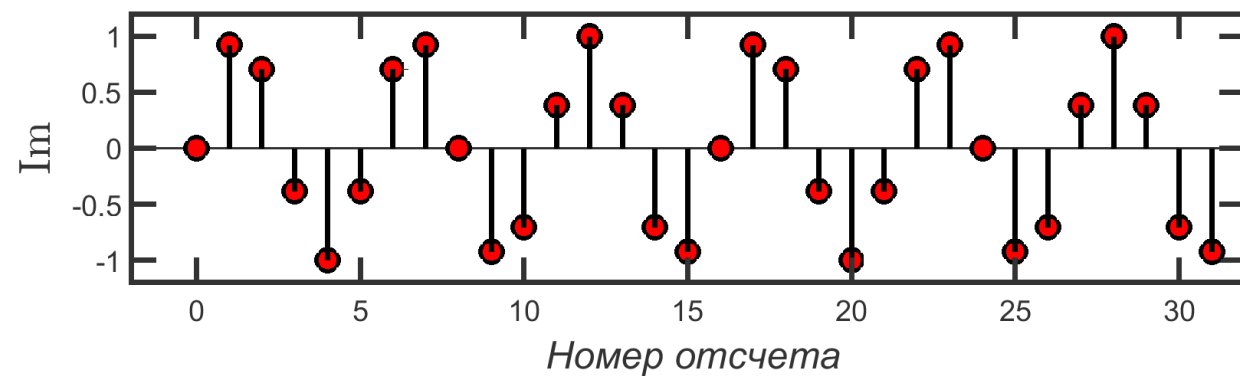
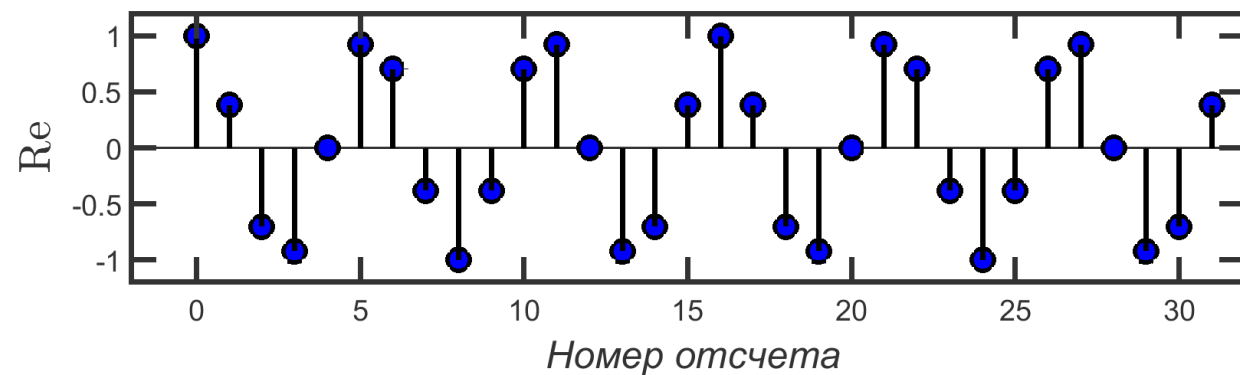


Базисный вектор W_0

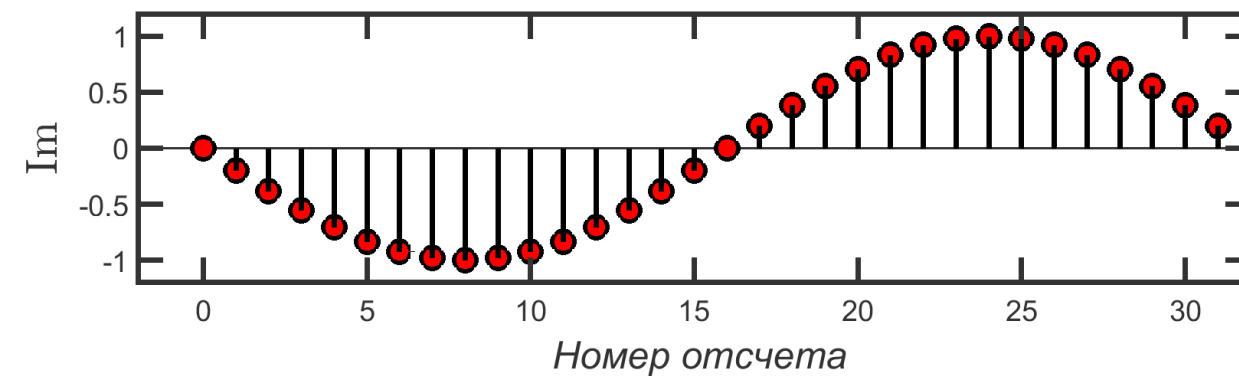
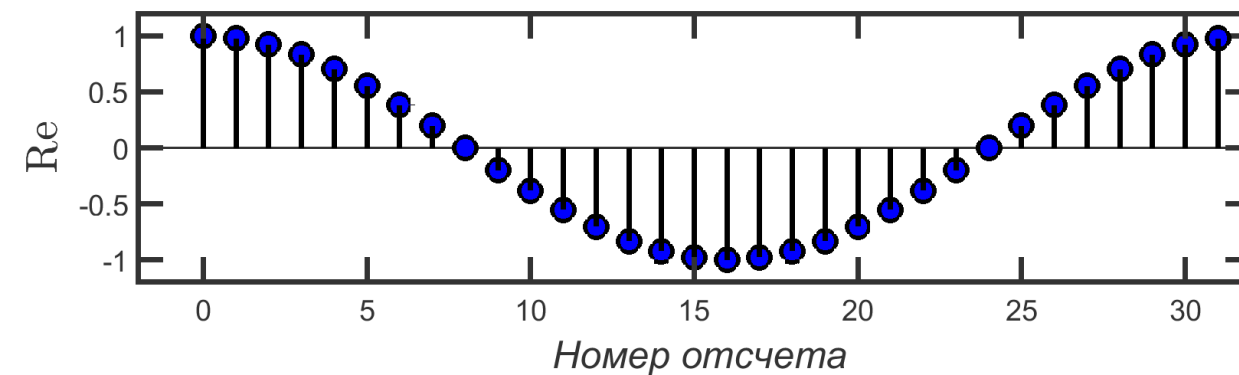


Базисный вектор W_1

Примеры базисных векторов ДПФ



Базисный вектор W_6



Базисный вектор W_{31}

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

– Проблема: базис **комплексный**, а сигнал **вещественный**?

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

- **Проблема**: базис **комплексный**, а сигнал **вещественный**?
- **Решение**: объединение комплексно-сопряженных базисных векторов дает вещественный вектор

$$W_k^*(n) = W_{N-k}(n)$$

(доказать !)

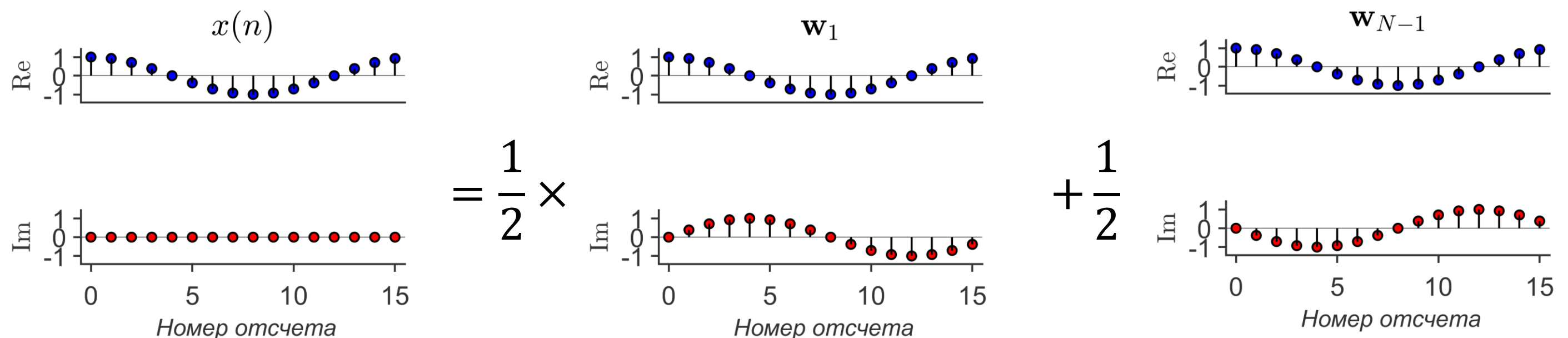
Комплексное сопряжение базисных векторов Фурье

$$W_k^*(n) = W_{N-k}(n)$$

– Вещественные сигналы имеют одни и те же коэффициенты при $W_k(n)$ и $W_{N-k}(n)$

Пример разложения в базис Фурье действительного сигнала

Входной сигнал $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 16$



Разложение в базисе Фурье: $x(n) = \frac{1}{2} W_1(n) + \frac{1}{2} W_{15}(n)$

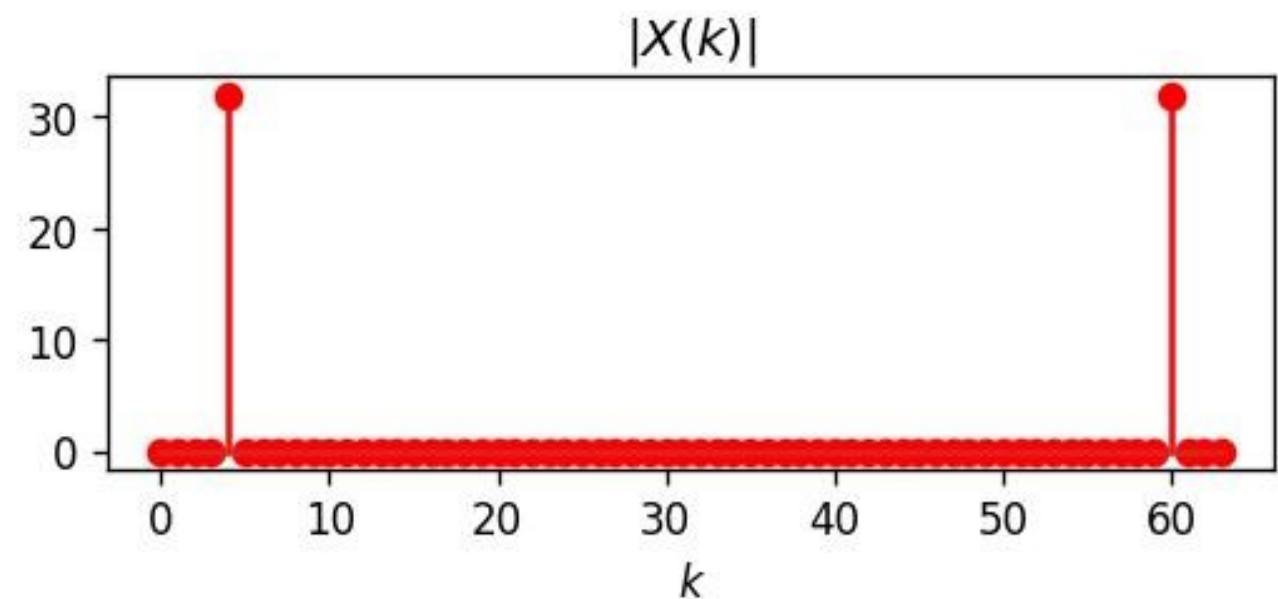
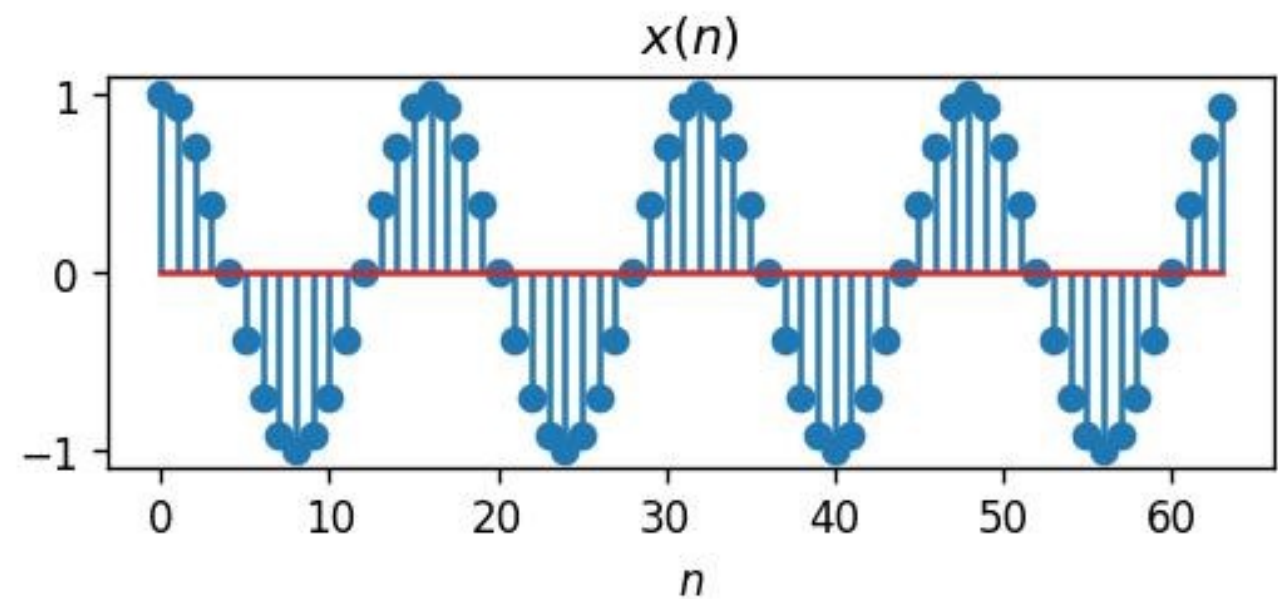
Центрирование ДПФ: постановка задачи

Пример разложения в базис Фурье

$$\begin{aligned}x(n) &= \cos \frac{2\pi}{64} 4n \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} 60n})\end{aligned}$$

Проблема: сигнал с «частотой» 4 имеет в спектре компоненты с «частотами» 4 и 60.

$$\begin{aligned}X(k) &= \text{DFT}\{x(n)\} \\ &= \frac{N}{2} \delta(k - 4) + \frac{N}{2} \delta(k - 60)\end{aligned}$$



Центрирование ДПФ: решение

$$\begin{aligned}x(n) &= \cos \frac{2\pi}{64} 4n = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} 60n} \right) = \\&= \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} (64-4)n} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{64} 64n}}_{=1} e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right) = \\&= \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} - e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right)\end{aligned}$$

Перепишем данный результат используя обозначения базисных векторов

$$x(n) = \frac{1}{2} W_4(n) + W_{-4}(n)$$

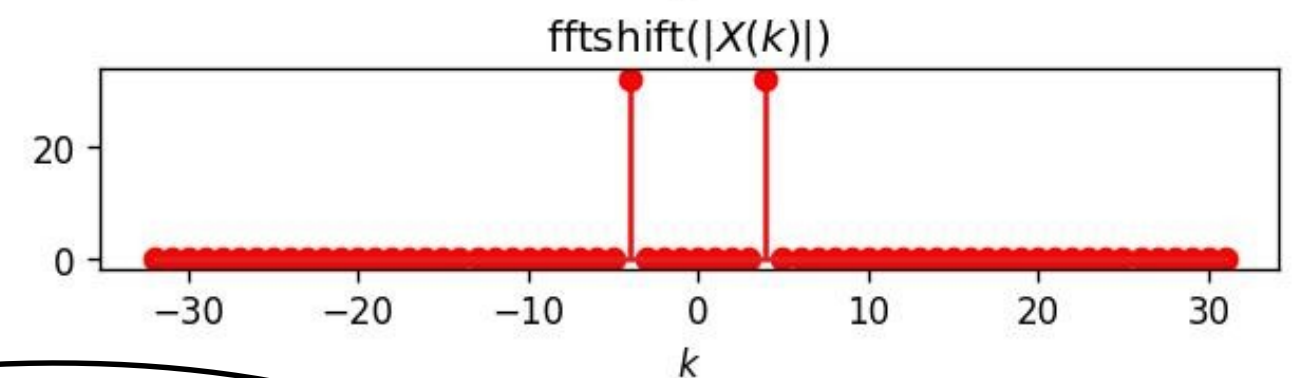
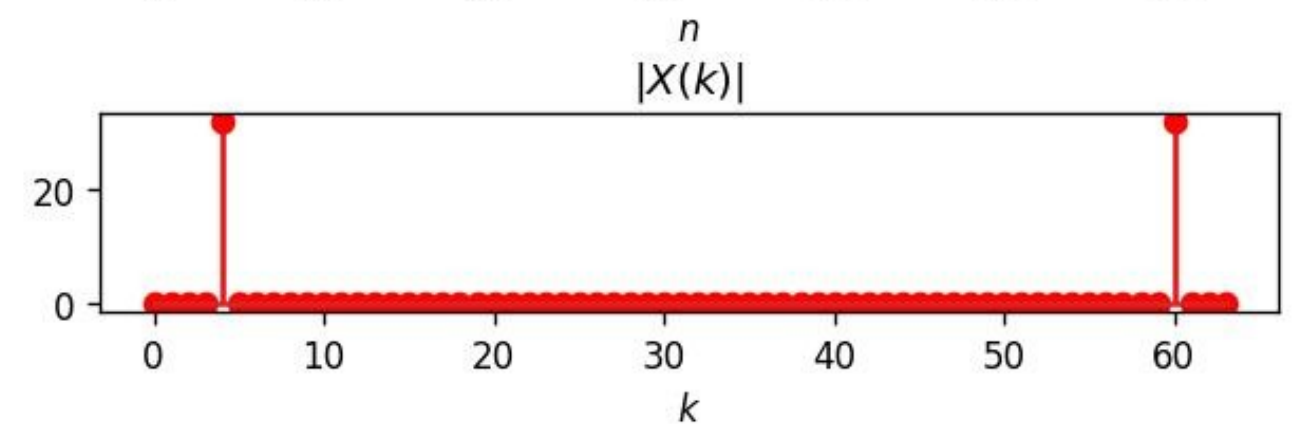
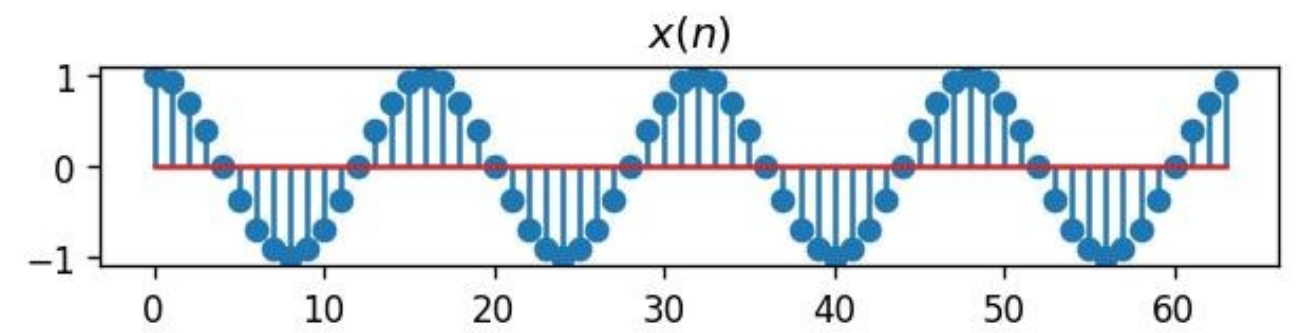
- Т.е. мы можем рассматривать вектора $W_{-\frac{N}{2}+1}, \dots, W_{\frac{N}{2}}$
- Вещественные сигналы будут иметь одинаковые коэффициенты при W_k и W_{-k}

Центрирование ДПФ (пример на Python)

Смена диапазона индексов $k \in [0, \dots, N - 1]$ \longrightarrow $k \in \left[-\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2}\right]$

$$\begin{aligned} x(n) &= \cos \frac{2\pi}{64} 4n = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}\{x(n)\} \\ &= \frac{N}{2} \delta(k - 4) + \frac{N}{2} \delta(k + 4) \end{aligned}$$



Python-функция центрирования ДПФ

```
x = np.cos(2*pi/N*4*n)
X = np.abs(np.fft.fft(x))
shift_X = np.fft.fftshift(X)
```

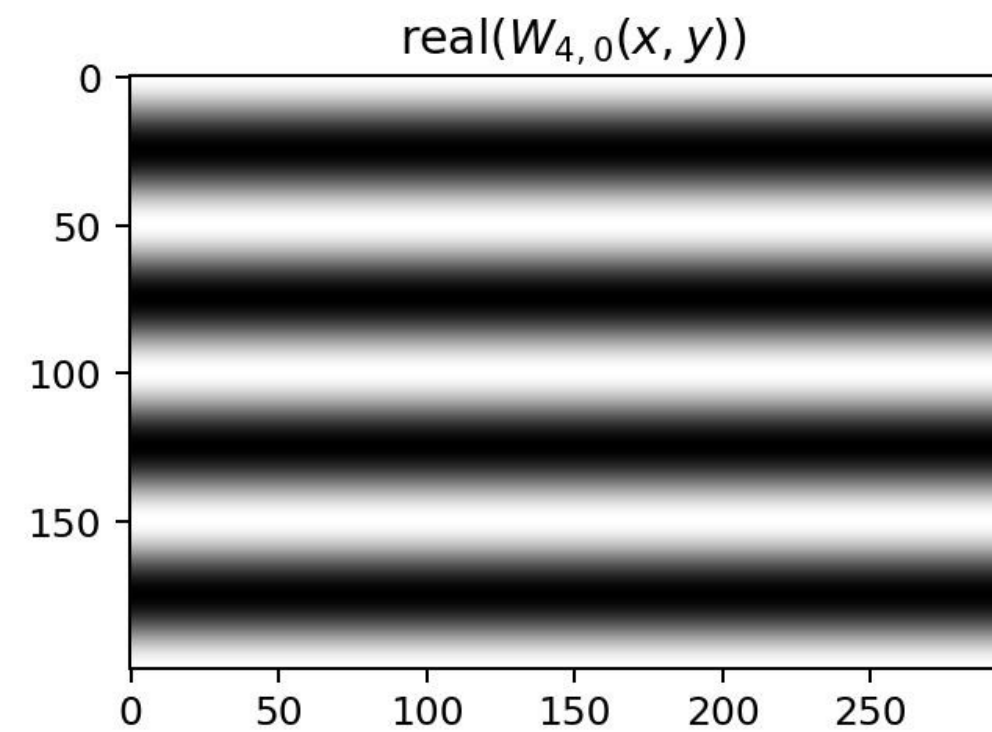
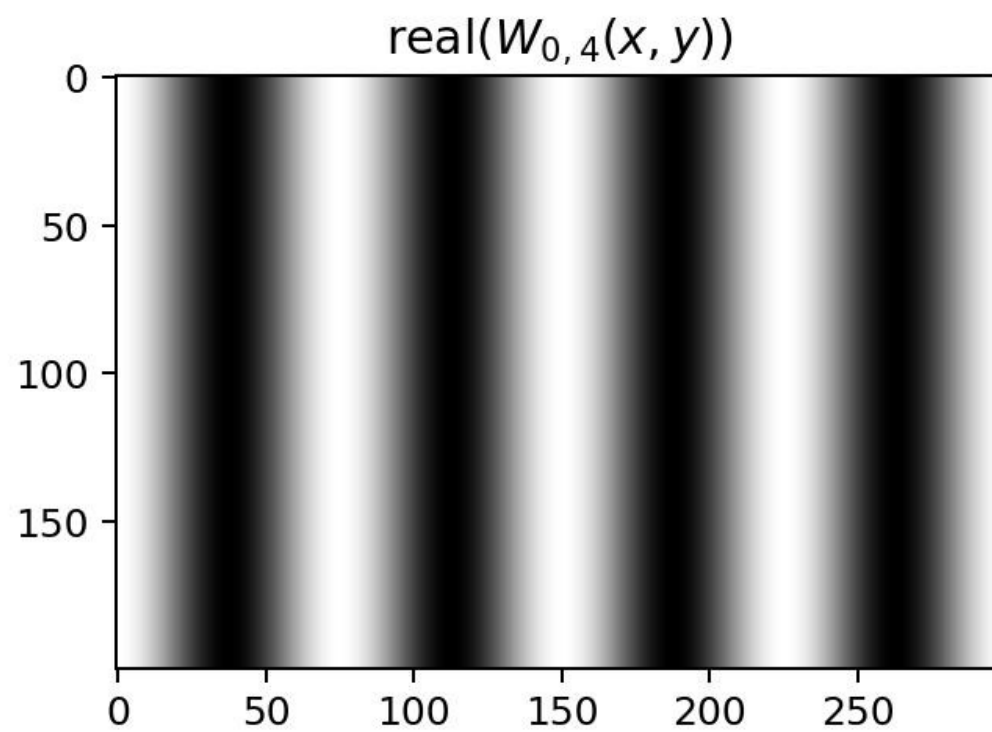
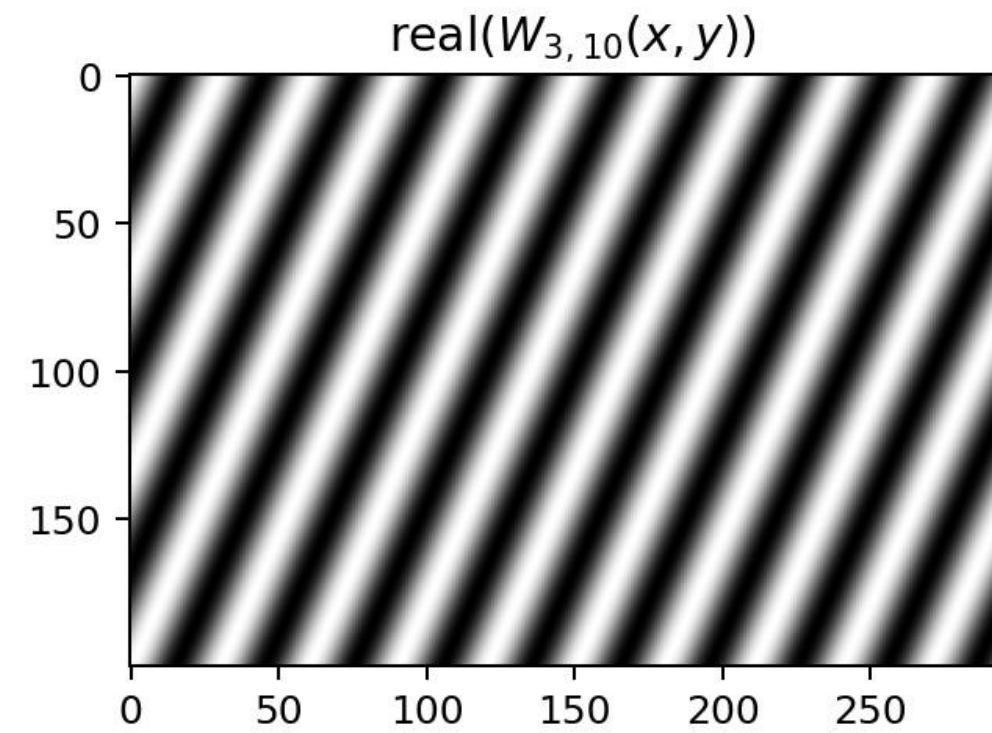
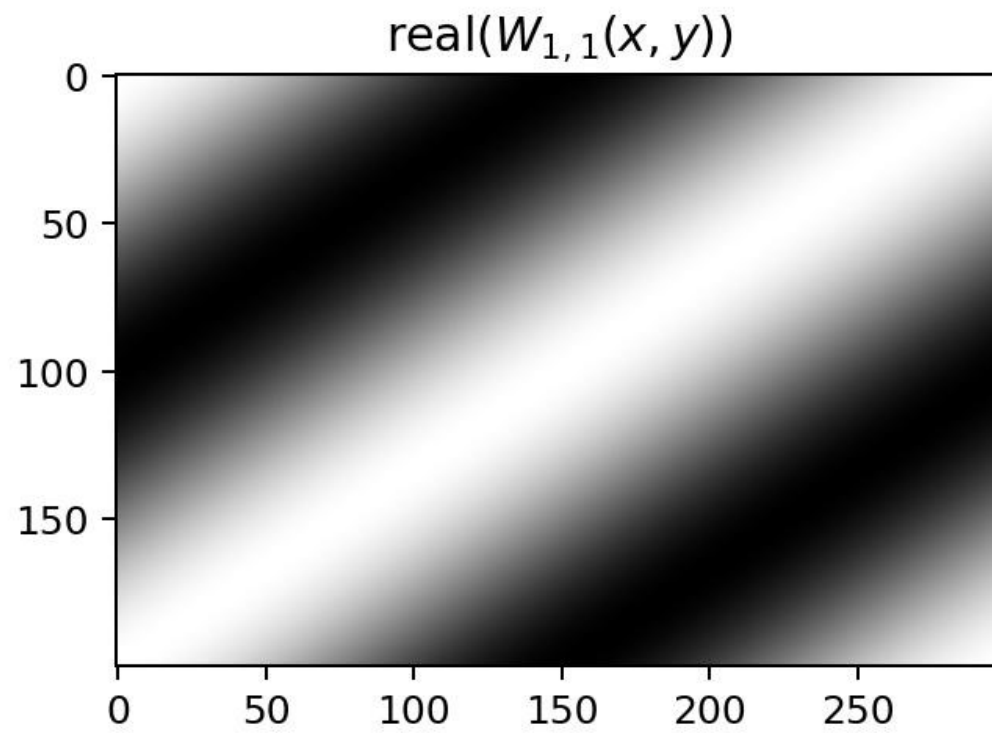
Центрирование спектра

Преобразование Фурье для изображений

- Базис Фурье 1D сигналов индексируется частотой
- Базис Фурье изображений (2D) индексируется двумя **пространственными частотами**
- (u, v) элемент базиса для изображения $M \times N$
 - имеет u/M периодов вдоль оси x
 - имеет v/N периодов вдоль оси y

$$W_{u,v}(x, y) = e^{j\frac{2\pi}{M}ux + \frac{2\pi}{N}vy} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}ux + \frac{2\pi}{M}vy\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{N}ux + \frac{2\pi}{M}vy\right)$$

Базисные функции 2D ДПФ



Переход к базису Фурье и возврат к исходному

Пусть $f(x, y)$ – изображение $M \times N$,

$F(u, v)$ – коэффициенты Фурье этого изображения

Как получить $f(x, y)$ зная $F(u, v)$?

$$f(x, y) = \underbrace{\frac{1}{MN}}_{\text{нормирующий множитель}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) \underbrace{W_{u,v}(x, y)}_{\text{базисные функции Фурье}} .$$

Обратное ДПФ

Пусть $f(x, y)$ – изображение $M \times N$,

$F(u, v)$ – коэффициенты Фурье этого изображения

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) W_{u,v}(x, y) = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \end{aligned}$$

Прямое ДПФ

Пусть $f(x, y)$ – изображение $M \times N$,

$F(u, v)$ – коэффициенты Фурье этого изображения

Как получить $F(u, v)$ зная $f(x, y)$?

$$F(u, v) = \langle f, W_{u,v} \rangle = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) W_{u,v}^*(x, y)$$

(Прямое) ДПФ

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Зачем нужно преобразование Фурье?

- Изображение – комбинация низкочастотной и высокочастотной информации
- Низкие частоты: крупномасштабная структура, без деталей
- Высокие частоты: тонкая структура, детали

Визуальный анализ ДПФ

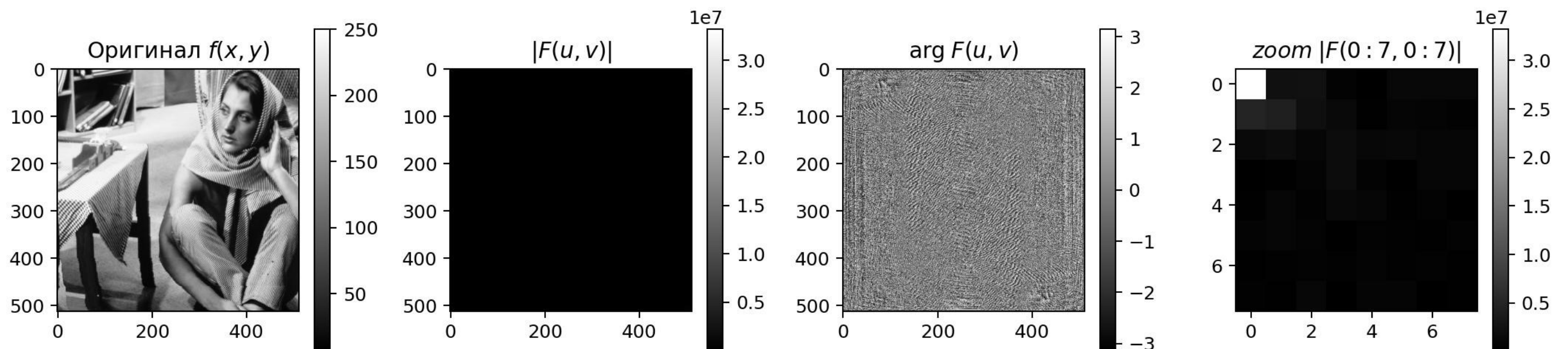
Для визуального анализа ДПФ вычисляют его *спектр*, т.е. модуль комплексных значений $F(u, v)$:

$$|F(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{F(u, v)\} + \operatorname{Im}^2\{F(u, v)\}}.$$

Фазовый угол $F(u, v)$ задается формулой:

$$\theta(u, v) = \arg F(u, v).$$

Пример спектра изображения



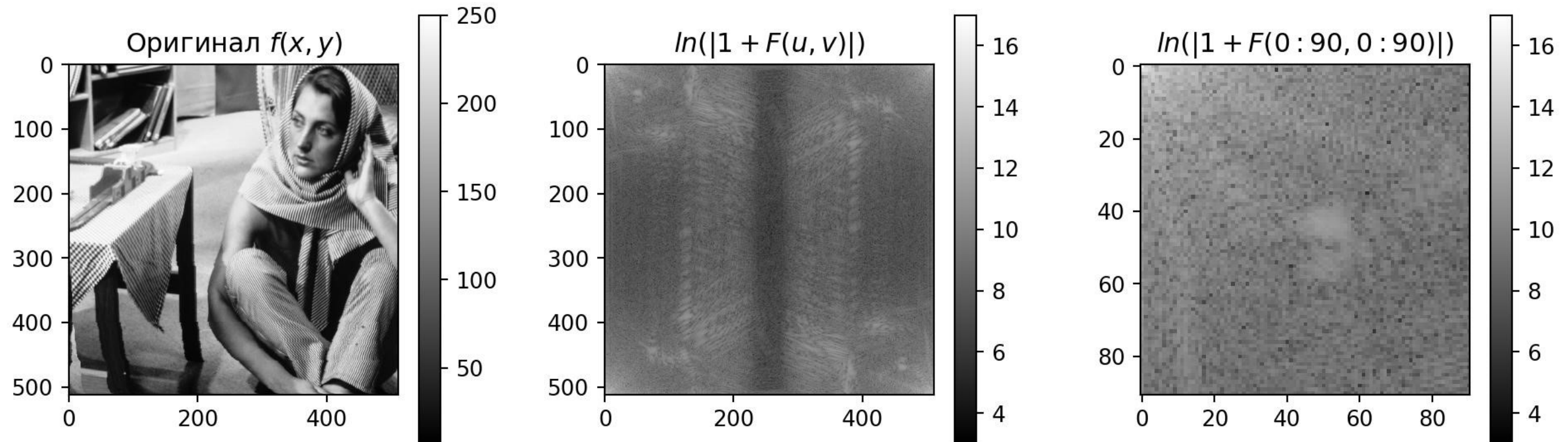
Логарифмирование спектра

Проблема: спектр Фурье часто имеет диапазон от 0 до $\sim 10^7$. Если линейно масштабировать этот диапазон в интервал с 8-битной градацией, то наиболее яркие пиксели будут доминировать, а менее яркие участки спектра утратятся.

Решение – логарифмирование спектра

$$F_{\ln}(u, v) = \ln(|F(u, v)| + 1)$$

Пример логарифмического спектра



Центрирование ДПФ

Центрирование означает сдвиг частотных координат

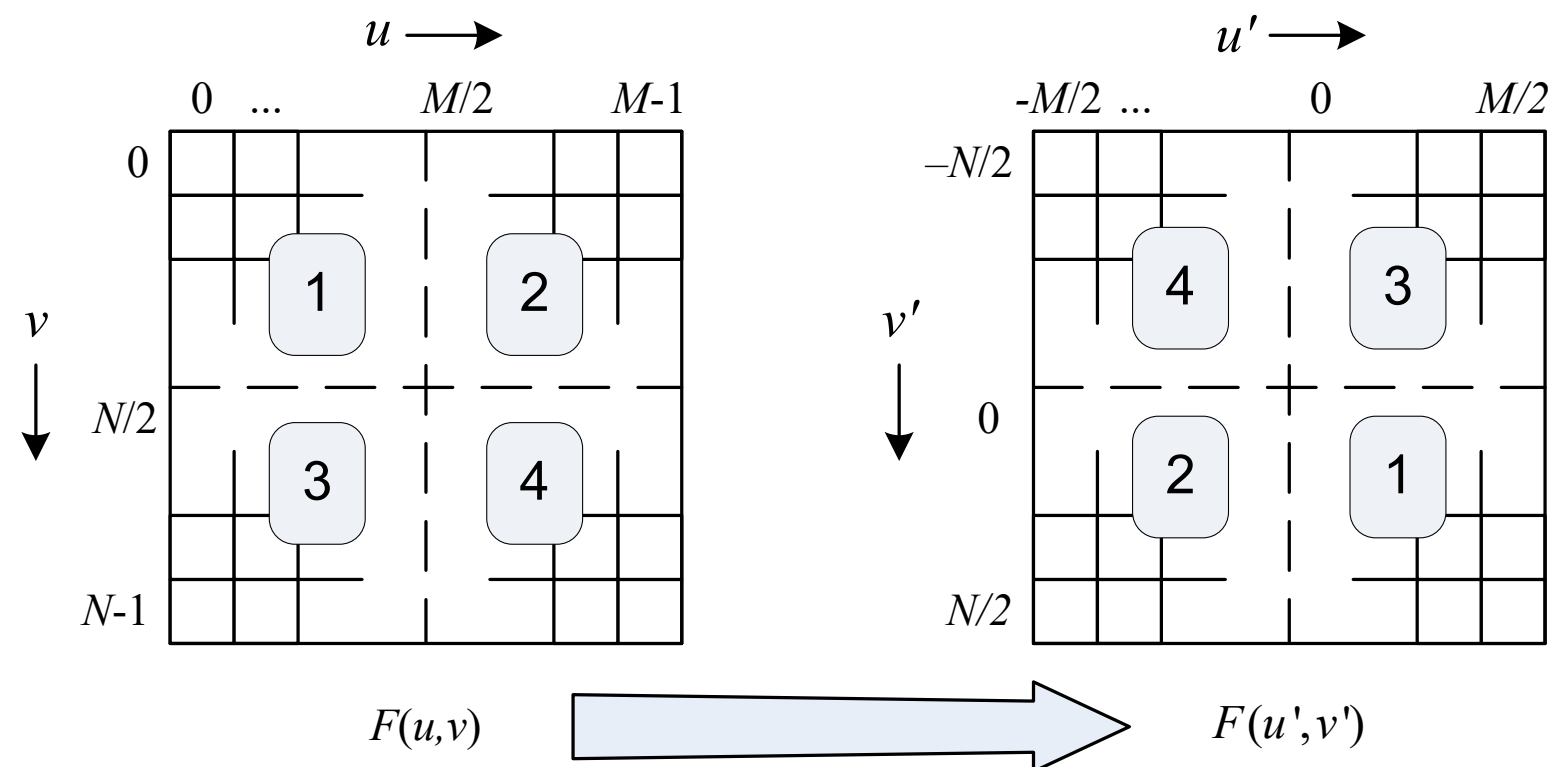
$$u' = u - (M/2) \quad \text{и} \quad v' = v - (N/2)$$

Используя свойство периодичности ДПФ

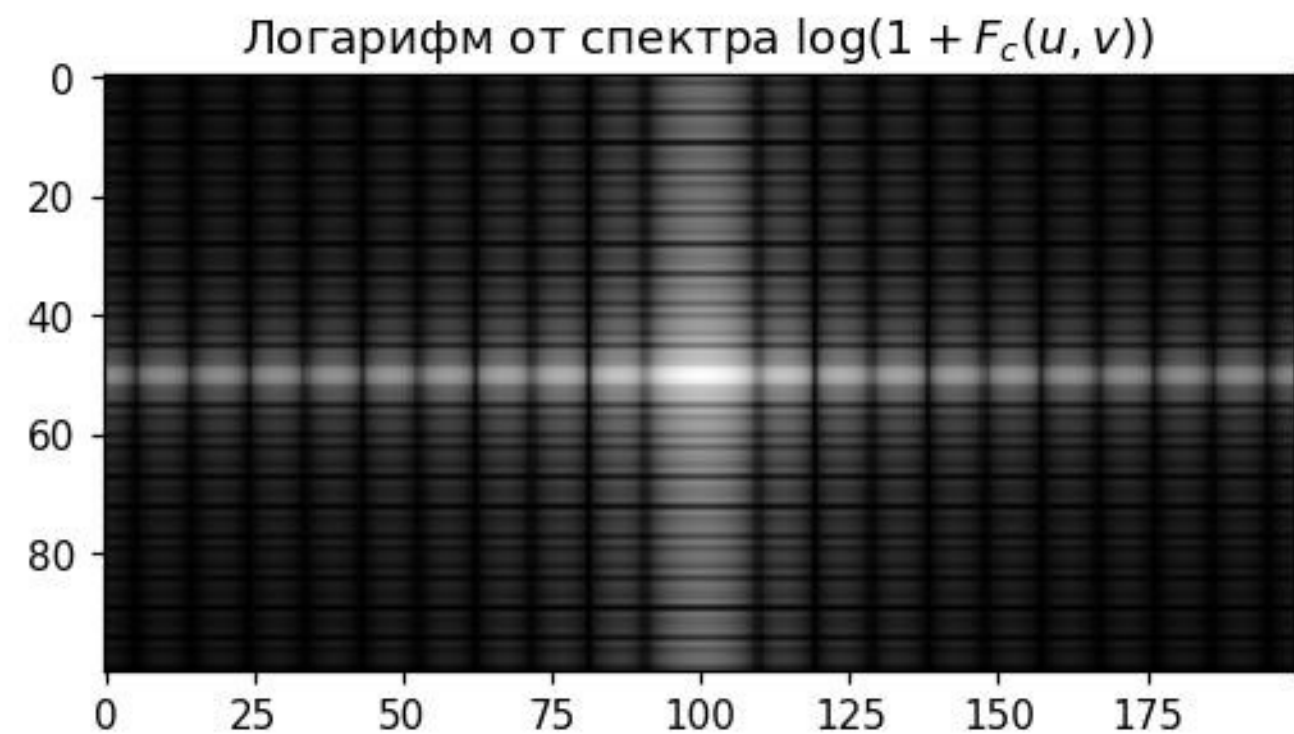
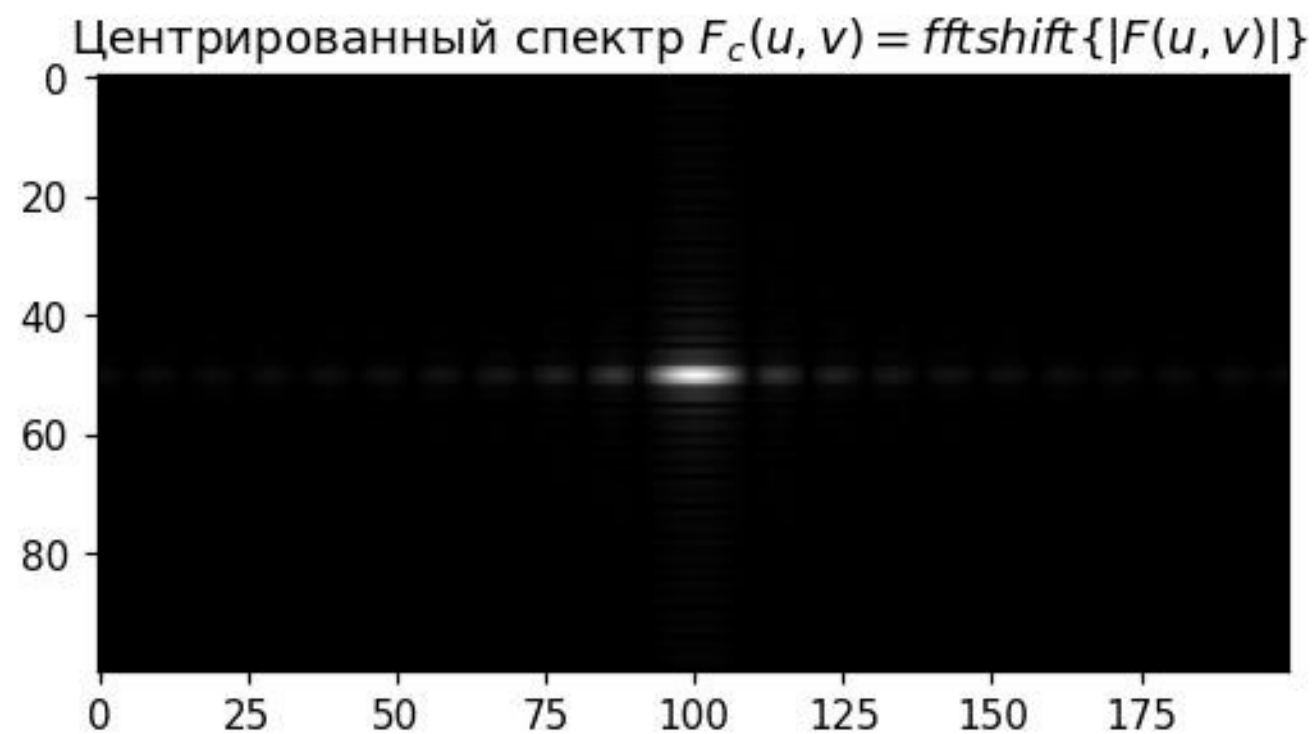
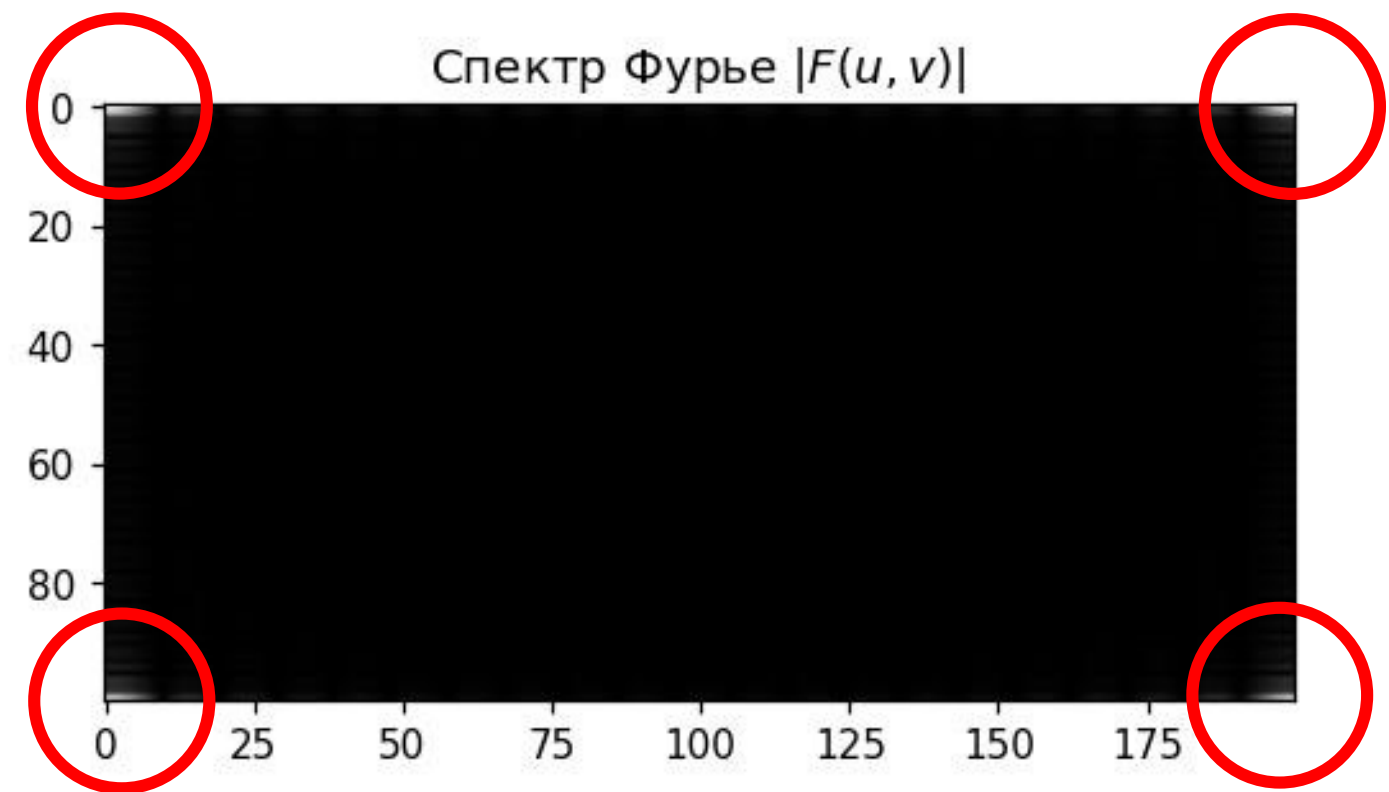
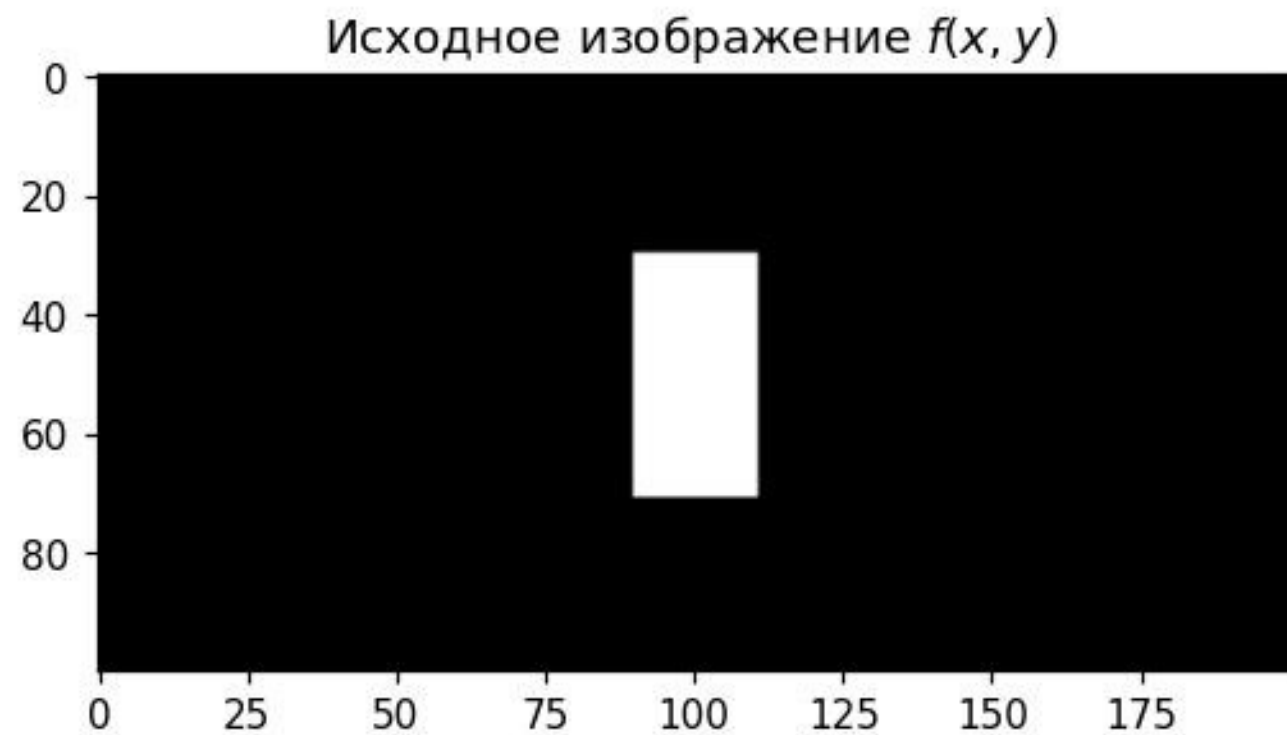
$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N).$$

Можно показать, что

$$F(u', v') = F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

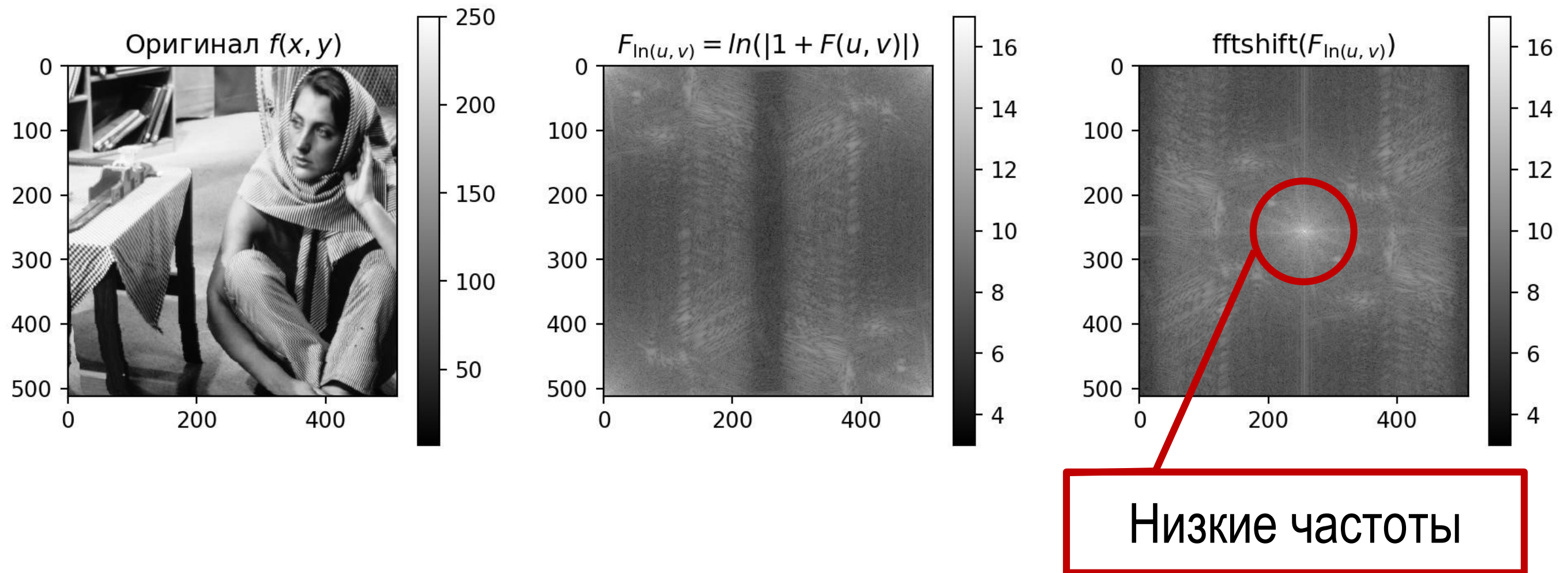


Центрирование и логарифмирование ДПФ

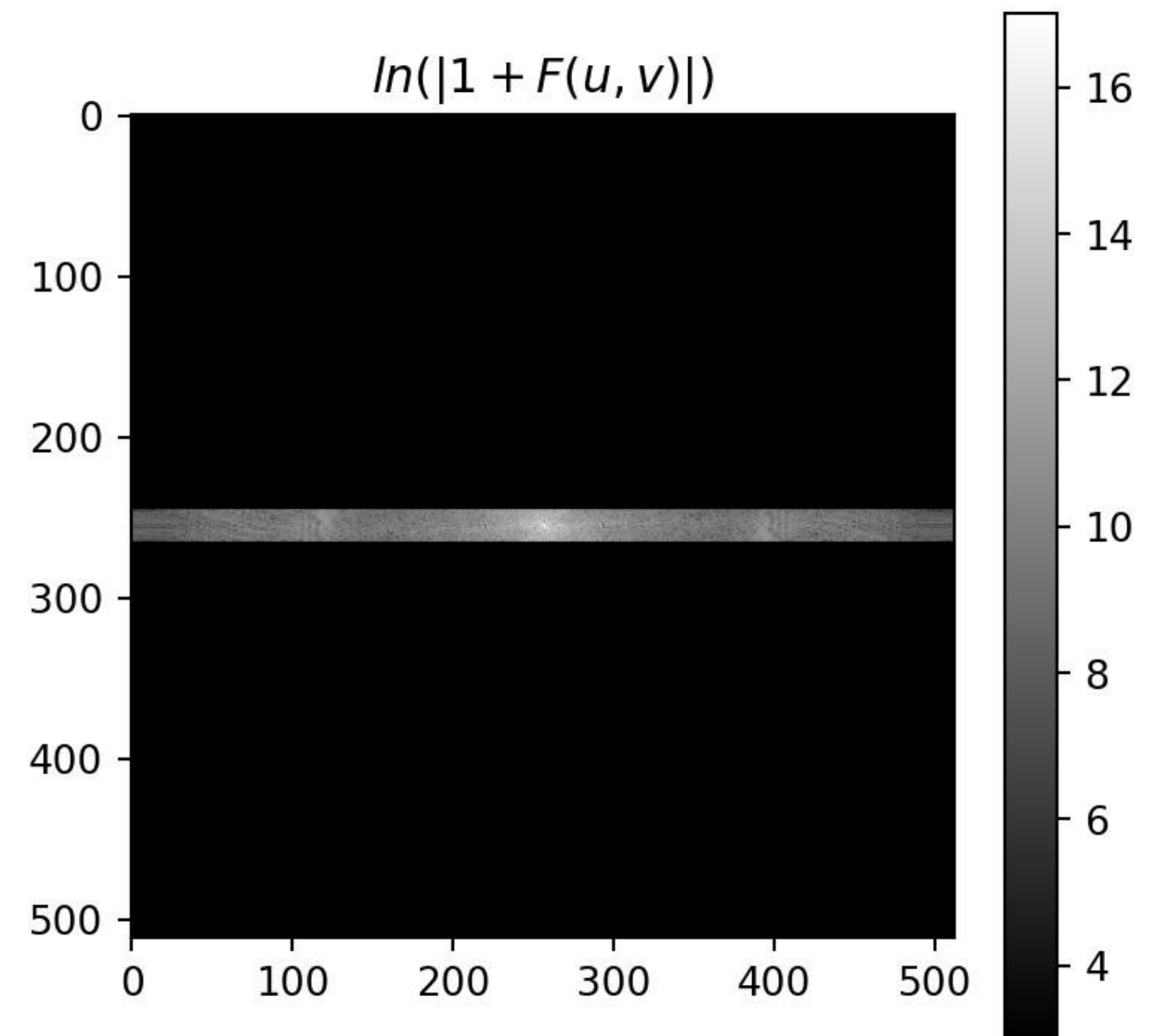
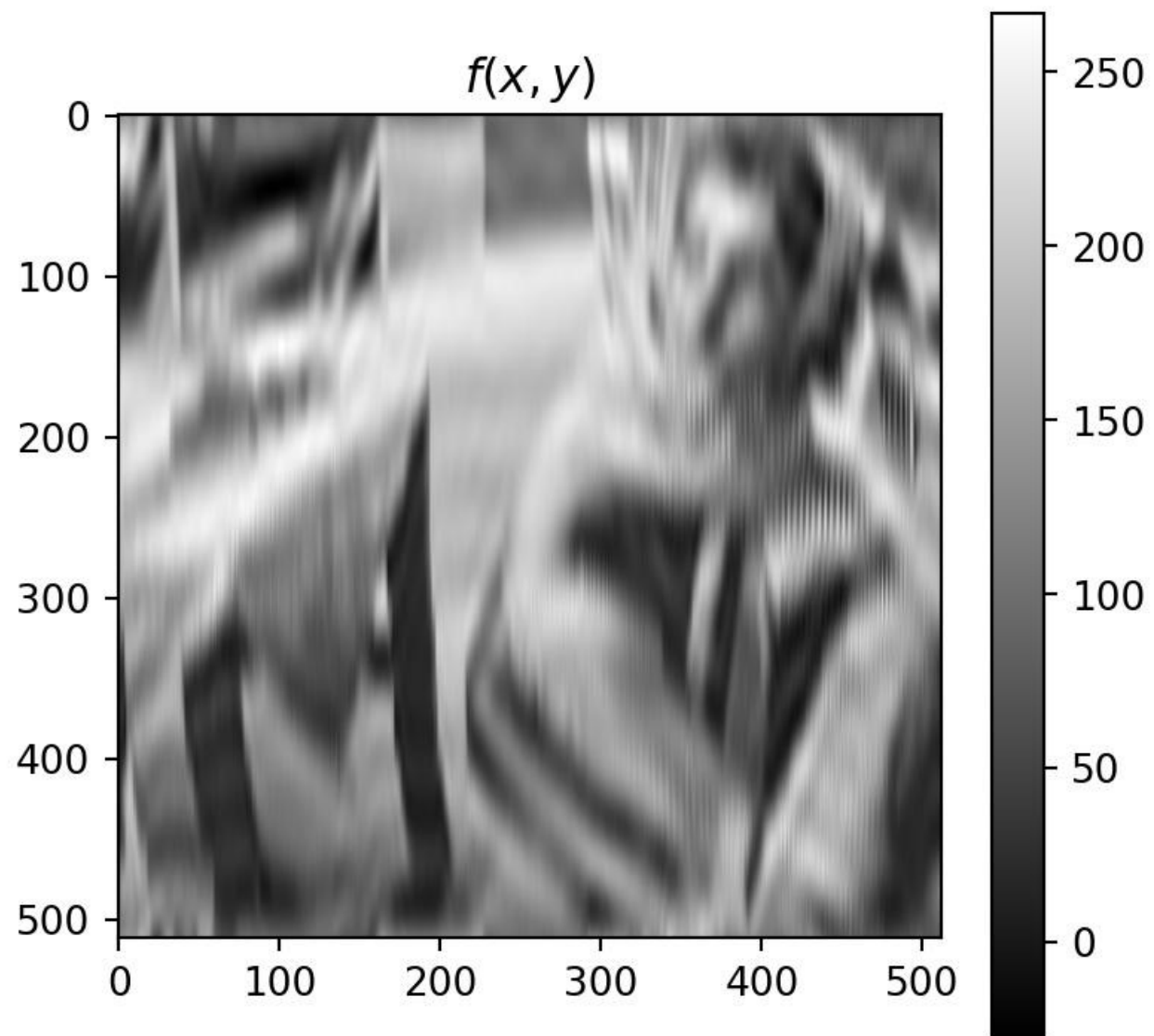


Центрирование и логарифмирование ДПФ

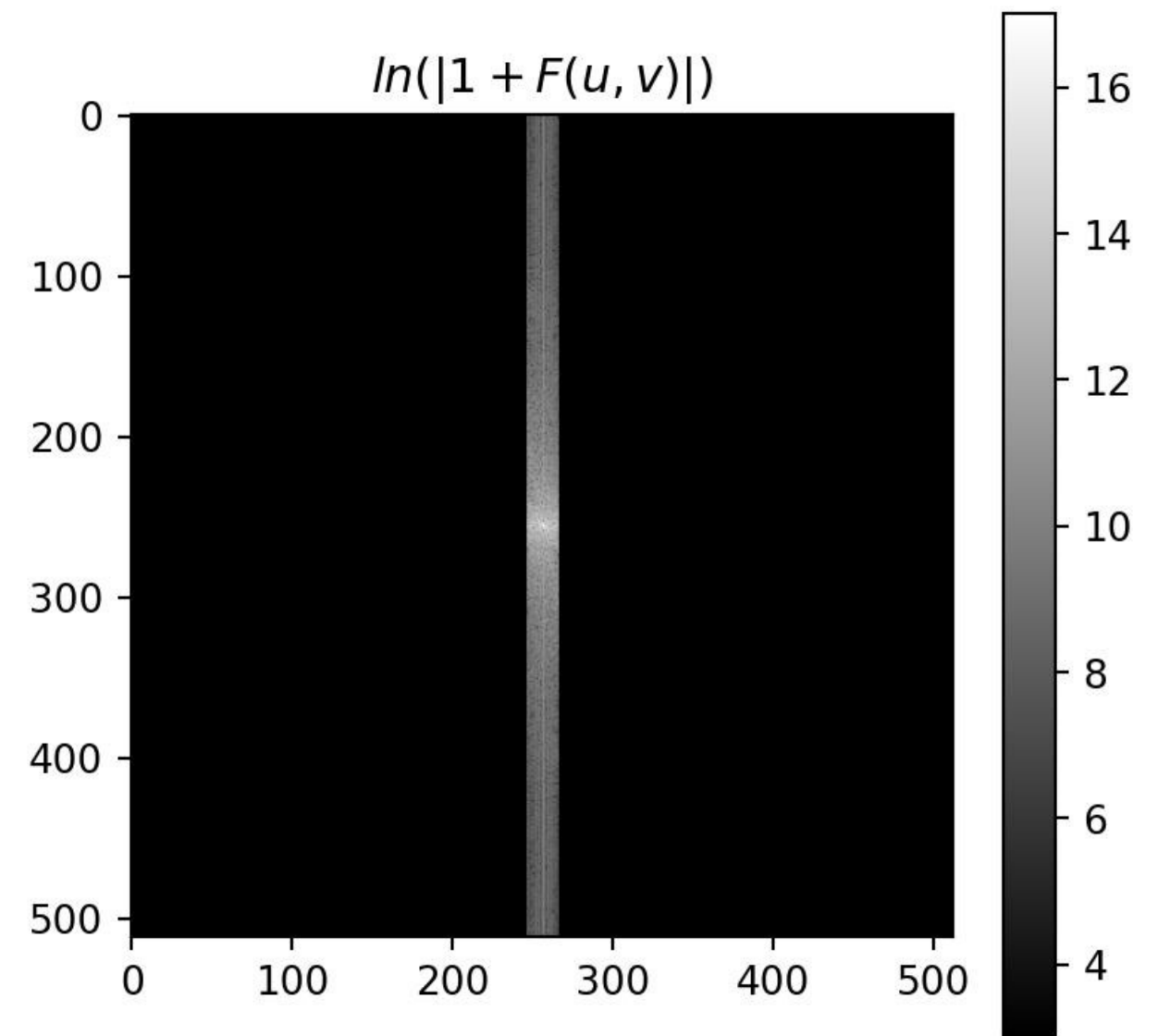
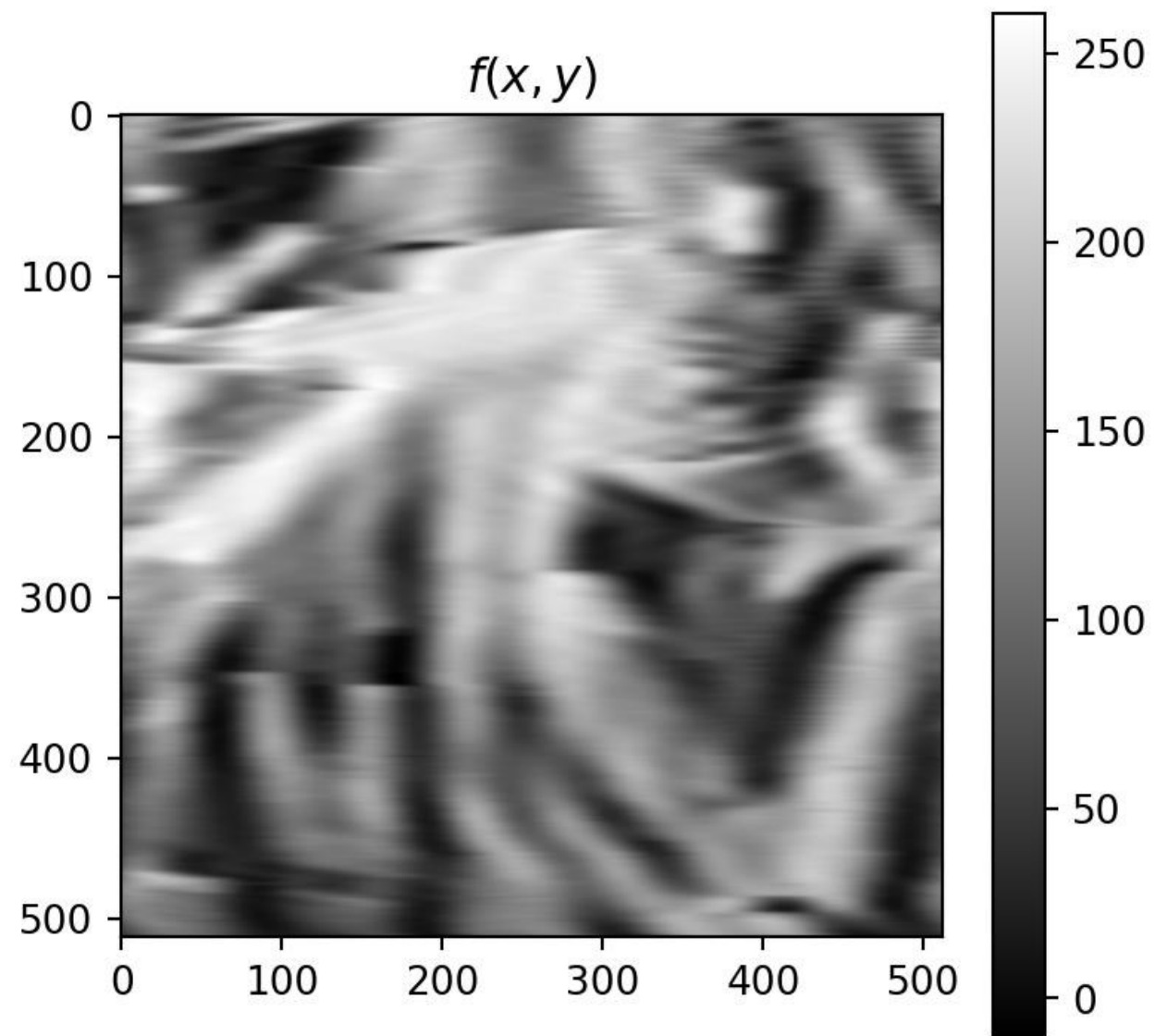
Пример логарифмического спектра реального изображения



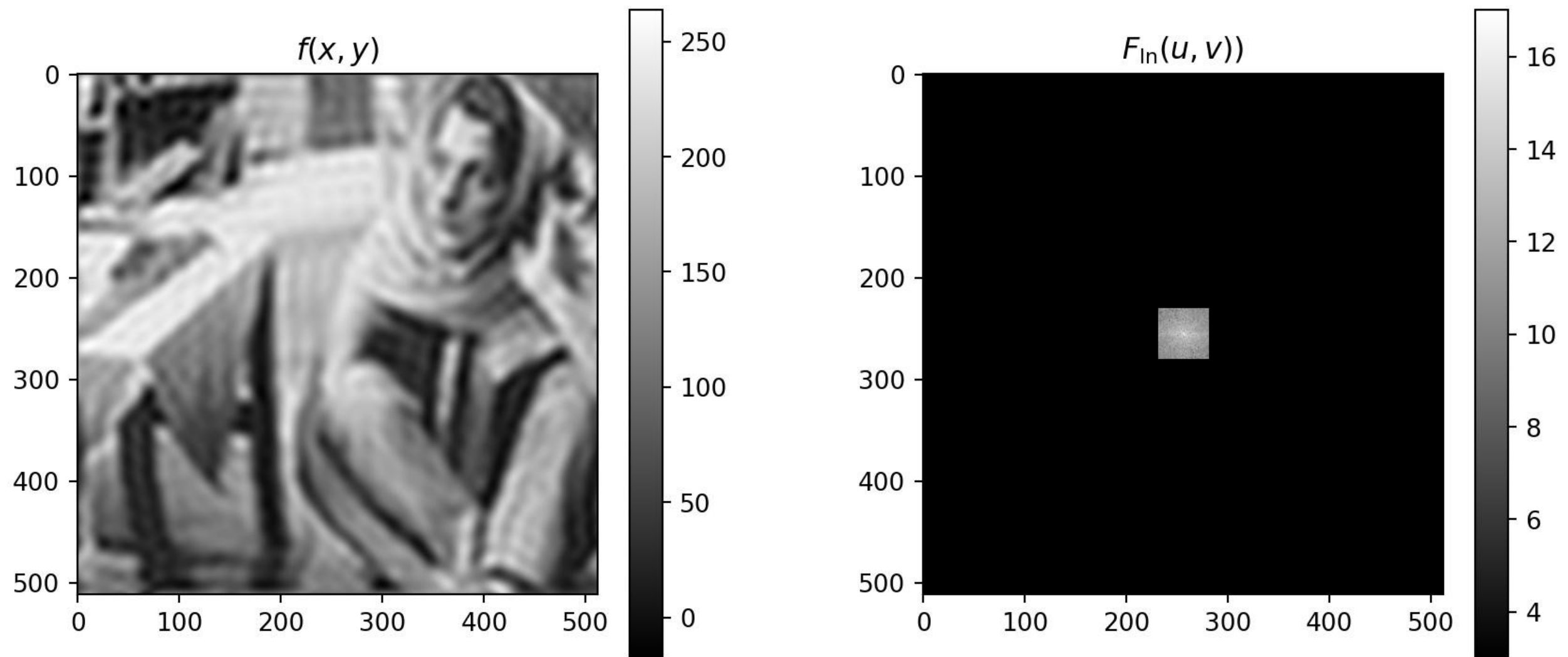
«Горизонтальные» частоты на изображении



«Вертикальные» частоты на изображении



Низкие частоты на изображении



Удаление высокочастотных компонент приводит к эффекту размывания.

Сдвоенные области

Изображение = пространственная область

Преобразование Фурье = частотная область

Для любых действий (операций), выполняемых в пространственной области, существуют соответствующие действия (операции), которые можно выполнить в частотной области. Обратное утверждение тоже верно.

Сдвоенные области

Свертка в пространственной области = **Поэлементное умножение** в частотной области

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

Свертка к частотной области = **Поэлементное умножение** в пространственной области

Вычислительная сложность свертки

- Размер изображения $M \times N$
- Размер фильтра $p \times p$
- Для получения одного выходного пикселя требуется $O(p^2)$ операций
- Число выходных пикселей: $M \times N$
- Общая вычислительная сложность: $O(M \cdot N \cdot p^2)$

Фильтрация в частотной области

Основная формула

$$f(x, y) * h(x, y) \xleftrightarrow{\text{DFT}_{2D}} H(u, v)F(u, v).$$

Шаги алгоритма:

- 1) Расширение изображения f размера $M \times N$ до размеров $P \times Q$ – f_{ext} ;
- 2) Вычисление ДПФ $F(u, v)$ от расширенного изображения f_{ext} ;
- 3) Формирование передаточной функции фильтра $H(u, v)$ размера $P \times Q$;
- 4) Умножение ДПФ изображения на передаточную функцию:

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

- 5) Вычисление вещественной части обратного ДПФ от $G(u, v)$:

$$g = \text{real}(\text{ifft2}(G))$$

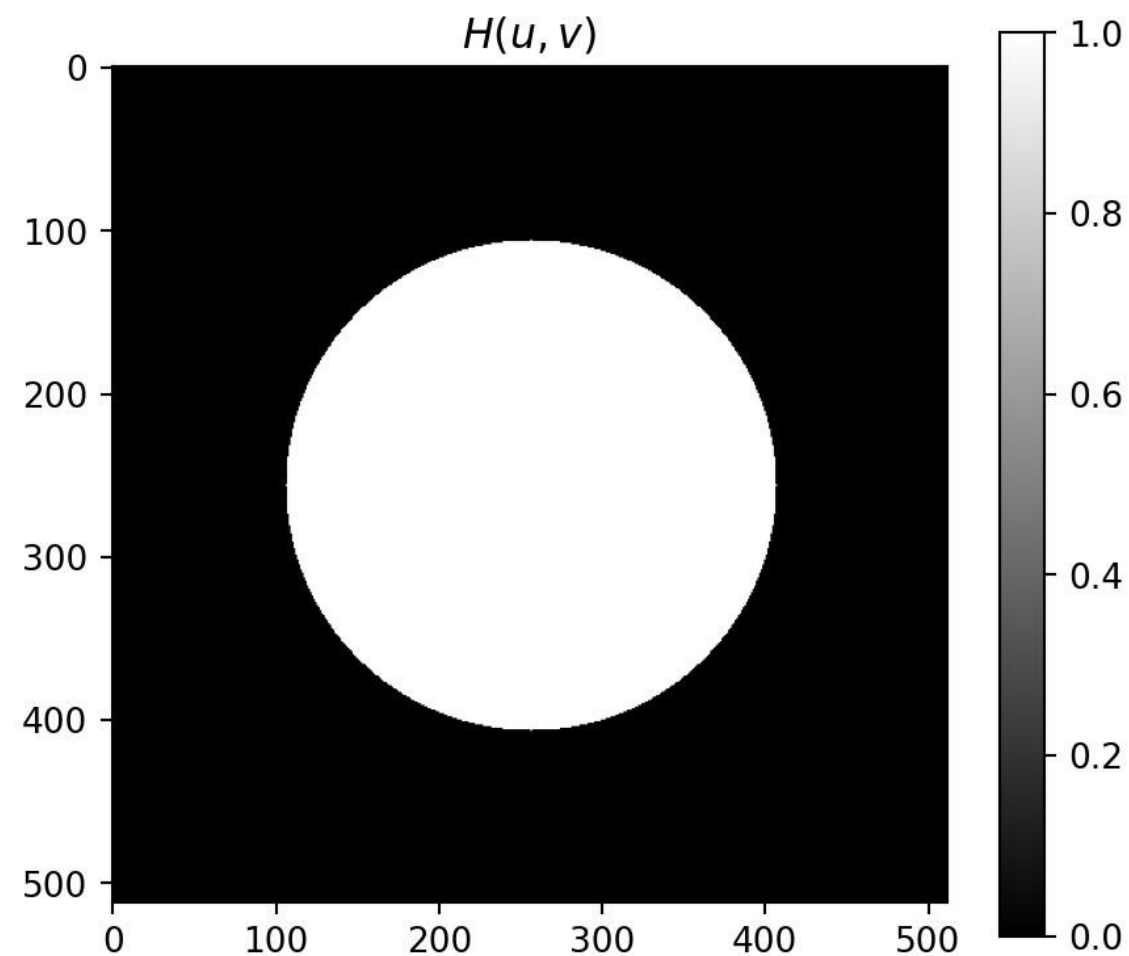
- 6) Вырезание прямоугольника из g исходных размеров $M \times N$.

Идеальный низкочастотный фильтр

Идеальный низкочастотный фильтр имеет передаточную функцию

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{при } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{при } D(u, v) > D_0, \end{cases}$$

где D_0 – неотрицательное число, а $D(u, v)$ – расстояние от центра фильтра до точки (u, v) .

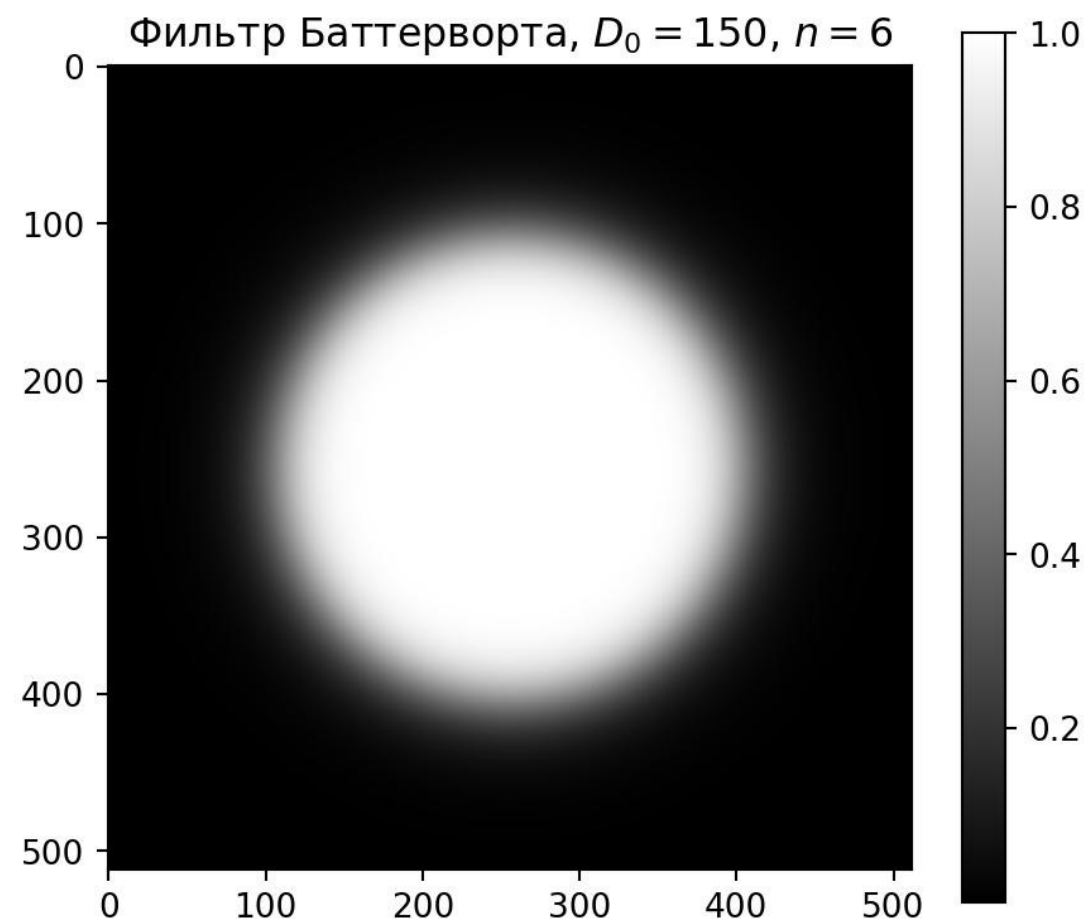


Низкочастотный фильтр Баттерворта

Идеальный низкочастотный фильтр n -го порядка

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

где D_0 – неотрицательное число, а $D(u, v)$ – расстояние от центра фильтра до точки (u, v) .

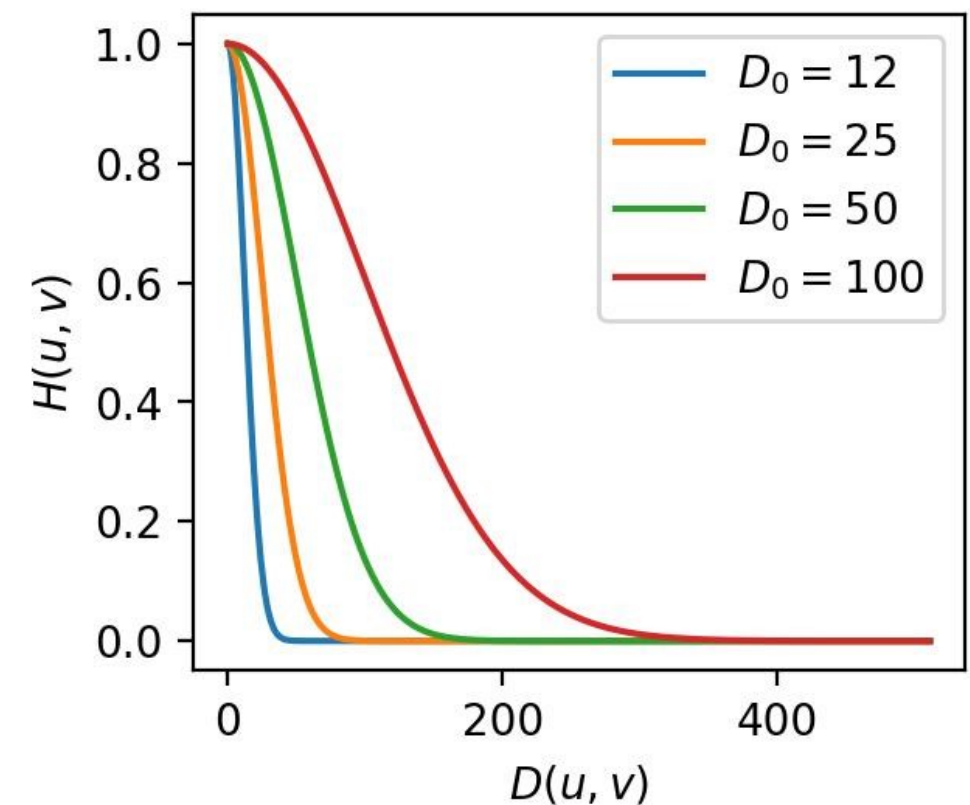
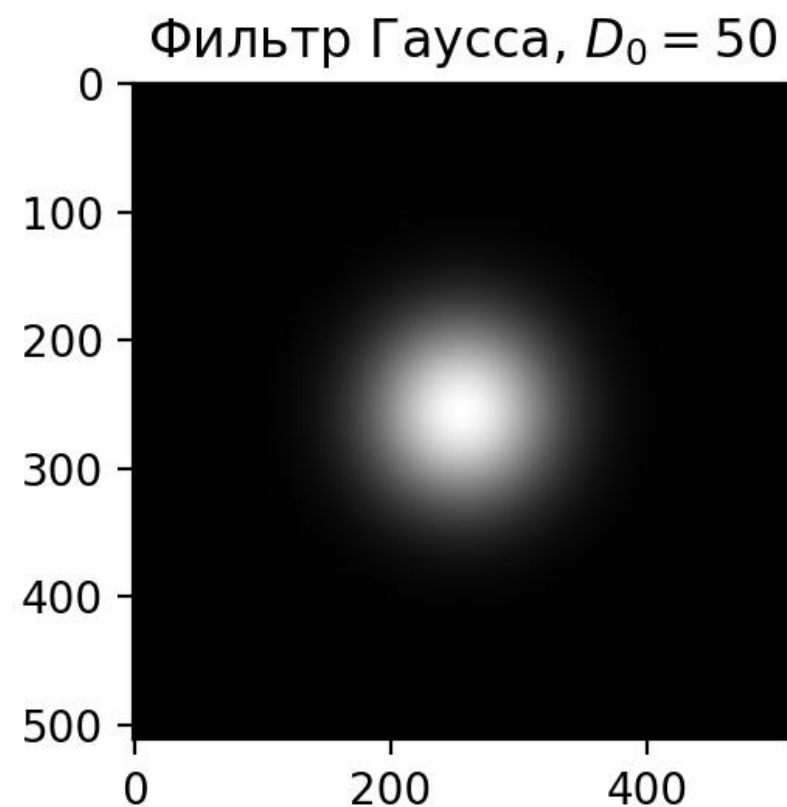
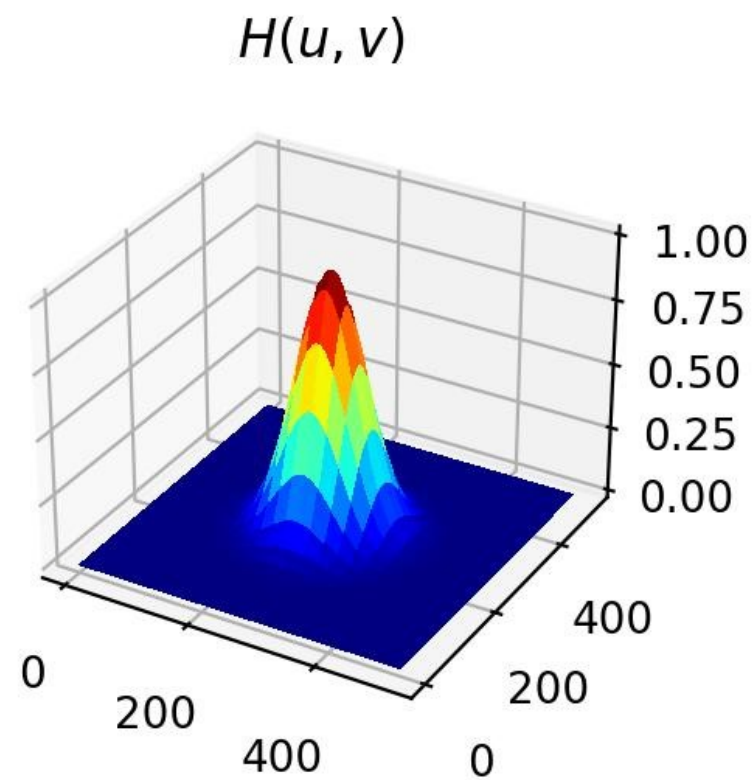


Низкочастотный фильтр Гаусса

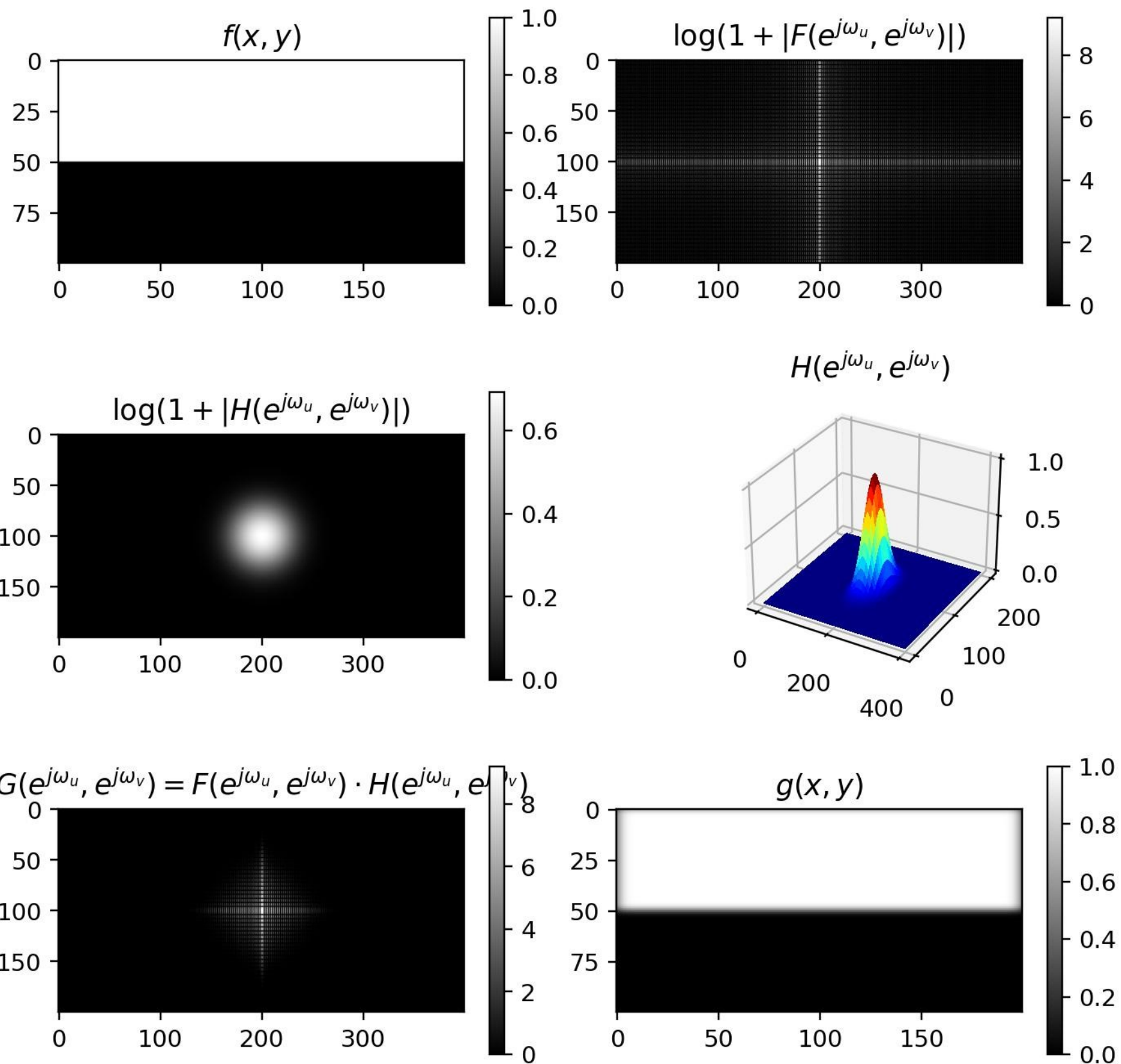
Идеальный низкочастотный фильтр Гаусса

$$H(u, v) = e^{-D(u, v)/2D_0^2}$$

где D_0 – частота среза, а $D(u, v)$ – расстояние от центра от центра частотного прямоугольника. Когда $D(u, v) = D_0$, значение передаточной функции фильтра падает до 0,607.



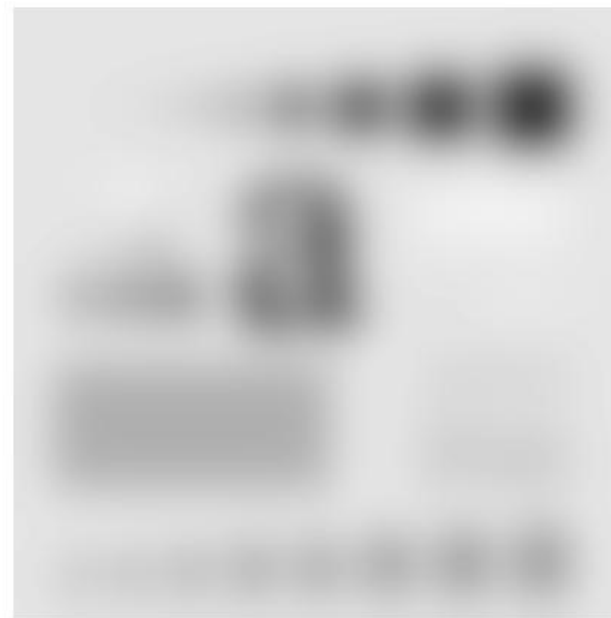
Пример фильтрации



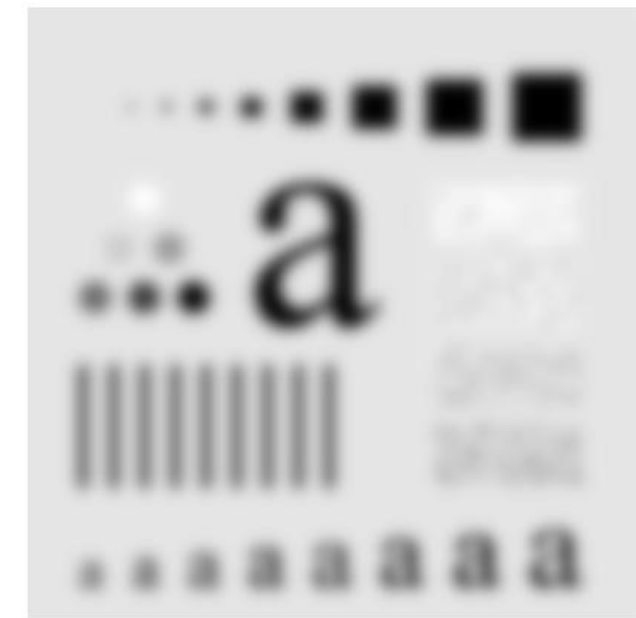
Пример фильтрации гауссовым фильтром



$D_0 = 5$



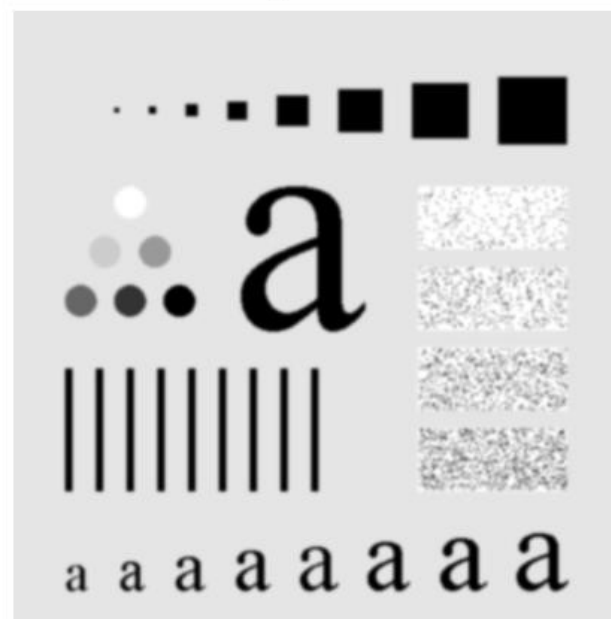
$D_0 = 15$



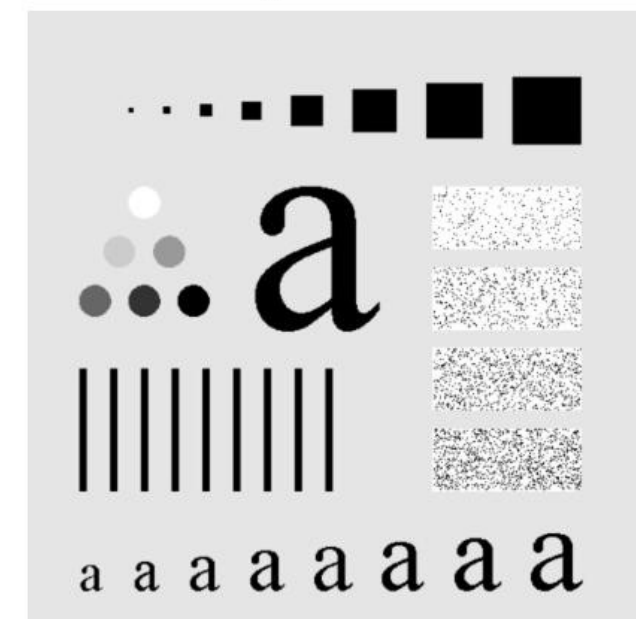
$D_0 = 30$



$D_0 = 80$



$D_0 = 230$



Пример фильтрации текста с плохим разрешением

Исходное изображение

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

$D_0 = 120$

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

Пример фильтрации изображения с артефактами

Исходное изображение



$D_0 = 20$



Пример фильтрации изображения с артефактами

Исходное изображение



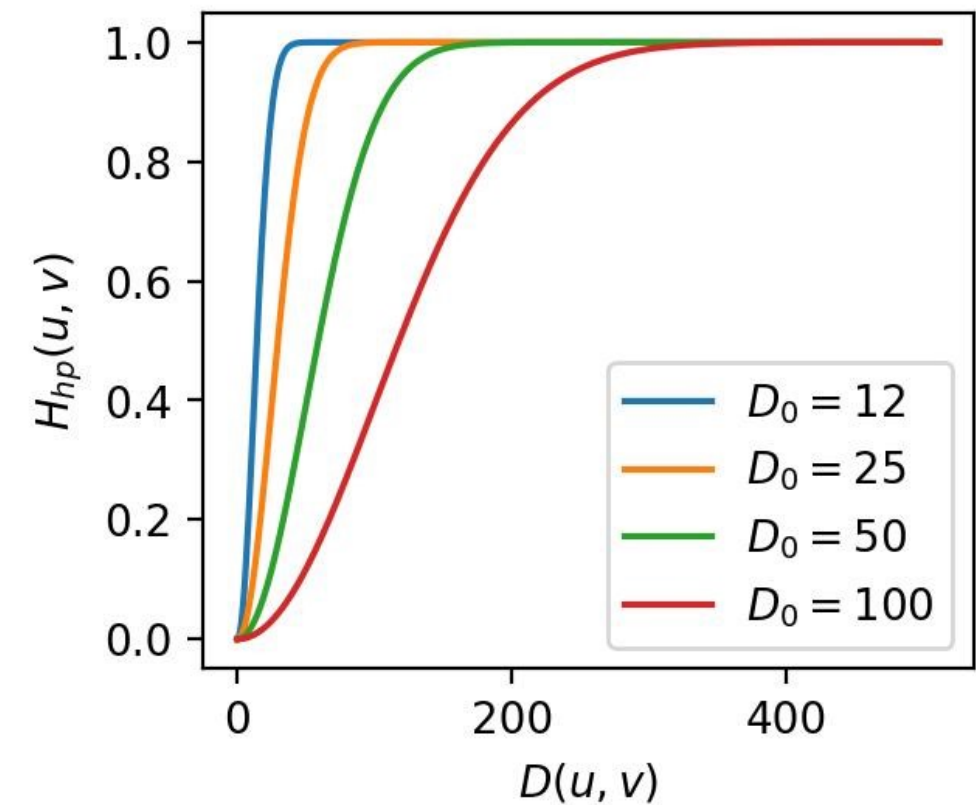
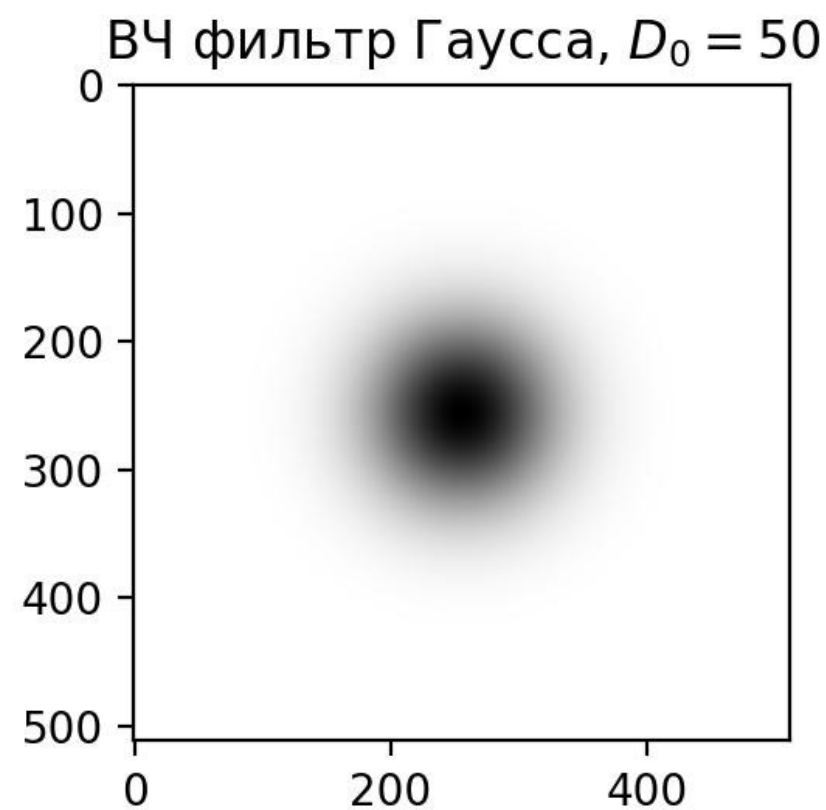
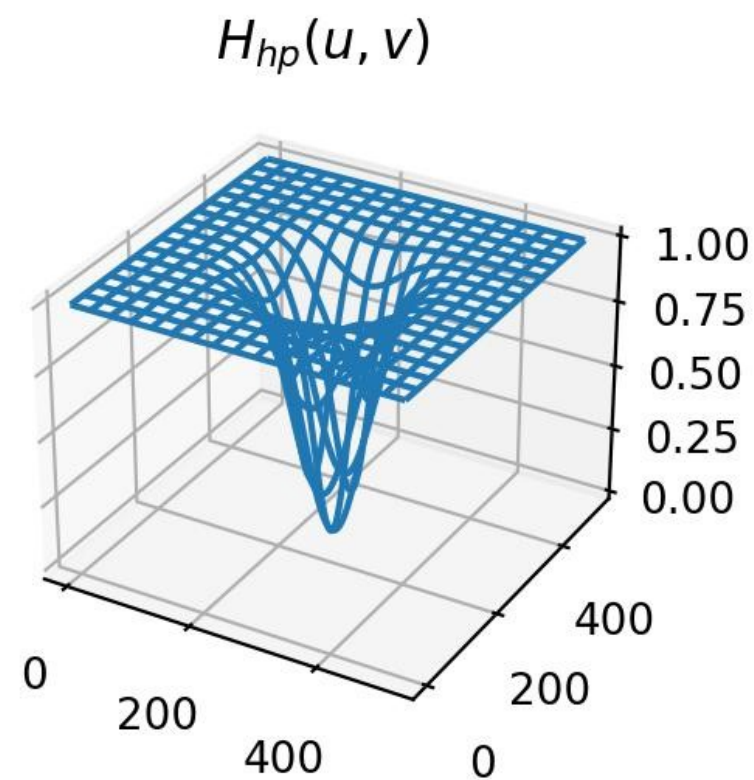
$D_0 = 30$



Высокочастотные фильтры

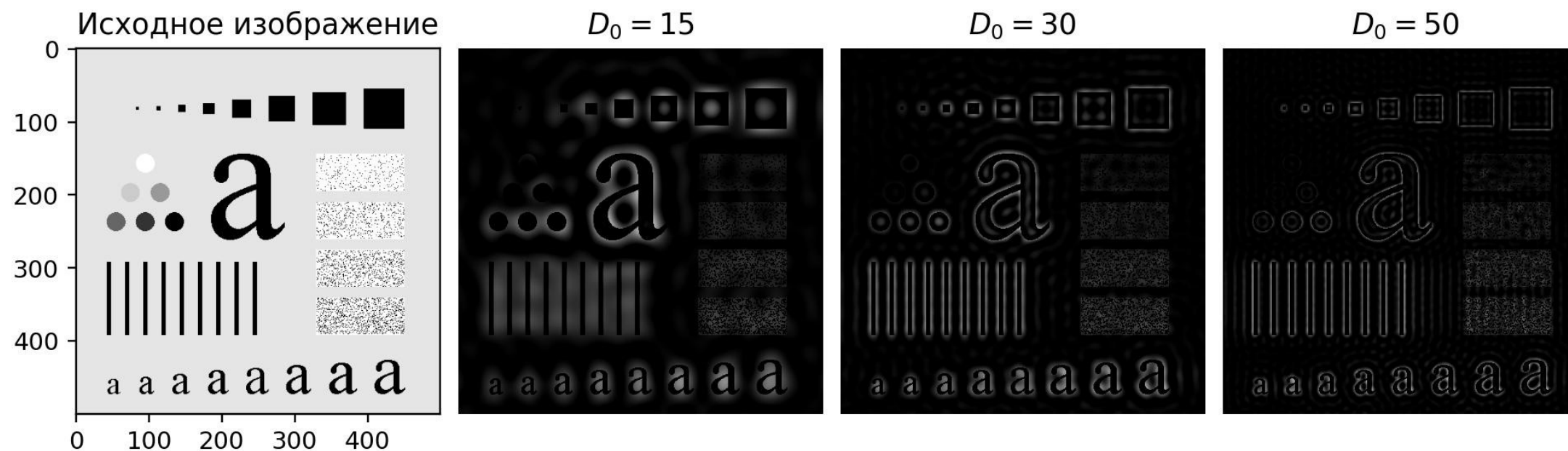
Получение фильтра высоких частот из фильтра низких частот:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v).$$

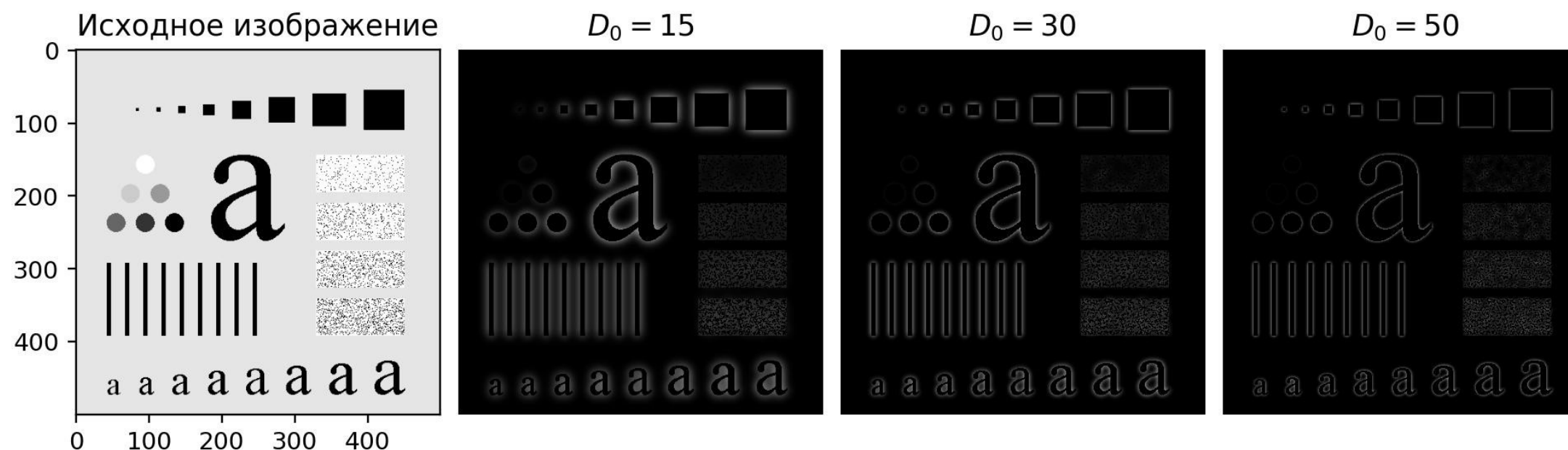


Результаты ВЧ фильтрации изображения

Идеальный фильтр



Фильтр Гаусса



Повышение резкости при частотной фильтрации

ВЧ фильтры отбрасывают постоянную составляющую так, что в итоге средняя интенсивность изображения становится равной нулю. Чтобы это компенсировать нужно добавить смещение к ВЧ фильтру. Если смещение комбинируется вместе с умножением передаточной функции на коэффициент усиления, то итоговая процедура будет называться фильтрацией с усилением высоких частот:

$$H_{hfe}(u, v) = a + bH_{hp}(u, v),$$

где a – смещение, b – коэффициент усиления.

$$a \geq 0, b > a.$$

Характерные значения $a = 0,25$ до $0,50$; $b = 1,5$ до $2,5$.