

# СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ МЕДИАДААННЫХ

## ФИЛЬТРАЦИЯ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

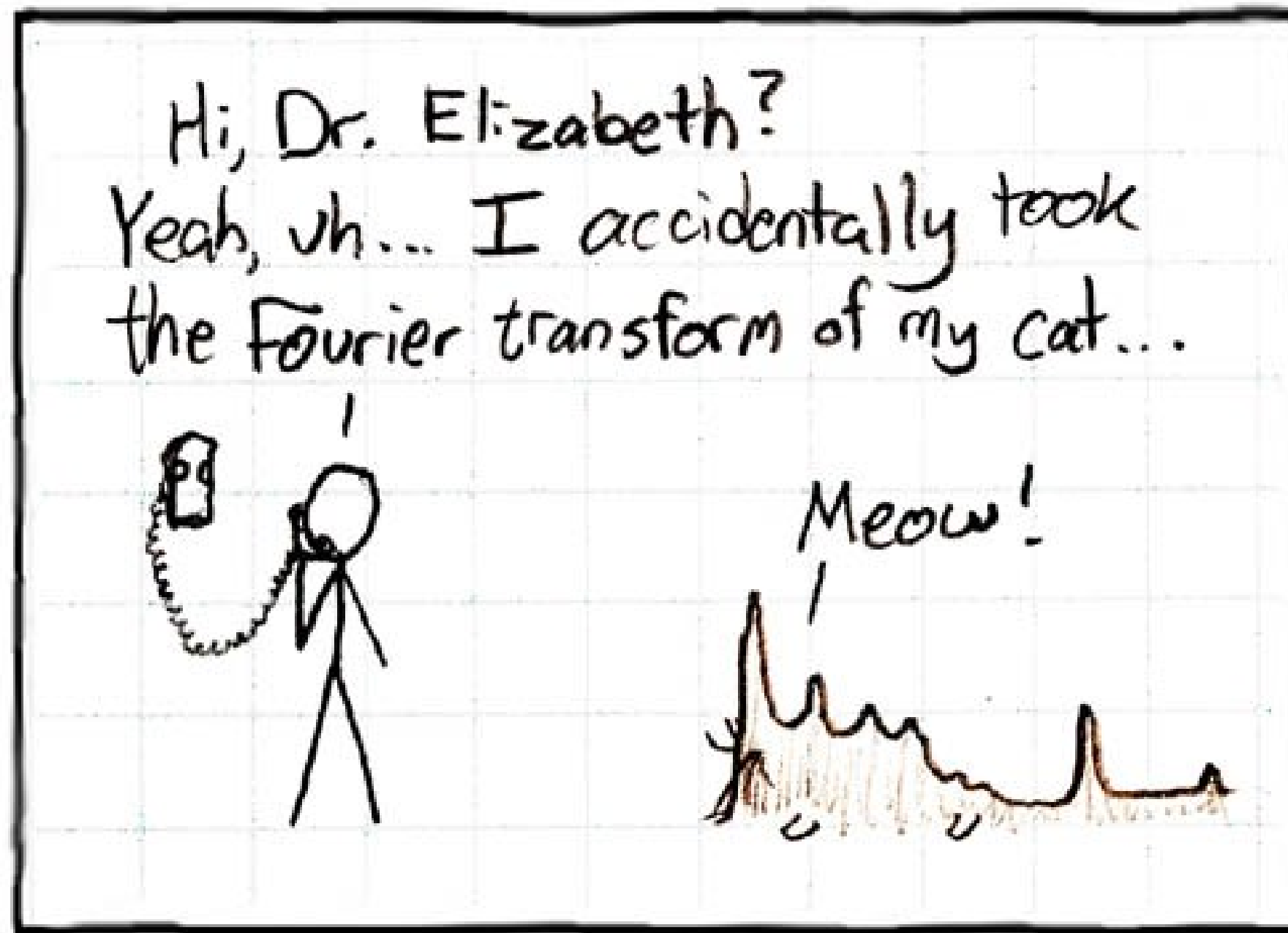
**д.т.н. Вашкевич М. И.**

**[vashkevich@bsuir.by](mailto:vashkevich@bsuir.by)**



Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники  
Кафедра электронных вычислительных средств

# Предупреждение: при работе с преобразованием Фурье нужно быть очень аккуратным!



[https://www.explainxkcd.com/wiki/index.php/26:\\_Fourier](https://www.explainxkcd.com/wiki/index.php/26:_Fourier)

# Преобразование Фурье: обзор

$$s(x) = \sin(2\pi f x + \phi_i) = \sin(\omega x + \phi_i)$$

Как можно проанализировать, что фильтр  $h(x)$  будет делать с низкими, средними и высокими частотами?

# Преобразование Фурье: обзор

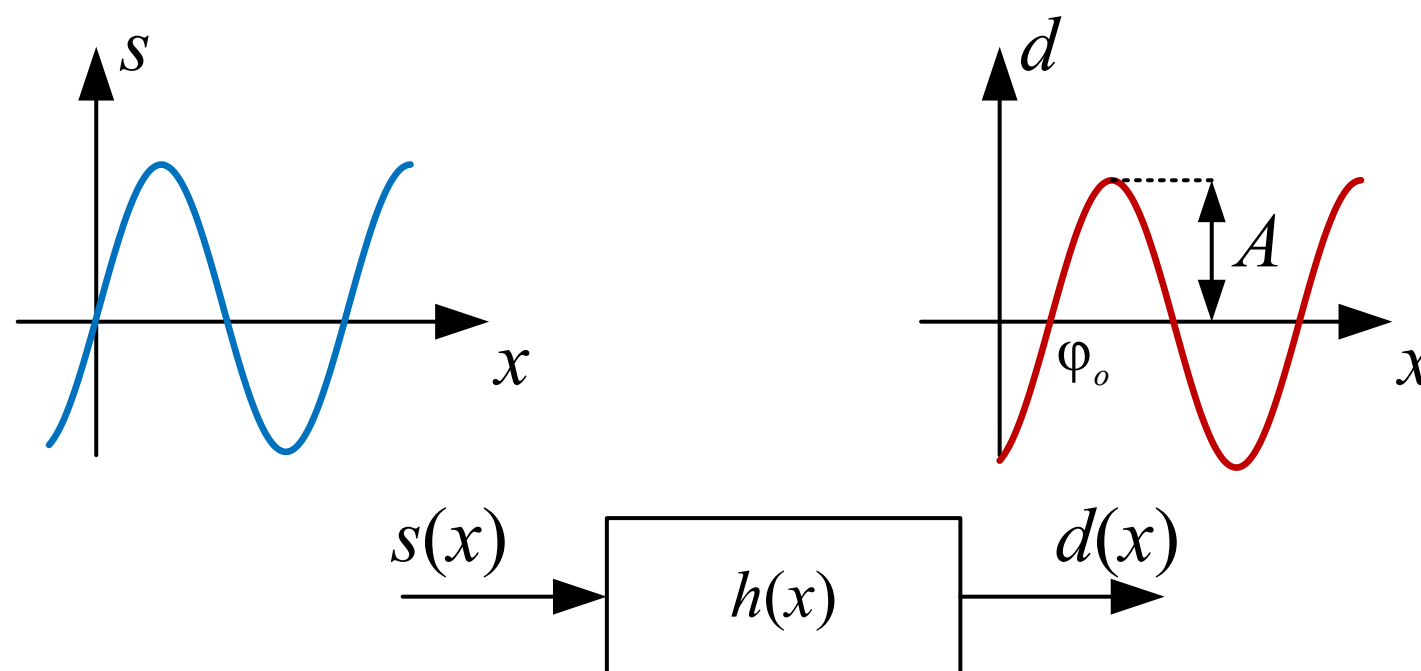
$$s(x) = \sin(2\pi f x + \varphi_i) = \sin(\omega x + \varphi_i)$$

Как можно проанализировать, что фильтр  $h(x)$  будет делать с низкими, средними и высокими частотами?

**Ответ:** нужно пропустить синусоиду с заданной частотой через фильтр и посмотреть насколько она будет ослаблена/усилена.

**«пропустить сигнал  $s(x)$  через фильтр  $h(x)$ » = «найти свертку  $s(x)$  и  $h(x)$ »**

$$d(x) = h(x) * s(x) = A \sin(\omega x + \varphi_o)$$



# Преобразование Фурье: обзор

Комплексная синусоида:

$$s(x) = e^{j\omega x} = \cos \omega x + j \sin \omega x$$

Выход фильтра в этом случае

$$d(x) = h(x) * s(x) = Ae^{j(\omega x + \varphi)} = s(x)Ae^{j\varphi}.$$

Преобразование Фурье фильтра  $h(x)$  – это “таблица” амплитудных  $A$  и фазовых  $\varphi$  значений получаемых при подаче на вход синусоид с различными частотами  $\omega$ :

$$\mathcal{F}\{h(x)\} = H(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1)$$

Выражение (1) показывает «рецепт» вычисления преобразования Фурье.

Пара Фурье преобразований записывается как

$$h(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H(\omega)$$

# Преобразование Фурье: обзор

## Интегральная форма ПФ

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$\omega \in (-\infty, \infty)$$

## Дискретная форма ПФ

$$H(k) = \sum_{x=0}^{N-1} h(x) e^{-j\frac{2\pi}{N} x k}$$

$k \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]$  – основной диапазон  
 $k \in [0, \dots, N-1]$  – альтернативный.

## Фурье преобразование для 1D изображений

- 1D изображение из  $N$  пикселей это вектор размерности  $N$
- Каждый базисный вектор должен иметь  $N$  пикселей
- Базис должен состоять из  $N$  векторов
- $n$ -й элемент  $k$ -ого базисного вектора стандартного базиса

$$E_k(n) = \delta(n - k)$$

- $n$ -й элемент  $k$ -ого базисного вектора Фурье-базиса

$$W_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$$

# Фурье преобразование для 1D изображений

**ДПФ** = переход от *стандартного* базиса к *базису Фурье*

$$X(k) = \langle x(n), W_k(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

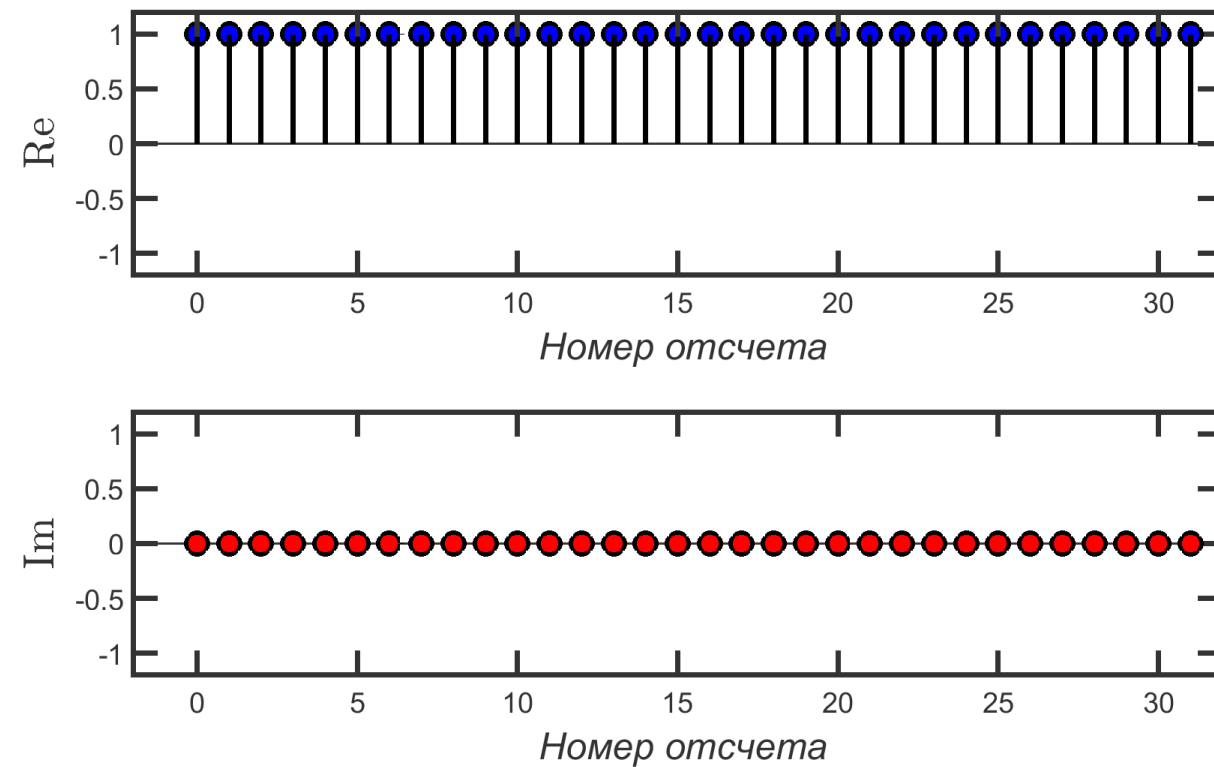
ДПФ можно записать в матричной форме:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} - & W_0 & - \\ - & W_1 & - \\ & \vdots & \\ - & W_{N-1} & - \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

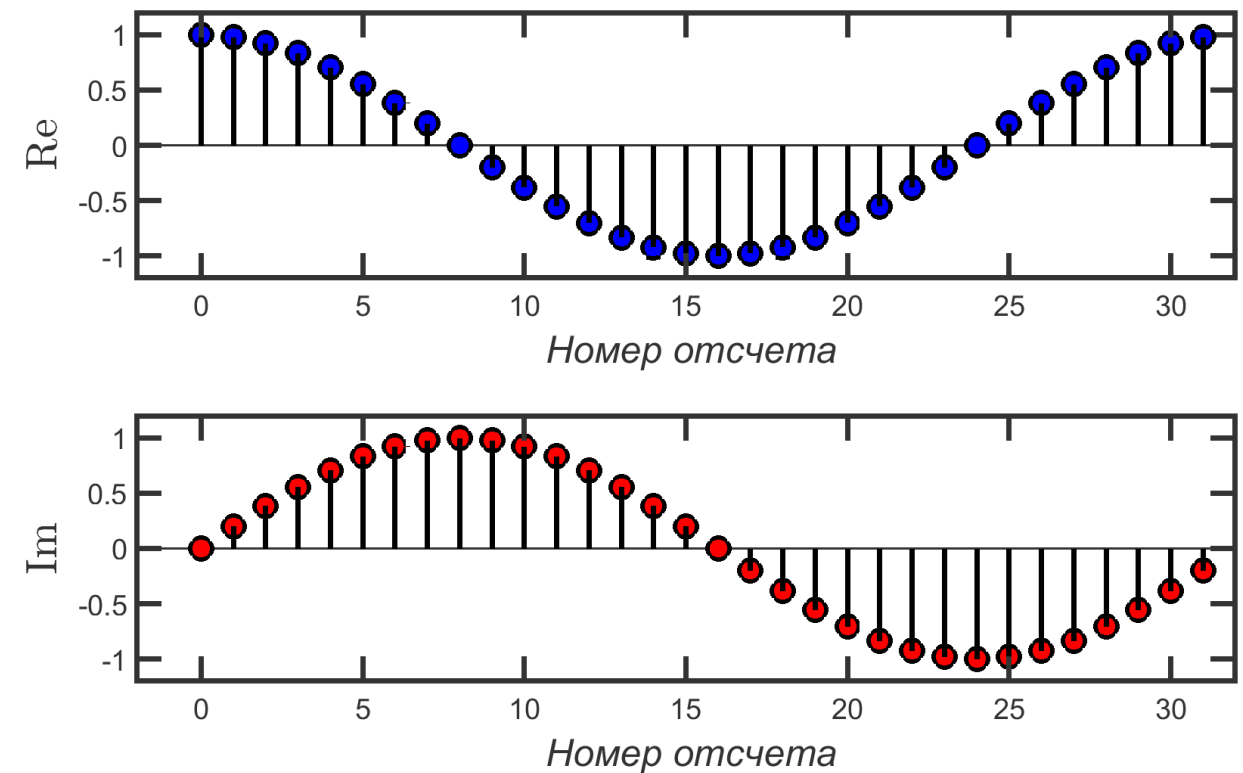
**Обратное ДПФ** = переход от базиса Фурье к стандартному базису

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

# Примеры базисных векторов ДПФ



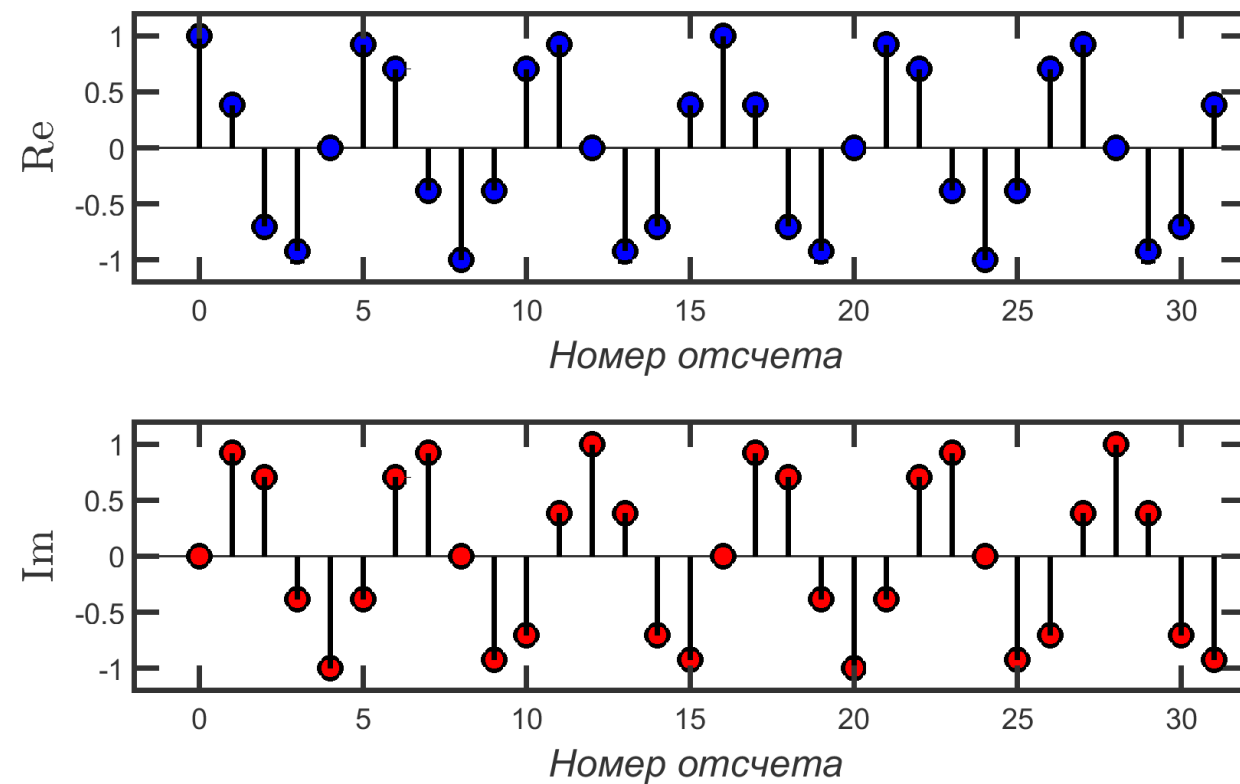
Базисный вектор  $W_0$



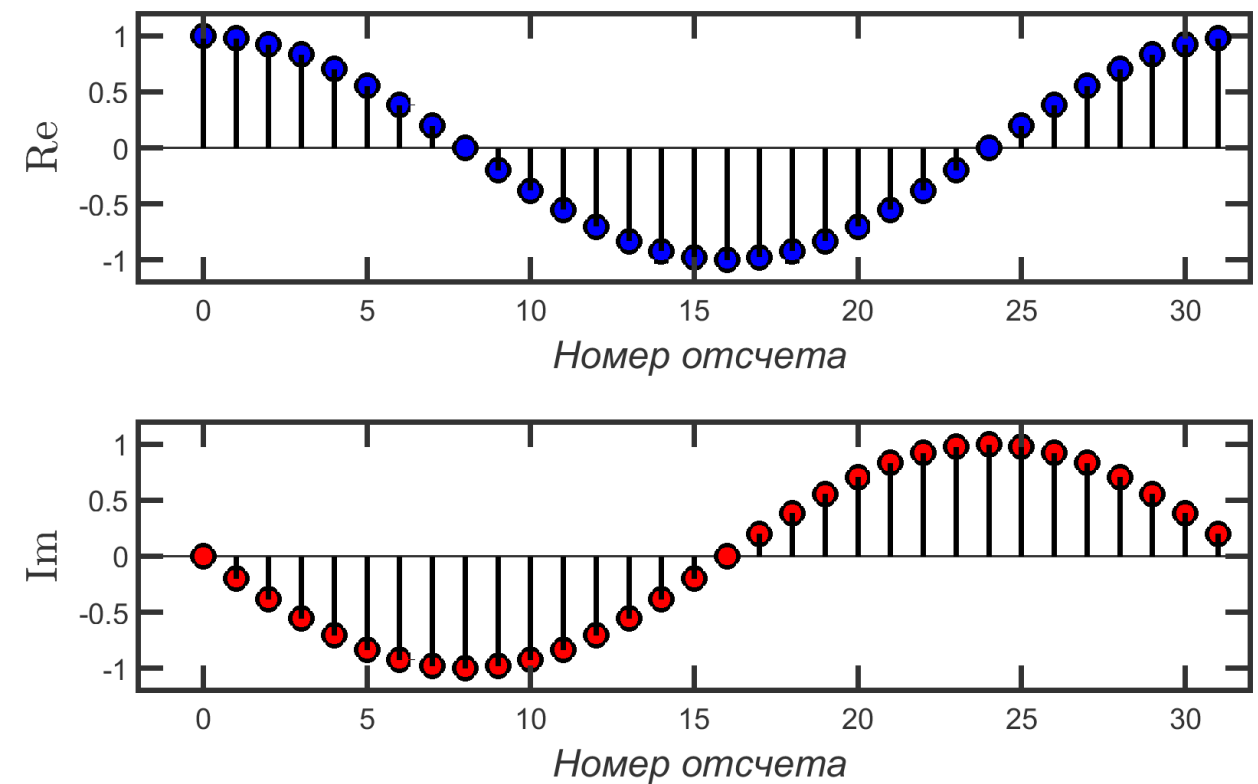
Базисный вектор  $W_1$



# Примеры базисных векторов ДПФ



Базисный вектор  $W_6$



Базисный вектор  $W_{31}$

# Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

– Проблема: базис **комплексный**, а сигнал **вещественный**?

# Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

- **Проблема**: базис **комплексный**, а сигнал **вещественный**?
- **Решение**: объединение комплексно-сопряженных базисных векторов дает вещественный вектор

$$W_k^*(n) = W_{N-k}(n)$$

(доказать !)

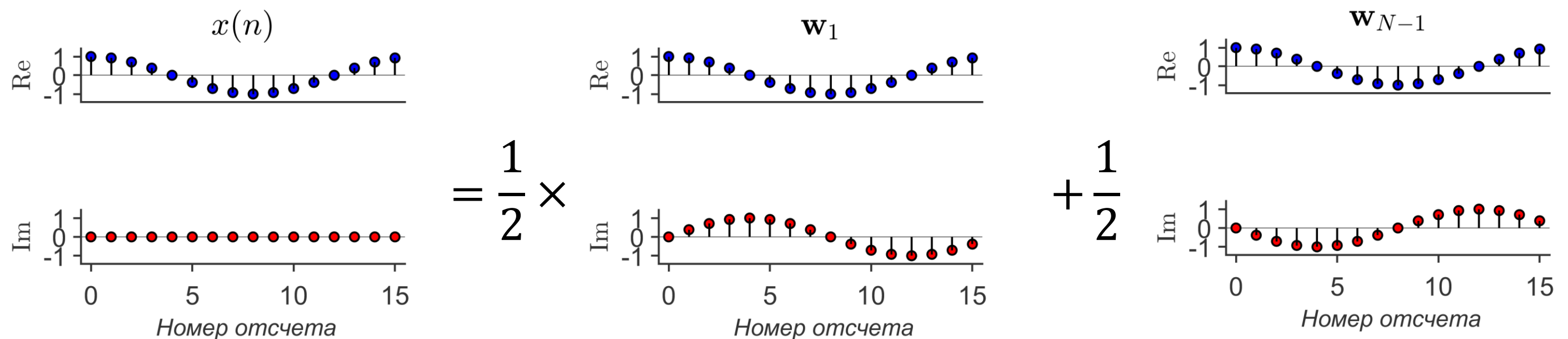
# Комплексное сопряжение базисных векторов Фурье

$$W_k^*(n) = W_{N-k}(n)$$

– Вещественные сигналы имеют одни и те же коэффициенты при  $W_k(n)$  и  $W_{N-k}(n)$

## Пример разложения в базис Фурье действительного сигнала

Входной сигнал  $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $N = 16$



Разложение в базисе Фурье:  $x(n) = \frac{1}{2}W_1(n) + \frac{1}{2}W_{15}(n)$

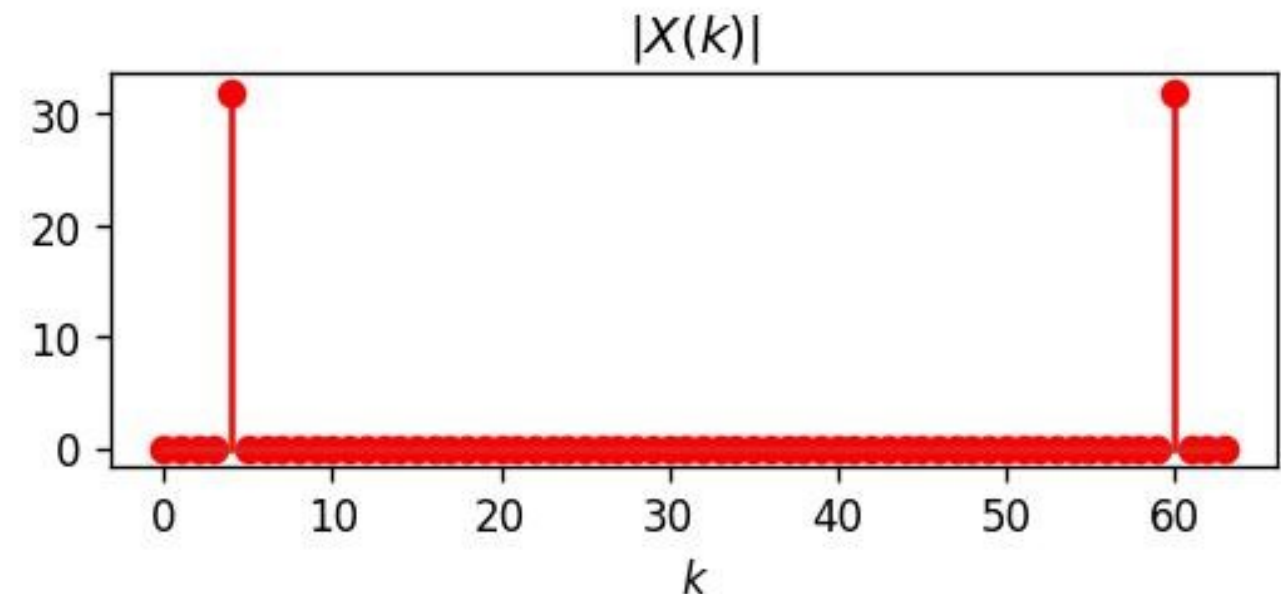
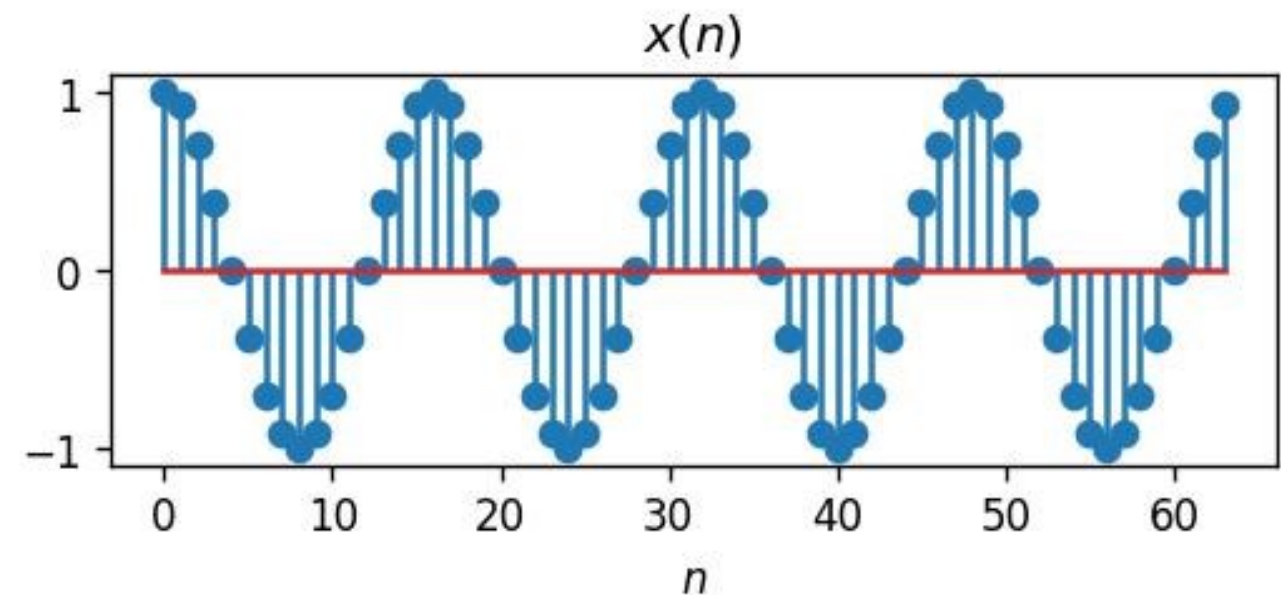
# Центрирование ДПФ: постановка задачи

## Пример разложения в базис Фурье

$$\begin{aligned}x(n) &= \cos \frac{2\pi}{64} 4n \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} 60n})\end{aligned}$$

**Проблема:** сигнал с «частотой» 4 имеет в спектре компоненты с «частотами» 4 и 60.

$$\begin{aligned}X(k) &= \text{DFT}\{x(n)\} \\ &= \frac{N}{2} \delta(k - 4) + \frac{N}{2} \delta(k - 60)\end{aligned}$$



# Центрирование ДПФ: решение

$$\begin{aligned}x(n) &= \cos \frac{2\pi}{64} 4n = \frac{1}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} 60n} \right) = \\&= \frac{1}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} (64-4)n} \right) = \frac{1}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{64} 64n}}_{=1} e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right) = \\&= \frac{1}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} - e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right)\end{aligned}$$

Перепишем данный результат используя обозначения базисных векторов

$$x(n) = \frac{1}{2} W_4(n) + W_{-4}(n)$$

- Т.е. мы можем рассматривать вектора  $W_{-\frac{N}{2}+1}, \dots, W_{\frac{N}{2}}$
- Вещественные сигналы будут иметь одинаковые коэффициенты при  $W_k$  и  $W_{-k}$

# Центрирование ДПФ (пример на Python)

Смена диапазона индексов  $k \in [0, \dots, N - 1] \longrightarrow k \in \left[-\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2}\right]$

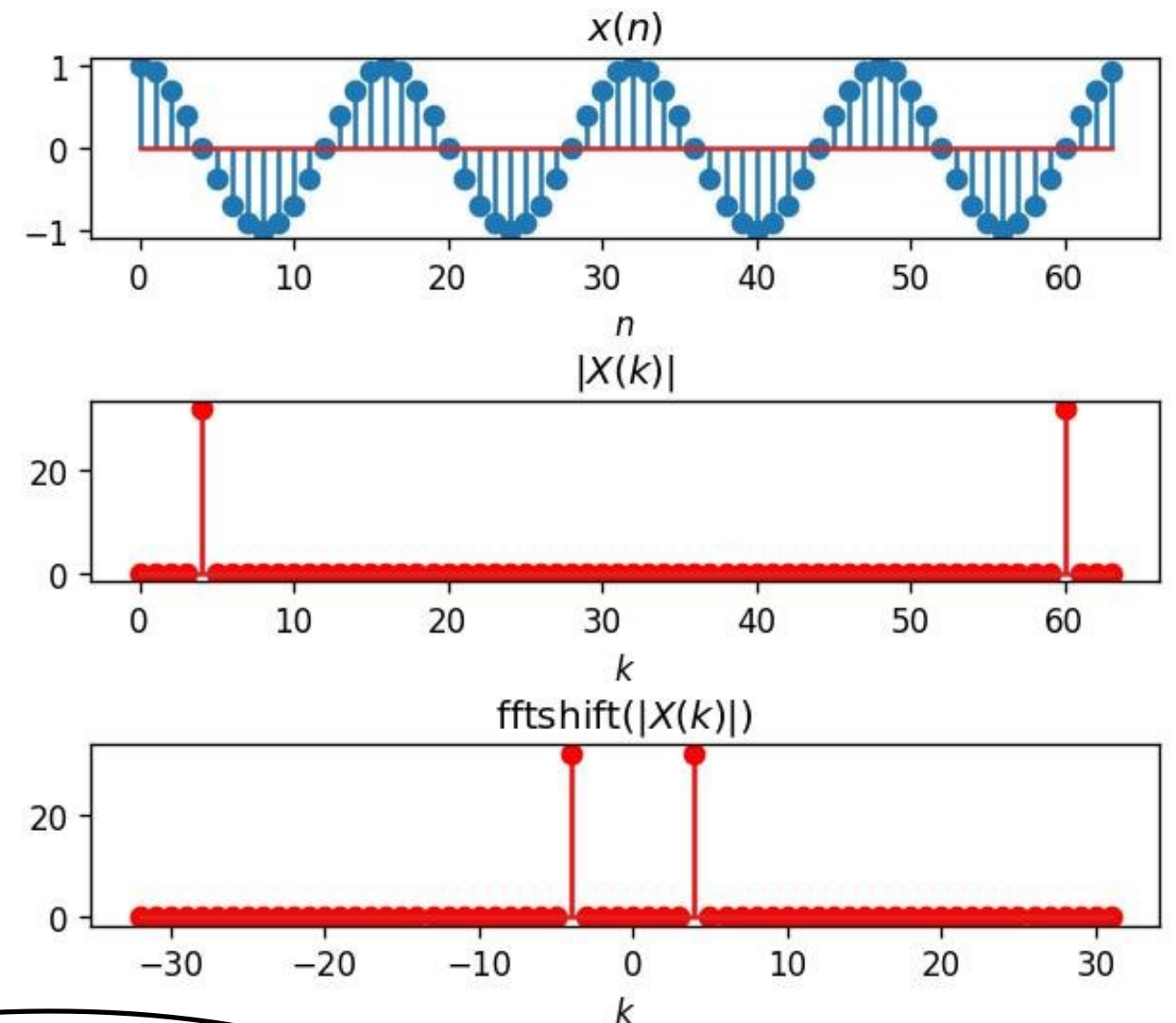
$$\begin{aligned} x(n) &= \cos \frac{2\pi}{64} 4n = \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}\{x(n)\} \\ &= \frac{N}{2} \delta(k - 4) + \frac{N}{2} \delta(k + 4) \end{aligned}$$

## Python-функция центрирования ДПФ

```
x = np.cos(2*pi/N*4*n)
X = np.abs(np.fft.fft(x))
shift_X = np.fft.fftshift(X)
```

Центрирование  
спектра



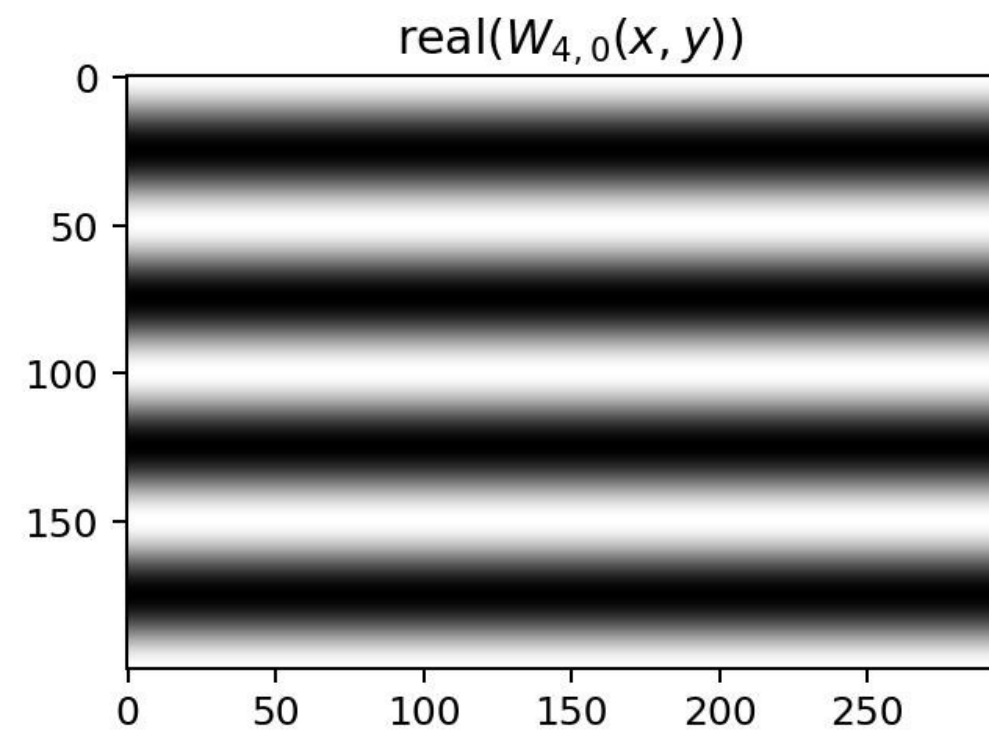
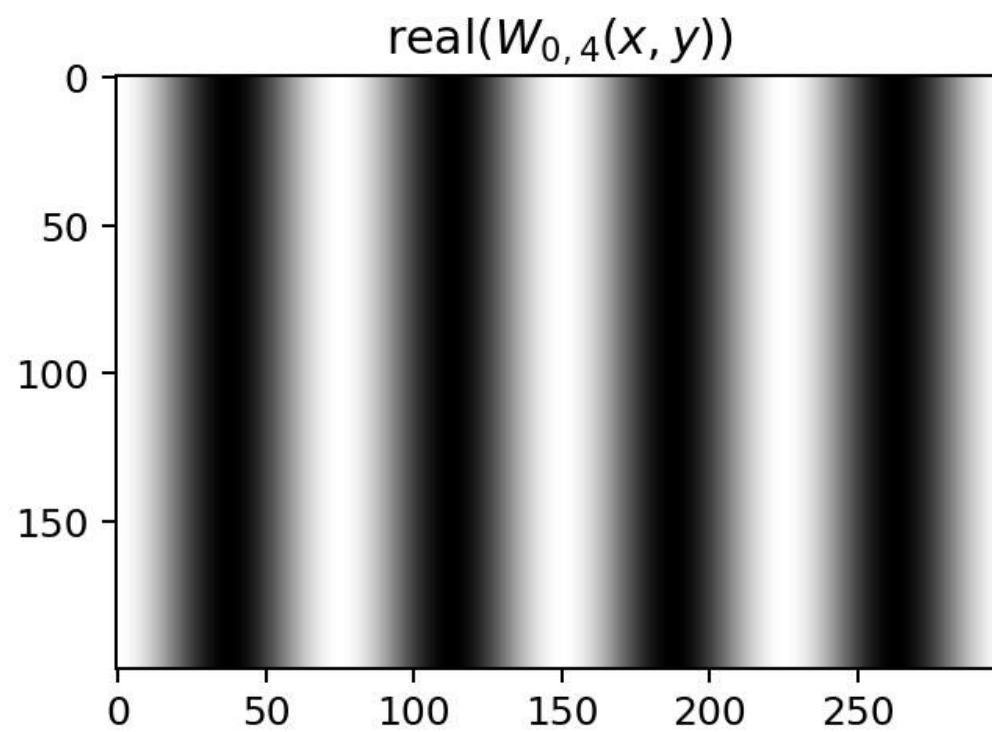
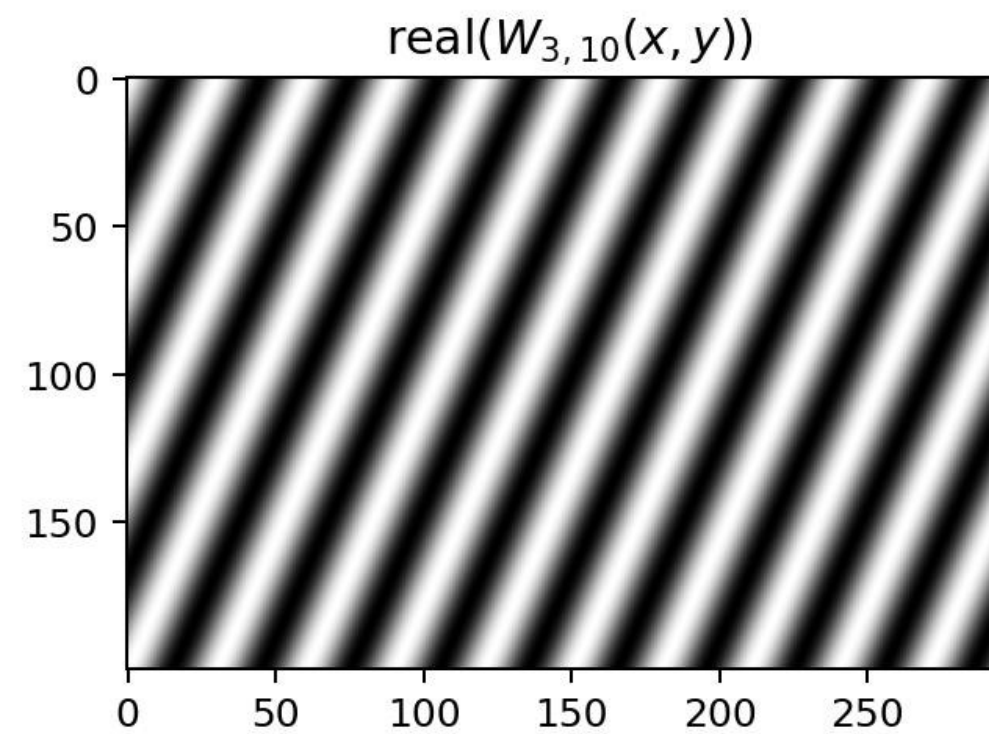
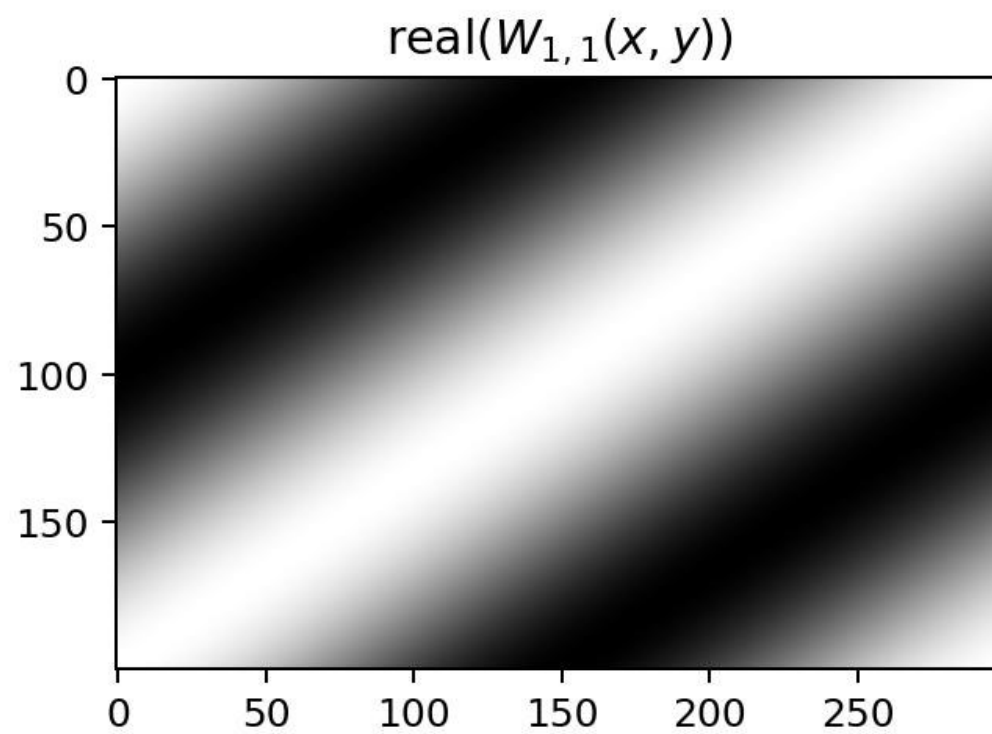
# Преобразование Фурье для изображений

- Базис Фурье 1D сигналов индексируется частотой
- Базис Фурье изображений (2D) индексируется двумя **пространственными** частотами
- $(u, v)$  элемент базиса для изображения  $M \times N$ 
  - имеет  $u/M$  периодов вдоль оси  $x$
  - имеет  $v/N$  периодов вдоль оси  $y$

$$W_{u,v}(x, y) = e^{j\frac{2\pi}{M}ux + \frac{2\pi}{N}vy} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}ux + \frac{2\pi}{M}vy\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{N}ux + \frac{2\pi}{M}vy\right)$$



# Базисные функции 2D ДПФ



# Переход к базису Фурье и возврат к исходному

Пусть  $f(x, y)$  – изображение  $M \times N$ ,

$F(u, v)$  – коэффициенты Фурье этого изображения

Как получить  $f(x, y)$  зная  $F(u, v)$ ?

$$f(x, y) = \underbrace{\frac{1}{MN}}_{\text{нормирующий множитель}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) \underbrace{W_{u,v}(x, y)}_{\text{базисные функции Фурье}} .$$

# Обратное ДПФ

Пусть  $f(x, y)$  – изображение  $M \times N$ ,

$F(u, v)$  – коэффициенты Фурье этого изображения

## Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) W_{u,v}(x, y) = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \end{aligned}$$

# Прямое ДПФ

Пусть  $f(x, y)$  – изображение  $M \times N$ ,

$F(u, v)$  – коэффициенты Фурье этого изображения

Как получить  $F(u, v)$  зная  $f(x, y)$ ?

$$F(u, v) = \langle f, W_{u,v} \rangle = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) W_{u,v}^*(x, y)$$

(Прямое) ДПФ

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Зачем нужно преобразование Фурье?

- Изображение – комбинация низкочастотной и высокочастотной информации
- Низкие частоты: крупномасштабная структура, без деталей
- Высокие частоты: тонкая структура, детали

# Визуальный анализ ДПФ

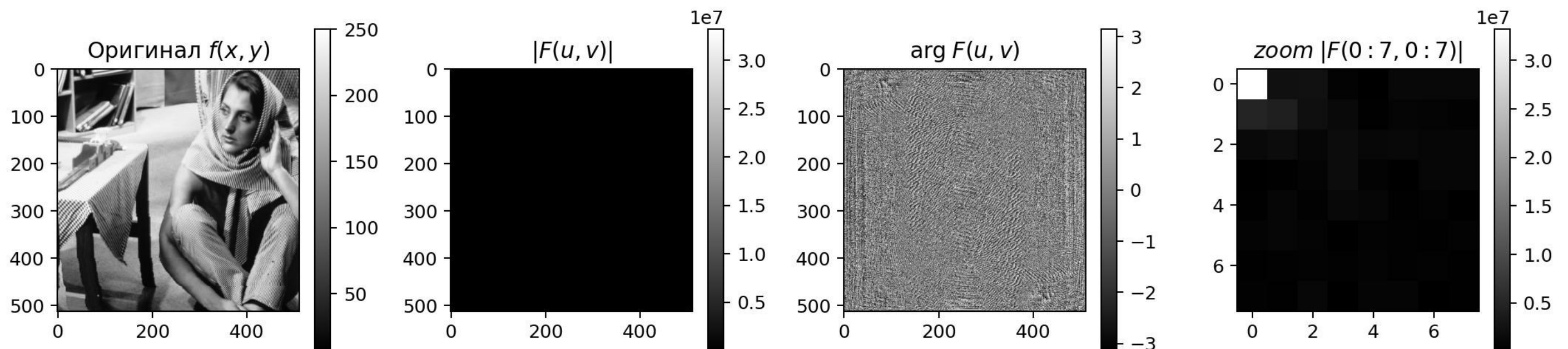
Для визуального анализа ДПФ вычисляют его **спектр**, т.е. модуль комплексных значений  $F(u, v)$ :

$$|F(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{F(u, v)\} + \operatorname{Im}^2\{F(u, v)\}}.$$

Фазовый угол  $F(u, v)$  задается формулой:

$$\theta(u, v) = \arg F(u, v).$$

## Пример спектра изображения





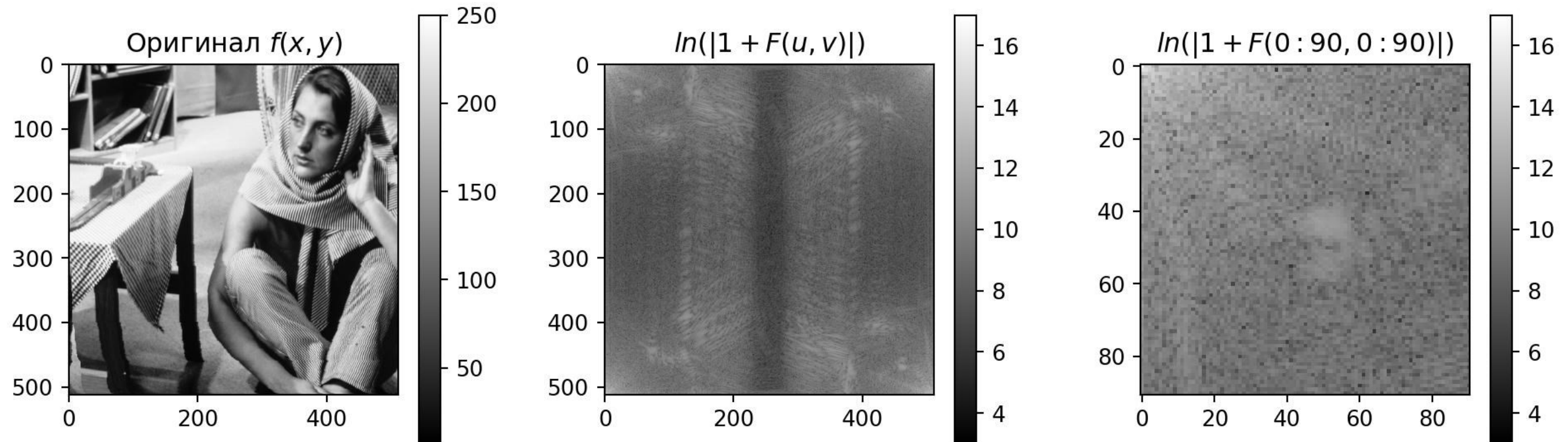
# Логарифмирование спектра

**Проблема:** спектр Фурье часто имеет диапазон от 0 до  $\sim 10^7$ . Если линейно масштабировать этот диапазон в интервал с 8- битной градацией, то наиболее яркие пиксели будут доминировать, а менее яркие участки спектра утратятся.

**Решение – логарифмирование спектра**

$$F_{\ln}(u, v) = \ln(|F(u, v)| + 1)$$

## Пример логарифмического спектра



# Центрирование ДПФ

Центрирование означает сдвиг частотных координат

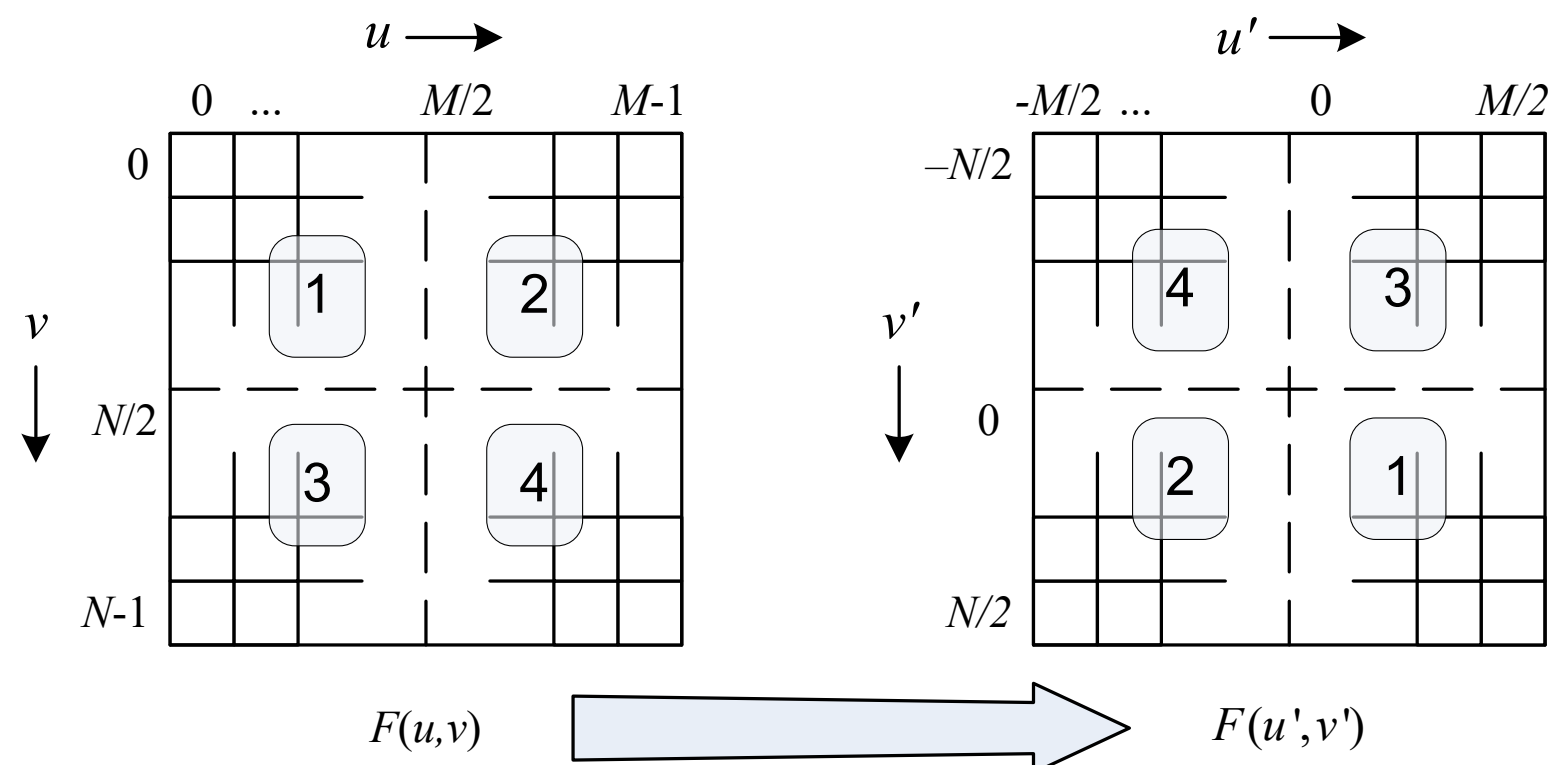
$$u' = u - (M/2) \quad \text{и} \quad v' = v - (N/2)$$

Используя свойство периодичности ДПФ

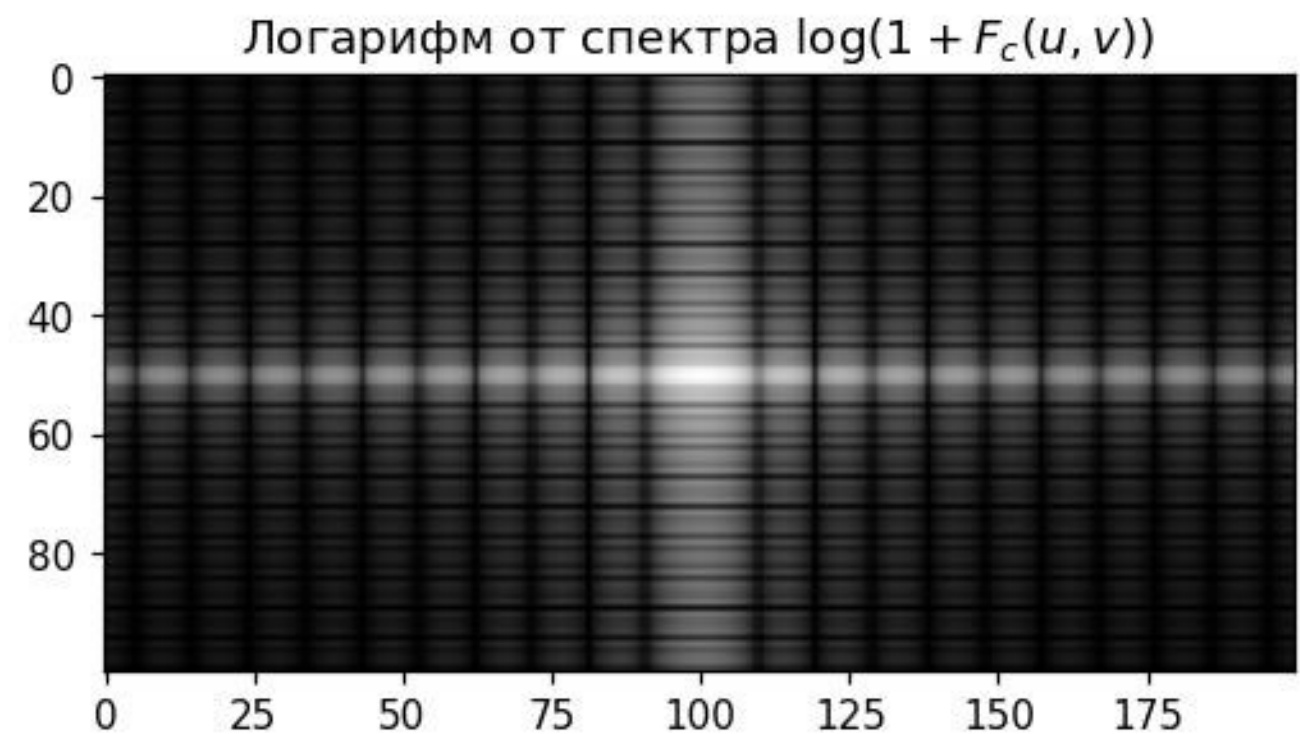
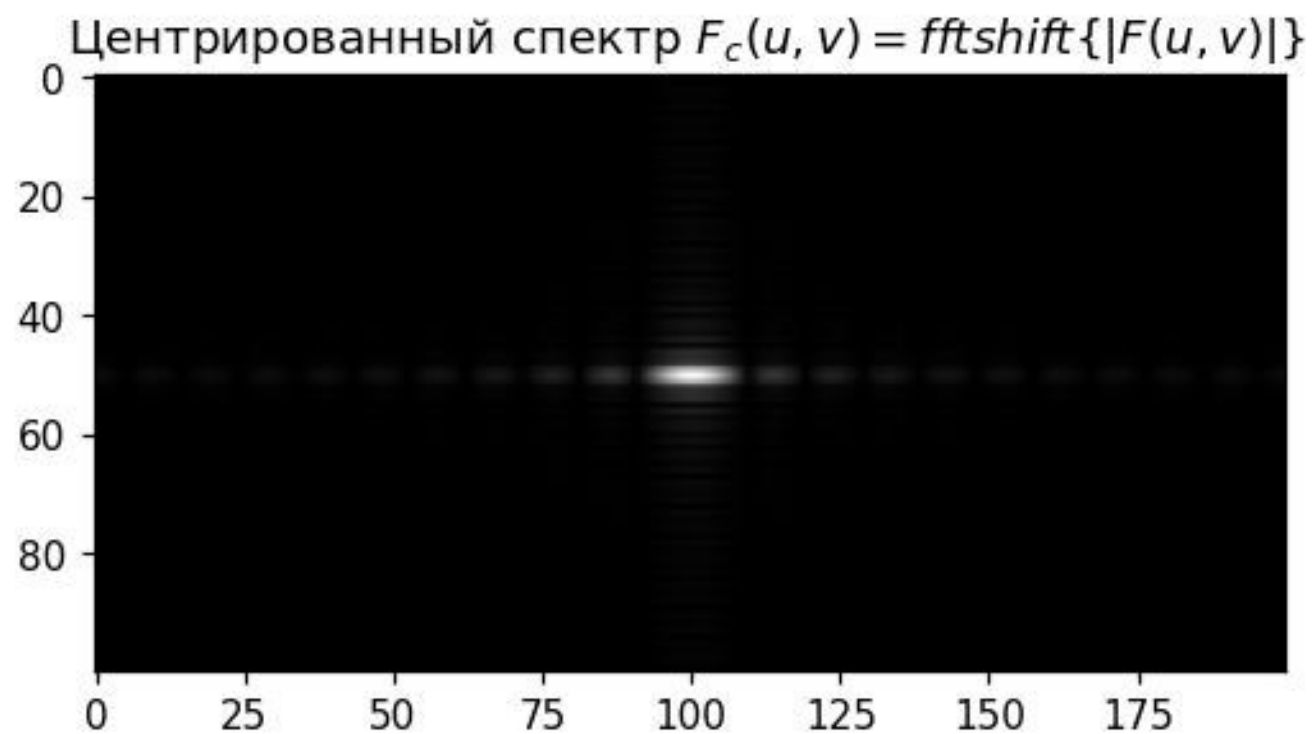
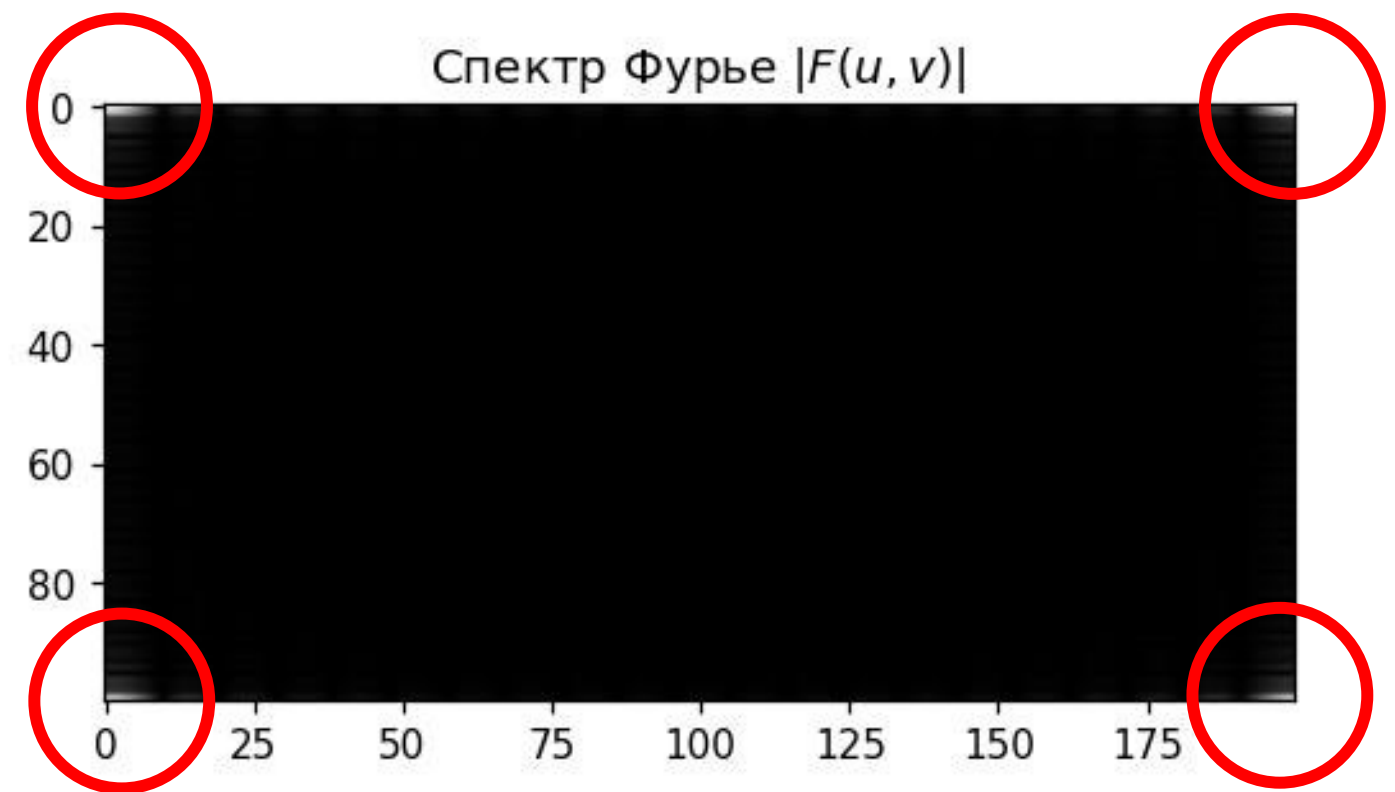
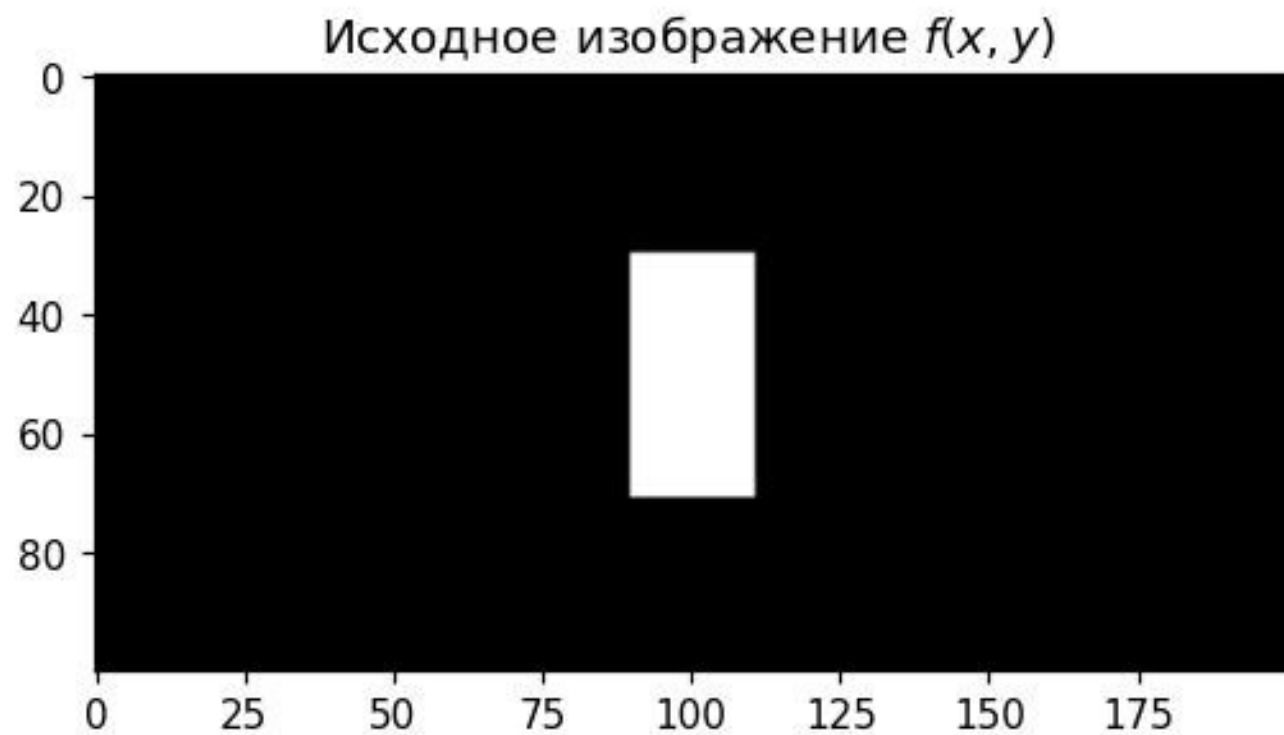
$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N).$$

Можно показать, что

$$F(u', v') = F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$



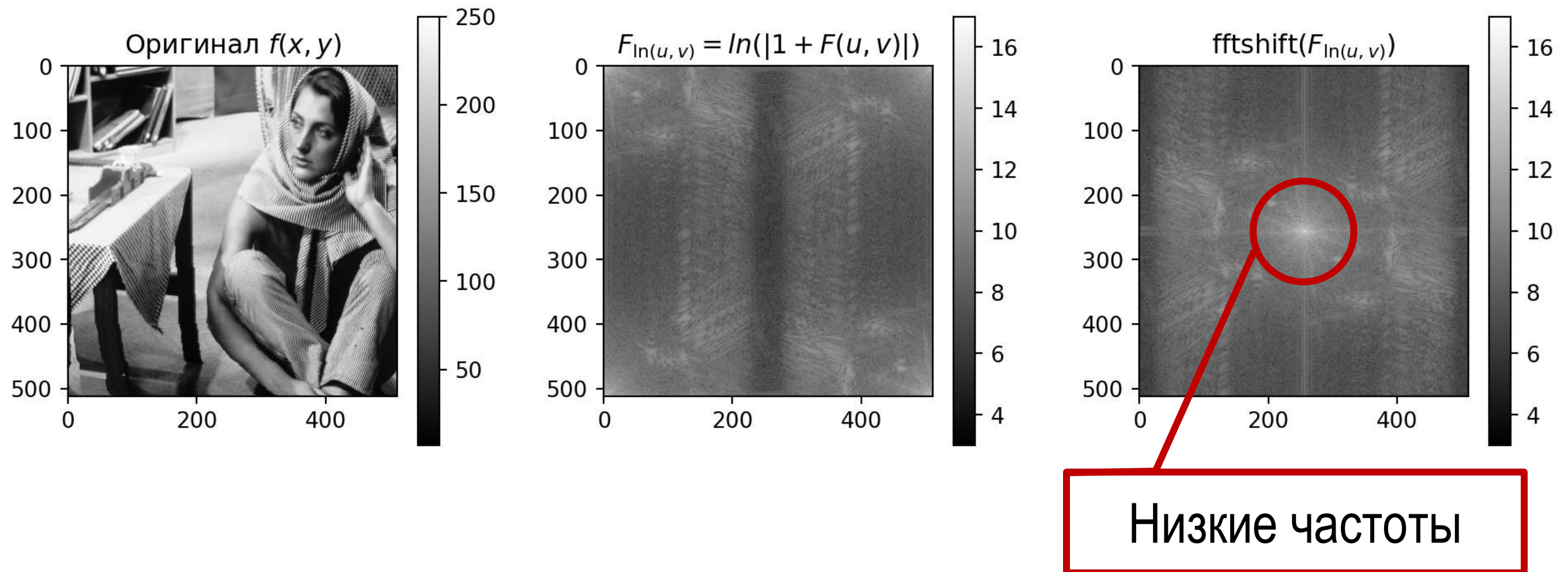
# Центрирование и логарифмирование ДПФ



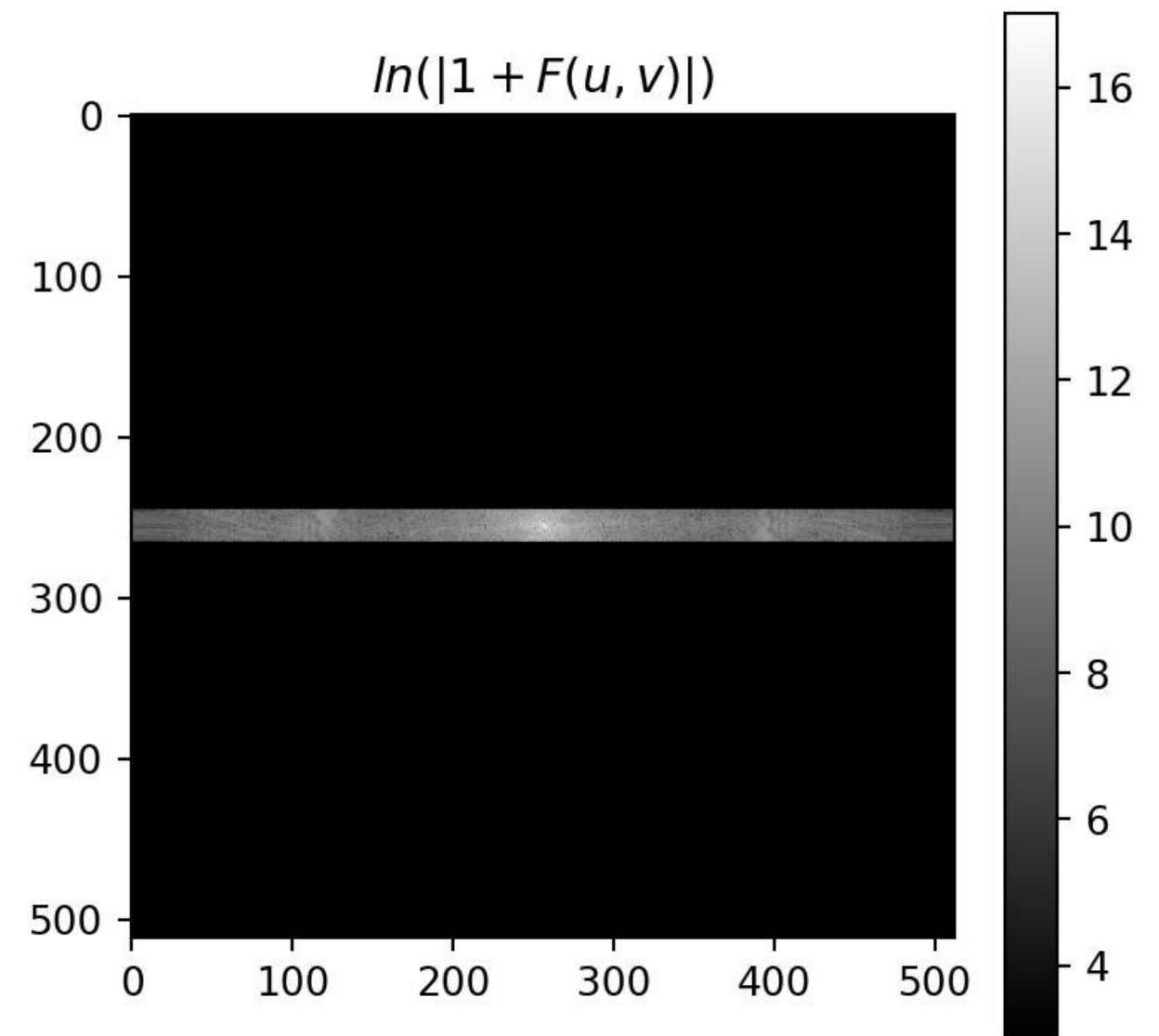
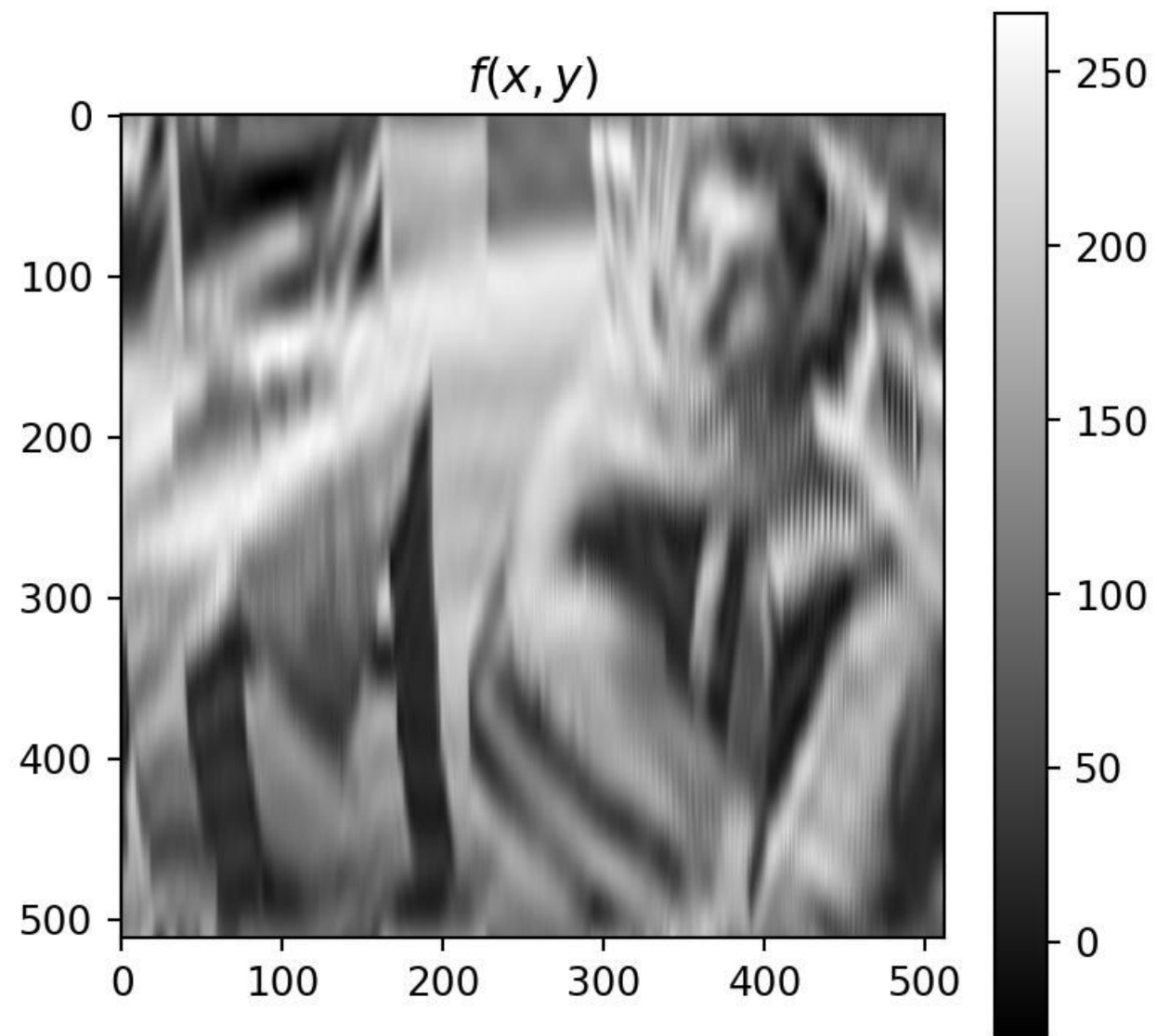


# Центрирование и логарифмирование ДПФ

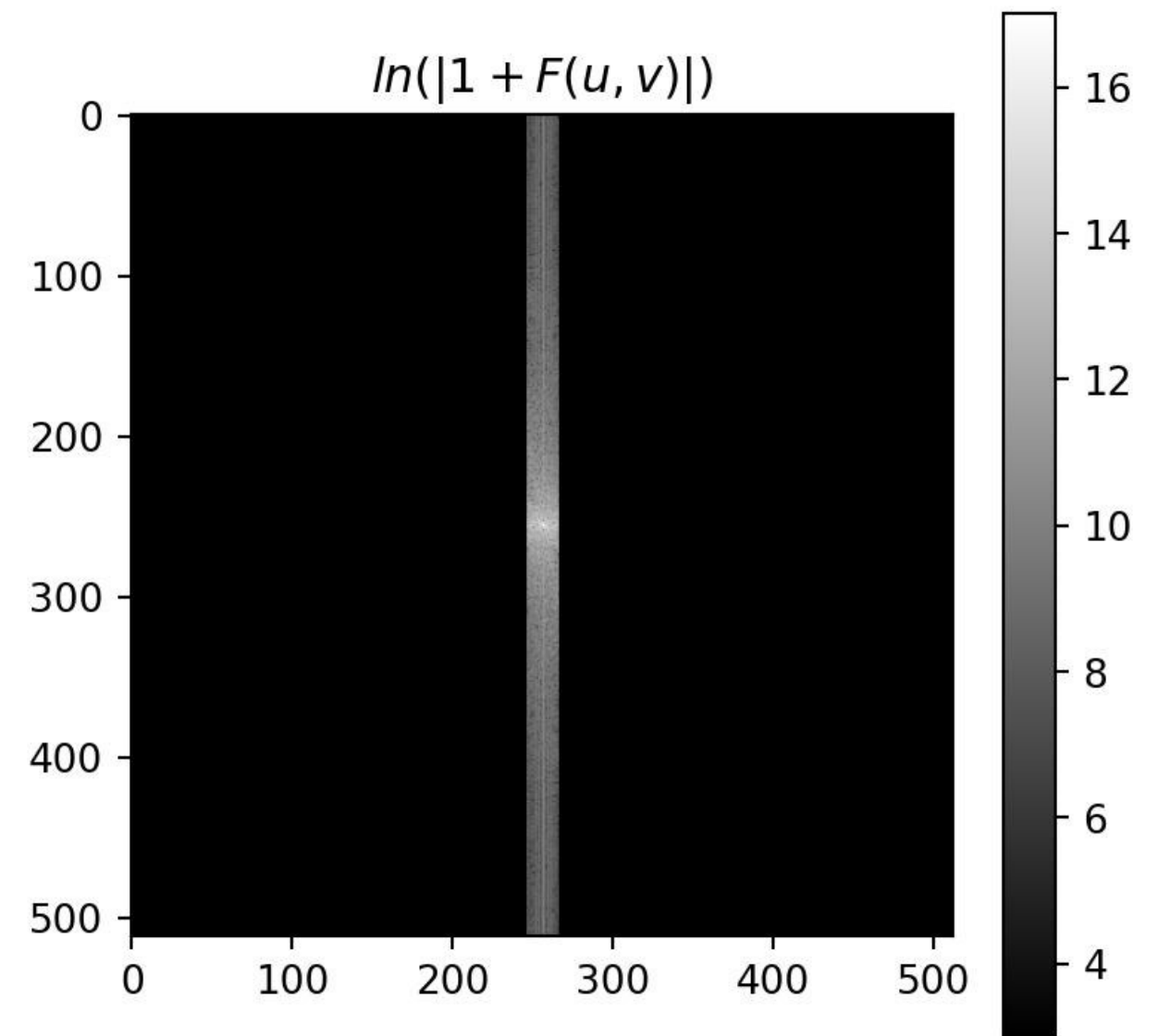
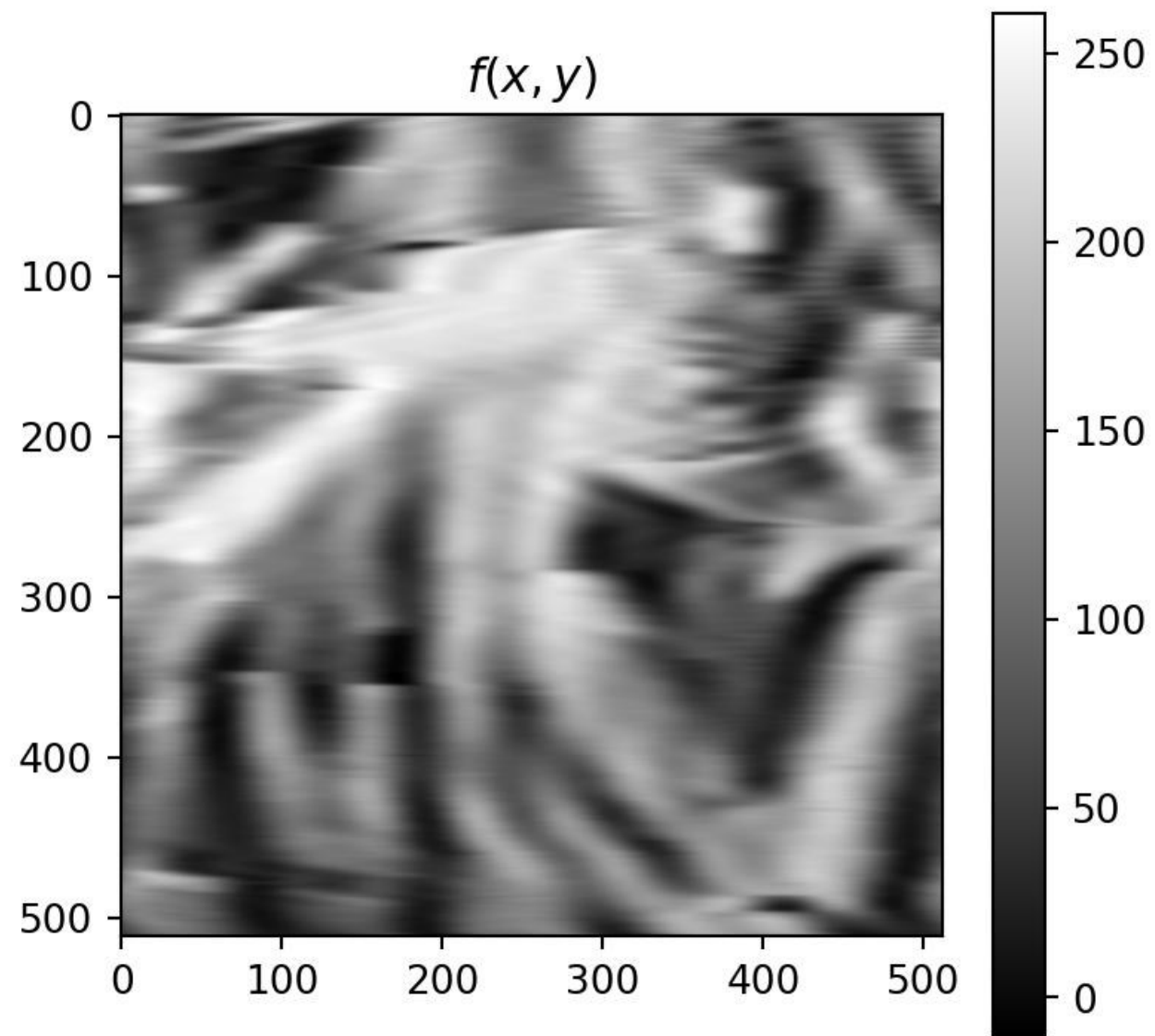
Пример логарифмического спектра реального изображения



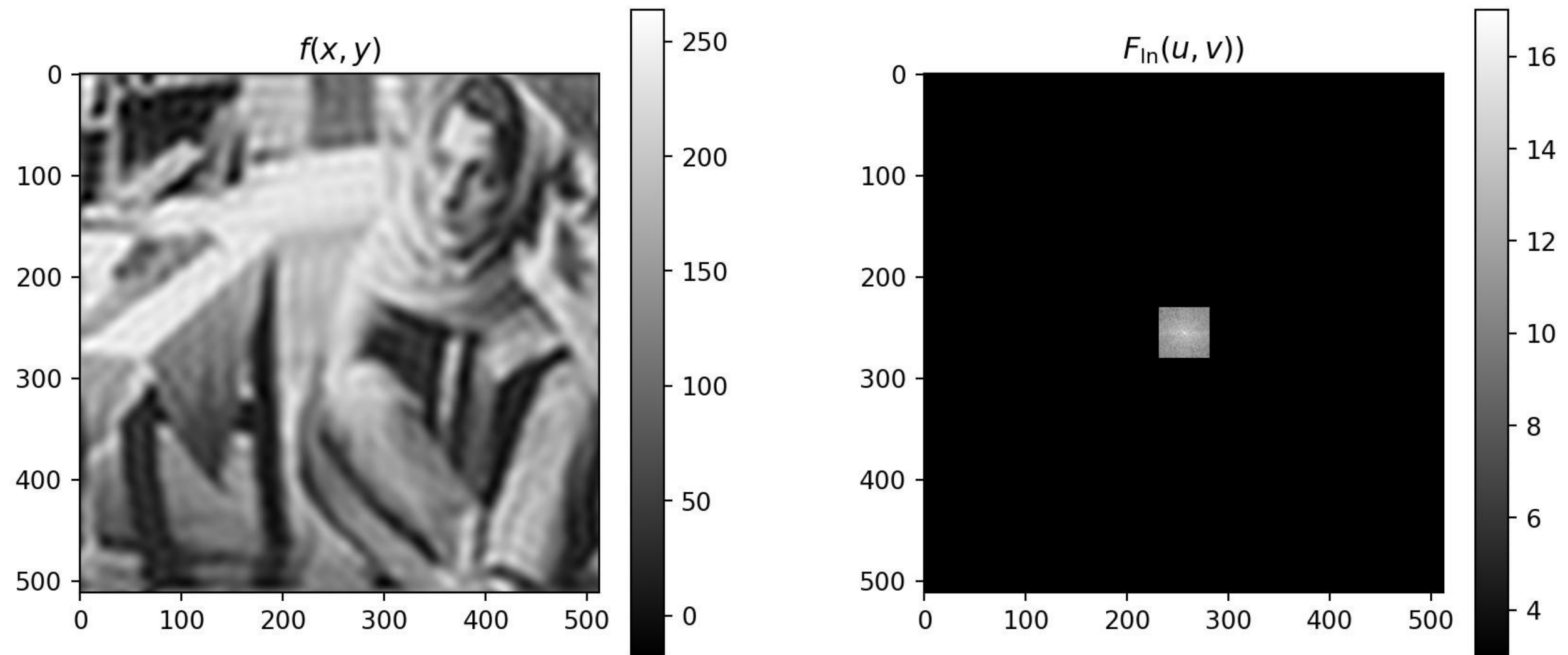
# «Горизонтальные» частоты на изображении



# «Вертикальные» частоты на изображении



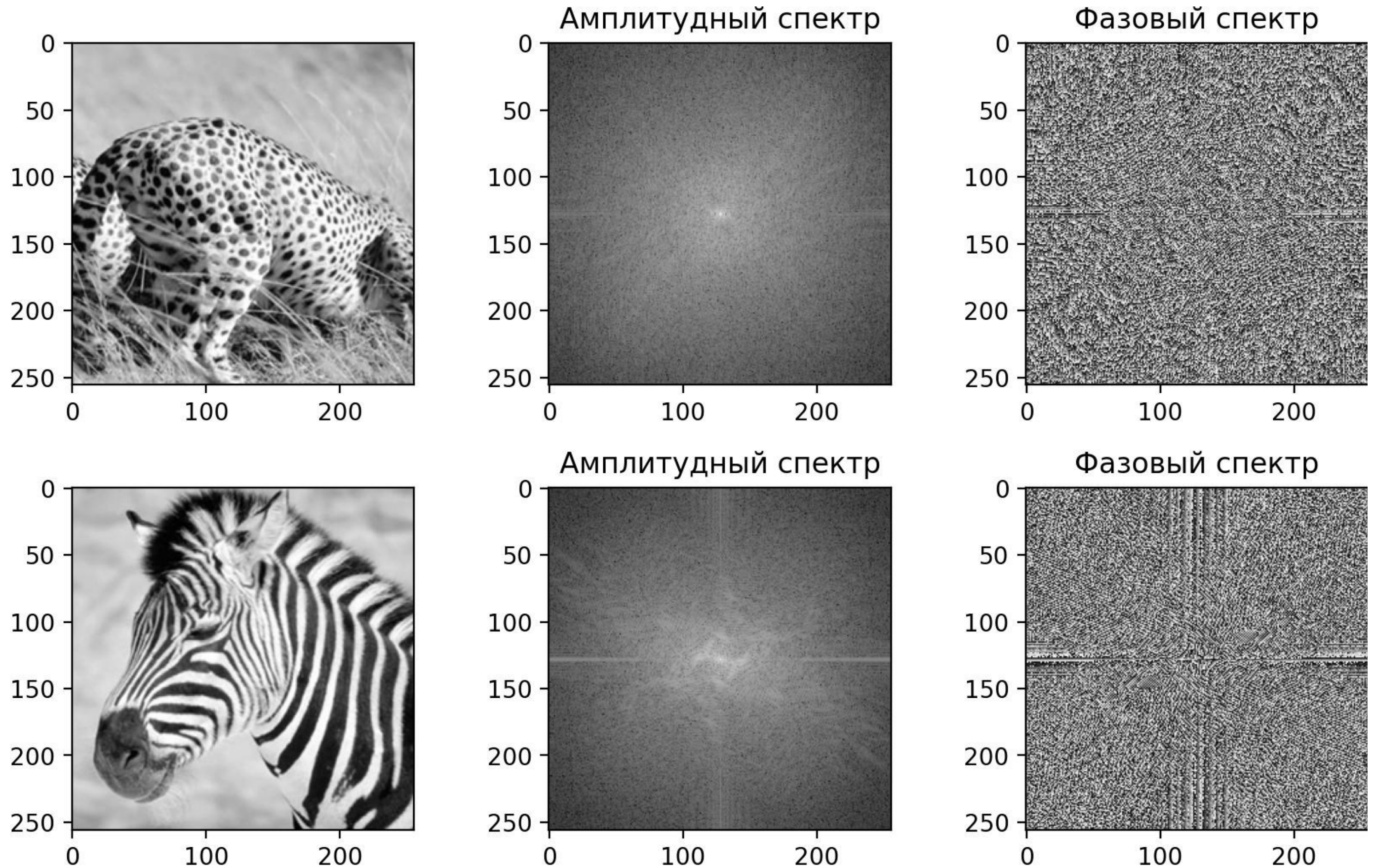
# Низкие частоты на изображении



Удаление высокочастотных компонент приводит к эффекту размывания.

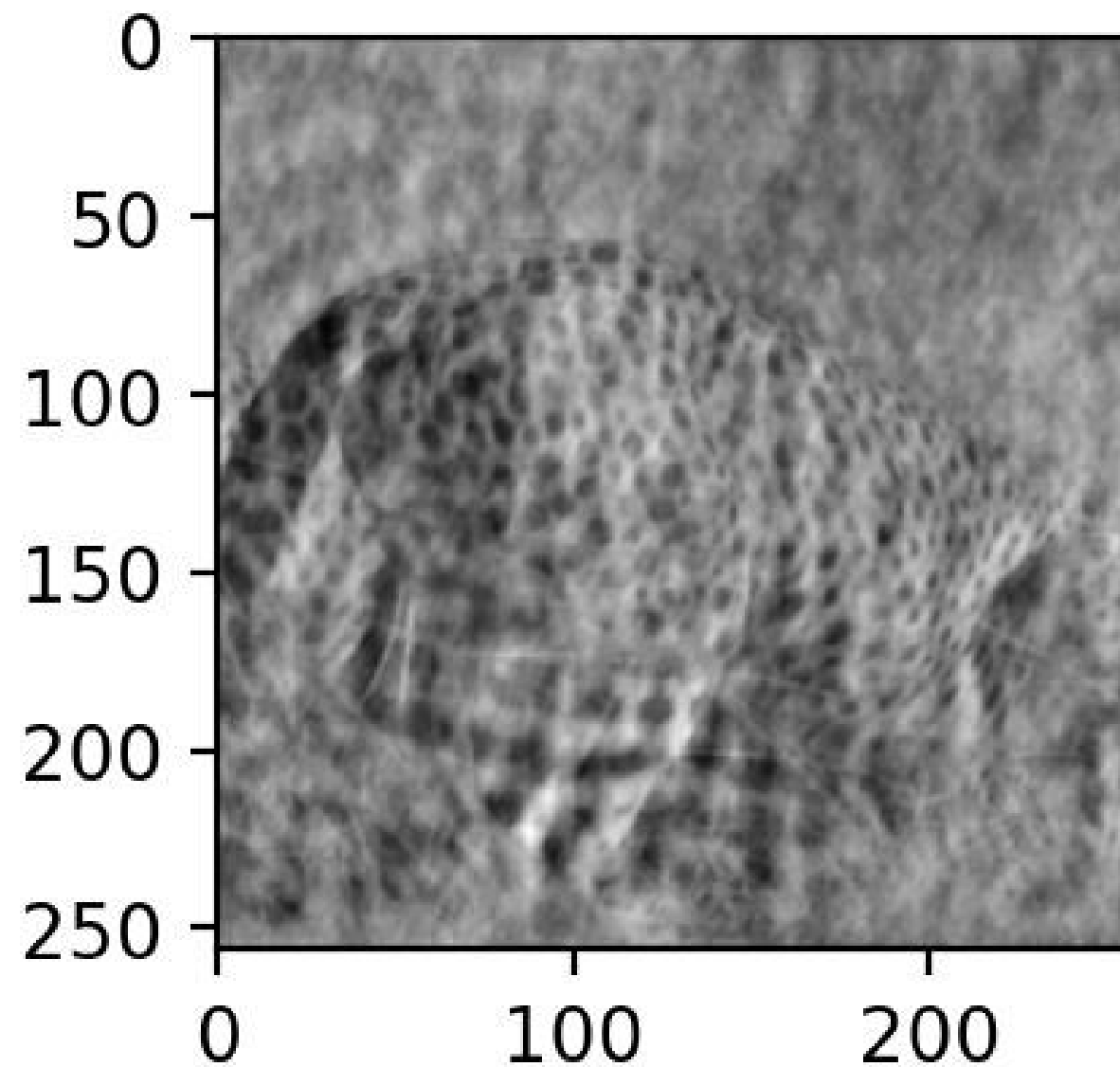


# ПФ и фазовая информация

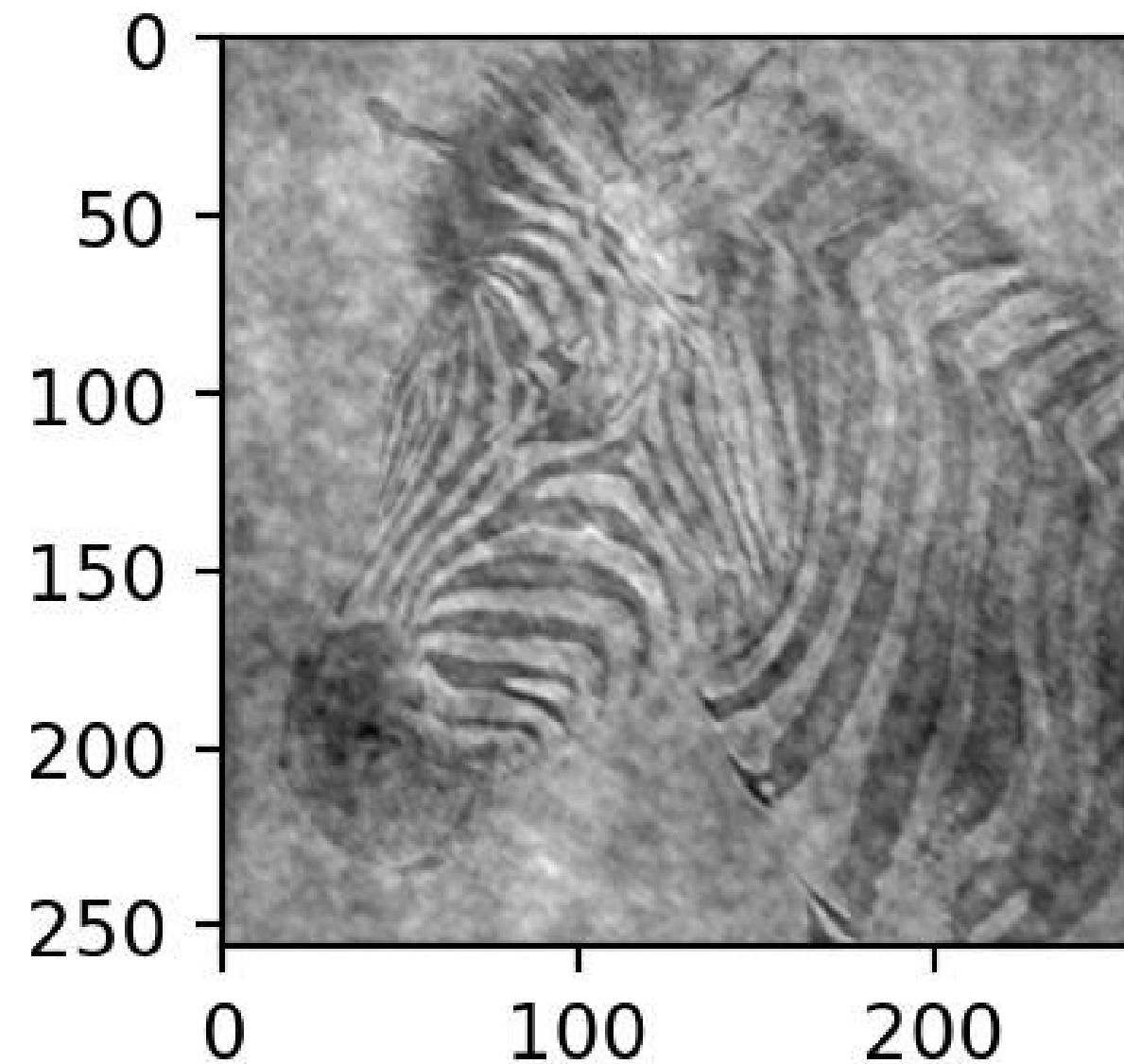




# Фазовая информация в изображениях имеет значение

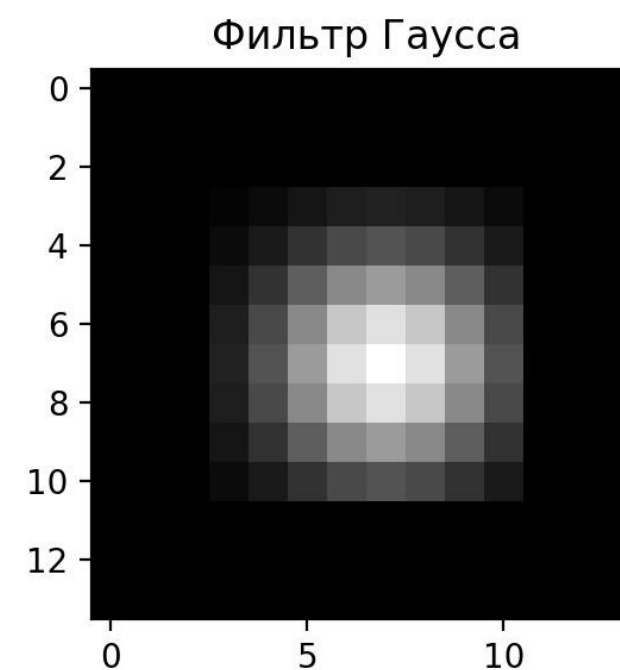
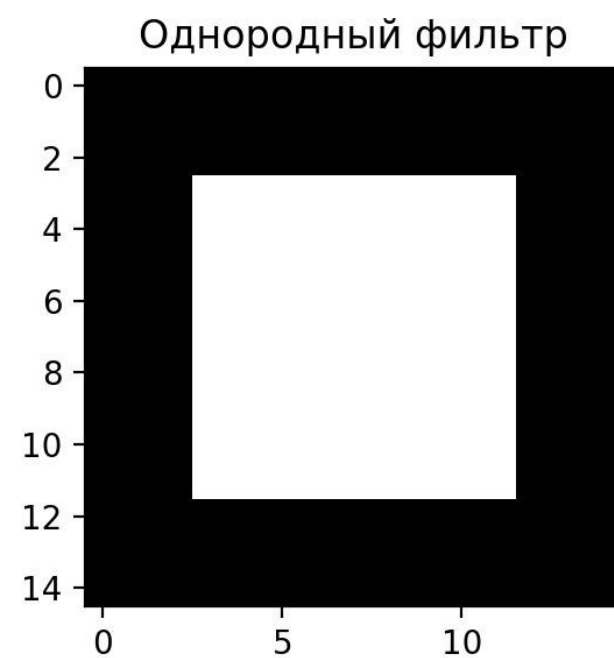
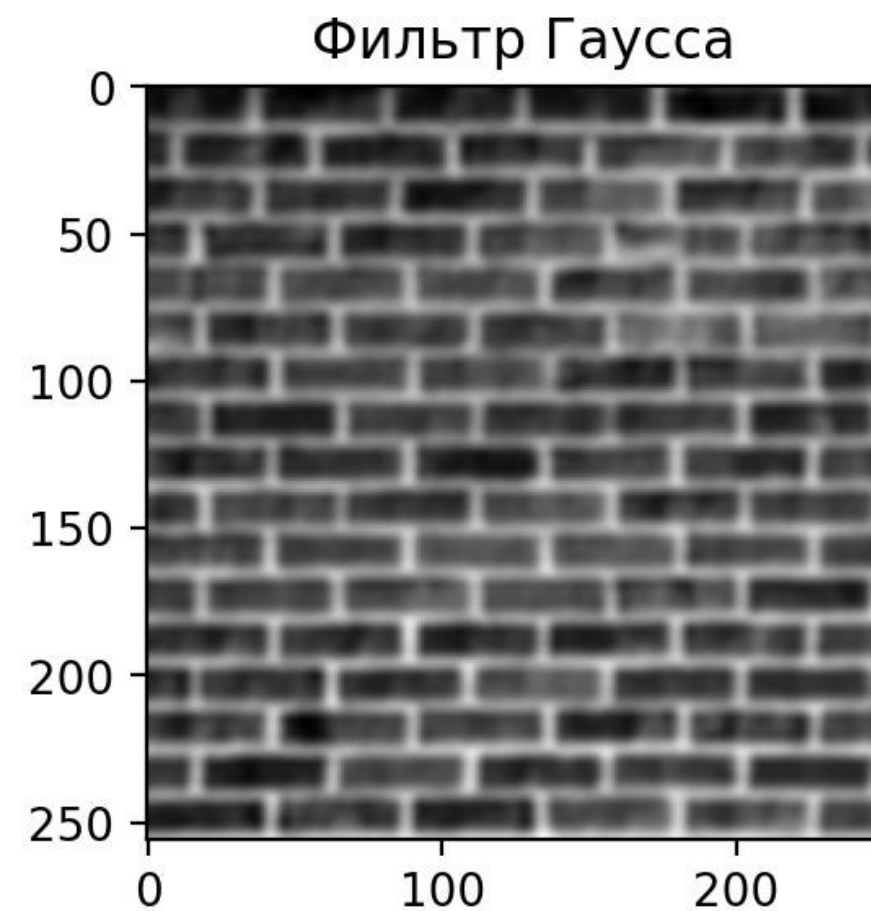
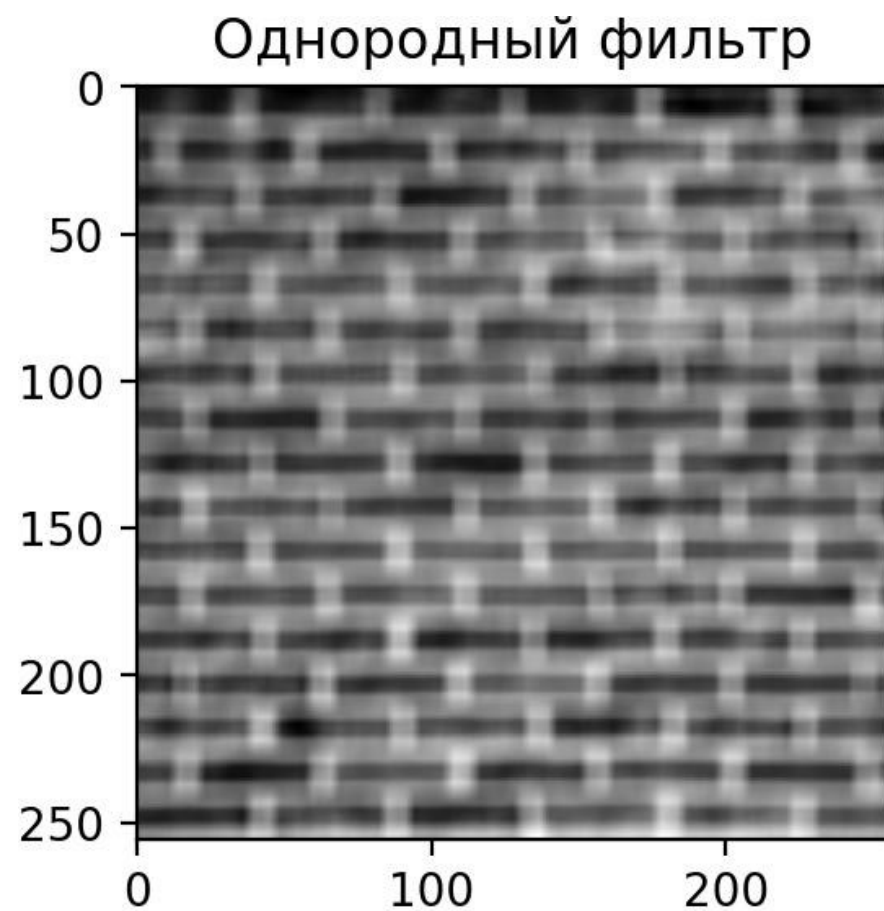


Амплитуда зебры +  
фаза леопарда

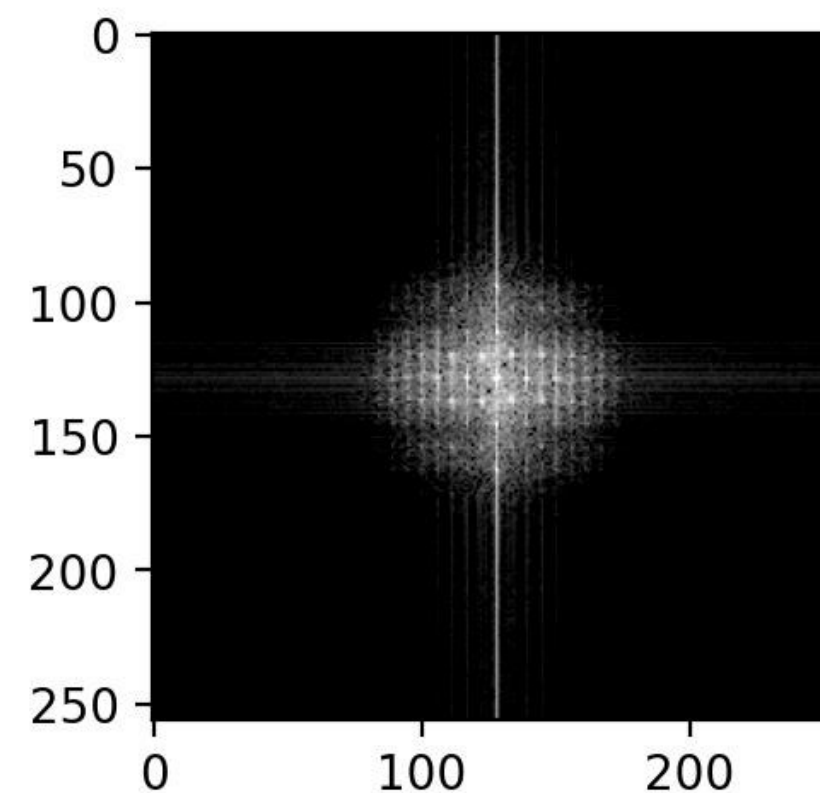
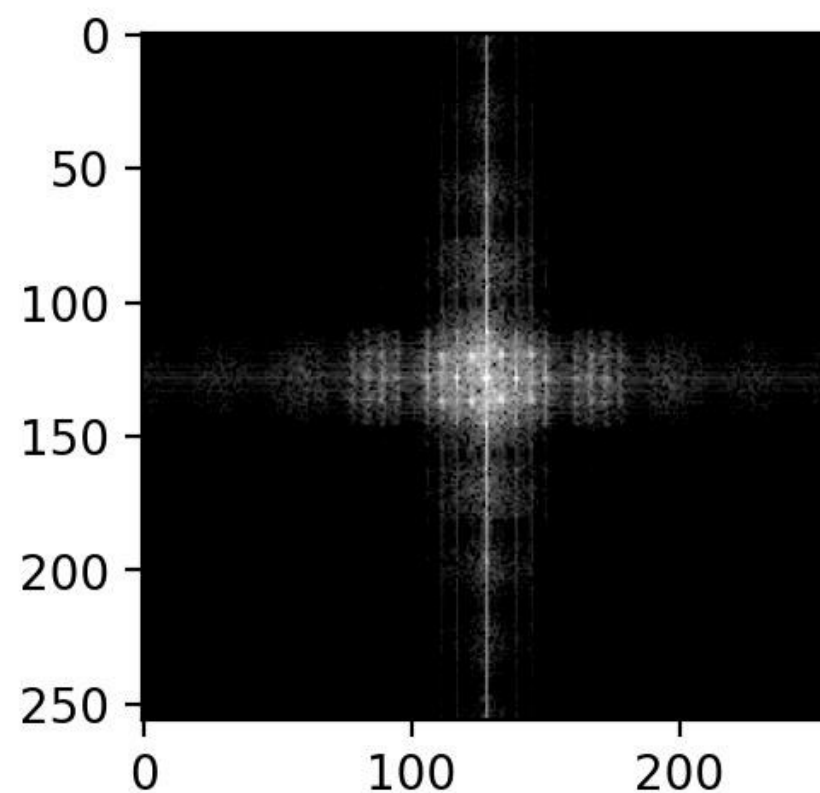
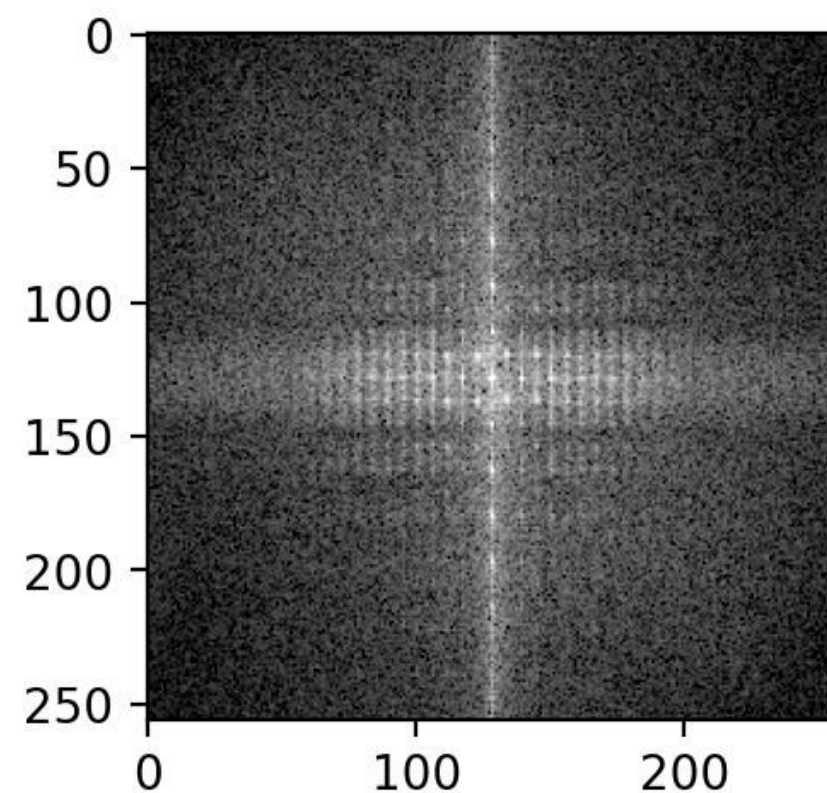
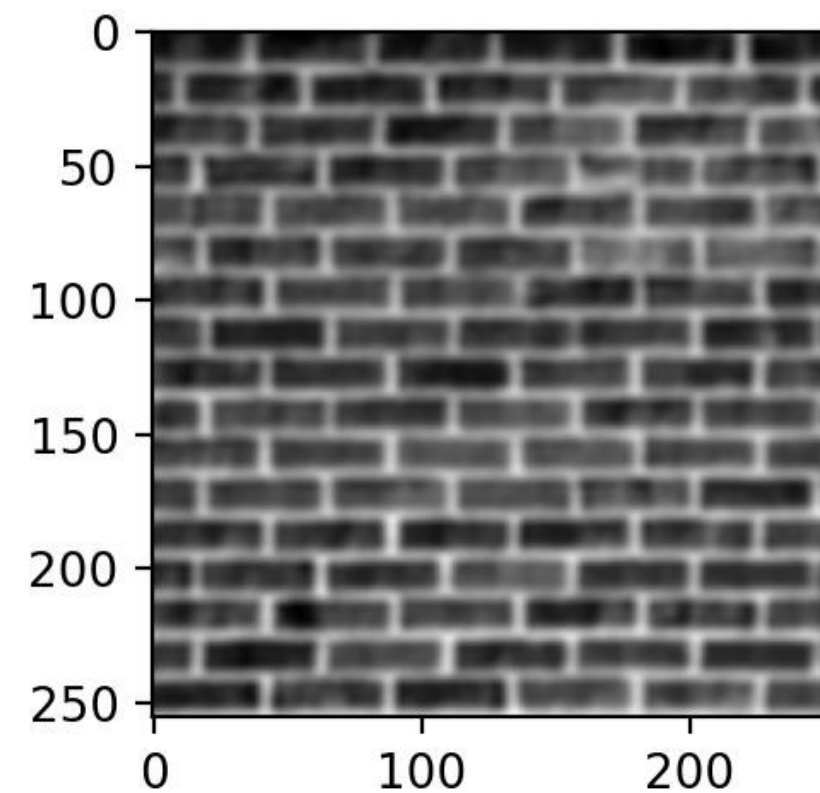
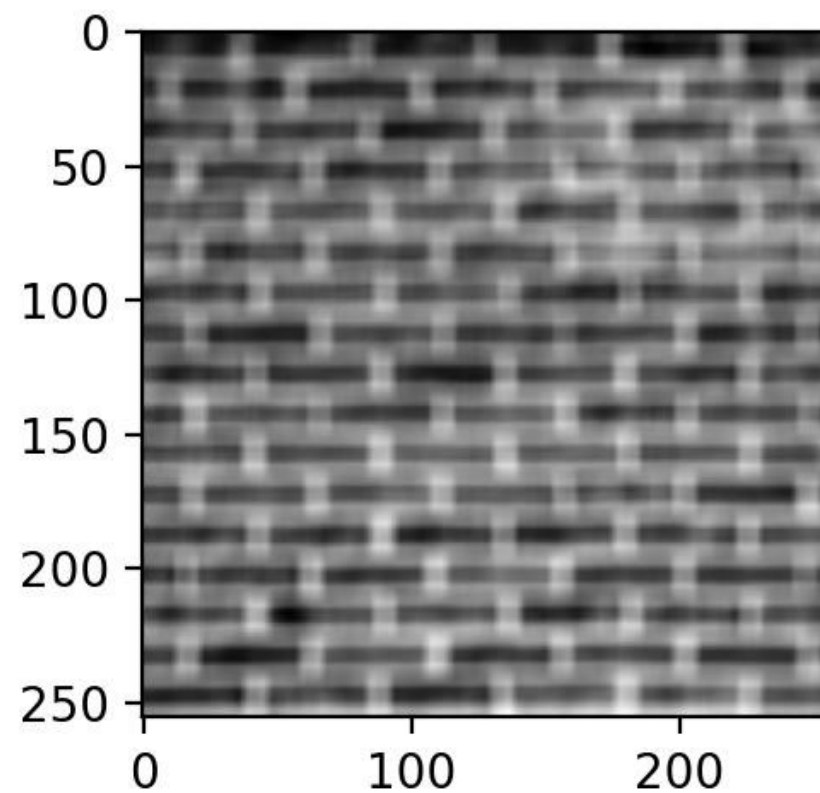
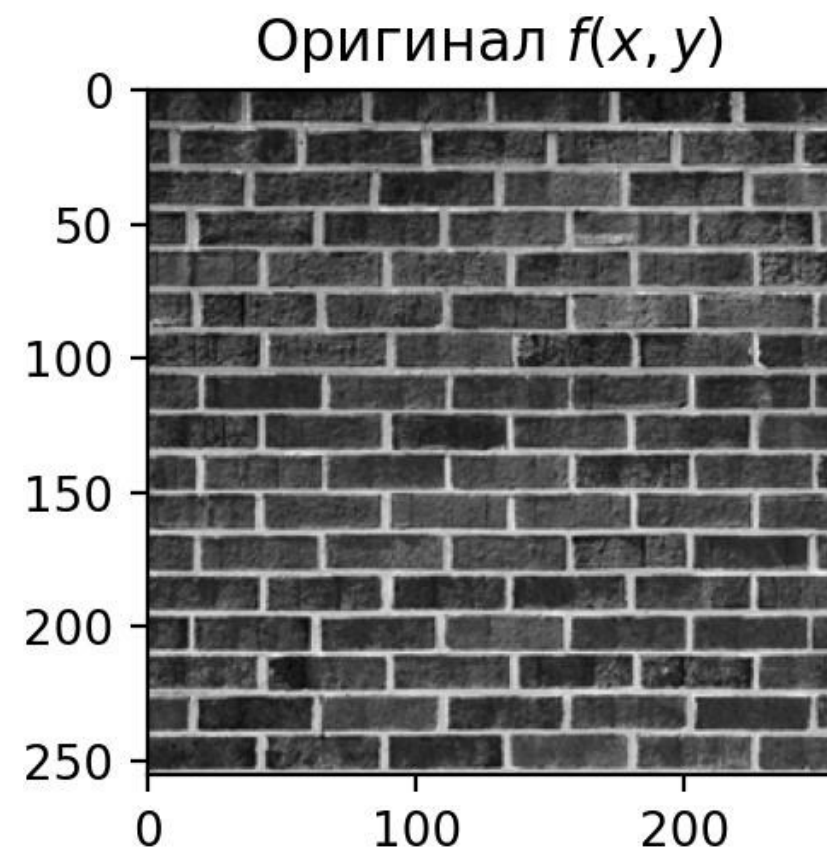


Амплитуда леопарда +  
фаза зебры

# Пересмотр сглаживающих фильтров



# Пересмотр сглаживающих фильтров





# Сдвоенные области

Изображение = пространственная область

Преобразование Фурье = частотная область

Для любых действий (операций), выполняемых в пространственной области, существуют соответствующие действия (операции), которые можно выполнить в частотной области. Обратное утверждение тоже верно.

# Сдвоенные области

**Свертка** в пространственной области = **Поэлементное умножение** в частотной области

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

**Свертка** к частотной области = **Поэлементное умножение** в пространственной области

# Вычислительная сложность свертки

- Размер изображения  $M \times N$
- Размер фильтра  $p \times p$
- Для получения одного выходного пикселя требуется  $O(p^2)$  операций
- Число выходных пикселей:  $M \times N$
- Общая вычислительная сложность:  $O(M \cdot N \cdot p^2)$

# Фильтрация в частотной области

## Основная формула

$$f(x, y) * h(x, y) \xleftrightarrow{\text{DFT}_{2D}} H(u, v)F(u, v).$$

## Шаги алгоритма:

- 1) Расширение изображения  $f$  размера  $M \times N$  до размеров  $P \times Q$  –  $f_{\text{ext}}$ ;
- 2) Вычисление ДПФ  $F(u, v)$  от расширенного изображения  $f_{\text{ext}}$ ;
- 3) Формирование передаточной функции фильтра  $H(u, v)$  размера  $P \times Q$ ;
- 4) Умножение ДПФ изображения на передаточную функцию:

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

- 5) Вычисление вещественной части обратного ДПФ от  $G(u, v)$ :

$$g = \text{real}(\text{ifft2}(G))$$

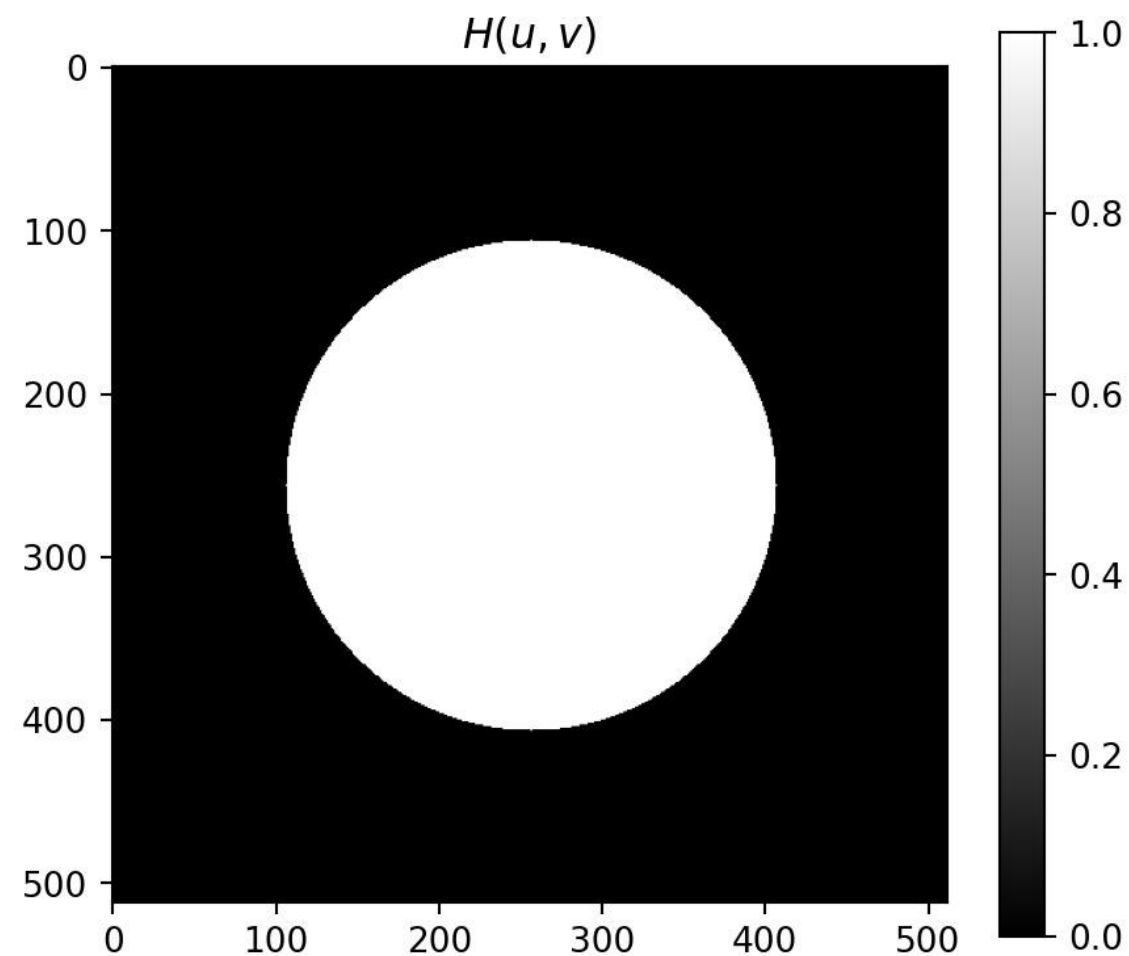
- 6) Вырезание прямоугольника из  $g$  исходных размеров  $M \times N$ .

# Идеальный низкочастотный фильтр

Идеальный низкочастотный фильтр имеет передаточную функцию

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{при } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{при } D(u, v) > D_0, \end{cases}$$

где  $D_0$  – неотрицательное число, а  $D(u, v)$  – расстояние от центра фильтра до точки  $(u, v)$ .

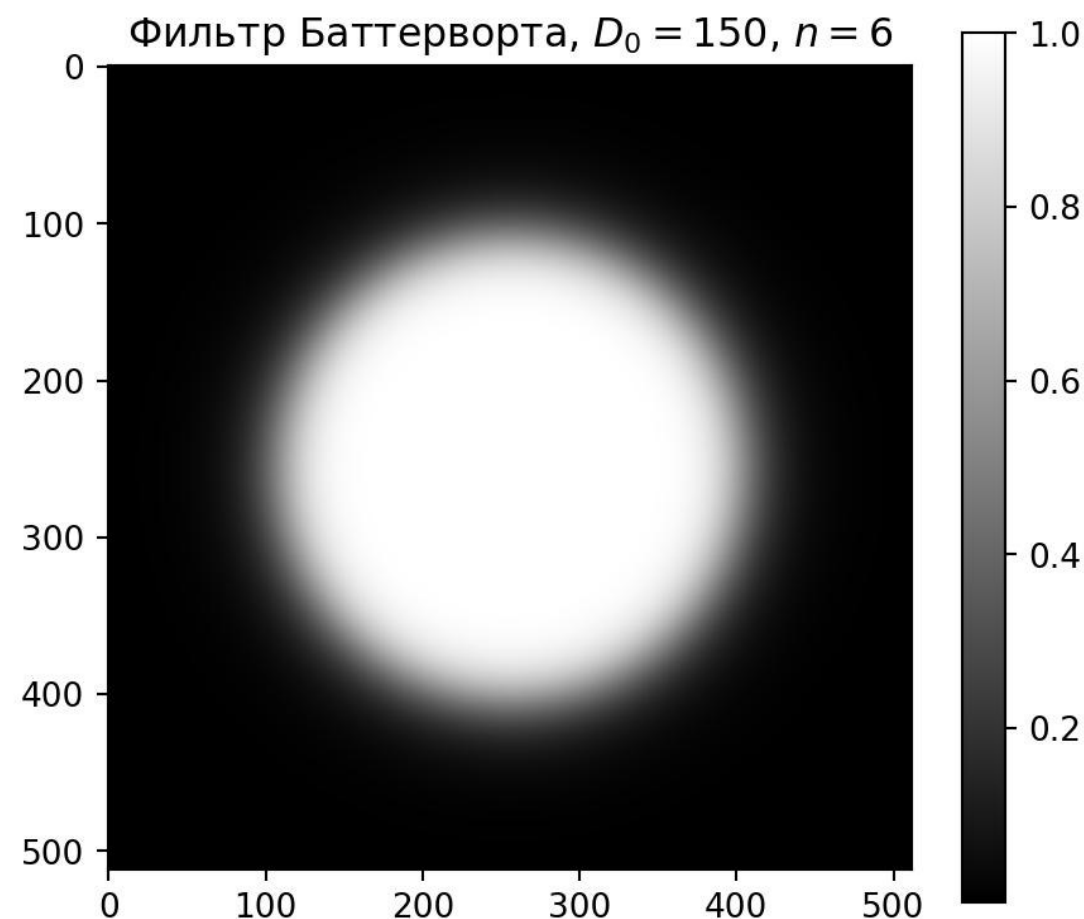


# Низкочастотный фильтр Баттерворта

Идеальный низкочастотный фильтр  $n$ -го порядка

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

где  $D_0$  – неотрицательное число, а  $D(u, v)$  – расстояние от центра фильтра до точки  $(u, v)$ .

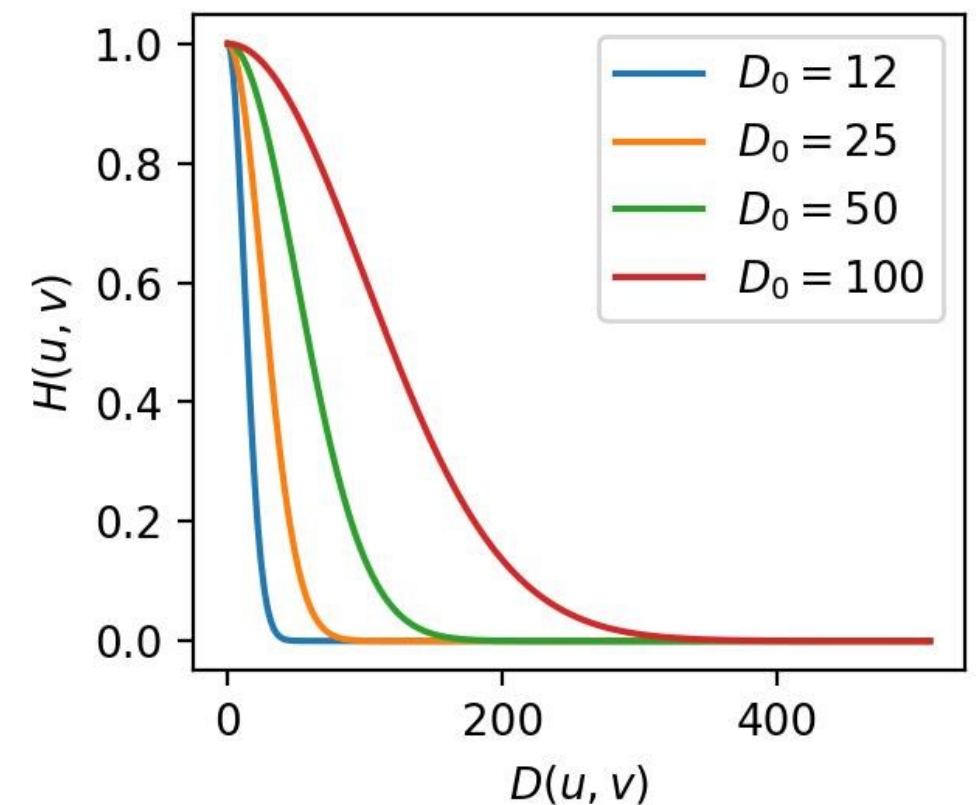
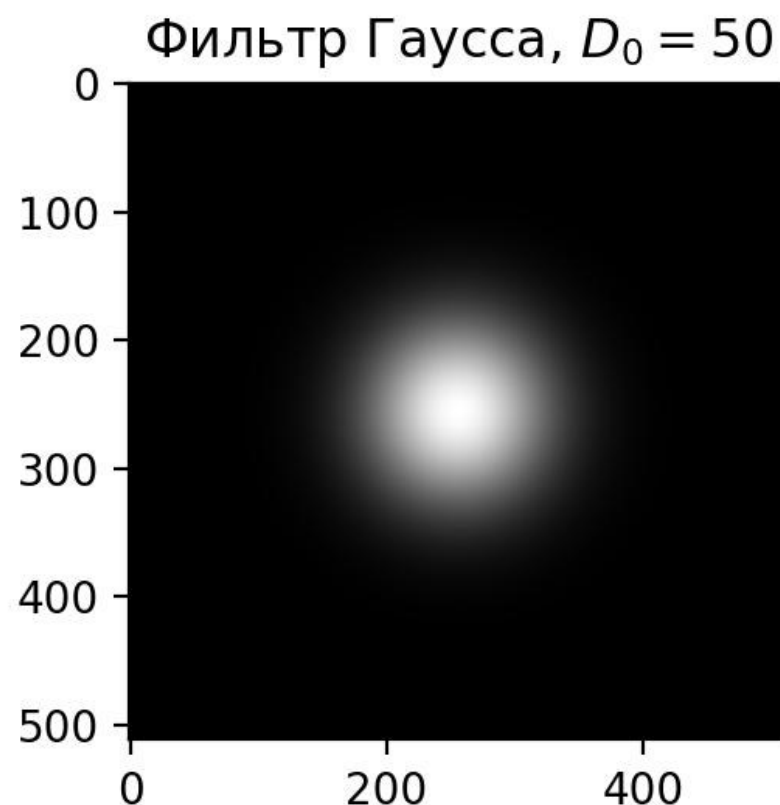
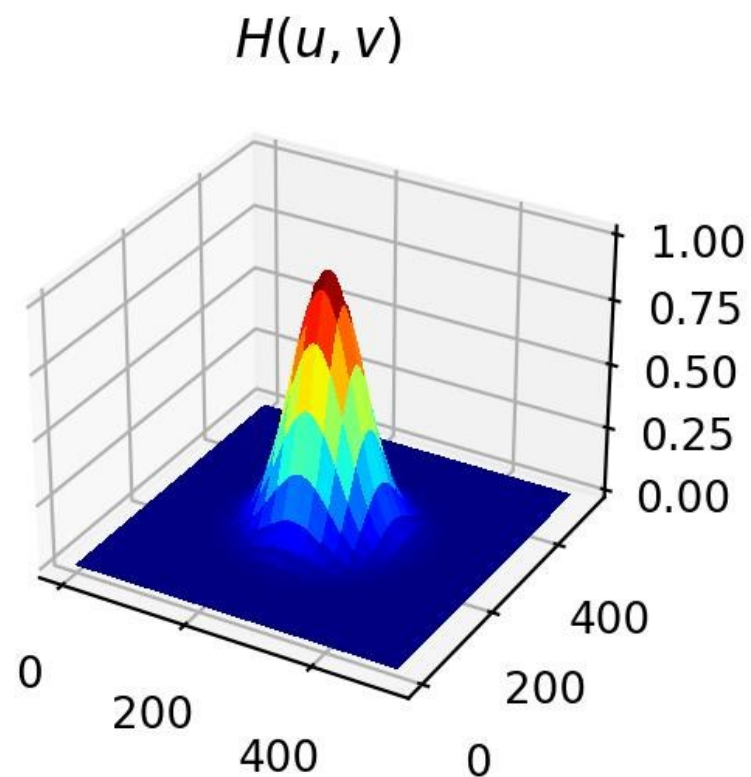


# Низкочастотный фильтр Гаусса

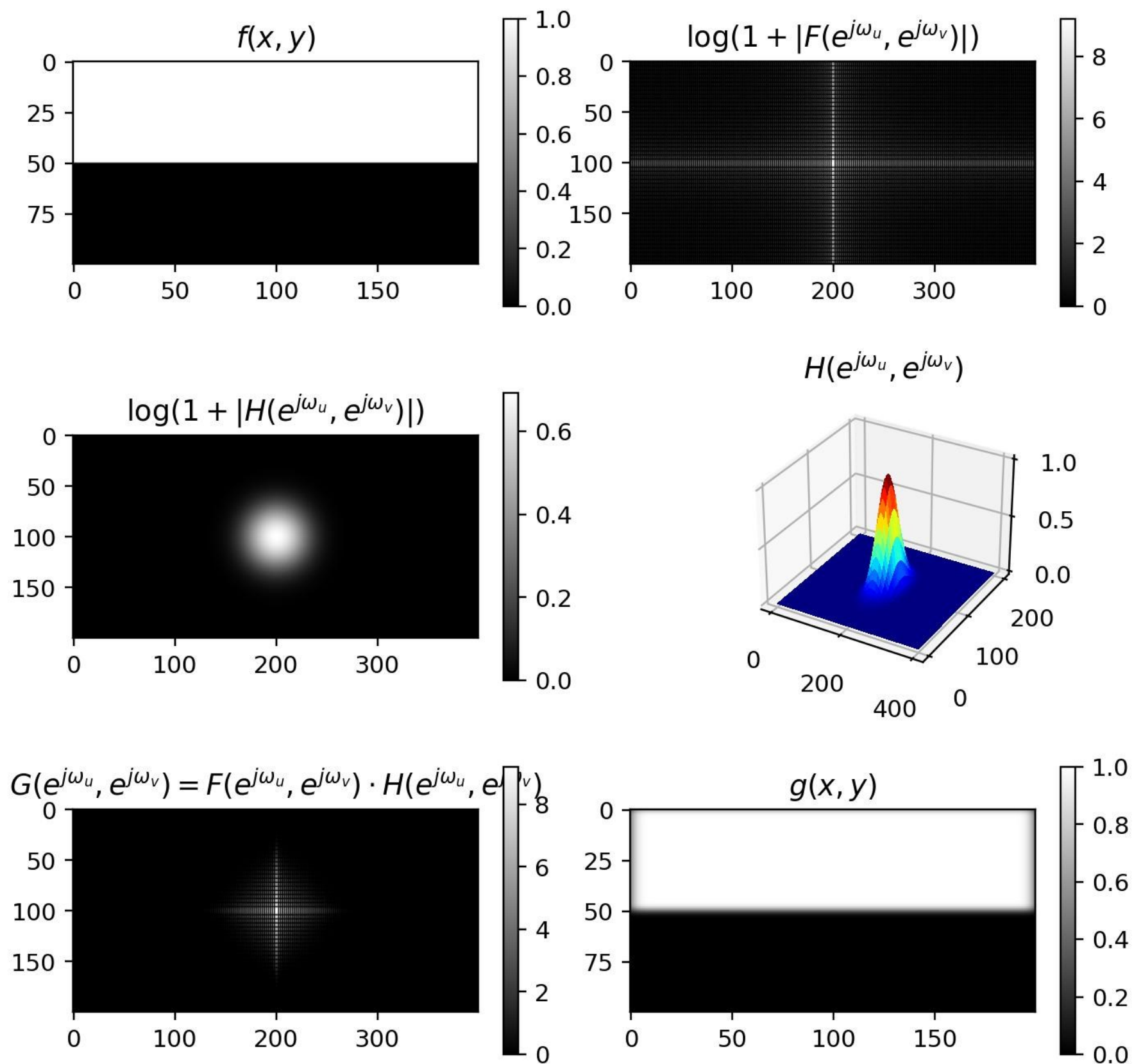
Идеальный низкочастотный фильтр Гаусса

$$H(u, v) = e^{-D(u, v)/2D_0^2}$$

где  $D_0$  – частота среза, а  $D(u, v)$  – расстояние от центра от центра частотного прямоугольника. Когда  $D(u, v) = D_0$ , значение передаточной функции фильтра падает до 0,607.



# Пример фильтрации

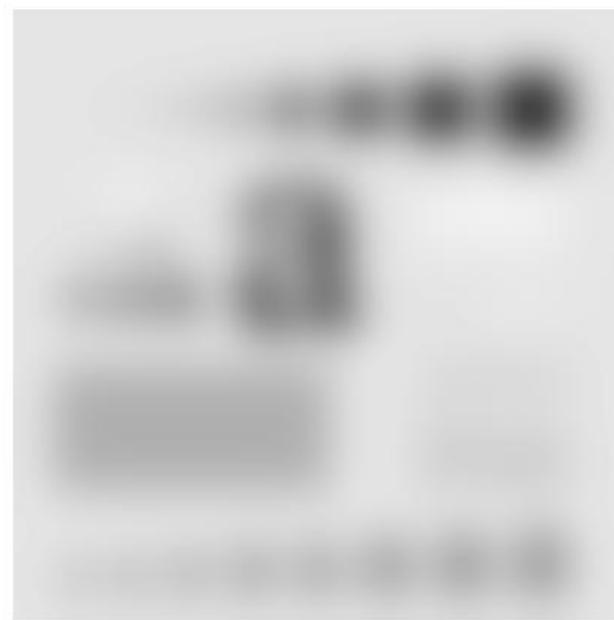




# Пример фильтрации гауссовым фильтром



$D_0 = 5$



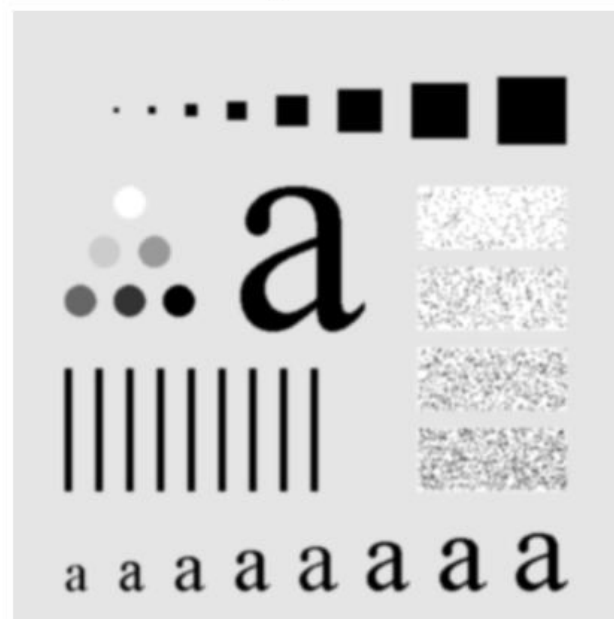
$D_0 = 15$



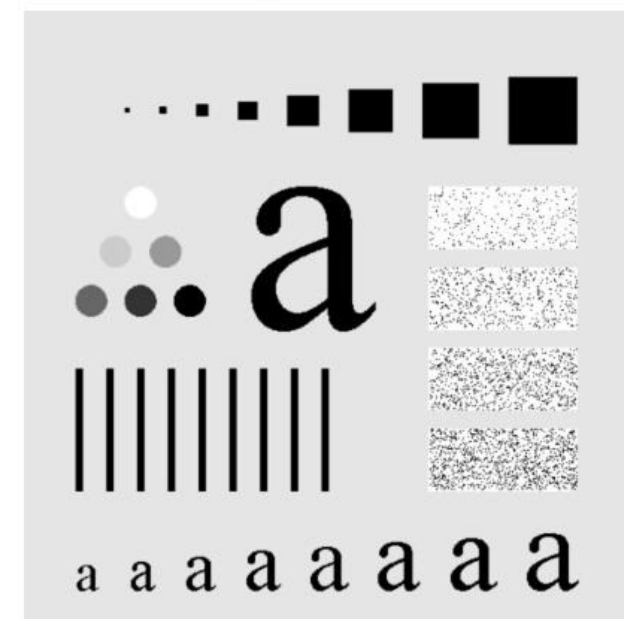
$D_0 = 30$



$D_0 = 80$



$D_0 = 230$



# Пример фильтрации текста с плохим разрешением

Исходное изображение

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

$D_0 = 120$

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

# Пример фильтрации изображения с артефактами

Исходное изображение



$D_0 = 20$





# Пример фильтрации изображения с артефактами

Исходное изображение



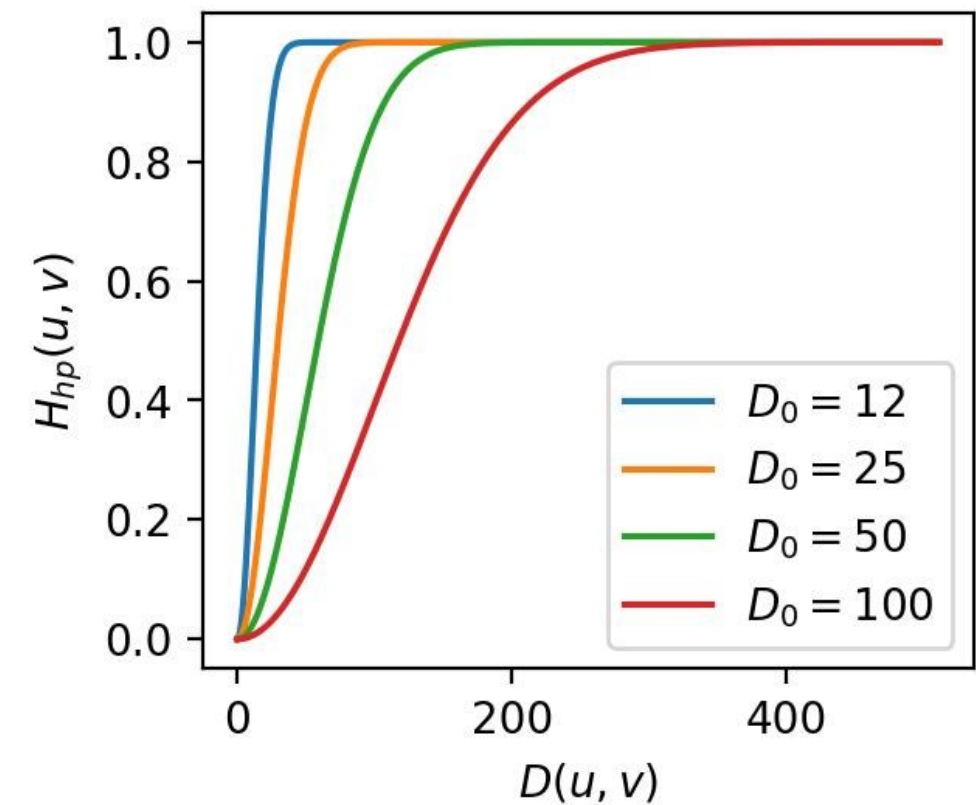
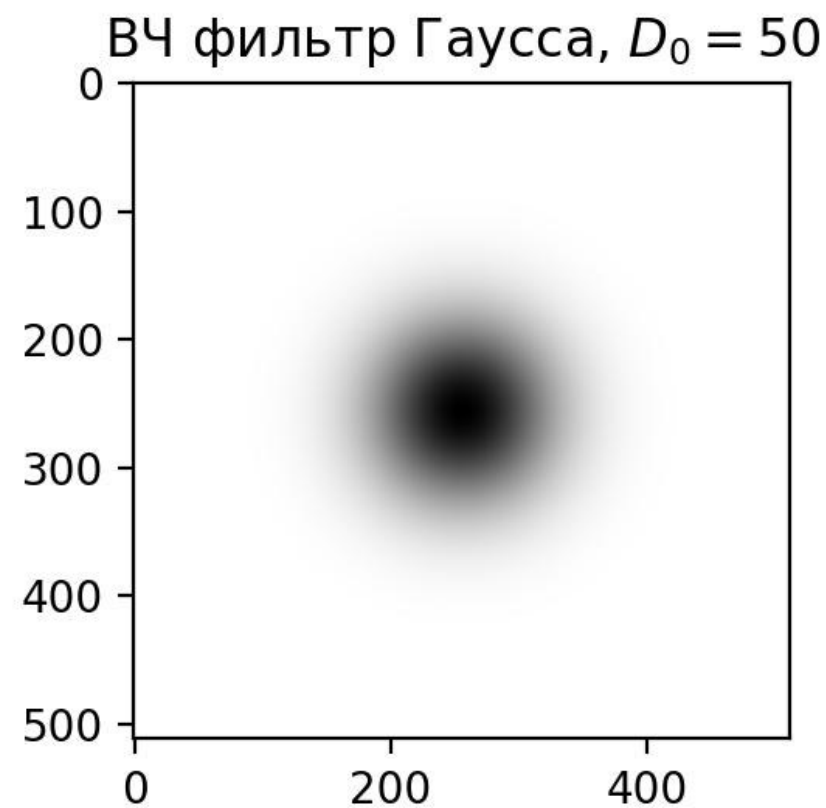
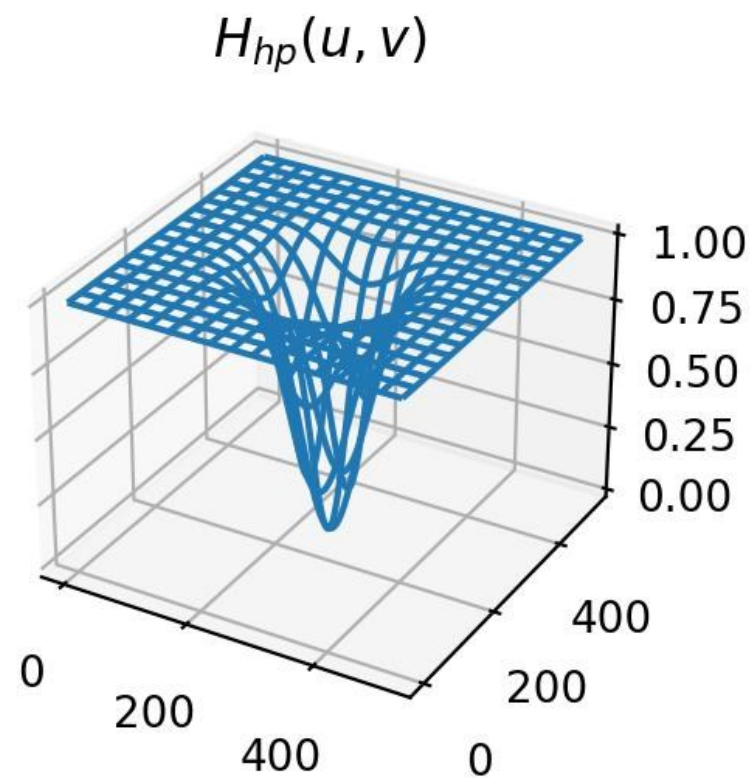
$D_0 = 30$



# Высокочастотные фильтры

Получение фильтра высоких частот из фильтра низких частот:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v).$$



# Фильтрация идеальным фильтров высоких частот

Исходное изображение



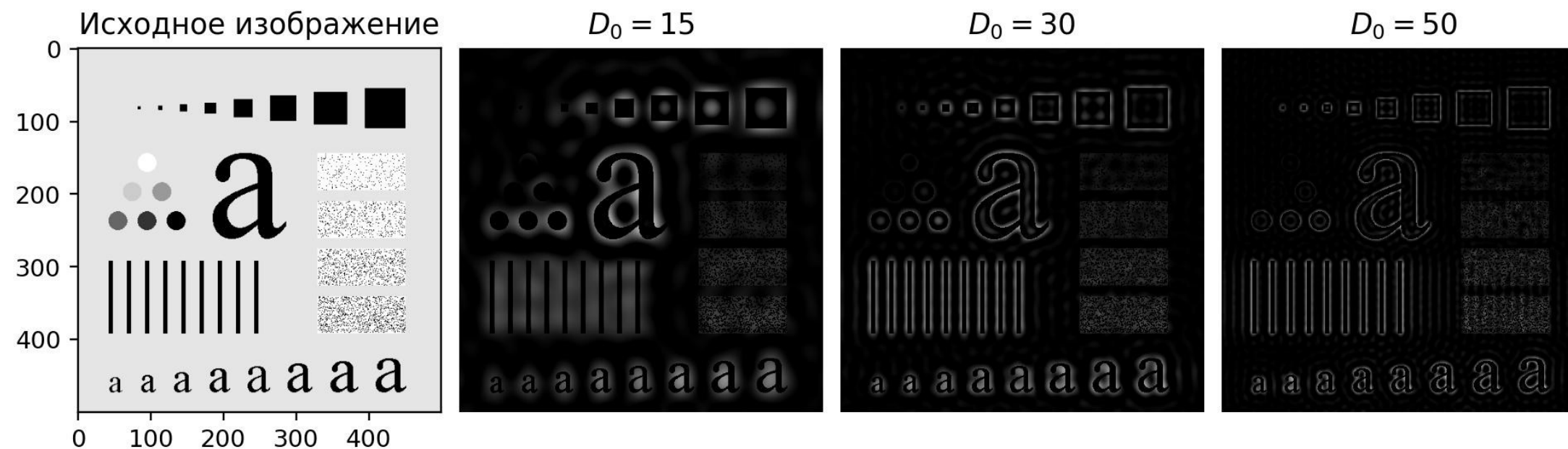
Ideal HPF  $D_0 = 20$



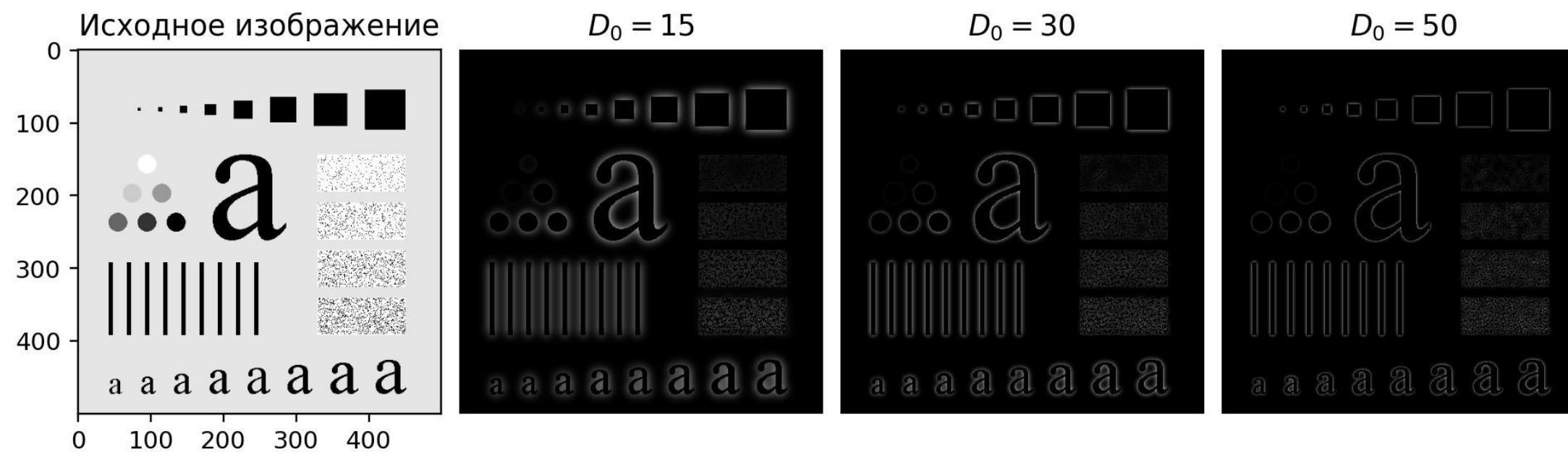


# Результаты ВЧ фильтрации изображения

## Идеальный фильтр



## Фильтр Гаусса



# Повышение резкости при частотной фильтрации

ВЧ фильтры отбрасывают постоянную составляющую так, что в итоге средняя интенсивность изображения становится равной нулю. Чтобы это компенсировать нужно добавить смещение к ВЧ фильтру. Если смещение комбинируется вместе с умножением передаточной функции на коэффициент усиления, то итоговая процедура будет называться фильтрацией с усилением высоких частот:

$$H_{hfe}(u, v) = a + bH_{hp}(u, v),$$

где  $a$  – смещение,  $b$  – коэффициент усиления.

$$a \geq 0, b > a.$$

Характерные значения  $a = 0,25$  до  $0,50$ ;  $b = 1,5$  до  $2,5$ .