Теория и применение цифровой обработки сигналов

Z-преобразование

д.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Введение

ДВПФ (отправной пункт)

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}.$$

Введение

ДВПФ (отправной пункт)

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}.$$

Z-преобразование – обобщение ДВПФ: $z = e^{\sigma + j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Введение

ДВПФ (отправной пункт)

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}.$$

Z-преобразование – обобщение ДВПФ: $z = e^{\sigma + j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Операторная форма записи:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z).$$

Соответствие между сигналом $x(n)$ и его z-преобразованием записывают как

$$x(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z).$$

Анализ и синтез

Уравнение анализа

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (1)$$

Что показывает уравнение анализа?

Уравнение (1) «сравнивает» (анализирует) сигнал $x(n)$ с экспонентой z^n для того, чтобы определить масштабирующий множитель $X(z)$.

Анализ и синтез

Уравнение анализа		Уравнение синтеза	
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$	(1)	$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$	(2)

Что показывает уравнение анализа?

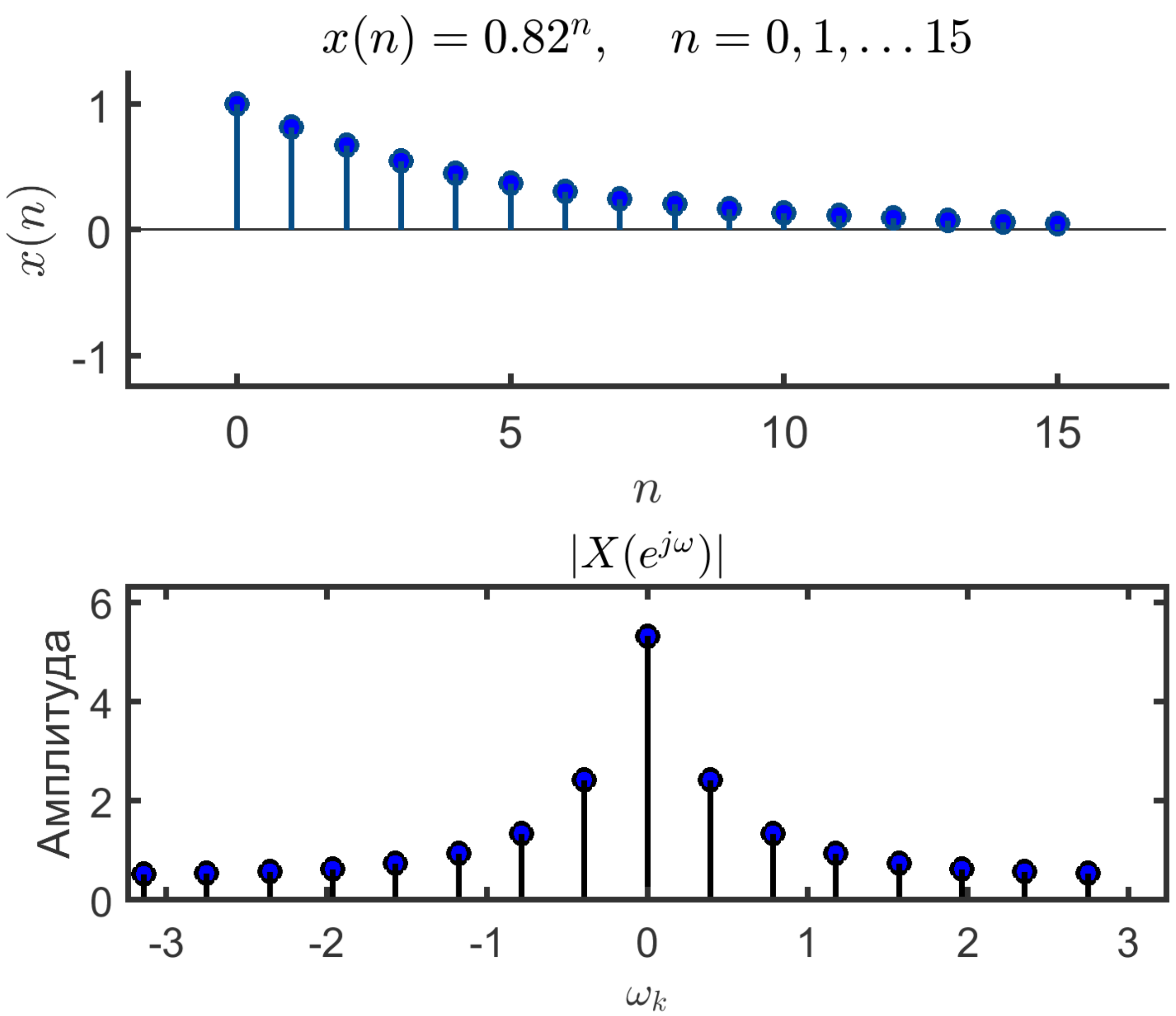
Уравнение (1) «сравнивает» (анализирует) сигнал $x(n)$ с экспонентой z^n для того, чтобы определить масштабирующий множитель $X(z)$.

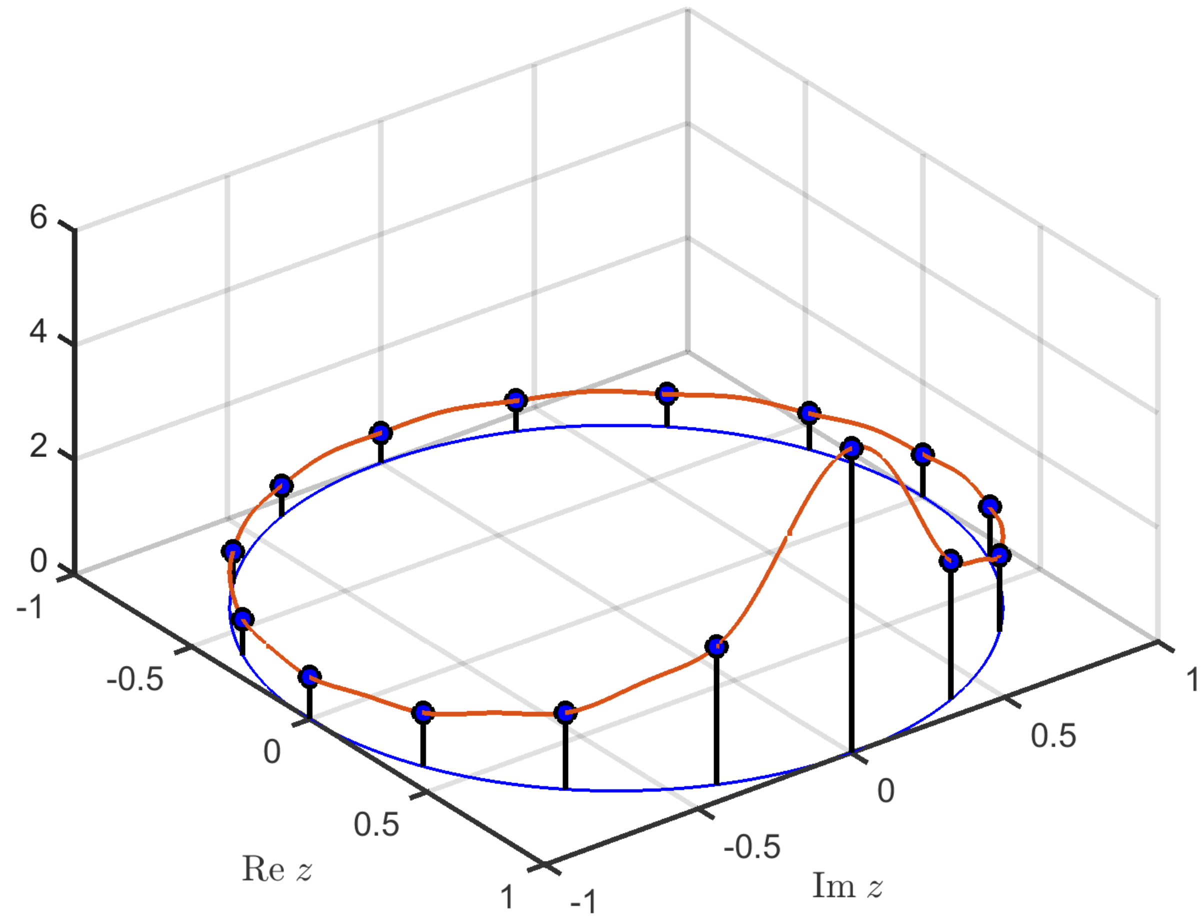
Что показывает уравнение синтеза?

Уравнение (2) показывает, что сигнал $x(n)$ может быть синтезирован в виде суммы (интеграла) комплексных экспонент z^n, каждая из которых взвешена на масштабирующий множитель $X(z)$.

Пример: затухающая экспонента

ДПФ	Z-преобразование





ДПФ можно интерпретировать как оценку z-преобразования конечной последовательности $x(n)$ в N точках на z-плоскости, равномерно расположенных вдоль единичной окружности под углами $2\pi k/N$ радиан.

Сходимость z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (3)$$

Сумма (3) может не сходится (не существовать)!

Область сходимости

- Множество значений z, при которых (3) сходится называется ***областью сходимости (ОС)*** и в этой области значения $X(z)$ конечны.

- Значения z, для которых $X(z) = \infty$, называются ***полюсами*** функции $X(z)$. Значения z, для которых $X(z) = 0$, называются ***нулями*** функции $X(z)$.

Сходимость z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (3)$$

Сумма (3) может не сходится (не существовать)!

Область сходимости

Множество значений z, при которых (3) сходится называется ***областью сходимости (ОС)*** и в этой области значения $X(z)$ конечны.

Пример

1) Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = \delta(n)$.

Сходимость z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (3)$$

Сумма (3) может не сходится (не существовать)!

Область сходимости

Множество значений z, при которых (3) сходится называется ***областью сходимости (ОС)*** и в этой области значения $X(z)$ конечны.

Пример

1) Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = \delta(n)$.

2) Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = \delta(n-k)$.

Сходимость z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (3)$$

Сумма (3) может не сходится (не существовать)!

Область сходимости

Множество значений z, при которых (3) сходится называется ***областью сходимости (ОС)*** и в этой области значения $X(z)$ конечны.

Пример

1) Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = \delta(n)$.

2) Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = \delta(n-k)$.

3) Найти z-преобразование и ОС для

$$x(n) = 4\delta(n+1) + 3\delta(n) + 2\delta(n-2).$$

Сходимость z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (3)$$

Сумма (3) может не сходится (не существовать)!

Область сходимости

Множество значений z, при которых (3) сходится называется ***областью сходимости (ОС)*** и в этой области значения $X(z)$ конечны.

Пример

4) Найти z-преобразование и ОС сигнала $x(n) = \gamma^n u(n)$.

Сходимость z-преобразования

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (3)$$

Сумма (3) может не сходится (не существовать)!

Область сходимости

Множество значений z, при которых (3) сходится называется ***областью сходимости (ОС)*** и в этой области значения $X(z)$ конечны.

Пример

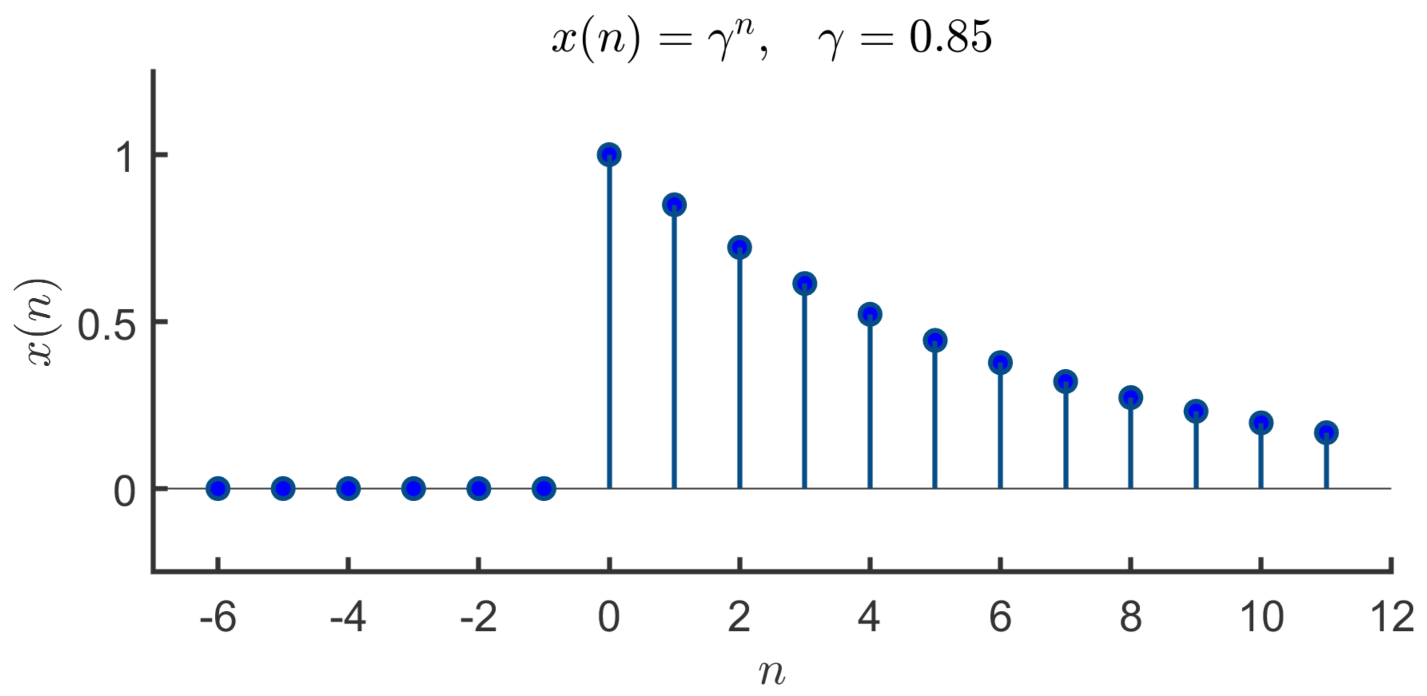
4) Найти z-преобразование и ОС сигнала $x(n) = \gamma^n u(n)$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n = 1 + \left(\frac{\gamma}{z}\right) + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^3 + \cdots$$

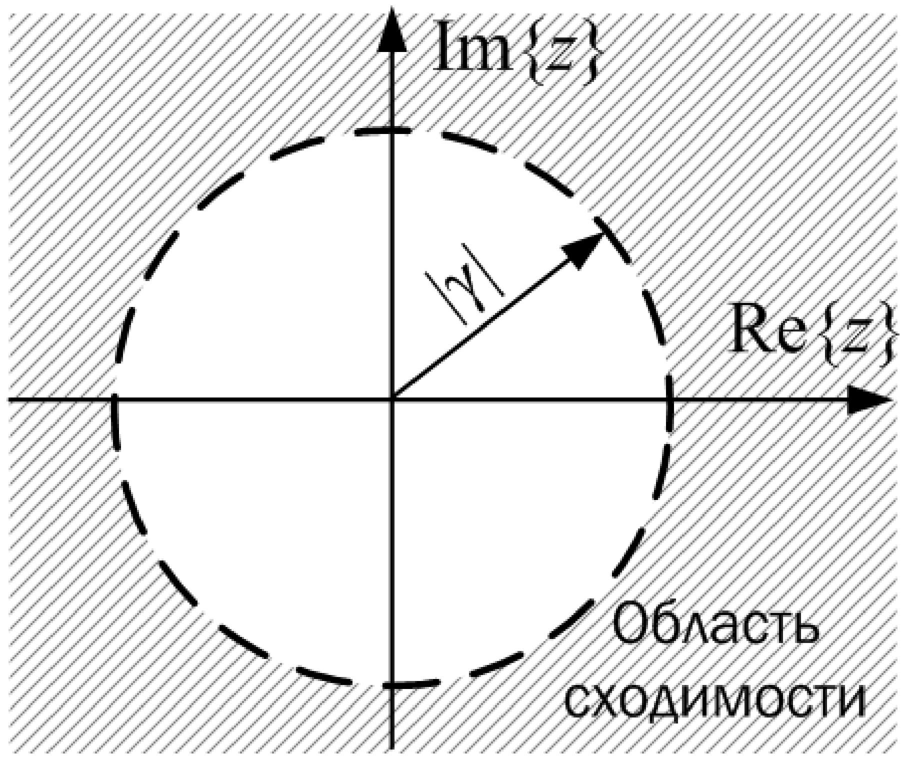
Применяя формулу геометрической прогрессии: $1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$, $|r| < 1$.

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{z}} = \frac{z}{z-\gamma}, \text{ ОС: } \left|\frac{\gamma}{z}\right| < 1 \text{ или } |z| > |\gamma|.$$

Пример (продолжение)



Временное представление сигнала $x(n)$



Область сходимости $X(z) = \frac{z}{z-\gamma}$

Единственный полюс $X(z)$ это $z = \gamma$.

Общее правило: ***полюса никогда не находятся внутри области сходимости.***

Сходимость z-преобразования

Пример

Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = -\gamma^n u(-n-1)$.

Сходимость z-преобразования

Пример

Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = -\gamma^n u(-n-1)$.

Решение

По определению

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{\gamma}{z}\right)^n = -\left(\frac{z}{\gamma}\right) - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 - \left(1 + \left(\frac{z}{\gamma}\right) + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^3 + \cdots\right)$$

Применяя формулу геометрической прогрессии получаем

$X(z) = 1 - \frac{1}{1-\frac{z}{\gamma}} = \frac{z}{z-\gamma}$, ОС: $\left|\frac{z}{\gamma}\right| < 1$ или $|z| < |\gamma|$.

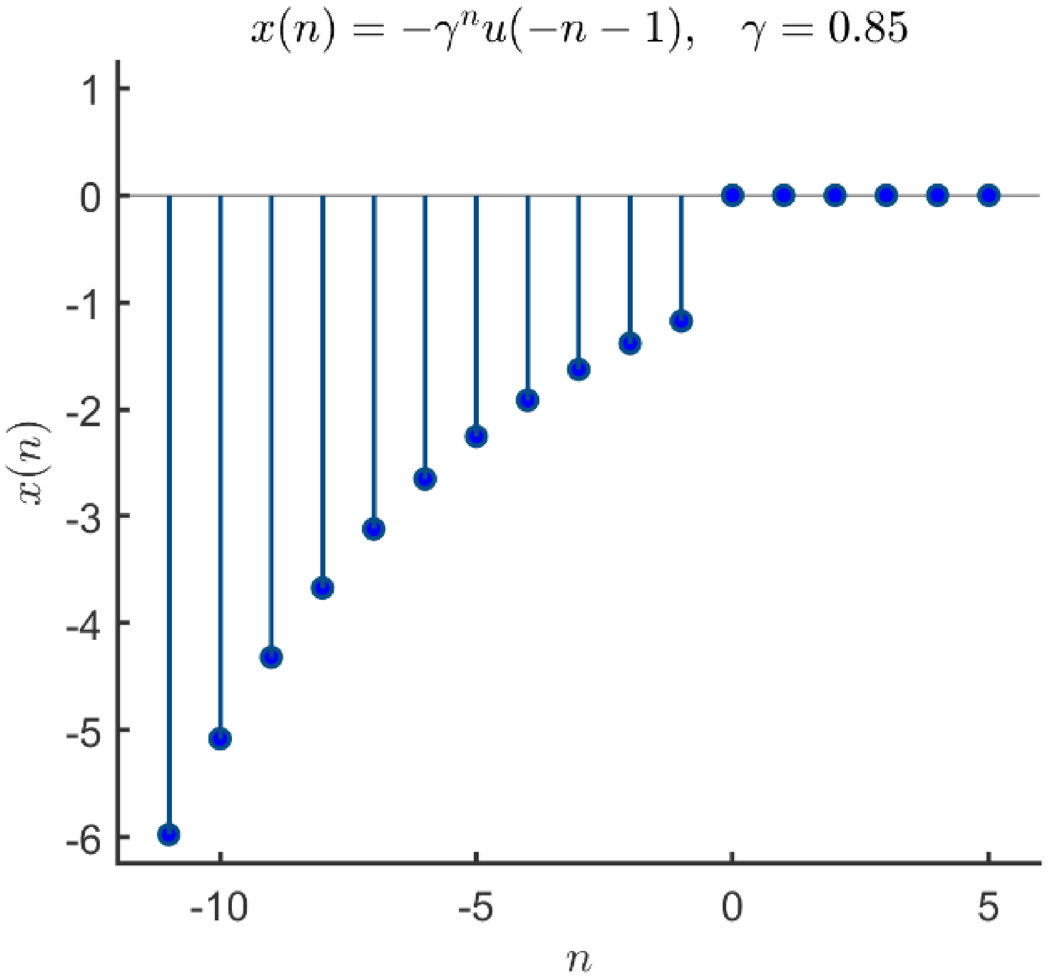
Сходимость z-преобразования

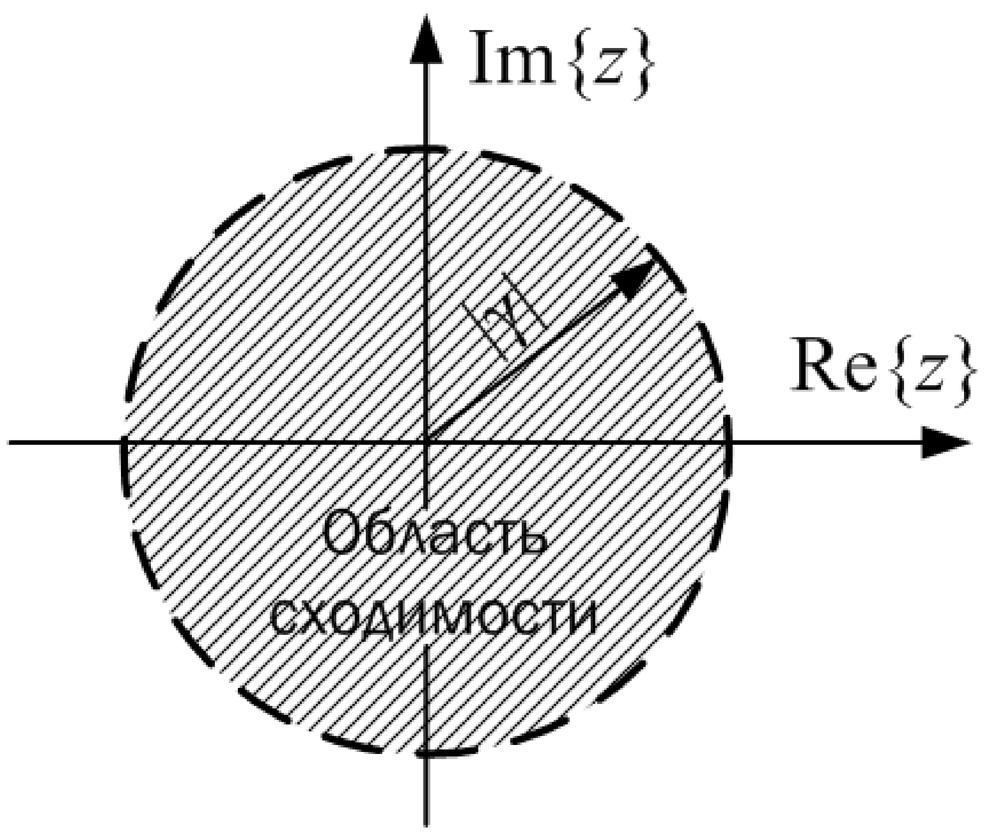
Пример (продолжение)

Найти z-преобразование и ОС для $x(n) = -\gamma^n u(-n-1)$.

Решение

$X(z) = 1 - \frac{1}{1-\frac{z}{\gamma}} = \frac{z}{z-\gamma}$, ОС: $\left|\frac{z}{\gamma}\right| < 1$ или $|z| < |\gamma|$.





Свойства z-преобразования

Пусть $x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$, тогда

Линейность	$ax_1(n) + bx_2(n) \overset{z}{\leftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z)$
Свойство комплексного сопряжения	$x^*(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X^*(z^*)$
Обращение времени	$x(-n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(1/z)$
Свойство задержки	$x(n-m) \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-m}X(z).$
Масштабирование z-образа	$r^n x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{r}\right)$
Дифференцирование $\boldsymbol{X(z)}$	$nx(n) \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{d}{dz}X(z)$

Обратное z-преобразование

Формальный подход к обратному z-преобразованию основывается на интегральной теореме Коши

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz. \tag{4}$$

Практические подходы к вычислению обратного z-преобразования

- ✓ табличный метод;
- ✓ метод разложения на элементарные дроби;
- ✓ метод степенных рядов.

Табличный метод

Z-преобразование стандартных последовательностей

Последовательность	Z-преобразование	Область сходимости (ОС)
$\delta(n)$	1	$z \in \mathbb{C}$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$r^n u(n)$	$\dfrac{1}{1 - rz^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$
$u(n)\cos\omega_0 n$	$\dfrac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$u(n)\lvert r\rvert^n \cos\omega_0 n$	$\dfrac{1 - z^{-1}\lvert r\rvert\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\lvert r\rvert\cos\omega_0 + \lvert r\rvert^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$
$\begin{cases} r^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\dfrac{1 - r^N z^{-N}}{1 - rz^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

Табличный метод

Z-преобразование стандартных последовательностей

Последовательность	Z-преобразование	Область сходимости (ОС)
$nr^n u(n)$	$\dfrac{rz}{(z-r)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$
$u(n)\lvert r\rvert^n \sin\omega_0 n$	$\dfrac{z\lvert r\rvert \sin\omega_0}{z^2 - 2z\lvert r\rvert\cos\omega_0 + \lvert r\rvert^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$-r^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-rz^{-1}}$	$\lvert z\rvert < r$

Табличный метод

Пример. Найти обратное z-преобразование табличным методом для z-образа

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ОС:} \ |z| > \frac{1}{2}.$$

Табличный метод

Пример. Найти обратное z-преобразование табличным методом для z-образа

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ОС: } |z| > \frac{1}{2}.$$

Решение. Используя 3-ю строку таблицы находим, что $r = \frac{1}{2}$ обратное z-преобразование равно

$$x(n) = \frac{1}{2^n}u(n).$$

Метод разложения на элементарные дроби

Иногда таблица не содержит функцию $X(z)$ в явном виде, однако можно её преобразовывать к такому виду, части которого содержатся в таблице. Функцию

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_i z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_i z^{-k}}. \tag{5}$$

можно переписать в виде

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{M}(1 - d_k z^{-1})}, \tag{6}$$

где $c_k \neq 0$ – нули функции $X(z)$, а $d_k \neq 0$ – её полюса. Если $M < N$ и кратность всех полюсов равна 1, то $X(z)$ представима в виде

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}, \qquad \text{где } A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z)|_{z=d_k}. \tag{7}$$

Метод разложения на элементарные дроби

Пример. Найти последовательность $x(n)$, имеющую z-преобразование

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \quad \text{ОС: } |z| > \frac{1}{2}.$$

Метод разложения на элементарные дроби

Пример. Найти последовательность $x(n)$, имеющую z-преобразование

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad \text{ОС: } |z| > \frac{1}{2}.$$

Решение. Поскольку оба полюса имеют кратность один; то $X(z)$:

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Используя (7) получаем

$$A_1 = \left(1 - \tfrac{1}{4}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1/4} = -1, \qquad A_2 = \left(1 - \tfrac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1/2} = 2.$$

$$X(z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Используя табличный метод и свойство линейности находим:

$$x(n) = \frac{2}{2^n}u(n) - \frac{1}{4^n}u(n).$$

Метод степенных рядов

✓ Z-преобразование – степенной ряд, коэффициенты которого это отсчеты последовательности $x(n)$. Значит, если оно задано в явном виде

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\cdots+x(-1)z+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots \qquad (8)$$

то мы можем найти любой конкретный отсчет последовательности $x(n)$, глядя на коэффициент при подходящей степени z^{-1}.

✓ Если $X(z)$ задано в виде ***дробно-рациональной функции*** его раскладывают в бесконечный ряд относительно z^{-1} путем деления в столбик:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}= \qquad (9)$$

$$=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}\cdots$$

Использованием метода степенных рядов

Пример. Найти последовательность $x(n)$, имеющую z-преобразование

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}.$$

Использованием метода степенных рядов

Пример. Найти последовательность $x(n)$, имеющую z-преобразование

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}.$$

Решение. Воспользуемся методом степенных рядов:

1) Делим числитель на знаменатель:	$1 + 2z^{-1} + z^{-2} = (1 - z^{-1} + z^{-2}) \times \underbrace{\mathbf{1}}_{x(0)} + \underbrace{3z^{-1}}_{\text{остаток}}$
2) Делим полином-остаток $3z^{-1}$ на знаменатель дроби	$3z^{-1} = (1 - z^{-1} + z^{-2}) \times \underbrace{\mathbf{3}}_{x(1)}\ z^{-1} + (\underbrace{3z^{-2} - 3z^{-3}}_{\text{остаток}})$
3) Делим полином-остаток $(3z^{-2} - 3z^{-3})$ на знаменатель дроби	$3z^{-2} - 3z^{-3} = (1 - z^{-1} + z^{-2}) \times \underbrace{\mathbf{3}}_{x(2)}\ z^{-2} + \underbrace{3z^{-4}}_{\text{остаток}}$

В итоге получаем разложение:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots.$$