СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

Тема 9

Функциональные ряды

Пусть $\{u_n(x)\}$ – некоторая функциональная последовательность, определенная на множестве X

Определение Выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называют ***функциональным рядом*** с областью определения X .

Функциональные ряды

По аналогии с числовыми рядами функциональный ряд можно представить в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

где: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ - ***частичная сумма ряда,***

а $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ..$ ***частичный остаток ряда.***

Функциональные ряды

Пусть точка x_0 – точка из области определения ряда, тогда при подстановки этой точки ряд превращается в обычный числовой ряд, который может либо сходиться, либо расходиться.

Определение. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда, а множество всех таких точек образует ***область сходимости*** ряда D.

Функциональные ряды

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится в некоторой области $D_a \subseteq D$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** в этой области, а сама область $D_a \subseteq D$ называется ***областью абсолютной сходимости ряда.***

Функциональные ряды

<u>Определение.</u> Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** к сумме $S(x)$ на множестве D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N,

<u>зависящий только от ε</u> и <u>не зависящий от x</u>, что для

<u>всех частичных сумм</u>, номера которых больше N,

выполняется неравенство $|S_n(x_o) - S(x_o)| < \varepsilon$

(или $|r_n(x)| < \varepsilon$) для <u>всех x из D одновременно.</u>

Функциональные ряды

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ на множестве D существует мажорирующий сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве D равномерно (т.е. формально: из неравенства

$$|u_n(x)| \le a_n$$

для любого ***n*** и любого ***x*** и сходимости числового ряда следует равномерная сходимость функционального ряда на множестве D).

Функциональные ряды

Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в

некоторой области, то он сходится к **функции** :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)}$$

Степенные ряды

Определение. ***Степенным рядом*** называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ c_n(x - x_0)^n + \ldots$$

при этом числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \in R$ называются ***коэффициентами ряда***, а точка x_0 – ***центром разложения ряда.***

Степенные ряды

Общий член степенного ряда является простейшим многочленом:

$$u_n(x) = c_n(x - x_0)^n$$

Частичная сумма степенного ряда является многочленом степени ***n*** :

$$S_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$$

Степенные ряды

Частный случай ***степенного ряда*** с центром разложения в нуле имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n x^n = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2 x^2 + \ldots + \tilde{c}_n x^n + \ldots$$

$$\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n, \ldots \in R$$

Степенной ряд всегда **<u>сходится по крайней мере в одной точке</u>**: $x = x_0$ (либо $x = 0$ для ряда второго вида).

Степенные ряды. Область сходимости.

Теорема Абеля. Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_0.

Тогда он сходится в любой точке ***x***, удовлетворяющей неравенству $|x| < |x_0|$ и ***сходится равномерно*** в области $|x| \le q < |x_0|$.

Если же ряд расходится в некоторой точке x_1, то он расходится и во всех точках x, таких, что $|x| > |x_1|$

Степенные ряды. Область сходимости.

Область сходимости степенных рядов имеет очень простую структуру (согласно теореме Абеля):

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ либо сходится на всей числовой прямой, либо существует такое число $R \geq 0$, что в интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$ ряд сходится, а вне интервала – расходится.

Степенные ряды. Область сходимости.

Число ***R*** в этом случае называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ - ***интервалом сходимости*** этого ряда.

При $x = x_0 \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. В этих точках получающиеся числовые ряды исследуются индивидуально.

Степенные ряды. Радиус сходимости

1. Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$,

все коэффициенты которого отличны от нуля:

$$c_n \neq 0, n \in N.$$

Тогда, если существует предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то он

совпадает с радиусом сходимости степенного ряда ***R***.

Степенные ряды. Радиус сходимости

2. Если же существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, то

радиус сходимости *R* равен значению –

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$$

(формула Коши – Адамара).

Степенные ряды. Радиус сходимости

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^n (x-1)^n$$

Найдем радиус сходимости по формуле: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}\right| = \frac{1}{3}.$$

Интервал сходимости этого ряда: .

$$(x_0 - R,\, x_0 + R) = (1-\frac{1}{3},\, 1+\frac{1}{3}) = (\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3})$$

Степенные ряды. Радиус сходимости

Следует заметить, что формула для отыскания R

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

получена в предположении существования конечного

предела $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$,

т.е. в предположении, что ряд содержит <u>все степени ***x*** </u>.

Если же степени x входят в ряд с пропусками, то непосредственное применение формулы невозможно.

Степенные ряды. Радиус сходимости

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^{2n-1}}{4^n\cdot n^5}$$

Найдем интервал и радиус сходимости, применив признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-6)^{2n+1}}{4^{n+1}(n+1)^5}}{\dfrac{(x-6)^{2n-1}}{4^n n^5}}\right|=\left|(x-6)^2\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^5}{4(n+1)^5}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}(x-6)^2<1$$

Степенные ряды. Радиус сходимости

Неравенство $(x-6)^2 < 4$ равносильно

$$-2 < x-6 < 2 \Leftrightarrow 4 < x < 8$$

Исследуем ряд при **x =4** :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n-1}}{4^n n^5} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}2^{2n-1}}{2^{2n}n^5} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$$

и **x = 7** :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$$

Оба ряда знакопостоянны и сходятся, поэтому область сходимости - $[4,8]$, радиус сходимости равен **2**.

Степенные ряды. Радиус сходимости

Замечание (пример 2). Применение для нахождения радиуса сходимости ряда формулы $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

приведет к неверному результату:

$$C_n=\frac{1}{4^n\cdot n^5}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/4^n n^5}{1/4^{n+1}(n+1)^5}\right|^2=4\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^5}{(n+1)^5}\right|=4$$

Степенные ряды.

Теорема (Свойства суммы степенного ряда)

Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится в интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$, где $R \neq 0$.

Тогда сумма ряда $S(x)$:

1. непрерывна на интервале X,
2. интегрируема на любом отрезке, целиком лежащем в X,
3. дифференцируема любое число раз на интервале X.

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 4. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $\boldsymbol{x}$, сходится в интервале $X = (-1,1)$.

По формуле для суммы прогрессии находим сумму ряда:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 5. Найти сумму ряда

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Ряд является результатом почленного дифференцирования предыдущего ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

Поэтому по свойству суммы степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 6. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x^2 + \frac{x^3}{2} + \ldots$

Преобразуем ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right) = x\widetilde{S}(x)$$

Получившийся ряд является результатом почленного интегрирования ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

$$\left(\tilde{S}(x)\right)' = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$\tilde{S}(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln(1-x) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1} = -x\ln(1-x)$$