Теория функций комплексной переменной.

1. Интеграл от функции комплексной переменной.
2. Теорема Коши. Неопределенный интеграл от функций комплексной переменной.
3. Интегральная формула Коши.

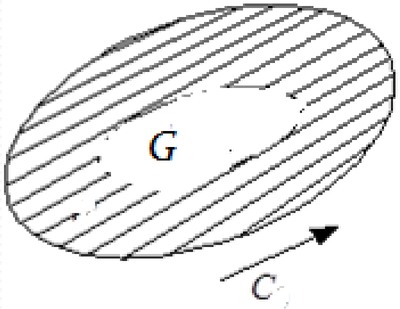
Тема 11

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Теорема Коши устанавливает одно из основных свойств аналитических функции комплексной переменной:

Теорема (Коши) *Если функция* $f(z)$ *- аналитическая в односвязной области* G*, ограниченной замкнутым контуром* C*, а также в точках этого контура, то*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$



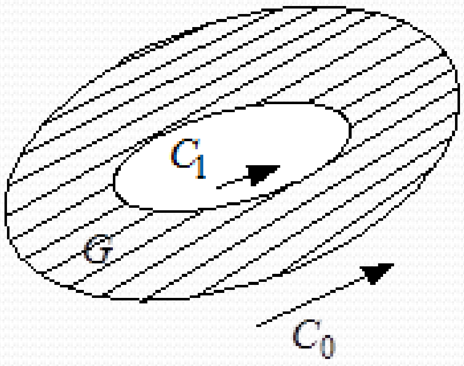
односвязная область G

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

В частности, для двухмерной области G (при $n = 1$)

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz.$$

Равенство называется ***теоремой Коши для составного контура***



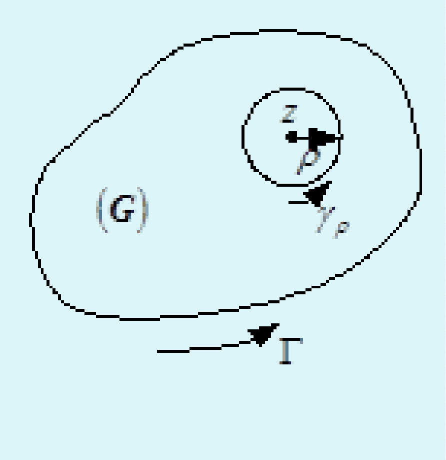
Интегральная формула Коши.

Пусть функция $f(\varsigma)$ - аналитическая в односвязной области G плоскости ς, а также на контуре Γ, ограничивающем эту область.

Пусть z - любая внутренняя точка этой области.

Опишем около точки z окружность γ_ρ радиусом ρ так, чтобы она целиком лежала в G. Тогда,

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}$$



Интегральная формула Коши.

В силу непрерывности функции $f(\varsigma)$, для $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\varsigma \in \gamma_\rho$

справедливо неравенство $|f(\varsigma) - f(z)| < \varepsilon$,

если только радиус ρ окружности γ_ρ достаточно мал

Поэтому

$$\left|\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} - \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)d\varsigma}{\varsigma - z}\right| = \left|\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z} d\varsigma\right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$$

Интегральная формула Коши.

Так как ε можно взять сколь угодно малым, то

$$\lim_{\rho\to 0}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}=\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)d\varsigma}{\varsigma-z}.$$

Но величина $\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$ при уменьшении ρ не изменится,

поэтому знак предела можно опустить. Тогда получаем

$$\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}=2\pi i\cdot f(z)$$

Интегральная формула Коши.

Получаем так называемую ***интегральную формулу Коши***

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)\,d\varsigma}{\varsigma - z}.$$

Величина, стоящая в правой части, называется ***интегралом Коши.***

Для вычисления интеграла Коши нужно знать значение функции $f(z)$

только на контуре Γ.

Интегральная формула Коши.

Интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции <u>в любой точке, лежащей внутри области</u> G, если известны значения этой функции на контуре Γ, ограничивающем область G.

Если точка z лежит вне области G, то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \begin{cases} f(z), & z - \textit{внутри}\ \Gamma; \\ 0, & z - \textit{вне}\ \Gamma. \end{cases}$$

Интегральная формула Коши.

Применяя интегральную формулу Коши, можно доказать, что *производная аналитической функции также является аналитической функцией и может быть представлена в виде:*

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}$$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi ih}\oint_C\left(\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z-h}-\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}\right)=\frac{1}{2\pi ih}\oint_C\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z-h)(\varsigma-z)}$$

Интегральная формула Коши.

Аналогично можно получить, что

$$f''(z) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^3},$$

и

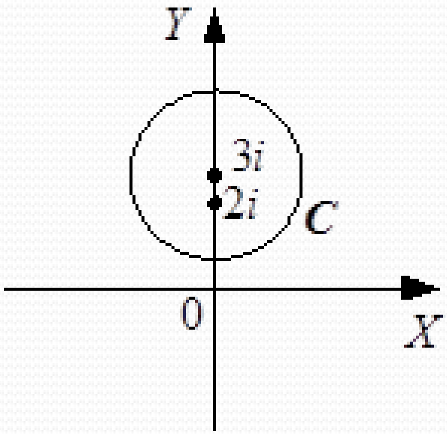
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{n+1}}.$$

Из аналитичности функции в некоторой точке следует существование и аналитичность в окрестности той же точки производных любого порядка

Интегральная формула Коши.

Пример. Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)}, \quad \text{где}\, C: \ |z-3i| = 2 .$$



Функция $f(z) = \frac{e^z}{z}$ аналитична внутри контура C.

$$J = \oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-2i} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi(\cos 2 + i\sin 2)$$

Интегральная формула Коши.

Пример. Вычислить

$$J = \oint\limits_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}$$, где C - замкнутый контур,

обходящий точку i один раз.

Применим формулу Коши к функции $f(z) = \cos z$

$$J = \oint\limits_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2\,!} \left. \frac{d^2(\cos z)}{dz^2} \right|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i ch 1$$