Пример расчета пункта 2 домашнего задания к лабораторной работе № 13

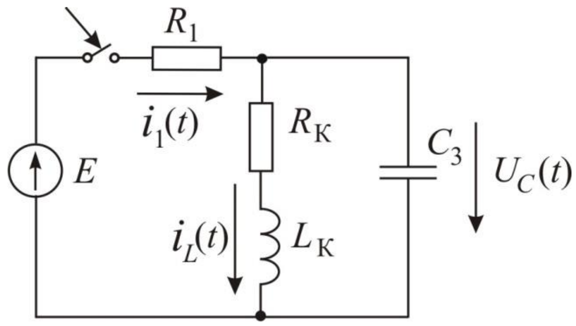

Рис. 1

Дано:

E= 5 В; R_1= 5000 Ом; $R_К$= 100 Ом; L= 200 мГн; C_3= 5 мкФ.

Определить:

Законы изменения $i_1(t)$; $i_L(t)$; $U_C(t)$.

Расчёт переходного процесса классическим методом производится в следующем порядке:

- рассчитывается цепь до коммутации для определения независимых начальных условий;
- рассчитываются установившийся режим после коммутации;
- составляется характеристическое уравнение цепи и определяются его корни;
- записываются общее решение для свободных составляющих и полное выражение для переходного процесса искомой величины как сумма принуждённой и свободной составляющих;
- рассчитываются необходимые зависимые начальные условия и определяются постоянные интегрирования;
- найденные постоянные интегрирования подставляются в полное решение.

Расчёт переходных процессов в цепи, представленной на рис. 1, произведём в предложенном порядке.

Определим независимые начальные условия (ННУ). Изобразим для этого схему до коммутации (рис.2).

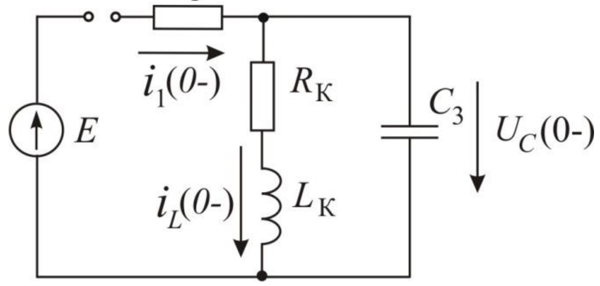

Рис. 2

Поскольку ключ в ветви с источником до коммутации был разомкнут значения тока в индуктивности и напряжения на ёмкости до коммутации были равны нулю (нулевые начальные условия):

$i_L(0-) = i_L(0+) = 0;$

$U_C(0-) = U_C(0+) = 0.$

1) Определим значения искомых функций токов и напряжения в установившемся режиме по схеме рис.3.

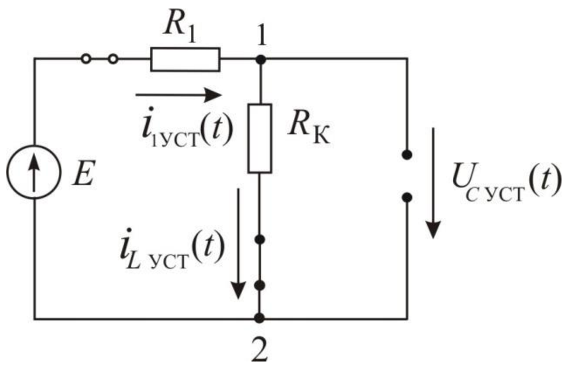

Рис. 3

В схеме (рис. 3) индуктивность заменили короткозамкнутым участком, а ёмкость разрывом ветви, так как источник ЭДС $E = const$. Частота постоянного тока ω равна нулю, а значит $Z_L = j\omega L = 0$ и $Z_C = 1/(j\omega C) = \infty$.

$$i_{1УСТ}(t) = i_{LУСТ}(t) = E/(R_1 + R_К) = 5/5100 = 0{,}00098 \text{ А};$$

$$U_{CУСТ}(t) = U_{12} = i_{LУСТ}(t)\cdot R_К = 0{,}00098\cdot 100 = 0{,}098 \text{ В}.$$

2) Составим характеристическое уравнение и определим его корни. Для этого изобразим схему после коммутации, в которой заменим источник ЭДС E его внутренним сопротивлением (полагая что источник ЭДС идеальный, т.е. $R_{ВН E} = 0$, заменяем его короткозамкнутым участком), а сопротивления индуктивности и конденсатора записываем в операторной форме (рис.4).

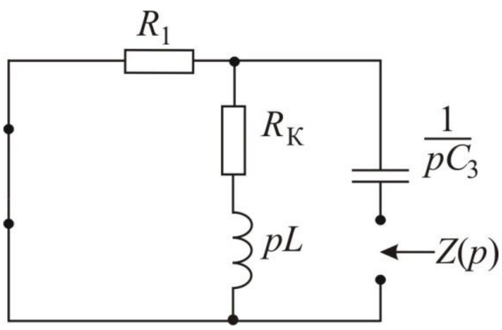

Рис.4

Далее разрываем ветвь с ёмкостью (рис. 4) и записываем входное сопротивление схемы $Z(p)$ относительно точек разрыва:

$$Z(p) = 1/(\mathrm{p}C_3) + R_1 \cdot (R_\text{К}+ pL) /(R_1 + R_\text{К}+ pL).$$

Решаем уравнение $Z(p) = 0$ и определяем его корни

$$Z(p) = 1/(pC_3) + R_1 \cdot (R_\text{К}+ pL) /(R_1 + R_\text{К}+ pL) = 0;$$

$$p^2R_1LC_3 + p(R_1R_\text{К}C_3 + L) + R_1+ R_\text{К} = 0,$$

$$0{,}005p^2 + 2{,}7p + 5100 = 0.$$

Решив квадратное уравнение получим его корни

$$p_1 = -\,270 + j973{,}2 \;\text{ и }\; p_2 = -\,270 - j973{,}2.$$

В случае комплексно-сопряженных корней ($p_1 = -\,\delta + j\,\omega_\text{СВ}$, $p_2 = -\,\delta - j\,\omega_\text{СВ}$) свободные составляющие искомых функций будут выглядеть следующим образом:

$$i_{1\text{СВ}}(t)= Ae^{-\delta t}\sin(\omega_\text{СВ}t + \psi_1),$$

$$i_{L\text{СВ}}(t)= Be^{-\delta t}\sin(\omega_\text{СВ}t + \psi_2),$$

$$U_{C\text{СВ}}(t)= Ce^{-\delta t}\sin(\omega_\text{СВ}t + \psi_3),$$

где $\delta = 270$ и $\omega = 973{,}2$. Значит

$$i_{1\text{СВ}}(t)= Ae^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_1),$$

$$i_{L\text{СВ}}(t)= Be^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_2),$$

$$U_{C\text{СВ}}(t)= Ce^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_3),$$

Полные переходные токи и напряжения равны суммам соответствующих установившихся и свободных составляющих:

$$i_1(t)= i_{1\text{УСТ}}(t) + i_{1\text{СВ}}(t),$$

$$i_L(t)= i_{L\text{УСТ}}(t) + i_{L\text{СВ}}(t),$$

$$U_C(t)= U_{C\,\text{УСТ}}(t) + U_{C\,\text{СВ}}(t).$$

Запишем последние выражения, подставив в них найденные ранее значения:

$$i_1(t)= 0{,}00098 + Ae^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_1),$$

$$i_L(t)= 0{,}00098 + Be^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_2),$$

$$U_C(t)= 0{,}098 + Ce^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_3).$$

Для определения постоянных интегрирования *A*, *B*, *C* и начальных фаз свободных колебаний ψ_1, ψ_2, ψ_3 будет не достаточно одного уравнения, а потому для каждой из искомых функций записывают систему из 2-х уравнений, где второе уравнение получают путем дифференцирования первого. Так для тока в индуктивности $i_L(t)$ получаем систему:

$$\begin{cases} i_L(t)= 0{,}00098 + Be^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_2), \\ i_L'(t)= -270Be^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_2) + 973{,}2Be^{-270t}\cos(973{,}2t + \psi_2)\,. \end{cases}$$

Для того, чтобы упростить решение, последнюю систему уравнений перепишем для момента времени $t = 0+$, получаем:

$$\begin{cases} i_L(0+)= 0{,}00098 + B\sin(\psi_2), \\ i_L'(0+)= -270B\sin(\psi_2) + 973{,}2B\cos(\psi_2)\,. \end{cases}$$

Значение $i_L(0+) = 0$ (ННУ, определенное в первом пункте расчета). Значение производной тока в индуктивности $i_L'(0+)$ может быть не равно нулю, а потому определим это значение по схеме замещения для момента времени $t = 0+$ (рис. 5).

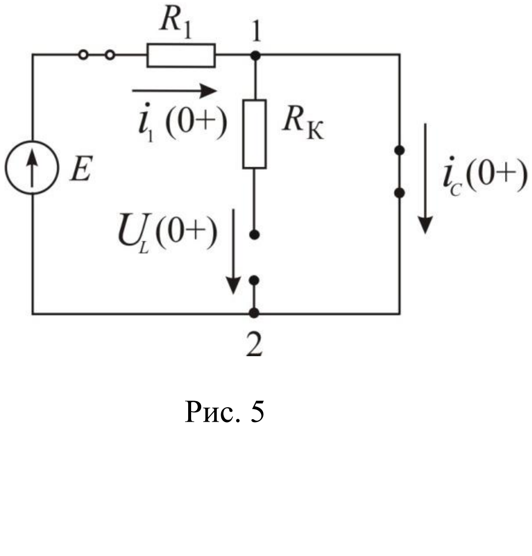

Рис. 5

В схеме (рис. 5) индуктивность заменили на разрыв в ветви так как согласно найденным ННУ ток i_L (0+) = 0, ёмкость заменили на короткозамкнутый участок, так как U_C (0+) = 0. Известно, что

$$U_L = L\frac{di_L}{dt}.$$

Значит $\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0+} = \frac{U_L(0+)}{L}$, определим ЗНУ U_L (0+) по схеме рисунка 5:

U_L (0+) = 0, так как U_L (0+) = U_{12} (точки 1 и 2 на схеме накоротко замкнуты в момент коммутации), следовательно:

$$i_L^{/}(0+) = U_L(0+)/\,L = 0.$$

Система уравнений для тока в индуктивности принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 0 = 0{,}00098 + B\sin(\psi_2), \\ 0 = -\,270B\sin(\psi_2) + 973{,}2B\cos(\psi_2)\,. \end{cases}$$

Решив систему находят постоянную интегрирования B и начальную фазу свободных колебаний ψ_2, записывают ответ и строят график.

Рассмотрим напряжение на ёмкости:

$$U_C(t) = 0{,}098 + Ce^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_3).$$

В последнем уравнении две неизвестные величины, постоянная интегрирования C и начальная фаза свободных колебаний ψ_3. Для определения двух неизвестных недостаточно одного уравнения, а потому составляем систему из двух уравнений, второе получаем путем дифференцирования первого уравнения:

$$\begin{cases} U_C(t) = 0{,}098 + Ce^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_3), \\ U_C^{/}(t) = -\,270Ce^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_3) + 973{,}2Ce^{-270t}\cos(973{,}2t + \psi_3)\,. \end{cases}$$

Также как и для тока в индуктивности чтобы упростить решение, последнюю систему уравнений перепишем для момента времени t = 0+ , получаем:

$$\begin{cases} U_C(0+) = 0{,}098 + C\sin(\psi_3), \\ U_C^{/}(0+) = -\,270C\sin(\psi_3) + 973{,}2C\cos(\psi_3)\,. \end{cases}$$

Значение U_C (0+) = 0 (ННУ, определенное в первом пункте расчета). Несмотря на то, что U_C (0+) = 0, значение производной напряжения на ёмкости $U_C{}'(0+)$ может быть отличным от нуля, а потому определим это значение по схеме замещения для момента времени t = 0+ (рис. 5), используя следующее соотношение:

$$i_C = C\frac{dU_C}{dt}.$$

Значит $\left.\frac{dU_C}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{i_C(0+)}{C}$, определим ЗНУ i_C (0+) по схеме рисунка 5:

i_C (0+) = E / R_1 = 5/5000 = 0,001 А, следовательно:

$$U_C{}'(0+) = 0{,}001/(5\cdot 10^{-6}) = 200.$$

Система уравнений для напряжения на ёмкости принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 0 = 0{,}098 + C\sin(\psi_3), \\ 200 = -270C\sin(\psi_3) + 973{,}2C\cos(\psi_3)\,. \end{cases}$$

Решив систему находят постоянную интегрирования C и начальную фазу свободных колебаний ψ_3, записывают ответ и строят график.

Рассмотрим ток в ветви с сопротивлением R_1 :

$$i_1(t) = 0{,}00098 + Ae^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_1).$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1(t) = 0{,}00098 + Ae^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_1), \\ i_1{}'(t) = -270Ae^{-270t}\sin(973{,}2t + \psi_1) + 973{,}2Ae^{-270t}\cos(973{,}2t + \psi_1)\,. \end{cases}$$

Чтобы упростить решение, последнюю систему уравнений перепишем для момента времени t = 0+ , получаем:

$$\begin{cases} i_1(0+) = 0{,}00098 + A\sin(\psi_1), \\ i_1{}'(0+) = -270A\sin(\psi_1) + 973{,}2A\cos(\psi_1)\,. \end{cases}$$

Значение $i_1(0+)$ относится к зависимым начальным условиям и может быть определено по схеме замещения для момента времени $t = 0+$ (рис. 5):

$$i_1(0+) = i_C\,(0+) = E\,/\,R_1 = 5/5000 = 0{,}001 \text{ А.}$$

Значение $i_1{}'(0+)$ определить по схеме замещения невозможно. Для его определения запишем систему интегро-дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений в схеме после коммутации (рис. 6).

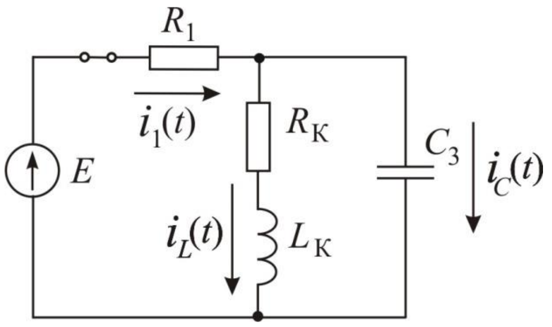

Рис. 6

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} + R_К i_L(t) = E & (1), \\ R_1 i_1(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C(t)dt = E & (2), \\ i_1(t) = i_L(t) + i_C(t) & (3). \end{cases}$$

В последней системе продифференцируем уравнение (2), получим:

$$R_1\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{i_C(t)}{C} = 0 \text{ , откуда}$$

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{-\,i_C(0+)}{R_1 C}.$$

$$i_1{}'(0+) = 0{,}001/(5000\cdot 5\cdot 10^{-6}) = 0{,}04.$$

Система уравнений для тока в ветви с сопротивлением R_1 принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 0{,}001 = 0{,}00098 + A\sin(\psi_1), \\ 0{,}04 = -270A\sin(\psi_1) + 973{,}2A\cos(\psi_1)\,. \end{cases}$$

Решив систему находят постоянную интегрирования A и начальную фазу свободных колебаний ψ_1, записывают ответ и строят график.