Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия для всех специальностей
I ступени высшего образования, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2017

УДК 517(075)
ББК 22.161.5я73
Т33

Авторы:

Е. А. Баркова, Е. Н. Конюх, З. Н. Примичева,
П. А. Самсонов, М. А. Сафронова

Рецензенты:

кафедра высшей математики учреждения образования
«Военная академия Республики Беларусь»
(протокол №143 от 08.12.2016);

заведующий кафедрой высшей математики
и информационных технологий учреждения образования
«Частный институт управления и предпринимательства»,
кандидат физико-математических наук, доцент
Ю. В. Минченков

Теория функций комплексной переменной : учеб.-метод. пособие /
Т33 Е. А. Баркова [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 80 с. : ил.
ISBN 978-985-543-354-6.

Включает теоретические и практические занятия по одному из разделов высшей математики «Теория функций комплексной переменной». Изложены способы решения характерных и типовых задач. Приведены дополнительные задания с ответами. Предложены задачи для самостоятельного решения и контрольные работы.

УДК 517(075)
ББК 22.161.5я73

ISBN 978-985-543-354-6

Св. план 2017, поз. 29

Учебное издание

Баркова Елена Александровна
Конюх Елена Николаевна
Примичева Зоя Николаевна и др.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*
Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать   Формат 60×84 1/16.   Бумага офсетная.   Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л.   Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 250 экз.   Заказ 125.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, № 3/615 от 07.04.2014
ЛП № 02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6

1. Комплексные числа

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где x, y – действительные числа; i – *мнимая единица*, удовлетворяющая условию $i = \sqrt{-1}.$

Числа x, y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z,\ \ y = \operatorname{Im} z.$

Запись (1.1) называется *алгебраической формой* комплексного числа z.

Действительное число x является частным случаем комплексного числа $z = x + iy$ при $y = 0.$ Число вида $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*. Число $z = 0,$ если $x = y = 0.$

Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число вида

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).$$

Разностью этих комплексных чисел называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число вида

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Частным комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0,$ называется комплексное число z, удовлетворяющее условию $z \cdot z_2 = z_1.$ Для частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ имеет место формула $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$

Можно заметить справедливость следующих соотношений:

1) $z + \bar{z} = 2x;$ 2) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2;$ 3) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2};$ 4) $\operatorname{Im} z = i\,\dfrac{\bar{z} - z}{2} = \dfrac{z - \bar{z}}{2i};$ 5) $\overline{(\bar{z})} = z.$

Справедливы также следующие соотношения: 1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2;$ 2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$ 3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$

2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости XY точкой $M(x; y)$ или вектором с началом в точке O и концом в точке M (рис. 1.1).

Модулем комплексного числа z называется длина r радиус-вектора $\overline{OM}$, обозначаемая $|z|$, т. е.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.2)$$

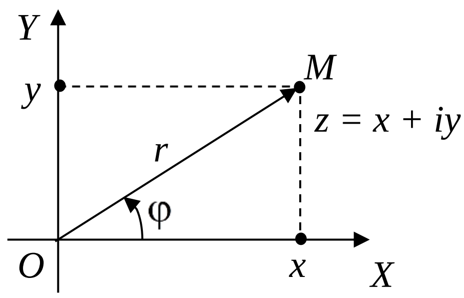


Рис. 1.1

Аргументом комплексного числа z называется полярный угол φ, образованный $\overline{OM}$ с осью X и обозначаемый $\operatorname{Arg} z$, т. е. $\varphi = \left(\overline{OM}, \widehat{OX}\right) = \operatorname{Arg} z$. Каждой отличной от начала координат точке плоскости соответствует бесконечное множество значений аргумента, отличающихся друг от друга на $2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$. *Главным значением аргумента* комплексного числа z называется значение полярного угла φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi < 2\pi$, и обозначается $\arg z$.

В дальнейшем, главное значение аргумента комплексного числа z будем обозначать φ. Тогда справедливо равенство

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Согласно рис. 1.1 определить $\arg z$ можно, используя формулы

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

При этом

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0,\ y \ge 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Для числа $z = 0$ аргумент не определен. Любое не равное нулю комплексное число $z = x + iy$ можно представить в *тригонометрической форме*:

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (1.4)$$

где $r = |z|,\ \varphi = \arg z$.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

т. е.

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,\ \ \mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

т. е. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\quad \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2$.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для любого $n \in \boldsymbol{Z}$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (1.5)$$

т. е. $|z^n| = |z|^n$, $\mathrm{Arg}\,(z^n) = n\,\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Соотношение (1.5) при $r = 1$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

называется **формулой Муавра**.

3. Показательная форма записи комплексного числа

Используя **формулу Эйлера** $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$, комплексное число (1.4) можно представить в *показательной форме*:

$$z = re^{i\varphi}, \qquad (1.6)$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},\ \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},\ \ z^n = r^n e^{in\varphi}, \qquad (1.7)$$

где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Корнем n-й степени, $n \in \boldsymbol{N}$, из комплексного числа $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется комплексное число w такое, что $w^n = z$. Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые можно найти по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (1.8)$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Если указанные числа представить в показательной форме, то формула (1.8) примет вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (1.9)$$

Из двух последних формул следует, что все n значений корня n-й степени из комплексного числа z располагаются на окружности радиусом $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат, разделяя эту окружность на n равных частей. Это означает, что все n значений $\sqrt[n]{z}$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в указанную окружность.

Пример 1.1

Вычислите значения выражения $\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)+\operatorname{Im}\left(z_1\cdot\bar{z}_2\right)+i^{|z_1|}$, где $z_1=3+4i,\ z_2=1-7i$.

Решение:

1) $\frac{\bar{z}_1}{z_2}=\frac{3-4i}{1-7i}=\frac{(3-4i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}=\frac{31+17i}{50}$, $\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)=\frac{31}{50}$;

2) $z_1\cdot\bar{z}_2=(3+4i)(1+7i)=3+21i+4i+28i^2=-25+25i,\ \operatorname{Im}\left(z_1\cdot\bar{z}_2\right)=25$;

3) $|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $i^5=i^4\ i=i$;

4) $\frac{31}{50}+25+i=25{,}62+i$.

Ответ: $25{,}62+i$.

Пример 1.2

Запишите в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

1) $z=-4i$; 2) $z=3$; 3) $z=-\sqrt{3}-i$.

Решение:

1) Из условия задачи имеем $x=0,\ \ y=-4$. Используя формулы (1.2) и (1.3), найдем модуль и главное значение аргумента комплексного числа z. Получим $|z|=4,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}$.

Отсюда и в силу (1.4) тригонометрическая форма z примет вид

$$z=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Учитывая формулу (1.5), показательная форма z запишется как

$$z=4e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

2) В нашем случае $x=3,\ \ y=0$. Отсюда, учитывая (1.2) и (1.3), имеем

$$|z|=3,\ \ \varphi=0.$$

Следовательно, в силу (1.4) тригонометрическая форма z запишется в виде $z=3(\cos 0+i\sin 0)$, а показательная форма z, используя (1.5), примет вид $z=3e^{0\cdot i}$.

3) Из условия задачи имеем

$$x=-\sqrt{3},\ \ y=-1.$$

Тогда, в силу (1.2), модуль z равен

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2.$$

Используя (1.3), найдем главное значение аргумента z:

$$\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}.$$

В силу (1.4) и (1.5) тригонометрическая и показательная формы z примут вид

$$z=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2e^{-\frac{5\pi}{6}i}.$$

Ответ: 1) $z=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=4e^{-\frac{\pi}{2}i}$; 2) $z=3(\cos 0+i\sin 0)=3e^{0\cdot i}$; 3) $z=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.

Пример 1.3

Вычислите $\dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^8}{(-1+i)^{20}}$.

Решение. Представим числа $z_1=1-\sqrt{3}\,i$ и $z_2=-1+i$ в показательной форме. В силу (1.2), (1.3) и (1.6) имеем

$$z_1=1-\sqrt{3}\,i=2e^{-\frac{\pi}{3}i},\ z_2=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Используя (1.7), получим

$$\frac{(1-\sqrt{3}\,i)^8}{(-1+i)^{20}}=\frac{(2e^{-\frac{\pi}{3}i})^8}{(\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i})^{20}}=\frac{2^8e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2^{10}e^{15\pi i}}=\frac{1}{4}e^{\left(-\frac{8}{3}-15\right)\pi i}=\frac{1}{4}e^{-\frac{53}{3}\pi i}=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Пример 1.4

Найдите все значения $\sqrt[3]{-1}$ и изобразите их на плоскости.

Решение. Представим по формуле (1.4) число $z=-1$.

Переведем число в тригонометрическую форму: $-1=\cos\pi+i\sin\pi$. Тогда в силу (1.8) имеем

$$w_k=\sqrt[3]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Следовательно,

$$w_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i,$$

$$w_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Все значения $\sqrt[3]{-1}$ располагаются на окружности единичного радиуса, разделяя ее на три равные части (рис. 1.2).

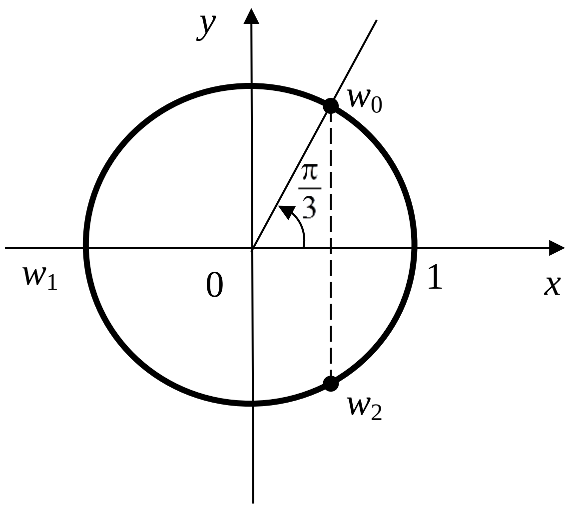


Рис. 1.2

Ответ: $-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$

Пример 1.5

Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

$$|z-1| \le 1, |z-2| < 1, 0 \le \arg z < \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$|z-1| = 1 \Leftrightarrow |(x-1) + iy| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Последнее уравнение определяет окружность радиусом 1 с центром в точке $z_0 = 1$. Нестрогое неравенство $|z-1| \le 1$ задает множество точек круга с границей $|z-1| = 1$.

Строгое неравенство $|z-2| < 1$ определяет множество точек круга, исключая границу $|z-2| = 1$.

Неравенству $0 \le \arg z < \frac{\pi}{6}$ соответствует угол между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$, причем точки луча $\varphi = 0$ принадлежат искомому множеству, а луча $\varphi = \frac{\pi}{6}$ – не принадлежат.

Таким образом, множество имеет вид, представленный на рис. 1.3.

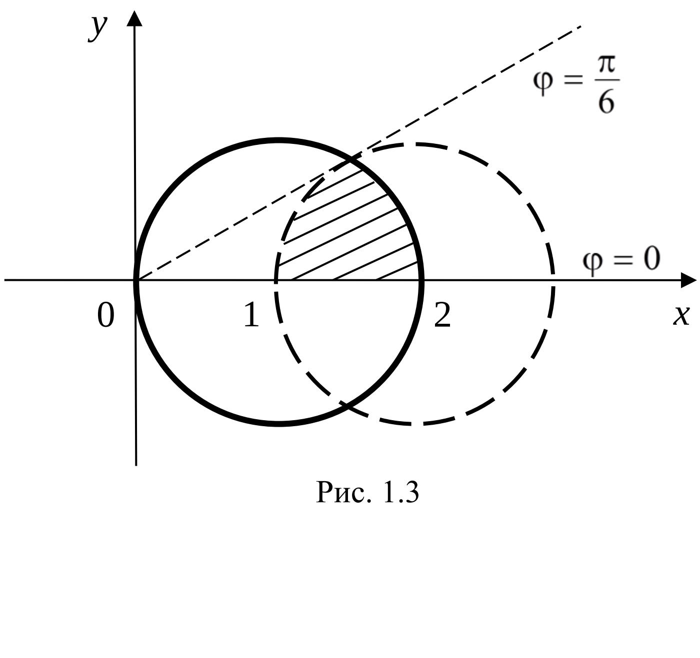


Рис. 1.3

Задание 1.1

Вычислите значения выражения $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)+\mathrm{Im}\left(z_1\cdot\bar{z}_2\right)+i^{|z_1|}$, где

1) $z_1=3-4i,\ z_2=1-i$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{2}+i$.

2) $z_1=6+8i,\ z_2=2+3i$. **Ответ:** $-3\dfrac{12}{13}$.

3) $z_1=4-3i,\ z_2=1+i$. **Ответ:** $-3\dfrac{1}{2}+i$.

4) $z_1=12+5i,\ z_2=1+2i$. **Ответ:** $-18\dfrac{3}{5}+i$.

5) $z_1=-6-8i,\ z_2=1-3i$. **Ответ:** -30.

6) $z_1=-3+4i,\ z_2=2-5i$. **Ответ:** $-6\dfrac{15}{29}+i$.

7) $z_1=-3-4i,\ z_2=-3+2i$. **Ответ:** $19\dfrac{4}{13}+i$.

8) $z_1=-5-12i,\ z_2=4-i$. **Ответ:** $-54\dfrac{15}{17}+i$.

9) $z_1=-5+12i,\ z_2=4+i$. **Ответ:** $51\dfrac{2}{17}+i$.

10) $z_1=-6+8i,\ z_2=5-2i$. **Ответ:** $26\dfrac{15}{29}$.

11) $z_1=8-6i,\ z_2=2-3i$. **Ответ:** $10\dfrac{11}{13}$.

12) $z_1=-8-6i,\ z_2=3-3i$. **Ответ:** $-45\dfrac{1}{3}$.

13) $z_1=-12+5i,\ z_2=-4+2i$. **Ответ:** $5\dfrac{9}{10}+i$.

14) $z_1=5+12i,\ z_2=1-i$. **Ответ:** $25\dfrac{1}{2}+i$.

15) $z_1=8+6i,\ z_2=2-3i$. **Ответ:** $37\dfrac{8}{13}$.

Задание 1.2

Запишите в показательной форме следующие комплексные числа:

1. а) $z=1$; б) $z=3i$; в) $z=-1-\sqrt{3}\,i$.

Ответ: а) $z=e^{0\cdot i}$; б) $z=3e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

2. а) $z=-2$; б) $z=i$; в) $z=-\sqrt{3}+i$.

Ответ: а) $z=2e^{\pi i}$; б) $z=e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

3. а) $z=3(\cos\pi-i\sin\pi)$; б) $z=-2i$; в) $z=1-i$.

Ответ: а) $z=3e^{\pi i}$; б) $z=2e^{-\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

4. а) $z=\frac{1}{2}$; б) $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; в) $z=-1+i$.

Ответ: а) $z=\frac{1}{2}e^{0\cdot i}$; б) $z=3e^{-\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

5. а) $z=\ln\frac{1}{5}$; б) $z=\frac{i}{3}$; в) $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Ответ: а) $z=\ln 5\cdot e^{\pi i}$; б) $z=\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.

6. а) $z=\cos 3\pi+i\sin 3\pi$; б) $z=-3i$; в) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ответ: а) $z=e^{\pi i}$; б) $z=3e^{-\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

7. а) $z=\sin\frac{14\pi}{3}$; б) $z=5i$; в) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

Ответ: а) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{0\cdot i}$; б) $z=5e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

8. а) $z=-\sqrt{2}$; б) $z=-\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}$; в) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$.

Ответ: а) $z=\sqrt{2}e^{\pi i}$; б) $z=e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=2e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

9. а) $z=1-\sqrt{3}$; б) $z=-4i$; в) $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}-i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Ответ: а) $z=(\sqrt{3}-1)\,e^{\pi i}$; б) $z=4e^{-\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

10. а) $z=4$; б) $z=(1-\sqrt{2})\cdot i$; в) $z=3\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right)$.

Ответ: а) $z=4e^{0\cdot i}$; б) $z=(\sqrt{2}-1)\,e^{-\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=3\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

11. а) $z=\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)$; б) $z=\frac{i}{5}$; в) $z=-2\sqrt{3}-2i$.

Ответ: а) $z=e^{\pi i}$; б) $z=\frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.

12. а) $z=6(-\cos 3\pi-i\sin 3\pi)$; б) $z=(\sqrt{2}-\sqrt{3})\,i$; в) $z=2+2i$.

Ответ: а) $z=6e^{0\cdot i}$; б) $z=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,e^{-\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

13. а) $z=-8$; б) $z=6i$; в) $z=2\left(\cos\frac{17\pi}{3}+i\sin\frac{17\pi}{3}\right)$.

Ответ: а) $z=8e^{\pi\cdot i}$; б) $z=6e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$; в) $z=2\,e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

14. а) $z=4\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; б) $z=7\left(\cos\frac{9\pi}{2}+i\sin\frac{9\pi}{2}\right)$; в) $z=-\sqrt{6}+3\sqrt{2}\,i$.

Ответ: а) $z=2e^{0\cdot i}$; б) $z=7e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$; в) $z=2\sqrt{6}\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

15. а) $z=\log_{\frac{1}{2}}5$; б) $z=6\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)i$; в) $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$.

Ответ: а) $z=\log_2 5\cdot e^{\pi i}$; б) $z=3e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $z=2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Задание 1.3

Вычислите:

1) $\left(\frac{2-2i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$. **Ответ:** -2^6.

2) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{24}$. **Ответ:** 2^{12}.

3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{15}$. **Ответ:** i.

4) $(2+2i)^{20}-\frac{2}{i+1}$. **Ответ:** $-2^{30}-1+i$.

5) $(-1+i)^{32}+\frac{2}{i^{70}}$ **Ответ:** $2^{16}-2$.

6) $\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{2i}\right)^{60}$. **Ответ:** 3^{30}.

7) $\frac{(1+i)^8}{(1-\sqrt{3}\,i)^6}$. **Ответ:** $\frac{1}{4}$.

8) $\frac{3i^{100}}{(\sqrt{3}+i)^3}$. **Ответ:** $-\frac{3}{8}i$.

9) $\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24}-i(1+i)^{24}}$. **Ответ:** $-2-2i$.

10) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$. **Ответ:** $512(1-i\sqrt{3})$.

11) $\frac{1}{i^{42}}-(1-i)^{16}$. **Ответ:** -257.

12) $\frac{(5i)^{13}}{(5+5i)^{10}}$. **Ответ:** $\frac{5^3}{2^5}$.

13) $\dfrac{(5+5i)^{16}}{(10i)^{17}}$. **Ответ:** $-\dfrac{i}{5\cdot 512}$.

14) $\dfrac{(2-2i)^{7}}{1+i}$. **Ответ:** 2^{10}.

15) $\dfrac{(\sqrt{3}-3i)^{6}}{(2-2i)^{10}}$. **Ответ:** $\dfrac{3^3 i}{2^9}$.

Задание 1.4

Найдите все значения корня и изобразите их на плоскости.

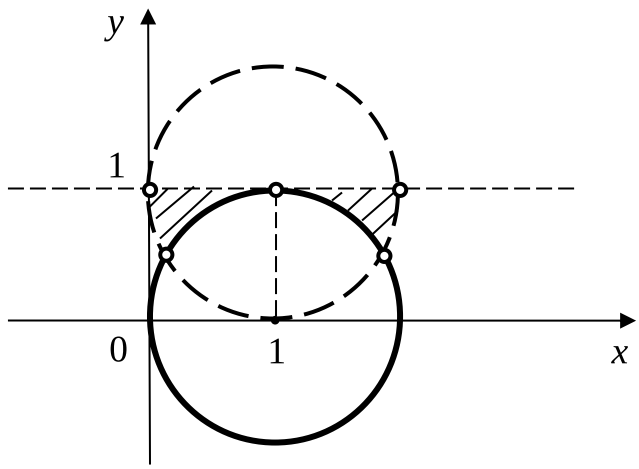
1. $\sqrt[3]{-8}$. **Ответ:** $1\pm\sqrt{3}i;\ -2$.
2. $\sqrt[4]{-1}$. **Ответ:** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\sqrt[4]{-16}$. **Ответ:** $\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$.
4. $\sqrt[3]{-i}$. **Ответ:** $i;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i;\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.
5. $\sqrt[4]{16}$. **Ответ:** $\pm 2;\ \pm 2i$.
6. $\sqrt[3]{-27i}$. **Ответ:** $3i;\quad \dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i;\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$.
7. $\sqrt[4]{-81}$. **Ответ:** $\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$.
8. $\sqrt[3]{8i}$. **Ответ:** $\sqrt{3}+i;\quad -\sqrt{3}+i;\quad -2i$.
9. $\sqrt[3]{-64i}$. **Ответ:** $4i;\quad -2\sqrt{3}-2i;\ 2\sqrt{3}-2i$.
10. $\sqrt[3]{-64}$. **Ответ:** $-4;\quad 2\pm 2\sqrt{3}i$.
11. $\sqrt{i}$. **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
12. $\sqrt{-i}$. **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
13. $\sqrt[3]{i}$. **Ответ:** $-i;\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.
14. $\sqrt[3]{27}$. **Ответ:** $3;\quad -\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i;\ -\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.
15. $\sqrt[6]{64}$. **Ответ:** $\pm 2;\quad \pm 1\pm\sqrt{3}i$.

Задание 1.5

Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих указанным условиям:

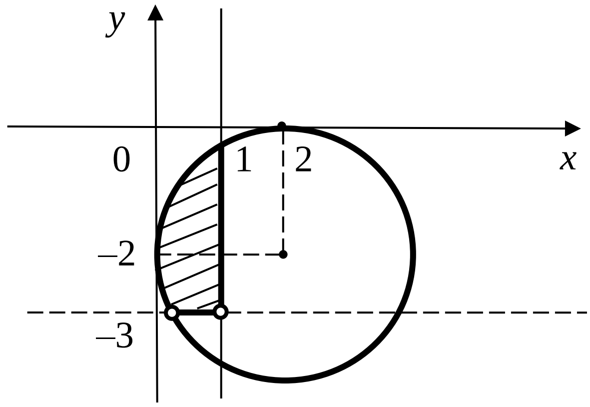
1. $|z-1|\geq 1,\ |z-1-i|<1,\ \operatorname{Im} z<1$.

Ответ:



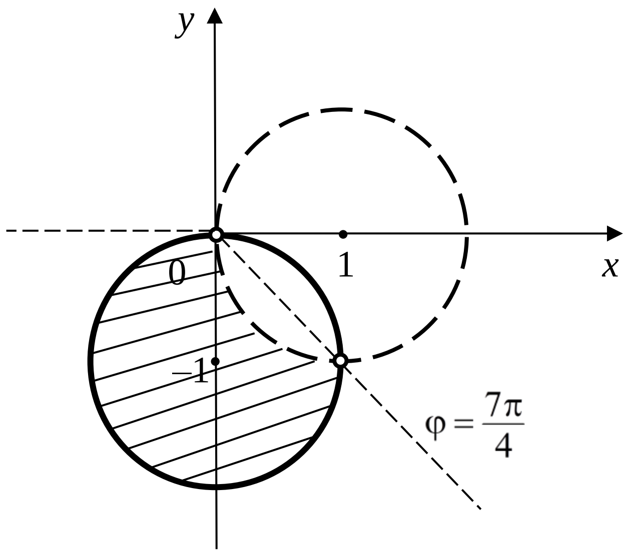
2. $|z-2+2i|\le 2,\ \operatorname{Im} z > -3,\ \operatorname{Re} z \le 1.$

Ответ:



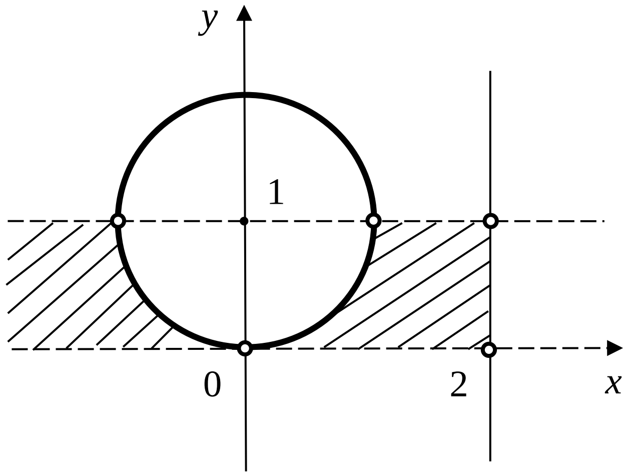
3. $|z-1|>1,\ |z+i|\le 1,\ -\pi < \arg z < -\dfrac{\pi}{4}.$

Ответ:



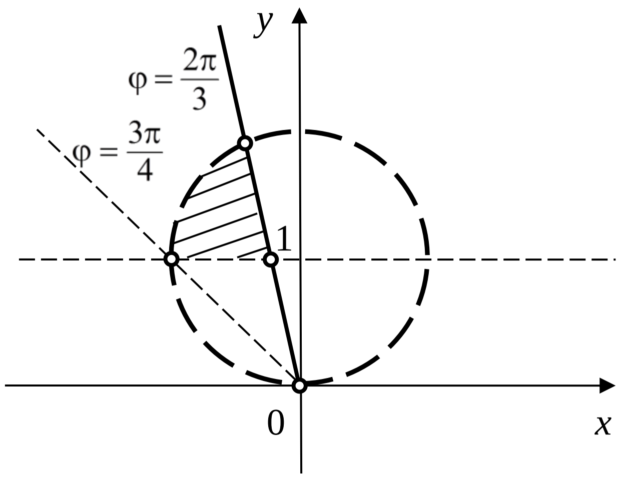
4. $|z-i|\ge 1,\quad \operatorname{Re} z \le 2,\quad 0<\operatorname{Im} z<1$.

Ответ:



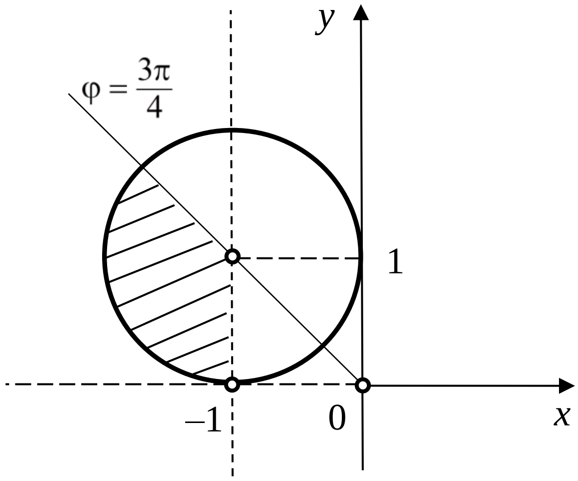
5. $|z-i|<1,\ \operatorname{Im} z>1,\ \dfrac{2\pi}{3}\le \arg z<\dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ:



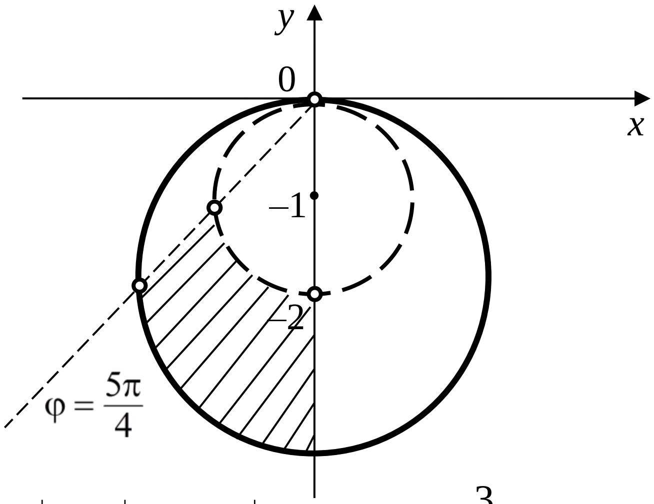
6. $|z+1-i|\le 1,\ \operatorname{Re} z<-1,\ \dfrac{3\pi}{4}\le \arg z<\pi$.

Ответ:



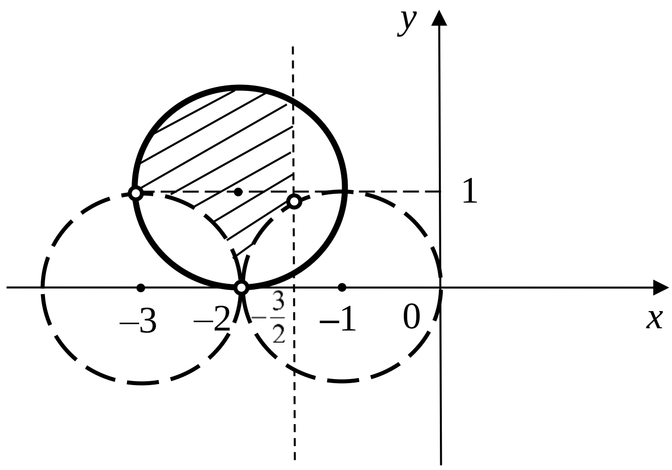
7. $|z+i|>1,\ |z+2i|\le 2,\ \dfrac{5\pi}{4}<\arg z\le\dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ:



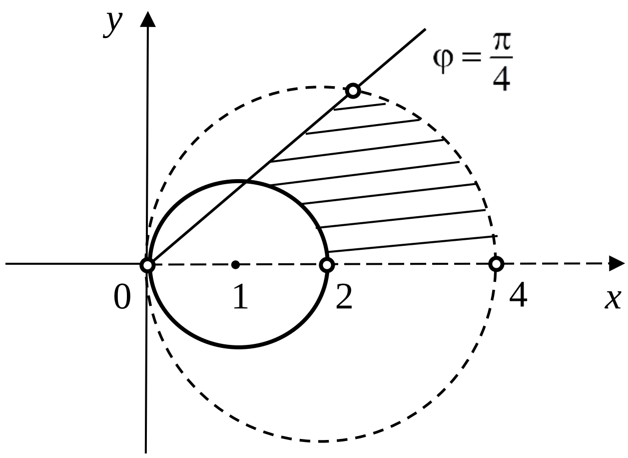
8. $|z+3|>1,\ |z+1|>1,\ |z+2-i|\le 1,\ \operatorname{Re} z<-\dfrac{3}{2}$.

Ответ:



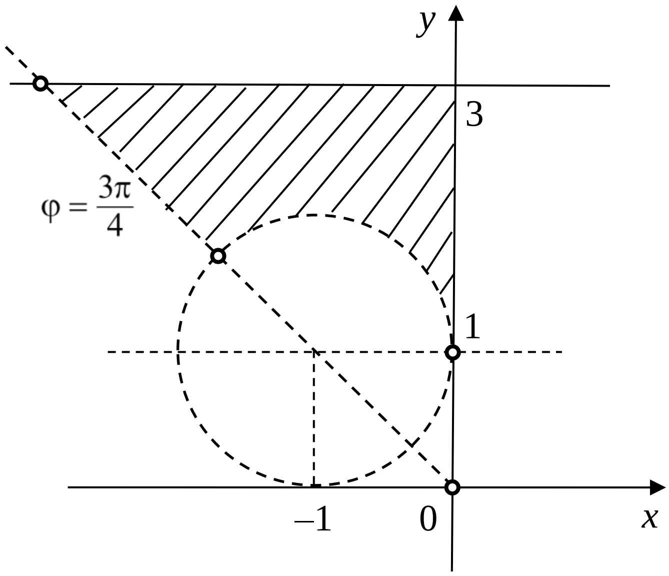
9. $|z-1|\ge 1,\ |z-2|<2,\ 0<\arg z\le\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ:



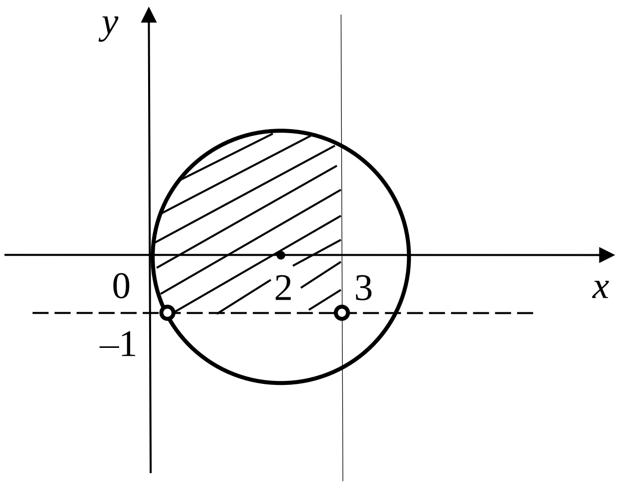
10. $|z+1-i|>1,\ \operatorname{Im} z \le 3,\ \operatorname{Im} z>1,\ \frac{\pi}{2} \le \arg z < \frac{3\pi}{4}$.

Ответ:



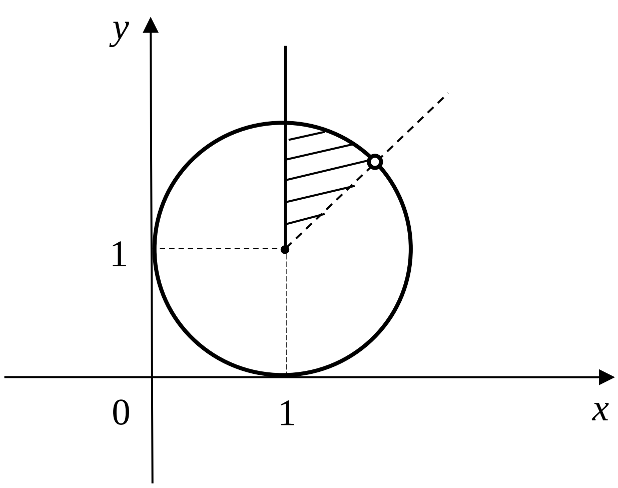
11. $|z-2| \le 2,\ \operatorname{Im} z > -1,\ \operatorname{Re} z \le 3$.

Ответ:



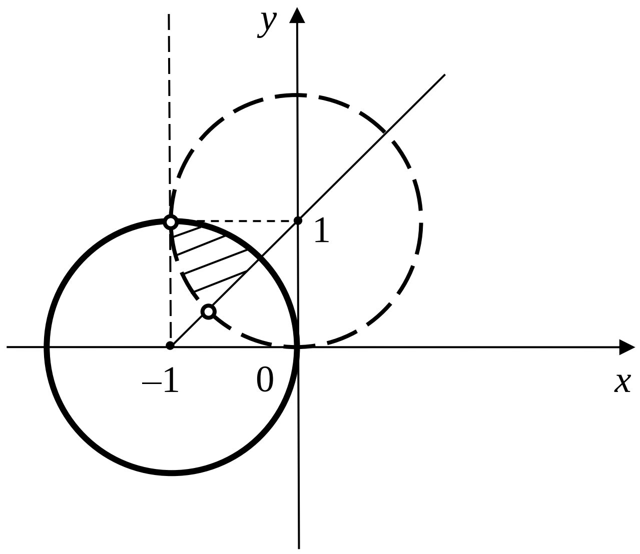
12. $|z-1-i| \le 1,\ \frac{\pi}{4} < \arg\,(z-1-i) \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ:



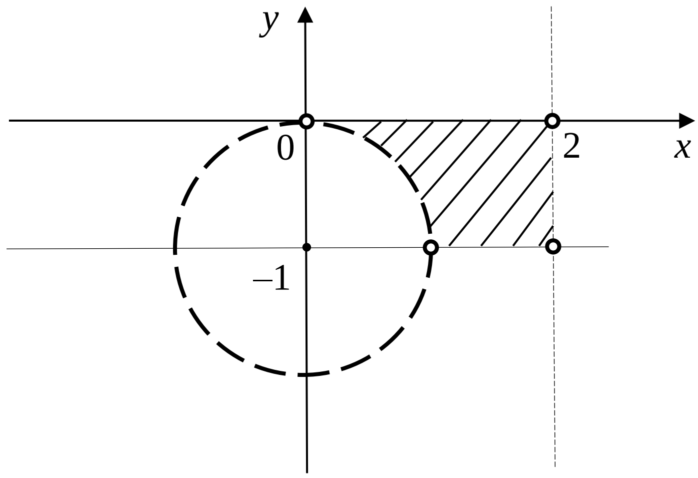
13. $|z+1| \le 1,\ |z-i| < 1,\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg(z+1) < \dfrac{\pi}{2}.$

Ответ:



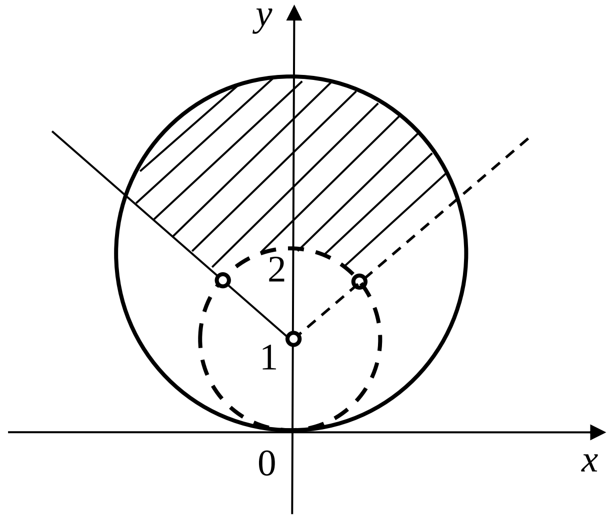
14. $|z+i| > 1,\ -1 \le \operatorname{Im} z \le 0,\ \operatorname{Re} z < 2$

Ответ:



15. $|z-i| > 1,\ |z-2i| \le 2,\ \dfrac{\pi}{4} < \arg(z-i) \le \dfrac{3\pi}{4}.$

Ответ:



2. Функции комплексной переменной

Комплексная плоскость $\boldsymbol{C}$, дополненная бесконечно удаленной точкой $z=\infty$, называется расширенной комплексной плоскостью и обозначается $\overline{\boldsymbol{C}}$.

Связное открытое множество $D\subset\overline{\boldsymbol{C}}$ называется областью.

Если каждой точке $z\in D$ соответствует по тому или иному правилу вполне определенное комплексное число $w=f(z)$, то говорят, что в области D определена *однозначная функция* $w=f(z)$ комплексной переменной z. Если $z=x+iy, w=u+iv$, то функция $w=f(z)$ может быть представлена с помощью двух действительных функций $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ действительных переменных x и y:

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y). \tag{2.1}$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются действительной и мнимой частями функции $w=f(z)$ и обозначаются $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ и $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ соответственно.

Если каждой точке $z\in D$ соответствует хотя бы одно значение переменной w, а некоторым точкам соответствуют несколько (быть может, и бесконечно много) значений функции $w=f(z)$, то говорят, что в области D определена *многозначная функция* $w=f(z)$.

Рассмотрим основные функции комплексной переменной.

<u>1. Степенная функция</u> $w=z^n, n\in\boldsymbol{N}$, определена, непрерывна и однозначна на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\boldsymbol{C}}$.

<u>2. Целая рациональная функция</u> $w=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_{n-1} z+a_n$, $a_i\in\boldsymbol{C},\ i=\overline{0,n},\ n\in\boldsymbol{N}$, определена, непрерывна и однозначна во всех точках $z\in\overline{\boldsymbol{C}}$.

<u>3. Дробно-рациональная функция</u> $w=\dfrac{a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_{n-1} z+a_n}{b_0 z^m+b_1 z^{m-1}+\ldots+b_{m-1} z+b_m}$, $a_i\in\boldsymbol{C},\ i=\overline{0,n},\ b_j\in\boldsymbol{C},\ j=\overline{0,m},\ n,m\in\boldsymbol{N}$, определена, непрерывна и однозначна во всех точках $z\in\overline{\boldsymbol{C}}$ за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

<u>4. Показательная функция</u> $w=e^z$ комплексной переменной $z=x+iy$ определяется равенством

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y), \tag{2.2}$$

является непрерывной и однозначной во всех точках $z\in\overline{\boldsymbol{C}}$, периодической функцией с периодом $2\pi i$.

<u>5. Тригонометрические функции</u>. Функции $\sin z$ и $\cos z$ определяются равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{2.3}$$

являются непрерывными и однозначными во всех точках $z \in \overline{\boldsymbol{C}}$, периодическими функциями с действительным периодом 2π.

Справедливы формулы

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i\cos x \cdot \operatorname{sh} y, \tag{2.4}$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i\sin x \cdot \operatorname{sh} y. \tag{2.5}$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Отсюда функция $\operatorname{tg} z$ непрерывна во всех точках $z \in \overline{\boldsymbol{C}},\ z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а функция $\operatorname{ctg} z$ непрерывна $\forall z \in \overline{\boldsymbol{C}},\ z \neq m\pi, m \in \boldsymbol{Z}$. Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ являются периодическими функциями с действительным периодом π.

6. Гиперболические функции. Функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ определяются соотношениями

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \tag{2.6}$$

являются непрерывными и однозначными во всех $z \in \overline{\boldsymbol{C}}$, периодическими функциями с периодом $2\pi i$.

Функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ определяются формулами

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}, \tag{2.7}$$

при этом функция $\operatorname{th} z$ непрерывна во всех точках $z \in \overline{\boldsymbol{C}},\ z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$, а функция $\operatorname{cth} z$ непрерывна $\forall z \in \overline{\boldsymbol{C}},\ z \neq i\,m\pi,\ m \in \boldsymbol{Z}$. Функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ являются периодическими функциями с периодом πi.

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\sin z = -i\operatorname{sh}(iz),\ \operatorname{sh} z = -i\sin(iz),\\ &\cos z = \operatorname{ch}(iz),\ \operatorname{ch} z = \cos(iz),\\ &\operatorname{tg} z = -i\operatorname{th}(iz),\ \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg}(iz),\\ &\operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth}(iz),\ \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg}(iz). \end{aligned} \tag{2.8}$$

7. Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z,\ z \neq 0,$ определяется как функция, обратная показательной функции $z = e^{w}$, поэтому

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{2.9}$$

Функция $w = \operatorname{Ln} z$ является многозначной в каждой точке z, отличной от нуля и ∞. Главным значением $w = \operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается из (2.9) при $k=0$ и обозначается $\ln z$, т. е.

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z .$$

Тогда

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + i\, 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z} .$$

<u>8. Общая степенная функция</u> $w = z^{\alpha}$ с показателем $\alpha \in \boldsymbol{C}$ определяется соотношением

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z} . \tag{2.10}$$

Функция $w = z^{\alpha}$ является, вообще говоря, многозначной, и ее главное значение равно $e^{\alpha \ln z}$.

<u>9. Общая показательная функция</u> $w = a^{z},\ a \neq 0,\ a \in \boldsymbol{C},$ определяется равенством

$$w = a^{z} = e^{z \mathrm{Ln}\, a} . \tag{2.11}$$

<u>10. Обратные тригонометрические функции</u> $w = \mathrm{Arc}\sin z,\ w = \mathrm{Arc}\cos z,$ $w = \mathrm{Arctg}\, z,\ w = \mathrm{Arcctg}\, z$ определяются как функции, обратные соответственно к функциям $z = \sin w,\ z = \cos w,\ z = \mathrm{tg}\, w,\ z = \mathrm{ctg}\, w$, и являются многозначными функциями.

Покажем, например, что

$$\mathrm{Arc}\cos z = -i\, \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}) .$$

Равенство $w = \mathrm{Arc}\cos z$ равносильно равенству $z = \cos w$. Тогда в силу (2.3): $z = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \Rightarrow e^{2iw} - 2z\, e^{iw} + 1 = 0$.

Решая квадратное уравнение относительно e^{iw}, получим

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} .$$

Отсюда

$$iw = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}) .$$

Значит,

$$w = \mathrm{Arc}\cos w = -i\, \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}) .$$

Аналогичным образом можно показать справедливость формул

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\, \mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1 - z^2}),\ \mathrm{Arc}\cos z = -i\, \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln}\, \frac{1 + iz}{1 - iz},\ \mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln}\, \frac{z + i}{z - i}.$$

<u>11. Обратные гиперболические функции</u>

$$\mathrm{Arsh}\ z = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 + 1}),\ \mathrm{Arch}\ z = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\mathrm{Arth}\ z = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}\, \frac{1 + z}{1 - z},\ \mathrm{Arcth}\ z = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}\, \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Пример 2.1

Вычислите значение функции $\sin(\pi - 2i)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.4), получим

$$\sin(\pi-2i)=\sin(\pi+i\,(-2))=\sin\pi\cdot\mathrm{ch}\,(-2)+i\cos\pi\cdot\mathrm{sh}\,(-2).$$

Отсюда, учитывая, что $\sin\pi=0,\ \cos\pi=-1,\ \mathrm{ch}\,(-2)=\mathrm{ch}\,2,\ \mathrm{sh}\,(-2)=-\mathrm{sh}\,2$, имеем $\sin(\pi-2i)=i\,\mathrm{sh}\,2$.

Ответ: $\sin(\pi-2i)=i\,\mathrm{sh}\,2$.

Пример 2.2

Вычислите значение функции $\mathrm{th}\,(1+i\pi)$.

Решение. Используя формулу (2.7), получим $\mathrm{th}\,(1+i\pi)=\dfrac{\mathrm{sh}\,(1+i\pi)}{\mathrm{ch}\,(1+i\pi)}$.

Найдем по формулам (2.6) значения $\mathrm{sh}\,(1+i\pi)$ и $\mathrm{ch}\,(1+i\pi)$, получим

$$\mathrm{sh}\,(1+i\pi)=\frac{e^{1+i\pi}-e^{-1-i\pi}}{2},\ \mathrm{ch}\,(1+i\pi)=\frac{e^{1+i\pi}+e^{-1-i\pi}}{2}.$$

Вычислим теперь значения функций $e^{1+i\pi}$ и $e^{-1-i\pi}$ по формуле (2.2), получим

$$e^{1+i\pi}=e\,(\cos\pi+i\sin\pi)=-e,$$

$$e^{-1-i\pi}=e^{-1}\,(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))=-e^{-1}.$$

Отсюда

$$\mathrm{sh}\,(1+i\pi)=\frac{-e+e^{-1}}{2}=-\mathrm{sh}1;\ \mathrm{ch}\,(1+i\pi)=\frac{-e-e^{-1}}{2}=-\mathrm{ch}1,$$

и, значит,

$$\mathrm{th}\,(1+i\pi)=\frac{\mathrm{sh}\,1}{\mathrm{ch}\,1}=\mathrm{th}\,1.$$

Ответ: $\mathrm{th}\,(1+i\pi)=\mathrm{th}\,1$.

Пример 2.3

Вычислите значение функции $\mathrm{Ln}\,(-i)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.9). В нашем случае $z=-i$. Найдем по формулам (1.2) и (1.3) модуль $|\,z\,|$ и главное значение аргумента $\arg z$ комплексного числа $z=-i$, получим

$$z=-i\Rightarrow x=0,\ y=-1\Rightarrow|\,z\,|=1,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда и в силу (2.9) имеем

$$\mathrm{Ln}\,(-i)=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\mathrm{Ln}\,(-i)=i\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 2.4

Вычислите значение функции $(-1)^{i}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.11). В нашем случае $a=-1,\ z=i$. Тогда

$$(-1)^i=e^{i\cdot\mathrm{Ln}\,(-1)}.$$

Найдем по формуле (2.9) значение функции $\mathrm{Ln}\,(-1)$, имеем

$$z=-1\Rightarrow x=-1,\ y=0\Rightarrow|z|=1, \arg z=\pi,$$

и, значит,

$$\mathrm{Ln}\,(-1)=\ln 1+i\,(\pi+2k\pi)=i\,(\pi+2k\pi),\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Получим

$$(-1)^i=e^{i\cdot\mathrm{Ln}\,(-1)}=e^{i^2(\pi+2k\pi)}=e^{-\pi-2k\pi},\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\mathrm{Ln}\,(-1)=e^{-\pi-2k\pi},\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 2.5

Вычислите значение функции $\mathrm{Arcsin}\,i$.

Решение. Воспользуемся формулой $\mathrm{Arc}\sin z=-i\,\mathrm{Ln}\,(iz+\sqrt{1-z^2})$; подставляя $z=i$, получим

$$\mathrm{Arcsin}\,i=-i\,\mathrm{Ln}\,(-1\pm\sqrt{2}).$$

Так как

$$\left|-1+\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1,\ \left|-1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}+1,\ \arg(-1+\sqrt{2})=0,\ \arg(-1-\sqrt{2})=\pi,$$

найдем

$$\mathrm{Ln}\ (-1+\sqrt{2})=\ln(\sqrt{2}-1)+i\,2k\,\pi,\ k\in\boldsymbol{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\ (-1-\sqrt{2})=\ln(\sqrt{2}+1)+i\,(\pi+2m\,\pi),\ m\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, значения $\mathrm{Arcsin}\,i$ образуют два множества:

$$\mathrm{Arcsin}\,i=-i\,(\ln(\sqrt{2}-1)+i\,2k\,\pi)=2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1),\ k\in\boldsymbol{Z},$$

$$\mathrm{Arcsin}\,i=-i\,(\ln(\sqrt{2}+1)+i\,(\pi+2m\pi))=\pi+2m\pi-i\,\ln(\sqrt{2}+1),\ m\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\mathrm{Arcsin}\,i=2k\pi-i\,\ln(\sqrt{2}-1),\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\mathrm{Arcsin}\,i=\pi+2m\pi-i\,\ln(\sqrt{2}+1)$, $m\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 2.6

Вычислите значение функции $\mathrm{Arth}\,(1-i)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\mathrm{Arth}\,z=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+z}{1-z}$; подставляя $z=1-i$, получим

$$\mathrm{Arth}\,(1-i)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{2-i}{i}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,(-1-2i).$$

Найдем по формуле (2.9) значение функции $\mathrm{Ln}\,(-1-2i)$:

$$z=-1-2i \Rightarrow x=-1,\ y=-2 \Rightarrow |z|=\sqrt{5},\ \arg z=-\pi+\operatorname{arctg}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}(-1-2i)=\frac{1}{2}\ln 5+i\,(-\pi+\operatorname{arctg}2+2k\pi),\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Отсюда

$$\operatorname{Arth}(1-i)=\frac{1}{4}\ln 5+\frac{i}{2}\operatorname{arctg}2+i\left(-\frac{1}{2}+k\right)\pi,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{Arth}(1-i)=\frac{1}{4}\ln 5+\frac{i}{2}\operatorname{arctg}2+i\left(-\frac{1}{2}+k\right)\pi,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$

Задание 2.1

Вычислите значение функции.

1. $\sin(\pi+i)$. **Ответ:** $-i\operatorname{sh}1.$
2. i^i. **Ответ:** $e^{-\pi/2-2k\pi},\ k\in\boldsymbol{Z}$.
3. 2^{1+i}. **Ответ:** $e^{\ln 2+i2k\pi},\ k\in\boldsymbol{Z}$.
4. $\operatorname{Arcsin}2$. **Ответ:** $\frac{\pi}{2}-i\ln(2\pm\sqrt{3})+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.
5. $\operatorname{Ln}(3+4i)$. **Ответ:** $\ln 5+i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k\right),\ k\in\boldsymbol{Z}$.
6. $\operatorname{Arccos}i$. **Ответ:** $\left[\begin{array}{l}-i\ln(\sqrt{2}-1)-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\\ -i\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$
7. $\cos\pi i$. **Ответ:** $\operatorname{ch}\pi.$
8. $\operatorname{Arctg}2i$. **Ответ:** $\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{i\ln 3}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}$.
9. i^{4i}. **Ответ:** $e^{-2\pi-8\pi k},\ k\in\boldsymbol{Z}$.
10. $\operatorname{Ln}(-i)$. **Ответ:** $i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\boldsymbol{Z}$.
11. $\operatorname{sh}\frac{\pi i}{2}$. **Ответ:** $i\operatorname{sh}\pi$.
12. $\sin\pi i$. **Ответ:** $\ln(1+\sqrt{2})+i\left(\frac{\pi}{2}+2m\pi\right),\ m\in\boldsymbol{Z}$.
13. $\operatorname{Ln}(-1-i)$. **Ответ:** $\frac{1}{2}\ln 2+\left(2k-\frac{3}{4}\right)\pi i,\ k\in\boldsymbol{Z}.$
14. $\cos(1+i)$. **Ответ:** $\operatorname{ch}(i-1).$
15. $\operatorname{ch}(1+i)$. **Ответ:** $\operatorname{ch}1\cos1+i\operatorname{sh}1\sin1.$

3. Дифференцирование функций комплексной переменной

1. Определение дифференцируемой функции

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D, точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D.

Обозначим

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\,\Delta y.$$

Функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке $z \in D$, если отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю. Этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается символом $f'(z)$, т. е.

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{3.1}$$

Если $z = x + i\,y,\ w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x},} \tag{3.2}$$

называемые **условиями Коши – Римана**.

Обратно, если непрерывно дифференцируемые функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x,y) удовлетворяют условиям Коши – Римана, то функция $w = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$.

2. Определение аналитической функции

Функция $w = f(z)$ называется *аналитической* в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической области $f(z)$ справедливо

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.} \tag{3.3}$$

3. Определение гармонической функции

Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по обеим переменным в области D и функция $w = u(x,y) + iv(x,y)$ является аналитической в этой области, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют в области D уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются *гармоническими* в области D функциями.

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие в области D условиям Коши – Римана, называются *сопряженными*.

Всякая гармоническая в односвязной области D функция служит действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в этой области функции.

Пример 3.1

Докажите аналитичность функции $w = z\,e^{iz}$ в области определения. Найдите значение ее производной в заданной точке $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Найдем действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции $w = z\,e^{iz}$. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$w = (x+iy)\,e^{i(x+iy)} = (x+iy)\,e^{-y+ix} = (x+iy)\,e^{-y}(\cos x + i\sin x) =$$
$$= (x\cos x - y\sin x)\,e^{-y} + i\,(y\cos x + x\sin x)\,e^{-y}.$$

Значит,

$$u(x, y) = (x\cos x - y\sin x)\,e^{-y}, v(x, y) = (y\cos x + x\sin x)\,e^{-y}.$$

Проверим справедливость условий Коши – Римана для функции $w = z\,e^{iz}$ на всей комплексной плоскости.

Найдем частные производные первого порядка функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\cos x - x\sin x - y\cos x)\,e^{-y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = (-\sin x - x\cos x + y\sin x)\,e^{-y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = (-y\sin x + \sin x + x\cos x)\,e^{-y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = (\cos x - y\cos x - x\sin x)\,e^{-y}.$$

Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями в любой точке (x, y) и удовлетворяют условиям Коши – Римана на всей комплексной плоскости, то функция $w = z\,e^{iz}$ является аналитической функцией $\forall z \in \boldsymbol{C}$.

Воспользуемся формулой (3.3) для нахождения $f'(z)$, имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=(\cos x-x\sin x-y\cos x)\,e^{-y}+i\,(-y\sin x+\sin x+x\cos x)\,e^{-y}=$$

$$=(\cos x+i\sin x)\,e^{-y}+i\,(x+iy)\,e^{-y}(\cos x+i\sin x)=(\cos x+i\sin x)\,e^{-y}\cdot(1+i\,(x+iy))=$$

$$=e^{ix}\cdot e^{i^2y}\cdot(1+i\,(x+iy))=e^{iz}\cdot(1+iz).$$

Значит, $f'(z)=e^{iz}\cdot(1+iz)$. Отсюда найдем $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\left(1+i\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая, что $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, имеем $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+i$.

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+i$.

Пример 3.2

Определите, является ли функция $f(z)=z\operatorname{Im}z-2i$ аналитической. Найдите производную функции $f(z)$ в точках, в которых она существует.

Решение. Найдем действительную $u\,(x,y)$ и мнимую $v\,(x,y)$ части функции $f(z)=z\operatorname{Im}z-2i$.

Пусть $z=x+iy$, тогда $f(z)=(x+iy)\operatorname{Im}(x+iy)-2i=xy+i\,(y^2-2)$. Значит, $u\,(x,y)=xy$, $v(x,y)=y^2-2$. Функции $u\,(x,y)$ и $v\,(x,y)$ дифференцируемы в любой точке $(x;y)$. Вычислим их частные производные первого порядка: $\frac{\partial u}{\partial x}=y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x$, $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2y$.

Составим условия Коши – Римана для данной функции:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}\qquad \begin{cases}y=2y,\\ x=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0,\\ x=0.\end{cases}$$

Следовательно, условия Коши – Римана выполняются только в одной точке $(0;0)$. Поэтому функция $f(z)$ является дифференцируемой только в точке $z=0$ и не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

Найдем $f'(z)$. Воспользуемся формулой $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$. Тогда

$$f'(0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\ y=0}}=(y+i\,0)\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}}=0.$$

Ответ: $f'(0)=0$.

Пример 3.3

Может ли функция $v(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ являться мнимой частью аналитической функции $f(z)$? В случае положительного ответа найдите $f(z)$, если $f(0)=0$.

Решение. Покажем сначала, что функция $v(x,y)$ является гармонической на всей комплексной плоскости функцией. Найдем $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6x+12y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=6x^2-6xy-6y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6x-12y.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}=0$$

для любой точки (x,y), и, значит, функция $v=v(x,y)$ является гармонической функцией на всей комплексной плоскости.

Найдем теперь сопряженную с $v(x,y)$ функцию $u(x,y)$. Воспользуемся условиями Коши – Римана, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=6x^2-6xy-6y^2, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-3x^2-12xy+3y^2. \tag{3.5}$$

Проинтегрируем равенство (3.4) по переменной x, имеем

$$u(x,y)=2x^3-3x^2y-6xy^2+\varphi(y). \tag{3.6}$$

Продифференцируем равенство (3.6) по переменной y.

В силу (3.5) получим

$$-3x^2-12xy+\varphi'(y)=-3x^2-12xy+3y^2.$$

Отсюда $\varphi'(y)=3y^2$, и, следовательно, $\varphi(y)=y^3+c$. Значит,

$$u(x,y)=2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+c.$$

Составим функцию $f(z)$, получим

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)=2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+c+i(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3).$$

Тогда

$$f(z)=2(x^3-3xy^2+i\,3x^2y-iy^3)+i(x^3-3xy^2+i\,3x^2y-iy^3)+c=$$

$$=(2+i)(x+iy)^3+c=(2+i)z^3+c.$$

Учитывая, что $f(0)=0$, найдем c:

$$f(0)=0 \Rightarrow (2+i)\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0.$$

Значит, $f(z)=(2+i)\cdot z^3$.

Ответ: $f(z)=(2+i)\cdot z^3$.

Задание 3.1

Докажите аналитичность функции в области определения. Найдите значение ее производной в заданной точке z_0.

1. $f(z)=iz^3,\quad z_0=1+i.$ **Ответ:** $f'(1+i)=-6.$
2. $f(z)=e^{1-2iz},\quad z_0=\dfrac{\pi}{6}.$ **Ответ:** $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-e(\sqrt{3}+i).$
3. $f(z)=2z^2-iz,\quad z_0=1-i.$ **Ответ:** $f'(1-i)=4-5i.$
4. $f(z)=z^3+z^2+i,\quad z_0=\dfrac{2i}{3}.$ **Ответ:** $f'\left(\dfrac{2i}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4i}{3}.$
5. $f(z)=\dfrac{1}{z},\quad z_0=-i.$ **Ответ:** $f'(-i)=1.$
6. $f(z)=z^3+z-i,\quad z_0=i.$ **Ответ:** $f'(i)=-2.$
7. $f(z)=\dfrac{1}{2z+3},\quad z_0=\dfrac{3i-3}{2}.$ **Ответ:** $f'\left(\dfrac{3i-3}{2}\right)=\dfrac{2}{9}.$
8. $f(z)=e^{1-2z},\quad z_0=\dfrac{\pi i}{3}.$ **Ответ:** $f'\left(\dfrac{\pi i}{3}\right)=e\,(1+i\sqrt{3}).$
9. $f(z)=ze^z,\quad z_0=-1+i\pi.$ **Ответ:** $f'(-1+\pi i)=-\pi e^{-1}i.$
10. $f(z)=(z+1)\,e^{2z},\quad z_0=0.$ **Ответ:** $f'(0)=3.$
11. $f(z)=z^3,\quad z_0=1.$ **Ответ:** $f'(1)=3.$
12. $f(z)=(z-i)^2,\quad z_0=2i.$ **Ответ:** $f'(2i)=2i.$
13. $f(z)=e^{-z^2},\quad z_0=5i.$ **Ответ:** $f'(5i)=-10\,i\,e^{25}.$
14. $f(z)=\cos\dfrac{z}{2},\quad z_0=-2i.$ **Ответ:** $f'(-2i)=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}1\cdot i.$
15. $f(z)=\operatorname{ch}z,\quad z_0=1+i.$ **Ответ:** $f'(1+i)=\cos 1\cdot\operatorname{sh}1+i\sin 1\cdot\operatorname{ch}1.$

Задание 3.2

Может ли данная функция являться действительной или мнимой частью аналитической функции $f(z)$? В случае положительного ответа найдите $f(z)$.

1. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}.$ **Ответ:** $\dfrac{1}{z}.$
2. $v=2xy+2y,\quad f(i)=2i-1.$ **Ответ:** $z^2+2z.$

3. $v = 3x + 2xy,\ f(-i) = 2.$ **Ответ:** $3iz + z^2.$

4. $u = x^2 - y^2 + 2x,\ f(i) = 2i - 1.$ **Ответ:** $z^2 + 2z.$

5. $v = e^{-y}\sin x + y,\ f(0) = 1.$ **Ответ:** $e^{iz} + z.$

6. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1,\ f(0) = 1.$ **Ответ:** $z^2 - 2z + 1.$

7. $u = e^{-y}\cos x + x,\ f(0) = 1.$ **Ответ:** $z + e^{iz}.$

8. $v = 2xy - 2y,\ f(0) = 1.$ **Ответ:** $z^2 - 2z + 1.$

9. $v = 3x^2y - y^3,\ f(0) = 1.$ **Ответ:** $z^3 + 1.$

10. $v = y^2 - x^2 + 2y - 6,\ f(1) = 2 - 7i.$ **Ответ:** $-iz^2 + 2z - 6i$.

11. $u = 1 - \sin y \cdot e^x,\ f(0) = 1 + i.$ **Ответ:** $1 + ie^z.$

12. $v = 2xy + 2x,\ f(0) = 0.$ **Ответ:** $z^2 + 2iz.$

13. $u = -2xy - 2y,\ f(0) = i.$ **Ответ:** $iz^2 + 2iz + i.$

14. $v = 2xy + y,\ f(0) = 0.$ **Ответ:** $z^2 + z.$

15. $u = y - 2xy,\ f(0) = 0.$ **Ответ:** $iz^2 - iz.$

4. Интеграл от функции комплексной переменной

1. Интегрирование непрерывных функций

Пусть в области D комплексной плоскости определена однозначная и непрерывная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, а l – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D.

Вычисление *интеграла* $\int\limits_l f(z)\,dz$ от функции $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода по формуле

$$\int\limits_l f(z)\,dz = \int\limits_l udx - vdy + i\int\limits_l vdx + udy, \tag{4.1}$$

где интегралы зависят от пути интегрирования.

Если кривая, соединяющая точки A и B, задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),$ и $x(t_1) = x_A,\ y(t_1) = y_A,\ x(t_2) = x_B,\ y(t_2) = y_B$, то формула (4.1) принимает вид

$$\int\limits_l f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt, \tag{4.2}$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, или окружностью с центром в точке z_0, полезно делать замену переменной вида

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}. \qquad (4.3)$$

2. Интегрирование аналитических функций

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае $\oint\limits_l f(z)\,dz = 0$, где l – любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области D.

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место **формула Ньютона – Лейбница**:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \qquad (4.4)$$

где $\Phi(z)$– какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т. е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ – аналитические в односвязной области D, а z_0 и z_1 – произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,\varphi'(z)\,dz = [\,f(z)\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{z_0}^{z_1} \varphi(z)\,f'(z)\,dz.$$

3. Интегрирование многозначных функций

При интегрировании многозначной функции нужно выделить ее однозначную ветвь, задав значение функции в некоторой точке кривой, по которой ведется интегрирование (пример 4.5).

4. Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D, ограниченной кусочно-гладкой замкнутой линией l, и непрерывна вплоть до границы l, то для любой внутренней точки $z_0 \in D$ справедлива **интегральная формула Коши**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_l \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz,$$

рассматривается положительный обход вдоль линии l (при движении вдоль l область D остается слева).

Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на ее границе l, то для любого натурального n имеет место **интегральная формула Коши для производных**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_l \frac{f(z)\,d\,z}{(z - z_0)^{n+1}},$$

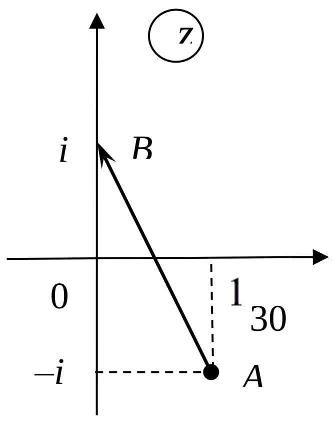


Рис. 4.1

где $z_0 \in D$.

Пример 4.1

Вычислите интеграл $\int\limits_{l_{AB}} \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z\, dz,$ где l_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 1 - i$ и $z_B = i$ (рис. 4.1).

Решение. Найдем уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;-1)$ и $B(0;1)$: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \dfrac{x-1}{0-1} = \dfrac{y-(-1)}{1-(-1)} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2(x-1) = -(y+1).$

Значит,

$$2x + y - 1 = 0.$$

Составим параметрические уравнения отрезка AB с началом в точке A и концом в точке B. Пусть $x = t$, тогда в силу (4.3): $y = 1 - 2t,\ t_1 = 1,\ t_2 = 0$.

Применим формулу (4.2). В нашем случае $f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z,\, z(t) = t + i(1-2t)$. Отсюда

$$f(z(t)) = (t - i(1-2t)) \cdot t,\ z'(t) = 1 - 2i.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{l_{AB}} \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_1^0 (t - i\,(1-2t))\,t\,(1-2i)\,dt = (1-2i)\int\limits_1^0 (t^2 - i\,(t - 2t^2))\,dt =$$

$$= (1-2i) \cdot \left(\frac{t^3}{3} - i \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \right) \right) \Bigg|_1^0 = -(1-2i) \cdot \left(\frac{1}{3} + i\frac{1}{6} \right) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} i.$$

Ответ: $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} i$.

Пример 4.2

Вычислите интеграл $\int\limits_l \operatorname{Im} z\, dz$, где l – дуга окружности $|z| = 2,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$ (начало пути в точке $z = -2i$).

Решение. Параметрические уравнения дуги окружности $|z| = 2$ с центром в начале координат и радиусом $R = 2$, заключенной между лучами $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$ и $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ (рис. 4.2), имеют вид $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t_1 = -\dfrac{\pi}{2}, t_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

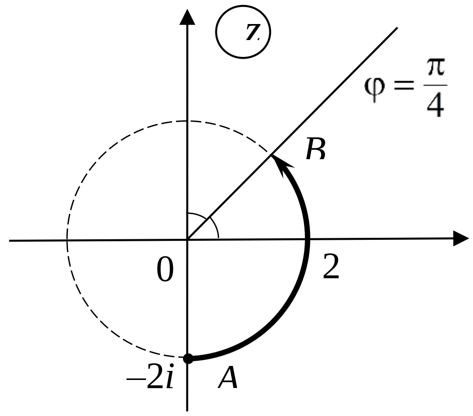


Рис. 4.2

Тогда $z(t) = 2\cos t + i\,2\sin t$, и, значит, $z(t) = 2e^{it}$.

Применяя формулу (4.2), имеем

$$\int\limits_l \operatorname{Im} z\,dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sin t\cdot(-2\sin t + 2i\cos t)\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-4\sin^2 t + 4i\sin t\cos t)\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл, получим

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-4\sin^2 t + 4i\sin t\cos t)\,dt = -4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt + 4i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cdot\cos dt =$$

$$= -4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt + 4i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t\,d\sin t = -2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + 2i\sin^2 t\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + 2i\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 1 - \frac{3\pi}{2} - i.$$

Следовательно, $\int\limits_l \operatorname{Im} z\,dz = 1 - \frac{3\pi}{2} - i$.

Ответ: $1 - \frac{3\pi}{2} - i$.

Пример 4.3

Вычислите $\int\limits_l (12z^5 + 4z^3 + 1)\,dz$, где l – отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 1$ и $z_B = i$.

Решение. Используя формулу Ньютона – Лейбница, в силу свойства аддитивности имеем

$$\int\limits_l (12z^5 + 4z^3 + 1)\,dz = (2z^6 + z^4 + z)\Big|_1^i =$$
$$= (2i^6 + i^4 + i) - (2 + 1 + 1) = -2 + 1 + i - 4 = -5 + i.$$

Ответ: $-5 + i$.

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в односвязной области D, содержащей точки z_1 и z_2, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\cdot g'(z)\,dz = (f(z)\cdot g(z))\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} f'(z)\cdot g(z)\,dz.$$

Пример 4.4

Вычислите $\int\limits_l z\,e^{-z}\,dz$, где l – отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 1$ и $z_B = \pi i$.

Решение. Функция $f(z) = z\,e^{-z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости, следовательно, интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_l z e^{-z}dz = \int\limits_1^{\pi i} z e^{-z}dz = (-z e^{-z})\Bigg|_1^{\pi i} - \int\limits_1^{\pi i} e^{-z}\, dz = (-z e^{-z} - e^{-z})\Bigg|_1^{\pi i} = -\pi i e^{-\pi i} - e^{-\pi i} + e^{-1} + e^{-1}.$$

Учитывая, что $e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$, имеем

$$\int\limits_l z e^{-z}\, dz = 1 + 2e^{-1} + \pi i .$$

Ответ: $1 + 2e^{-1} + \pi i$.

Пример 4.5

Вычислите интеграл $\int\limits_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, где l – верхняя дуга окружности $|z| = 1$. Для $\sqrt[3]{z}$ берется та ветвь, для которой $\sqrt[3]{1} = 1$ (рис. 4.3).

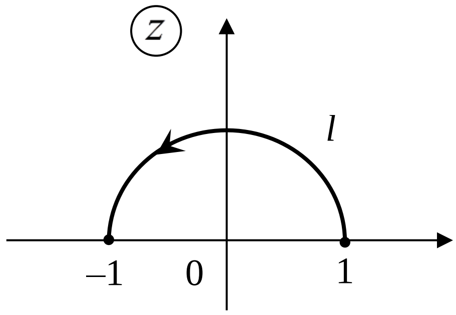


Рис. 4.3

Решение.

<u>1-й способ.</u> Пусть $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)$,

$k = 0, 1, 2,$ т. е. существует три различные ветви функции $\sqrt[3]{z}$. Выберем ту однозначную ветвь функции $\sqrt[3]{z}$, для которой $\sqrt[3]{1} = 1$ (т. е. $k = 0$). Учитывая, что $|z| = 1$, получим

$$\sqrt[3]{z} = \cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}. \tag{4.5}$$

Вычислим интеграл, применяя формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \int\limits_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{z}\right)^2 \Bigg|_1^{-1} = \frac{3}{2}\left(\left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{1}\right)^2\right).$$

Воспользуемся формулой (4.5) для нахождения $\sqrt[3]{-1}$:

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда и в силу выбора $\sqrt[3]{1} = 1$ окончательно получим:

$$\int\limits_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} i .$$

Ответ: $-\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} i$.

<u>2-й способ.</u> Положим $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$.

$$\int_0^{\pi} ie^{\frac{2}{3}i\varphi}d\varphi = \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}i\varphi}\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi - 1\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = -\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i.$$

Ответ: $-\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$.

Пример 4.6

Вычислите интеграл $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$.

Решение. Область D есть круг с границей $|z-i|=1$, представляющей собой окружность радиусом 1 и центром в точке i.

Функция $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ имеет две особые точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$: $z_1 \in D,\ z_2 \notin D$.

Подынтегральную функцию представим в виде

$$\frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{z+1} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}.$$

Отсюда и в силу интегральной формулы Коши получим

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\frac{e^{iz}}{z+1}}{z-i}dz = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z+i}\Bigg|_{z=i} = \pi e^{-1}.$$

Ответ: πe^{-1}.

Пример 4.7

Вычислите $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2-1}dz$.

Решение. В нашем случае D является областью, ограниченной окружностью радиусом 2 и центром в начале координат.

Подынтегральная функция $\frac{\cos z}{z^2-1}$ имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, принадлежащие области D.

Построим такие две окружности l_1 и l_2 с центрами в точках z_1 и z_2 достаточно малого радиуса $r,\ r>0$, чтобы они не пересекались и целиком лежали в круге $|z| \le 2$ (рис. 4.4).

В трехсвязной области, ограниченной $|z|=2, l_1, l_2$ подынтегральная функция является аналитической.

Отсюда и в силу следствия (4.2) имеем

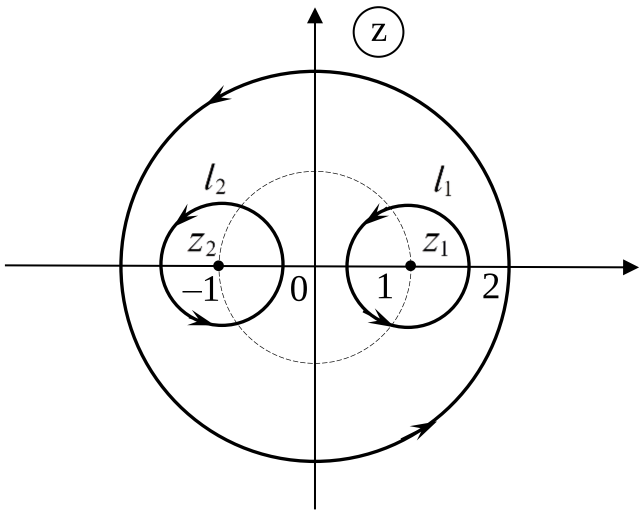


Рис. 4.4

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2-1}\,dz = \oint_{l_1} \frac{\cos z}{z^2-1}\,dz + \oint_{l_2} \frac{\cos z}{z^2-1}\,dz.$$

Используя интегральную формулу Коши, вычислим полученные интегралы:

$$\oint_{l_1} \frac{\cos z}{z^2-1}\,dz = \oint_{|z-1|=r} \frac{\frac{\cos z}{z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\cos z}{z+1}\right|_{z=1} = i\pi\cos 1,$$

$$\oint_{l_2} \frac{\cos z}{z^2-1}\,dz = \oint_{|z-1|=r} \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z+1}\,dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\cos z}{z-1}\right|_{z=-1} = -i\pi\cos 1.$$

Окончательно получим

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2-1}\,dz = i\pi\cos 1 - i\pi\cos 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 4.8

Вычислите $\oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3}\,dz$.

Решение.

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left.(\sin z)''\right|_{z=-i} = \pi i\,(-\sin i) = i\pi\,\mathrm{sh}1.$$

Ответ: $i\pi\,\mathrm{sh}1$.

Задание 4.1

Вычислите интеграл.

1. $\oint_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{z^3-2z^2+z-2}$. **Ответ:** $2\pi i$.
2. $\oint_{|z|=4} \frac{(z+1)\,dz}{z^3-6z^2+11z-6}$. **Ответ:** 0.
3. $\oint_{|z-1|=1} \frac{z dz}{z^4-1}$. **Ответ:** $\frac{\pi i}{2}$.
4. $\oint_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz$. **Ответ:** $\frac{e-1}{e}2\pi i$.
5. $\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch}(zi)}{z^2+4z+3}dz$. **Ответ:** $\cos 1\cdot\pi i$.
6. $\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$. **Ответ:** $-\frac{\pi i}{3}$.

7. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z dz}{z^2+2z}.$ **Ответ:** $\pi i.$

8. $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{e^{iz} dz}{z^2+1}.$ **Ответ:** $\dfrac{\pi}{e}.$

9. $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz.$ **Ответ:** $\dfrac{\pi i}{2}.$

10. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz.$ **Ответ:** $\pi \operatorname{sh}1.$

11. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\operatorname{tg} z}{ze^{\frac{1}{(z+2)}}}dz.$ **Ответ:** $0.$

12. $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\cos z}{z^2+3z}dz.$ **Ответ:** $\dfrac{2}{3}\pi i.$

13. $\oint\limits_{|z-2i|=1} \dfrac{dz}{z^2+16}.$ **Ответ:** $0.$

14. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\operatorname{tg} z}{z-1}dz.$ **Ответ:** $2\pi i \operatorname{tg}1.$

15. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^z dz}{z^2+4}.$ **Ответ:** $\pi i \sin 2.$

Задание 4.2

Вычислите интеграл.

1. $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz,$ $AB -$ парабола, $y=x^2,\ z_A=0,\ z_B=1+i.$

Ответ: $\dfrac{14-5i}{15}.$

2. $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A=0,\ z_B=2+2i.$

Ответ: $8+8i.$

3. $\int\limits_{ABC} |z| dz,$ ABC – ломаная, $z_A=1,\ z_B=0,\ z_C=-1+i.$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}.$

4. $\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A=0,\ z_B=1+i.$

Ответ: $\dfrac{2}{3}(1-i).$

5. $\int\limits_{AB} \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{z}\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 1,\ z_B = 2$.

Ответ: 1.

6. $\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\operatorname{Im} z\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0,\ z_B = 1 + 2i$.

Ответ: $(e^5 - 1)\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)$.

7. $\int\limits_{AB} z\bar{z}\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 1,\ z_B = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

8. $\int\limits_{AB} z\operatorname{Im} z^2\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0,\ z_B = 1 + i$.

Ответ: i.

9. $\int\limits_{AB} \operatorname{Re} z\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0,\ z_B = 1 + i$.

Ответ: $\frac{1}{2}(1+i)$.

10. $\int\limits_{ABC} \operatorname{Re} z\,dz,$ ABC – ломаная, $z_A = 0,\ z_B = 1,\ z_C = 1 + i$.

Ответ: $\frac{1}{2} + i$.

11. $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0,\ z_B = 2 + i$.

Ответ: $\frac{2+i}{2}$.

12. $\int\limits_{AB} (1 + i - 2\bar{z})\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0,\ z_B = 1 + i$.

Ответ: $2i - 2$.

13. $\int\limits_{ABC} (1 + i - 2\bar{z})\,dz,$ ABC – ломаная, $z_A = 0,\ z_B = 1,\ z_C = 1 + i$.

Ответ: -2.

14. $\int\limits_{AB} e^{\bar{z}}\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = 0,\ z_B = 1 + i$.

Ответ: $e(\cos 1 + i\sin 1) - 1$.

15. $\int\limits_{AB} |z|\,dz,$ AB – отрезок прямой, $z_A = -1,\ z_B = 1$.

Ответ: 1.

Задание 4.3

Вычислите интеграл.

1. $\oint\limits_{C} z\operatorname{Re} z\,dz,$ C: $|z| = 1$. **Ответ:** 0.

2. $\oint\limits_C \left(z^2 + z\bar{z}\right)dz,\ \ C\colon \left\{|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\right\}.$ **Ответ:** $-\dfrac{8}{3}.$

3. $\oint\limits_C |z|dz,\ \ C\colon \left\{|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\right\}.$ **Ответ:** $-2.$

4. $\oint\limits_C \dfrac{\bar{z}}{z}dz,\ \ C\colon \left\{|z| = 2,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}.$ **Ответ**: $4i$.

5. $\oint\limits_C |z|\bar{z}dz,\ C\colon \left\{|z| = 4,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}.$ **Ответ:** $64\pi i$.

6. $\oint\limits_C |z|\operatorname{Re} z^2 dz,\ \ C\colon \left\{|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\right\}.$ **Ответ:** $\dfrac{2}{3}.$

7. $\oint\limits_C z\bar{z}dz,\ \ C\colon \left\{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0,\ \operatorname{Im} z \ge 0\right\}.$ **Ответ:** $i - 1$.

8. $\oint\limits_C |z|dz,\ \ C\colon \left\{|z| = 2,\ \dfrac{3}{4}\pi \le \arg z \le \dfrac{5}{4}\pi\right\}.$ **Ответ:** $-4\sqrt{2}i$.

9. $\oint\limits_C \bar{z}dz,\ C\colon |z| = 2.$ **Ответ:** $8\pi i$.

10. $\oint\limits_C z|z|dz,\ C\colon \left\{|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\right\}.$ **Ответ:** 0.

11. $\oint\limits_C (\bar{z})^2 dz,\ C\colon \left\{|z| = 2,\ \operatorname{Re} z \ge 0,\ \operatorname{Im} z \le 0\right\}.$ **Ответ:** $-8(1-i)$.

12. $\oint\limits_C \left(z + \bar{z}^2\right)dz,\ C\colon \left\{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}.$ **Ответ:** $2i$.

13. $\oint\limits_C z\bar{z}|z|dz,\ C\colon \left\{|z| = 2,\ \operatorname{Im} z \le 0\right\}.$ **Ответ:** 32.

14. $\oint\limits_C (\bar{z} + 2)\,dz,\ C\colon \left\{|z| = 2,\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}.$ **Ответ:** $2\pi i + 4i - 4$.

15. $\oint\limits_C (i + \bar{z})\,dz,\ C\colon |z| = 1.$ **Ответ:** $-4\pi.$

Задание 4.4

Вычислите интеграл от аналитической функции.

1. $\int\limits_L (z+1)e^z dz,\ \ L\colon \left\{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0\right\}.$

Ответ: $2i\cos 1$.

2. $\int\limits_{AB} \left(z^2 + 7z + 1\right)dz,\ AB -$ отрезок прямой, $z_A = 1,\ z_B = 1 - i$.

Ответ: $-\dfrac{9}{2} - \dfrac{26}{3}i$.

3. $\int\limits_{AB} \left(12z^5 + 4z^3 + 1\right)dz,\ AB -$ отрезок прямой, $z_A = 1,\ z_B = i$.

Ответ: $-5 + i$.

4. $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz,\ ABC -$ ломаная, $z_A = i,\ z_B = 1,\ z_C = 0$.

Ответ: $\frac{1-e}{4}$.

5. $\int\limits_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)dz,\ ABC-$ ломаная, $z_A=0,\ z_B=1,\ z_C=i$.

Ответ: $i\left(\operatorname{sh}1-\frac{1}{3}\right)$.

6. $\int\limits_{ABC}\left(\operatorname{ch}z+\cos iz\right)dz,\ ABC-$ ломаная, $z_A=0,\ z_B=-1,\ z_C=i$.

Ответ: $2\operatorname{sh}i$.

7. $\int\limits_{L}\left(\operatorname{ch}z+z\right)dz,\ L\colon\ \{|z|=1,\ \operatorname{Im}z\le 0\}$.

Ответ: $-2\operatorname{sh}1$.

8. $\int\limits_{AB}\left(3z^2+2z\right)dz,\ AB\colon\ \{y=x^2,\ z_A=0,\ z_B=1+i\}$.

Ответ: $-2+4i$.

9. $\int\limits_{ABC}\left(z^2+1\right)dz,\ ABC-$ ломаная, $z_A=0,\ z_B=-1+i,\ z_C=i$.

Ответ: $\frac{2}{3}i$.

10. $\int\limits_{L}\left(\sin z+z\right)dz,\ L\colon\ \{|z|=1,\ \operatorname{Re}z\ge 0\}$.

Ответ: 0.

11. $\int\limits_{AB}\left(2z+1\right)dz,\ AB\colon\ \{y=x^3,\ z_A=0,\ z_B=1+i\}$.

Ответ: $1+3i$.

12. $\int\limits_{L}\left(\cos iz+3z^2\right)dz,\ L\colon\ \{|z|=1,\ \operatorname{Im}z\ge 0\}$.

Ответ: $-(2+2\operatorname{sh}1)$.

13. $\int\limits_{ABC}\left(z^9+1\right)dz,\ ABC-$ ломаная, $z_A=0,\ z_B=1,\ z_C=i$.

Ответ: $-\frac{1}{10}+i$.

14. $\int\limits_{ABC}\left(\sin z+z^5\right)dz,\ ABC-$ ломаная, $z_A=0, z_B=1, z_C=2i$.

Ответ: $-\operatorname{ch}2-\frac{29}{3}$.

15. $\int\limits_{AB}\left(z^3+\sin z\right)dz,\ AB\colon\ \{z_A=-1,\ z_B=1\}$.

Ответ: 0.

Задание 4.5

Вычислите интеграл.

1. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)\,z^2}\,dz.$ **Ответ:** $\frac{5\pi i}{6}$.

2. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2+1)^2}\,dz.$ **Ответ:** 0.

3. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz.$ **Ответ:** $-\pi i\,\mathrm{ch}1$.

4. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz.$ **Ответ:** $-\pi i$.

5. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}^2 z}{z^3}\,dz.$ **Ответ:** $2\pi i$.

6. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)}\,dz.$ **Ответ:** $-\frac{\pi i\sqrt{2}(\pi+2)}{8}$.

7. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}.$ **Ответ:** $\frac{3\pi i}{8}$.

8. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\,dz}{(z-2)^3(z+4)}.$ **Ответ:** $-\frac{2\pi i}{27}$.

9. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch}\, z}{(z+1)^2}\,dz.$ **Ответ:** $-2\pi i\,\mathrm{sh}1$.

10. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}\,dz.$ **Ответ:** 0.

11. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}\,dz.$ **Ответ:** $\pi^3 i$.

12. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2}\,dz.$ **Ответ:** $-2\pi i$.

13. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\,dz.$ **Ответ:** $-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi i}{2}\right)(\cos 1+i\sin 1)$.

14. $\oint\limits_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}.$ **Ответ:** $-\pi i-\pi$.

15. $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{(z^2+3)^2}.$ **Ответ:** $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

5. Ряды в комплексной области

1. Числовые ряды

Числовым комплексным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots,$$

где z_n – последовательность комплексных чисел.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i\,y_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i\,y_n)$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$.

Свойства сходящихся рядов:

1. Необходимый признак сходимости.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, т. е. из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

3. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ с положительными членами c_n такой, что $|z_n| \le c_n,\ \forall n \ge n_0,\ n_0 \in \boldsymbol{N}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно.

Признак Даламбера

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$, то при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а при $L > 1$ – расходится.

Признак Коши

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$, то при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, а при $L > 1$ – расходится.

2. Функциональные ряды

Функциональным рядом в комплексной области называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots,$$

где $f_n(z)$ – функции комплексной переменной z.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *равномерно сходящимся* в области D к сумме $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ и для любого $z \in D$ выполнено условие $\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon$.

Признак Вейерштрасса

Если при любом z из области D выполняется неравенство $|f_n(z)| \le a_n$, $n \in \boldsymbol{N}$, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в D.

Признак Даламбера абсолютной сходимости функционального ряда

Если существует $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = L(z)$, то при $L(z) < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится абсолютно, а при $L(z) > 1$ – расходится.

Признак Коши абсолютной сходимости функционального ряда

Если существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = L(z)$, то при $L(z) < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится абсолютно, а при $L(z) > 1$ – расходится.

3. Степенные ряды

Комплексным степенным рядом называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, где z_0, c_n – заданные комплексные числа, а z – комплексная переменная.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех точек z, в которых этот ряд сходится.

Для каждого степенного ряда существует так называемый *круг сходимости* с центром в точке z_0 и *радиусом сходимости* R, $R \ge 0$, который можно вычислить по формуле

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},}$$

если эти пределы существуют.

Теорема о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда. Пусть $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда. Тогда этот ряд можно почленно дифференцировать в круге $|z - z_0| < R$ любое число раз и почленно интегрировать вдоль любой гладкой кривой, расположенной в круге $|z - z_0| < R$. Полученные при этом степенные ряды имеют тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.

4. Ряды Тейлора и Лорана

Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Если однозначная функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0, то функция $f(z)$ разлагается в окрестности этой точки в ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ \ n=0,1,2,\ldots;$$

$l:|z-z_0|=r,\ r>0$, – окружность с центром в точке z_0, лежащая в окрестности точки z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической.

Разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ \ z\in\boldsymbol{C}.$$

$$\operatorname{sh}z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ z\in\boldsymbol{C}.$$

$$\operatorname{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \ z\in\boldsymbol{C}.$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ z\in\boldsymbol{C}.$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ \ z\in\boldsymbol{C}.$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^n}{n},\ \ |z|<1.$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\ \ |z|<1.$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ \ |z|<1.$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n,\ \ |z|<1.$$

Теорема о разложении функции в ряд Лорана

Если функция $f(z)$ является однозначной и аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$, то функция $f(z)$ разлагается внутри его в ряд Лорана по неотрицательным и отрицательным степеням $z - z_0$, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

где коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(z) \cdot (z - z_0)^{n-1}\, dz, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$l\colon \ |z - z_0| = \rho, \ \ r < \rho < R.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ с неотрицательными степенями $z - z_0$ называется *правильной*, или *регулярной*, *частью* ряда Лорана. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ с отрицательными степенями $z - z_0$ называется *главной частью* ряда Лорана.

Если $c_{-n} \neq 0$ и существует конечный предел $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$, то ряд сходится в области $|z - z_0| > r$.

Пример 5.1

Определите область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{2^n (3n - 1)}$ и исследуйте его сходимость в точках $z_1 = 0, \ z_2 = 3 + 2i, \ z_3 = -i$.

Решение. Для данного степенного ряда $c_n = \frac{1}{2^n (3n - 1)}$. Тогда

$$c_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(3n + 2)}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}(3n + 2)}{2^n (3n - 1)} \right| = 2.$$

Область сходимости определяется неравенством $|z - i| < 2$, которое соответствует внутренности круга с центром в точке $z_0 = i$ радиусом 2. Очевидно, точка $z_1 = 0$ лежит внутри круга сходимости. Поэтому ряд в точке $z_1 = 0$ сходится абсолютно. Точка z_2 лежит вне круга сходимости. Ряд в точке z_2 расходится. Исследуем сходимость ряда в точке $z_3 = -i$, которая лежит на границе круга сходимости. Положив $z=-i$, получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{3n-1}$. Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{i^n}{3n-1}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-1}$. Сравнивая с гармоническим рядом, устанавливаем, что абсолютной сходимости нет. Определим, является ли ряд условно сходящимся:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{3n-1}=\frac{i}{2}+\frac{-1}{5}+\frac{-i}{8}+\frac{1}{11}+\frac{i}{14}+\frac{-1}{17}+\ldots=$$
$$=i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{14}-\ldots\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{17}+\ldots\right).$$

Действительная и мнимая части этого ряда являются сходящимися рядами по признаку Лейбница.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{2^n(3n-1)}$ в точке $z=-i$ сходится условно.

Пример 5.2

Разложите функцию $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$ в ряд Лорана по степеням z в кольце $1<|z|<2$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=-2$ и $z_2=-1$. Следовательно, существуют три кольца с центром в точке $z_0=0$, в каждом из которых функция $f(z)$ является аналитической: 1) круг $|z|<1$; 2) кольцо $1<|z|<2$; 3) $2<|z|<+\infty$ – внешность круга $|z|\le 2$. Найдем ряд Лорана в кольце $1<|z|<2$. Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{2z+3}{(z+2)(z+1)}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+1}.$$

Преобразуем первую дробь и разложим ее в ряд, как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}.$$

Ряд для этой функции сходится в заданном кольце, т. к. $|z|<2$.

Ряд Тейлора для функции $\dfrac{1}{1+z}$ расходится при $|z|>1$. Поэтому преобразуем дробь следующим образом: $\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{z}}$. Тогда разложение приобретает вид

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т. е. при $|z|>1$.

Подставляем найденные разложения в заданную функцию:

$$\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$.

Пример 5.3

Разложите функцию $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ в ряд в окрестности точек $z=0$ и $z=1$.

Решение. Разложим сначала функцию $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z+2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} \tag{5.1}$$

В окрестности точки $z=0$, а именно в круге $|z|<1$ функция $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ и каждое из слагаемых $\frac{1}{9\,(z+2)}$, $-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}$ аналитичны.

Разложим элементарные дроби $\frac{1}{z+2}$, $\frac{1}{z-1}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z+2}=\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{1+z/2}=\frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n},$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Ряд для функции $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}$ найдем почленным дифференцированием степенного ряда для функции $-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}$:

$$\left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}\right)'=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}n\,z^{n-1}.$$

Тогда $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}n\,z^{n-1}$.

Таким образом, в круге $|z|<1$ имеем

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}n\,z^{n-1}.$$

В окрестности точки $z=1$ функция $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ неаналитична, но она аналитична в кольце $0<|z-1|<3$. Разложим ее в ряд Лорана по степеням $z-1$. В правой части формулы (5.1) нужно разложить только слагаемое $\dfrac{1}{z+2}$. Эта функция аналитична в круге $|z-1|<3$, следовательно разлагается в ряд по положительным степеням $z-1$:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-1+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n},\qquad |z-1|<3.$$

Ответ: $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(z-1)^2}-\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$ в кольце $0<|z-1|<3$.

Пример 5.4

Разложите функцию $\dfrac{1}{z}\cos\dfrac{1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$.

Решение. Для любого комплексного ξ имеем: $\cos\xi=1-\dfrac{\xi^2}{2!}+\dfrac{\xi^4}{4!}-\dfrac{\xi^6}{6!}+\ldots$.

Полагая $\xi=\dfrac{1}{z}$, получим

$$\frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{4!z^5}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots.$$

Это разложение справедливо для любой точки $z\neq 0$. В данном случае кольцо представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z=0$. Его можно задать с помощью неравенства $0<|z-0|<+\infty$. В этом кольце рассматриваемая функция является аналитической.

Ответ: $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2!z^3}+\dfrac{1}{4!z^5}-\dfrac{1}{6!z^6}+\ldots$.

Задание 5.1

Определите круг сходимости данного ряда и исследуйте сходимость в указанных точках.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i-1)^n}{n}$, $z_1=0$, $z_2=1-\dfrac{i}{2}$, $z_3=-i$.

Ответ: $R=1,\ z_0=1-i,$ в точке z_1 – расходится, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – сходится условно.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(z-1)^n}{n(n^2+1)},\quad z_1=0,\ z_2=1+\dfrac{i}{2},\ z_3=\dfrac{5}{4}.$

Ответ: $R=\dfrac{1}{2},\ z_0=1,$ в точке z_1 – расходится, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – сходится абсолютно.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2i)^n(z+1)^n}{n^2},\quad z_1=0,\ z_2=-1+\dfrac{i}{2},\ z_3=-\dfrac{3}{4}.$

Ответ: $R=\dfrac{1}{2},\ z_0=-1,$ в точке z_1 – расходится, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – сходится абсолютно.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-i)^n(z-2)^n}{3^n(n+1)},\quad z_1=0,\ z_2=2+3i,\ z_3=6-2i.$

Ответ: $R=3,\ z_0=2,$ в точке z_1 – сходится абсолютно, в точке z_2 – расходится, в точке z_3 – расходится.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{2^n\cdot n},\quad z_1=1+i,\ z_2=3i,\ z_3=-3+i.$

Ответ: $R=2,\ z_0=i,$ в точке z_1 – сходится абсолютно, в точке z_2 – сходится условно, в точке z_3 – расходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2+i)^n}{2^n(n+1)},\quad z_1=2+3i,\ z_2=4-i,\ z_3=2-i.$

Ответ: $R=2,\ z_0=2-i,$ в точке z_1 – расходится, в точке z_2 – расходится, в точке z_3 – сходится абсолютно.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{3^n(2n-1)},\quad z_1=0,\ z_2=2i,\ z_3=4+i.$

Ответ: $R=3,\ z_0=-i,$ в точке z_1 – сходится абсолютно, в точке z_2 – сходится условно, в точке z_3 – расходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1+i)^n}{2^n(n^2+1)},\quad z_1=0,\ z_2=1+i,\ z_3=-1+i.$

Ответ: $R=2,\ z_0=1-i,$ в точке z_1 – сходится, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – расходится.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2)^n}{3^n(n+1)}$, $\quad z_1=0,\ z_2=-1,\ z_3=1+4i.$

Ответ: $R=3,\ z_0=2,$ в точке z_1 – сходится абсолютно, в точке z_2 – сходится условно, в точке z_3 – расходится.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+2i)^n}{3^n\cdot n^2}$, $\quad z_1=0,\ z_2=-5i,\ z_3=2+2i.$

Ответ: $R=3,\ z_0=-2i,$ в точке z_1 – сходится абсолютно, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – расходится.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+2)2^n}$, $\quad z_1=0,\ z_2=2+i,\ z_3=3-i.$

Ответ: $R=\sqrt{2},\ z_0=2,$ в точке z_1 – расходится, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – расходится.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(z-1)^n}{(3n-2)\sqrt{2^n}}$, $\quad z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=1-\dfrac{\sqrt{2}}{3}i.$

Ответ: $R=\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ z_0=1,$ в точке z_1 – расходится, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – сходится условно.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n(z+1)^n}{\sqrt{3n-1}\cdot 2^n}$, $\quad z_1=0,\ z_2=-1+\dfrac{2}{5}i,\ z_3=-1-\dfrac{i}{5}.$

Ответ: $R=\dfrac{2}{5},\ z_0=-1,$ в точке z_1 – расходится, в точке z_2 – расходится, в точке z_3 – сходится абсолютно.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(z+1-i\right)^n}{4^n(2n+5)}$, $\quad z_1=0,\ z_2=-5+i,\ z_3=6+i.$

Ответ: $R=4,\ z_0=-1+i,$ в точке z_1 – сходится абсолютно, в точке z_2 – сходится условно, в точке z_3 – расходится.

15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2i)^n}{2^n(n+1)}$, $\quad z_1=-2-2i,\ z_2=1-2i,\ z_3=i.$

Ответ: $R=2,\ z_0=-2i,$ в точке z_1 – сходится условно, в точке z_2 – сходится абсолютно, в точке z_3 – расходится.

Задание 5.2

Разложите функцию в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ в кольце D.

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(1-2z)}$, $\quad z_0=0,\ D\colon\ \dfrac{1}{2}<|z|<1.$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\dfrac{1}{2^n z^{n+1}}\right).$

2. $f(z)=\dfrac{3z}{z^2+z-6}$, $\quad z_0=0,\ D\colon\ 2<|z|<3.$

Ответ: $\dfrac{3}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{3^n}+\dfrac{6}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}.$

3. $f(z)=\dfrac{z^2-2z-3}{(z-1)^2(z+3)}$, $\quad z_0=1,\ D\colon\ 0<|z-1|<4.$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n}{4^{n+3}}(z-1)^n+\dfrac{1}{4(z-1)}-\dfrac{1}{(z-1)^2}.$

4. $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$, $\quad z_0=-2,\ D\colon\ 1<|z+2|<3.$

Ответ: $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z+2)^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{3^{n+1}}.$

5. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $\quad z_0=1,\ D\colon\ 2<|z-1|<+\infty.$

Ответ: $\dfrac{-3}{2(z-1)}+5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-2}}{(z-1)^n}.$

6. $f(z)=\dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, $\quad z_0=0,\ D\colon\ 1<|z|<2.$

Ответ: $1-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}+5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}.$

7. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$, $\quad z_0=0,\ D\colon\ 1<|z|<\infty.$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+2}}.$

8. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0=i,\ D\colon\ 0<|z-i|<2.$

Ответ: $\dfrac{-i}{2(z-i)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n.$

9. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-7z+10}$, $\quad z_0=0,\ D\colon\ 2<|z|<5.$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z^n}{5^{n+1}}+\dfrac{2^n}{z^{n+1}}\right).$

10. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $z_0=-2$, D: $2<|z+2|<4$.

Ответ: $-\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,2^n}{(z+2)^{n+1}}-\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{4^{n+1}}$.

11. $f(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $z_0=-1$, D: $0<|z+1|<3$.

Ответ: $(z+1)+\dfrac{1}{3(z+1)}-\dfrac{8}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(z+1)^n$.

12. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$, $z_0=1$, D: $1<|z-1|<2$.

Ответ: $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^n}$.

13. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-3}$, $z_0=1$, D: $0<|z-1|<\infty$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{(z-1)^{n+1}}$.

14. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)}$, $z_0=3$, D: $|z-3|<3$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{z-3}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-3)^n}{3^{n+2}}$.

15. $f(z)=\dfrac{z}{(z+3)(z+2)^2}$, $z_0=-2$, D: $|z+2|<1$.

Ответ: $\dfrac{3}{z+2}-\dfrac{2}{(z+2)^2}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n$.

Задание 5.3

Разложите функцию в ряд Лорана по степеням $z-z_0$ в указанном кольце.

1. $\dfrac{1}{(z-1)^2(1-2z)}$, $\qquad \dfrac{1}{2}<|z|<1$.

Ответ: $-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\,z^{n-1}-4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2z)^{n+1}}$.

2. $\dfrac{1}{(z-2)^2(z-5)}$, $\qquad 2<|z|<5$.

Ответ: $-\dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{z^{n+2}}-\dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{5^{n+1}}$.

3. $\dfrac{z}{(z+3)^2(z+2)}$, $\qquad 0<|z+2|<1$.

Ответ: $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n-3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z+2)^{n-1}-\dfrac{2}{z+2}$.

4. $\dfrac{2}{(z-1)^2(z+1)}$, $\qquad 1<|z+2|<3.$

Ответ: $\dfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+2}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z+2)^{n-1}}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z+2)^{n+1}}$.

5. $\dfrac{1}{(z-i)(z+i)^2}$, $\qquad 0<|z-i|<2.$

Ответ: $-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}+\dfrac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(i-z)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$.

6. $\dfrac{z-1}{(z+4)^2(z+1)}$, $\qquad 4<|z+1|<\infty.$

Ответ: $\dfrac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{(z+1)^n}-\dfrac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\dfrac{-3}{z+1}\right)^n-\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{z+1}$.

7. $\dfrac{z}{(z-2)(z-5)^2}$, $\qquad 5<|z|<\infty.$

Ответ: $\dfrac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n+1}-\dfrac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}5^n\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n+1}-\dfrac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$.

8. $\dfrac{2z}{(z+3)(z+2)^2}$, $\qquad 0<|z+3|<1.$

Ответ: $-\dfrac{6}{z+3}-6\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n-4\sum_{n=0}^{\infty}n(z+3)^{n-1}$.

9. $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $\qquad 4<|z+2|<\infty.$

Ответ: $-\dfrac{1}{32}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n}{(z+2)^{n+1}}+\dfrac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}}+\dfrac{1}{32}\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{16}\dfrac{1}{(z+2)^2}$.

10. $\dfrac{z}{(z+1)(z-2)^2}$, $\qquad 0<|z+1|<3.$

Ответ: $-\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{3^{n+1}}+\dfrac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z+1)^{n-1}}{3^{n+1}}$.

11. $\dfrac{3z}{(z+7)(z+2)^2}$, $\qquad 0<|z+2|<2.$

Ответ: $-\frac{21}{25}\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+2}{5}\right)^n+\frac{21}{25}\frac{1}{z+2}-\frac{6}{5}\frac{1}{(z+2)^2}$.

12. $\frac{3z-1}{(z+1)^2(z-4)}$, $\quad 1<|z|<4$.

Ответ: $-\frac{11}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{z^{n+2}}+\frac{11}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$.

13. $\frac{1+4z}{(z-3)^2(z+1)}$, $\quad 0<|z+1|<1$.

Ответ: $-\frac{3}{16(z+1)}-\frac{3}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}}+\frac{13}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{4^{n+1}}$.

14. $\frac{5}{z^2(z-1)}$, $\quad 1<|z-1|<\infty$.

Ответ: $-5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{(z-1)^{n+2}}+\frac{5}{z-1}$.

15. $\frac{z^2}{(z-4)(z+1)^2}$, $\quad 5<|z-4|<\infty$.

Ответ: $\frac{16}{25}\left(\frac{1}{z-4}\right)+\frac{9}{25}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{(z-4)^{n+1}}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\ -\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^n5^n}{z^{n+2}}$.

Задание 5.4

Разложите функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

1. $\sin(2z-1)$, $\quad z_0=0$.

Ответ: $\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}$.

2. $z\cdot e^{\frac{1}{z+i}}$, $\quad z_0=-i$.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{i}{n!}\right)(z+i)^{-n}$.

3. $\frac{\sin^2 z}{z}$, $\quad z_0=0$.

Ответ: $\frac{2}{2!}z-\frac{8}{4!}z^3+\frac{32}{6!}z^5-\ldots$.

4. $\frac{e^z}{z^3}$, $\quad z_0=0$.

Ответ: $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots$.

5. $z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0$.

Ответ: $z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \ldots$

6. $\frac{\sin z}{z-2}, \quad z_0 = 2$.

Ответ: $\frac{\sin 2}{z-2} + \cos 2 - \frac{\sin 2}{2!}(z-2) - \frac{\cos 2}{3!}(z-2)^2 + \frac{\sin 2}{4!}(z-2)^3 +$
$+\frac{\cos 2}{5!}(z-2)^4 - \ldots$.

7. $z^4 \cos\frac{1}{z}, \quad z_0 = 0$.

Ответ: $z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6!z^2} + \ldots$

8. $\frac{1}{z}\sin^2\frac{2}{z}, \quad z_0 = 0$.

Ответ: $\frac{4^2}{2!2z^3} - \frac{4^4}{4!2z^5} + \frac{4^6}{6!2z^7} + \ldots$

9. $\frac{1-\cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0$.

Ответ: $\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} \ldots$

10. $e^{\frac{1}{1-z}}, \quad z_0 = 1$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!(z-1)^n}$.

11. $z^2 \sin\frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1$.

Ответ: $(z-1) + 2 + \frac{5}{6(z-1)} - \frac{1}{3(z-1)^2} - \frac{19}{120(z-1)^3} + \frac{1}{60(z-1)^4} + \ldots$

12. $\sin\frac{z}{1-z}, \quad z_0 = 1$.

Ответ: $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}$.

13. $\frac{1+\cos z}{z^4}, \quad z_0 = 0$.

Ответ: $\frac{2}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \ldots$

14. $\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}, \quad z_0=0.$

Ответ: $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2!\,z}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z}{4!}+\ldots.$

15. $(z+i)\sin\dfrac{1}{z+i},\ z_0=-i.$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}\cdot\dfrac{1}{(z+1)^{2n}}.$

6. Нули и изолированные особые точки аналитической функции

1. Нули и функции

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0.

Точка z_0 называется *нулем* функции $f(z)$ порядка (или кратности) n, если выполняются условия $f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ldots,=f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0.$

Точка z_0 тогда и только тогда является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство $f(z)=(z-z_0)^n\cdot\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

2. Изолированные особые точки

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=z_0$ (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Классификация изолированных особых точек

№ п/п	Характер особой точки z_0	По разложению в ряд (по главной части ряда Лорана)	По определению
1	z_0 – устранимая особая точка	Нет главной части	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\text{const}$
2	z_0 – полюс порядка n	Главная часть содержит конечное число членов	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$
3	z_0 – существенно особая точка	Главная часть содержит бесконечное число членов	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует

Определение порядка полюса

Для того, чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Наибольший из показателей степеней у разностей $(z-z_0)$, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, совпадает с порядком полюса.

3. Вычеты функций

Пусть точка z_0 есть изолированная особая точка функции $f(z)$. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0 называется число (табл. 6.2), обозначаемое символом $\operatorname{res} f(z_0)$ и определяемое равенством $\operatorname{res} f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_l f(z)\,dz$.

В качестве контура l можно взять окружность с центром в точке z_0 достаточно малым радиусом, такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$.

Таблица 6.2

Вычисление вычетов

№ п/п	Характер особой точки	Вычисление вычетов
1	z_0 – устранимая особая точка	$\operatorname{res} f(z_0)=0$
2	z_0 – полюс порядка n	$\operatorname{res} f(z_0)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^n\right)$
3	z_0 – существенно особая точка	$\operatorname{res} f(z_0)=C_{-1}$
4	z_0 – полюс порядка 1 (простой полюс)	$\operatorname{res} f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)\right)$; если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$ и $\psi(z_0)=0$,

		$\psi'(z_0) \neq 0$, то $\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

4. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки $z=\infty$).

Точка $z=\infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Говорят, что $z=\infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или вовсе не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Теорема. Если $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки не содержит положительных степеней z; если $z=\infty$ – полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней z, в случае существенной особенности – бесконечное число положительных степеней z.

Вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$, взятому с противоположным знаком:

$$\boxed{\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}.}$$

5. Теорема Коши о вычетах

Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D всюду, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, а l – произвольная замкнутая кривая, лежащая в D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\oint\limits_l f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k), \tag{6.1}$$

где при обходе контура l область, ограниченная им, остается слева, т. е. кривая l является положительно ориентированной.

Пример 6.1

Найдите вычеты для функции $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 4z + 3}$ в конечных особых точках.

Решение. Точки $z=1$ и $z=3$ являются простыми полюсами функции. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-3}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{3} f(z)=\lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 3}\frac{z}{z-1}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 6.2

Найдите вычеты для функции $f(z)=\frac{z+1}{z^2}$ в конечных особых точках.

Решение. Так как $z=0$ – полюс второго порядка, то

$$\operatorname*{res}_{0} f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d\left(\frac{z+1}{z^2}\cdot z^2\right)}{dz}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d(z+1)}{dz}=1.$$

Ответ: 1.

Пример 6.3

Найдите вычеты для функции $f(z)=\frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$ в конечных особых точках.

Решение. Особыми точками данной функции являются точки $z_1=1$ и $z_2=0$. Точка $z_1=1$ – простой полюс, поэтому

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}=-\sin 1.$$

Так как вычет в точке $z_2=0$ равен коэффициенту при z^{-1} разложения в ряд Лорана, то получаем

$$\sin\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}\ldots\right)+C_{-2}\frac{1}{z^2}+\ldots+\text{правильная часть, т.к. } C_{-k}\neq 0.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z, то $z=0$ является существенно особой точкой. Ее вычет

$$\operatorname{res} f(0)=C_{-1}=1-\frac{1}{3!}+\ldots=\sin 1.$$

Ответ: $\operatorname{res} f(1)=-\sin 1$, $\operatorname{res} f(0)=\sin 1$.

Пример 6.4

При помощи вычетов вычислите интеграл $\int\limits_C \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz$, где C: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

Решение. В области, ограниченной эллипсом *C*, подынтегральная функция имеет две особые точки $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$. Легко установить, что это простые полюсы. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \lim_{z\to 2}\,(z-2)\,\frac{\cos\frac{z}{2}}{(z-2)(z+2)} = \frac{\cos 1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z\to -2}\,(z+2)\,\frac{\cos\frac{z}{2}}{(z-2)(z+2)} = -\frac{\cos 1}{4}.$$

Следовательно, согласно (6.1)

$$\int\limits_C \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz = 2\pi i\left(\frac{\cos 1}{4}-\frac{\cos 1}{4}\right)=0.$$

Ответ: 0.

Пример 6.5

При помощи вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$.

Решение. В круге $|z-i|=1$ подынтегральная функция имеет особую точку $z=i$. Она является полюсом второго порядка. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d\left(\frac{e^z}{(z+i)^2(z-i)^2}\cdot(z-i)^2\right)}{dz} =$$

$$= \frac{e^i(-1-i)}{4} = \frac{(\cos 1+i\sin 1)(-1-i)}{4} = \frac{\cos 1+\sin 1+i(\sin 1-\cos 1)}{4}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1} = 2\pi i\left(\frac{\cos 1+\sin 1+i(\sin 1-\cos 1)}{4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\cos 1+\sin 1+i\,(\sin 1-\cos 1)\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}\left(\cos 1+\sin 1+i\,(\sin 1-\cos 1)\right)$.

Пример 6.6

Вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin iz}{z^2}\,dz$.

Решение. Внутри контура интегрирования находится единственная особая точка $z_0 = 0$. Найдем вычет в этой точке, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд в окрестности $z_0 = 0$:

$$\frac{\sin iz}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(iz - \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots\right) = \frac{i}{z} + \frac{iz}{3!} + \ldots.$$

По определению вычета, $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin iz}{z^2} = c_{-1} = i$. Следовательно,

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin iz}{z^2} dz = 2\pi i \cdot i = -2\pi.$$

Ответ: -2π.

Пример 6.7

Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=6} \frac{z^{11}}{(z^2+5)^2(z^2+2)^4} dz$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z^{11}}{(z^2+5)^2(z^2+2)^4}$ внутри окружности $|z| = 6$ имеет четыре особые точки, являющиеся кратными полюсами. Для вычисления данного интеграла удобно использовать равенство $\operatorname{res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k)$, где a_k – конечные особые точки функции $f(z)$. В силу этого равенства $\mathrm{I} = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty)$. Так как функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{z^{11}}{z^4\left(1+\frac{5}{z^2}\right)^2 \cdot z^8\left(1+\frac{2}{z^2}\right)^4} = \frac{1}{z}\ \frac{1}{\left(1+\frac{5}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^2}\right)^4},$$

то правильная часть лорановского разложения этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ начинается с члена $\frac{1}{z}$. Следовательно, $\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1} = -1$.

Подставляя эту величину в формулу (6.1), получаем

$$\int\limits_{|z|=6} \frac{z^{11}}{(z^2+5)^2+(z^2+2)^4} dz = 2\pi i.$$

Ответ: $2\pi i$.

Задание 6.1

Найдите вычеты для функции $f(z)$ в конечных особых точках.

1. $f(z) = \frac{z+1}{z^2-4z+3}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(1) = -1$, $\operatorname{res} f(3) = 2$.

2. $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z^3-5z^2+6z}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(2)=-4$, $\operatorname{res} f(3)=\dfrac{13}{3}$, $\operatorname{res} f(0)=\dfrac{2}{3}$.

3. $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(2i)=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{res} f(-2i)=\dfrac{1}{2}$.

4. $f(z)=\dfrac{2z^2}{z^3-4z^2+3z}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=0$, $\operatorname{res} f(1)=-1$, $\operatorname{res} f(3)=3$.

5. $f(z)=\dfrac{z^2+6z}{z^2-4}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(2)=4$, $\operatorname{res} f(-2)=2$.

6. $f(z)=\dfrac{e^{2iz}}{z^2+16}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(4i)=-\dfrac{i}{8e^8}$, $\operatorname{res} f(-4i)=\dfrac{ie^8}{8}$.

7. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{res} f(1)=-2$, $\operatorname{res} f(2)=\dfrac{5}{2}$.

8. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+5}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(2+i)=\dfrac{1}{2}-i$, $\operatorname{res} f(2-i)=\dfrac{1}{2}+i$.

9. $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-6z+8}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(4)=\dfrac{7}{2}$, $\operatorname{res} f(2)=-\dfrac{5}{2}$.

10. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+36}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(6i)=-\dfrac{i}{12e^6}$, $\operatorname{res} f(-6i)=\dfrac{ie^6}{12}$.

11. $f(z)=\dfrac{z^3+1}{8+2z^2}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(2i)=-1-\dfrac{i}{8}$, $\operatorname{res} f(-2i)=-1+\dfrac{i}{8}$.

12. $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^3-6z^2+11z-6}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(1)=\frac{1}{2}$, $\operatorname{res} f(2)=-3$, $\operatorname{res} f(3)=\frac{5}{2}$.

13. $f(z)=\frac{e^{3iz}}{z^2+9}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(3i)=-\frac{i}{6e^9}$, $\operatorname{res} f(-3i)=\frac{ie^9}{6}$.

14. $f(z)=\frac{2z+1}{z^3+6z^2-7z}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(-7)=-\frac{13}{56}$, $\operatorname{res} f(1)=\frac{3}{8}$, $\operatorname{res} f(0)=-\frac{1}{7}$.

15. $f(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(i)=i$, $\operatorname{res} f(-i)=-i$.

Задание 6.2

Найдите вычеты для функции $f(z)$ в конечных особых точках.

1. $f(z)=\frac{z+2}{z(z-1)^2}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=2$, $\operatorname{res} f(1)=-2$.

2. $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3 z}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=1$, $\operatorname{res} f(-1)=-\frac{5}{2e}$;

3. $f(z)=\frac{z-1}{(z+i)^2(z-3)}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(-i)=-\frac{4}{25}+\frac{3i}{25}$, $\operatorname{res} f(3)=\frac{4}{25}-\frac{3i}{25}$.

4. $f(z)=\frac{2z-1}{z^2(z+4)}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=\frac{9}{16}$, $\operatorname{res} f(-4)=-\frac{9}{16}$.

5. $f(z)=\frac{1-z^3}{(z+2)^2 z}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(-2)=\frac{15}{4}$, $\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{4}$.

6. $f(z)=\frac{1}{z^4-z^2}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(1)=\frac{1}{2}$, $\operatorname{res} f(-1)=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{res} f(0)=0$.

7. $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+1)}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=-1,\ \operatorname{res} f(i)=\dfrac{1}{2},\ \operatorname{res} f(-i)=\dfrac{1}{2}$.

8. $f(z)=\dfrac{e^z}{(1-z)(z-2)^3}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(1)=e,\ \operatorname{res} f(2)=-\dfrac{e^2}{2}$.

9. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+2)^2 z^3}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(-2)=-\dfrac{7}{16},\ \operatorname{res} f(0)=\dfrac{7}{16}$.

10. $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{(z-1)^3}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(1)=-\dfrac{9}{2}\sin 3$.

11. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-3)^3}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(3)=1$.

12. $f(z)=\dfrac{3z-1}{z^2(z^2+z-2)}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=-\dfrac{5}{4},\ \operatorname{res} f(1)=\dfrac{2}{3}, \operatorname{res} f(-2)=\dfrac{7}{12}$.

13. $f(z)=\dfrac{z^2}{(4+z^2)(z-1)^2}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(2i)=-\dfrac{4}{25}-\dfrac{3i}{25},\ \operatorname{res} f(2i)=-\dfrac{4}{25}+\dfrac{3i}{25}, \operatorname{res} f(1)=\dfrac{8}{25}$.

14. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)z^2}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(2i)=\dfrac{i}{16e^2},\ \operatorname{res} f(-2i)=-\dfrac{ie^2}{16}, \operatorname{res} f(0)=\dfrac{i}{4}$.

15. $f(z)=\dfrac{z^2+3}{z^4-4z^2}$.

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=0,\ \operatorname{res} f(2)=\dfrac{7}{16}, \operatorname{res} f(-2)=-\dfrac{7}{16}$.

Задание 6.3

При помощи вычетов вычислите интегралы.

1. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin^3 z}{z\cos z}dz$. **Ответ:** $-4i$.

2. $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+\frac{\pi}{2}}{2\cos z}dz$. **Ответ:** $-\pi^2 i$.

3. $\int\limits_{|z-1|=2} z^3 e^{\frac{1}{z}}dz$. **Ответ:** $\frac{\pi i}{12}$.

4. $\int\limits_{|z-9|=1} \frac{1-\cos z}{z^3(z-3\pi)}dz$. **Ответ:** $\frac{4i}{27\pi^2}$.

5. $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz$. **Ответ:** $2i$.

6. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+\pi z}{\sin 2z}dz$. **Ответ:** $-\frac{3}{4}\pi^3 i$.

7. $\int\limits_{|z+7|=3} \frac{2\cos z+3}{z^2-9\pi^2}dz$. **Ответ:** $-\frac{i}{3}$.

8. $\int\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{z^2(1+2\sin z)}{\sin z}dz$. **Ответ:** $-2\pi^3 i$.

9. $\int\limits_{|z|=1} z^3 \sin\frac{1}{z^2}dz$. **Ответ:** 0.

10. $\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{e^z}{(z+4)^3(z-2)}dz$. **Ответ:** $\frac{2\pi e^2 i}{216}$.

11. $\int\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{\sin z}dz$. **Ответ:** $-2\pi i e^{\pi}$.

12. $\int\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z+1}{z\sin z}dz$. **Ответ:** $-4i$.

13. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}dz$. **Ответ:** $8i$.

14. $\int\limits_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}dz$. **Ответ:** $-\frac{\pi i}{3}$.

15. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$. **Ответ:** $-4i$.

Задание 6.4

При помощи вычетов вычислите интегралы.

1. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+2}{(z-1)^2(z+4)z}dz$. **Ответ:** $\frac{9\pi i}{25}$.

2. $\int\limits_{|z|=2} \frac{2\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}dz$. **Ответ:** $-\frac{\pi i}{e}$.

3. $\int\limits_{|z|=5} \frac{z-8}{(z-4)^3(z-6)}dz$. **Ответ:** $\frac{\pi i}{2}$.

4. $\int\limits_{|z+2-2i|=3} \frac{e^{2iz}}{(z^2+4)^2}dz$. **Ответ:** $\frac{5\pi}{16e^4}$.

5. $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{z+8}{(z-4)^3(z+3)}dz$. **Ответ:** $\frac{10}{343}\pi i$.

6. $\int\limits_{|z-1-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$. **Ответ:** $-\frac{\pi i}{2}$;.

7. $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-2)^2(z+4)}dz$;. **Ответ:** $-\frac{\pi i}{18}$.

8. $\int\limits_{|z-3|=0,5} \frac{z-1}{(z-2)(z-3)^3}dz$;. **Ответ:** $2\pi i$.

9. $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos\frac{2\pi}{z}}{(z-1)^3}dz$. **Ответ:** $-4\pi^3 i$.

10. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin 2z}{z^2}dz$. **Ответ:** $-4\pi i$.

11. $\int\limits_{|z|=4} \frac{3z}{(z+5)(z+2)^3}dz$. **Ответ:** $-\frac{10}{9}\pi i$.

12. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z^2-1}{z^3(z^2+4)^2}dz$. **Ответ:** $\frac{3}{16}\pi i$.

13. $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{1+z^2}{(z-1)^3(z+3)z}dz$. **Ответ:** $-\frac{5}{48}\pi i$.

14. $\int\limits_{|z|=1} \frac{4\operatorname{ch}^2 z}{z^3}dz$. **Ответ:** $8\pi i$.

15. $\int\limits_{|z|=6} \frac{z-2}{(z+4)^3(z+8)}dz$. **Ответ:** $-\frac{5}{16}\pi i$.

Задание 6.5

Вычислите интеграл.

1. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z}dz$. **Ответ:** $4\pi i$.

2. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}\,dz$. **Ответ:** $2\pi i$.

3. $\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin\dfrac{i}{z^2}\,dz$. **Ответ:** 0.

4. $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \cos\dfrac{2i}{z^3}\,dz$. **Ответ:** 0.

5. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}\,dz$. **Ответ:** 0.

6. $\oint\limits_{|z+i|=1} (z+i)\,e^{\frac{1}{z+i}}\,dz$. **Ответ:** πi.

7. $\oint\limits_{|z|=4} z^3 e^{\frac{1}{z}}\,dz$. **Ответ:** $\dfrac{\pi i}{12}$.

8. $\oint\limits_{|z|=2} z^4 \cos\dfrac{1}{z}\,dz$. **Ответ:** 0.

9. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}\,dz$. **Ответ:** 0.

10. $\oint\limits_{|z-1|=2} e^{\frac{1}{1-z}}\,dz$. **Ответ:** $2\pi i$.

11. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{1+\cos z^{-1}}{z}\,dz$. **Ответ:** $4\pi i$.

12. $\oint\limits_{|z+i|=2} (z+i)\sin\dfrac{1}{z+i}\,dz$. **Ответ:** 0.

13. $\oint\limits_{|z|=2} z\sin\dfrac{6}{z^2}\,dz$. **Ответ:** $12\pi i$.

14. $\oint\limits_{|z|=1} z e^{\frac{4}{z^3}}\,dz$. **Ответ:** 0.

15. $\oint\limits_{|z|=1} z\cos\dfrac{2}{z^3}\,dz$. **Ответ:** 0.

Задание 6.6

Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислите интегралы.

1. $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{z^2+1}{z^3}\,dz$. **Ответ:** $2\pi i$.

2. $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{1+z^{12}}$. **Ответ:** 0.

3. $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{1000z+2}{1+z^{1224}}dz$. **Ответ:** 0.

4. $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{1}{(z-4)(z^2-1)^2}dz$. **Ответ:** $-\dfrac{2\pi i}{225}$.

5. $\int\limits_{|z|=1} z^2 \sin\dfrac{1}{z}dz$. **Ответ:** $-\dfrac{\pi}{3}i$.

6. $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{z^9}{z^{10}-1}dz$. **Ответ:** $2\pi i$.

7. $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}dz$. **Ответ:** $2\pi i$.

8. $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{1+z^8}$. **Ответ:** 0.

9. $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{1}{(z^2-2)^2(z-4)}dz$. **Ответ:** $-\dfrac{\pi i}{98}$.

10. $\int\limits_{|z|=6} \dfrac{z^{14}}{z^5-3}dz$. **Ответ:** $18\pi i$.

11. $\int\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{35}}{z^{12}+7}dz$. **Ответ:** $98\pi i$.

12. $\int\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{32}}{z^{11}+6}dz$. **Ответ:** $72\pi i$.

13. $\int\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{29}}{z^{10}-5}dz$. **Ответ:** $50\pi i$.

14. $\int\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{20}}{z^7+2}dz$. **Ответ:** $8\pi i$.

15. $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{z^{47}dz}{z^{16}-11}$. **Ответ:** $242\pi i$.

7. Приложения вычетов к вычислению интегралов

Рассмотрим интегралы вида

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx, \qquad (7.1)$$

где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. Введем замену $e^{ix} = z$, тогда

$$dx = \frac{dz}{iz},\ \sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i},\ \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}. \qquad (7.2)$$

В результате интеграл (7.1) преобразуется в контурный интеграл $\mathrm{I} = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$, вычисляемый с помощью вычетов.

Пример 7.1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}\, dx$.

Решение. Введем замену $z = e^{ix}$. Согласно (7.2) получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2} = \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(\sqrt{3}z^2 + 4z + \sqrt{3})^2} = \frac{4}{3i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(z+\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}.$$

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z}{\left(z+\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$ имеет полюсы второго порядка $z_1 = -\sqrt{3},\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Так как $|z_1| = \sqrt{3} > 1,\ |z_2| = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, то в круге $|z| < 1$ содержится лишь одна особая точка $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ функции $f(z)$. Найдем вычет этой функции в точке z_2:

$$\operatorname{res} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \lim_{z \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{z}{(z+\sqrt{3})^2}\right)' = \lim_{z \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{(z+\sqrt{3})^2 - 2z(z+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})^4} =$$

$$= \lim_{z \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{-z+\sqrt{3}}{(z+\sqrt{3})^3} = \frac{3}{2}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2} = \frac{4}{3i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z+\sqrt{3})^2 \cdot \left(z + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{3i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{3}{2} = 4\pi.$$

Ответ: 4π.

Пусть $R(x)$ – рациональная функция вида $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если $Q_n(x)$ непрерывна на всей действительной оси $(Q_n(x) \neq 0)$ и $n \geq m+2$, т. е. степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i\cdot\tau$, где τ – сумма вычетов функции $R(z)$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

Если $z_k,\ k=\overline{1,n},$ – полюсы функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости комплексной плоскости, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z),\ \ \operatorname{Im} z_k > 0. \qquad (7.3)$$

Пример 7.2. Вычислите $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^6+1}\,dx$.

Решение. Найдем особые точки функции $R(z)=\frac{z^2+1}{z^6+1}$:

$$z^6+1=0 \Leftrightarrow z=\sqrt[6]{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6},\ \ k=\overline{0,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},\ \ z_1=i,\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},\ z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2},\ z_4=-i,\ z_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}.$$

Следовательно, знаменатель функции $R(z)$ имеет простые полюсы в точках $z_k,\ k=\overline{0,5}$.

Числитель функции $R(z)$ имеет простые полюсы в точках $z=\pm i$.

Отсюда функция $R(z)$ имеет простые полюсы в точках

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2},\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}.$$

В верхней полуплоскости расположены точки $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$.

Найдем вычеты функции $R(z)$ в этих точках:

$$\operatorname{res} R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}\,i\cdot(\sqrt{3}+i)}=-\frac{i\,(\sqrt{3}-i)}{4\sqrt{3}}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{res} R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{-\sqrt{3}i\left(-\sqrt{3}+i\right)}=\frac{i\left(-\sqrt{3}-i\right)}{4\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}.$$

По формуле (7.3) имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^6+1}dx=2\pi i\cdot\left(\operatorname{res} R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)+\operatorname{res} R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=2\pi\left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}+\frac{1-i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)=2\pi\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)=\pi.$$

Ответ: π.

Задание 7.1

Вычислите интегралы.

1. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+\cos t}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.
2. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+2\cos t}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.
3. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\cos t+5\sqrt{2}}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{34}}$.
4. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\cos t+2\sqrt{3}}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{11}}$.
5. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+\cos t}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.
6. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\cos t+\sqrt{7}}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$.
7. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\cos t+\sqrt{11}}$. **Ответ:** $\sqrt{2}\cdot\pi$.
8. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\cos t}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$.
9. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sin t+3}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.
10. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5\sin t+3\sqrt{5}}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.
11. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sqrt{2}-4\sin t}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

12. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{3\sqrt{5}+\cos t}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{\sqrt{11}}$.

13. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{10}+2\cos t}$. **Ответ:** $\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$.

14. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{21}+3\cos t}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

15. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dt}{3\sqrt{2}+4\cos t}$. **Ответ:** $\sqrt{2}\cdot\pi$.

Задание 7.2

Вычислите интегралы.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{6}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{12}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{30}$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+25)(x^2+1)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{30}$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+36)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{96}$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+25)(x^2+4)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{70}$.

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+121)(x^2+1)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{132}$.

8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+36)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{162}$.

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+144)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{156}$.

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{84}$.

11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+16)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{20}$.

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+16)}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{48}$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+9)(x^2+121)}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{462}$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+16)(x^2+25)}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{180}$.

15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+144)(x^2+9)}$. **Ответ:** $\dfrac{\pi}{540}$.

Тесты

Тест 1

Задача 1

Найдите уравнение линии в декартовой системе координат:

а) $\operatorname{Re} z = 3$; б) $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$.

Задача 2

Найдите значение функции $f(z)$ в точке z_0:

а) $f(z)=e^z, \quad z_0=1-i;$ б) $f(z)=\ln z, \quad z_0=1-i$.

Задача 3

Выделите действительную и мнимую части функции $f(z)$:

а) $f(z)=z^2;$ б) $f(z)=ze^z$.

Задача 4

Пользуясь условиями Коши – Римана выясните, какие из заданных ниже функций аналитичны в точке $z=1+i$:

а) $f(z)=\bar{z};$ б) $f(z)=z^2$.

Задача 5

Какая (какие) из следующих функций может являться действительной частью аналитической функции:

а) $x^2-y^2+2xy;$ б) x^2.

Задача 6

Вычислите интеграл $\int\limits_C (1+i-2\bar{z})dz,$ где C – отрезок, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i,$ стрелка направлена в сторону точки z_2.

Задача 7

Используя интегральную формулу Коши, вычислите интегралы по замкнутому контуру:

а) $\oint\limits_{C:|z|=1} \dfrac{e^z}{z^2+2z}dz;$ б) $\oint\limits_{C:|z|=5} \dfrac{dz}{z^2+16}$.

Задача 8

Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислите интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{z^3}dz;$ б) $\oint\limits_{|z-3|=6} \dfrac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$.

Задача 9

Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}z^n$.

Задача 10

Разложите в ряд Тейлора функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ в окрестности точки $z=0.$ В ответ записать коэффициент при z^3 и радиус сходимости ряда.

Задача 11

Разложите в ряд Лорана функцию $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z=0$. В ответ записать коэффициент при z^{-1}.

Задача 12

Сколько особых точек имеет функция $f(z)$ в области, ограниченной контуром C: $f(z)=\dfrac{1}{z\sin(z-1)}$, $|z|=5$?

Задача 13

При каких значениях α особая точка $z=0$ будет: а) устранимой; б) полюсом, если $f(z)=\dfrac{\sin z^{\alpha}}{z}$?

Задача 14

С помощью вычетов вычислите интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{e^z-1}{z^2+z}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2}\operatorname{tg} z dz$.

Задача 15

Вычислите определенный интеграл с помощью вычетов $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}$.

Задача 16

Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{(x^2-2x+10)^2}$.

Тест 2

Задача 1

Найдите уравнение линии в декартовой системе координат:

а) $z=2$; б) $\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$.

Задача 2

Найдите значение функции $f(z)$ в точке z_0:

а) $f(z)=\ln z$, $z_0=1-i$; б) $f(z)=|z|\cdot\bar{z}$, $z_0=1-i$.

Задача 3

Выделите действительную и мнимую части функции $f(z)$:

а) $f(z)=ze^z$; б) $f(z)=\sin z$.

Задача 4

Пользуясь условиями Коши – Римана, выясните, какие из заданных ниже функций аналитичны в точке $z=1+i$:

а) $f(z)=\sin z$; б) $f(z)=z\cdot|z|$.

Задача 5

Какая (какие) из следующих функций может являться действительной частью аналитической функции:

а) $\ln(x^2+y^2)$; б) $\dfrac{x^2+1}{2}y^2$.

Задача 6

Вычислите интеграл $\int\limits_C (z^2+z\bar{z})\,dz$, где C – дуга окружности $|z|=1$, $0\le \arg z\le \pi$;

Задача 7

Используя интегральную формулу Коши, вычислите интегралы по замкнутому контуру:

а) $\oint\limits_{C:|z|=5}\dfrac{dz}{z^2+16}$; б) $\oint\limits_{C:|z-2|=1}\dfrac{dz}{z}$.

Задача 8

Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислите интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-3|=6}\dfrac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$; б) $\oint\limits_{|z-2|=1}\dfrac{dz}{z^3}$.

Задача 9

Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$.

Задача 10

Разложите в ряд по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ внутри круга $|z|<2$. В ответ запишите коэффициент при z^2.

Задача 11

Разложите в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z}$. В ответ запишите коэффициент при z^{-4}.

Задача 12

Сколько особых точек имеет функция $f(z)$ в области, ограниченной контуром C: $f(z)=\dfrac{z+1}{z^5+2z^4+z^3}$; $|z|=3$?

Задача 13

При каких значениях α особая точка $z=0$ будет существенно особой для $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z}$?

Задача 14

С помощью вычетов вычислите интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \dfrac{e^{z^{\frac{1}{2}}}}{z^2+1}\,dz$.

Задача 15

Вычислите определенный интеграл с помощью вычетов $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{2-\sin x}$.

Задача 16

Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Тест 3

Задача 1

Вычислите значение выражения $\dfrac{z_1}{z_2}+\operatorname{Re} z_1-\operatorname{Im}\bar{z}_2$, если $z_1=2-i$, $z_2=1+i$.

Задача 2

Определите вид кривой, заданной соотношением $|z+4-10i|=|z-4-2i|$.

Задача 3

Исследуйте на дифференцируемость функцию $f(z)$, найдите ее производную, если она существует, $f(z)=(z-i)\operatorname{Re}(z-1)$.

Задача 4

Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

$$u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 3y + 1, \quad f(1) = 3 + 3i.$$

Задача 5

Вычислите интеграл от функции комплексной переменной по заданной кривой $\int\limits_{AB} (z + 2\bar{z})\, dz$, AB – отрезок прямой $z_A = 1 + 3i$, $z_B = 2 + 5i$.

Задача 6

Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислите интеграл $\int\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\cos z\, dz}{z^2 + 3z}$.

Задача 7

Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=10} \dfrac{e^{z-3}\, dz}{(z-1)(z-5)}$.

Задача 8

Вычислите интеграл, используя интегральную формулу Коши для производных $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{z+2}{(z+1)^2 (z-3)}\, dz$.

Задача 9

Найдите область сходимости степенных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n (1-i)^n}{\sqrt{(3n-2)\cdot 8^n}} (z - i + 1)^n$.

Задача 10

Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$.

Задача 11

Разложите в ряд Лорана в указанном кольце функцию $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 1}$, $1 < |z + 2| < 3$.

Задача 12

При помощи вычетов вычислите интеграл $\int\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\sin^2 z}{z \cos z}\, dz$.

Задача 13

При помощи вычетов вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}\,dz$.

Задача 14

Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=10} \frac{z^{23}}{z^8-3}$.

Задача 15

Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t}$.

Задача 16

Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

Тест 4

Задача 1

Вычислите значение выражения $\frac{z_1}{z_2} + \mathrm{Re}\, z_1 - \mathrm{Im}\, \bar{z}_2$, если $z_1 = -2 - i$, $z_2 = i - 1$.

Задача 2

Определите вид кривой, заданной соотношением $|z+2-5i| = |z-4+i|$.

Задача 3

Исследуйте на дифференцируемость функцию $f(z)$, найдите ее производную, если она существует, $f(z) = (z-2)\,\mathrm{Im}(z+3i)$.

Задача 4

Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по известной ее мнимой части $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

$$v(x,y) = 2y^2 - 2x^2 + y, \quad f(1) = -7 - 2i.$$

Задача 5

Вычислите интеграл от функции комплексной переменной по заданной кривой $\int\limits_{AB} (z - 3\bar{z})\,dz$, AB – отрезок прямой $z_A = 1 - 3i$, $z_B = 2 - 5i$.

Задача 6

Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=1} \frac{\text{ch} z}{z^2+2z}$.

Задача 7

Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=10} \frac{\sin(z+3)\,dz}{(z+1)(z+5)}$.

Задача 8

Вычислите интеграл, используя интегральную формулу Коши для производных $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z\,dz}{(z+2)^4}$.

Задача 9

Найдите область сходимости степенных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (2+3i)^n}{\sqrt{(3n+2)\cdot 52^n}} (z+3i-4)^n.$$

Задача 10

Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$ функцию $f(z)=\frac{1+\cos z}{z^4}$.

Задача 11

Разложите в ряд Лорана в указанном кольце функцию $f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1<|z|<2$.

Задача 12

При помощи вычетов вычислите интеграл $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}$.

Задача 13

При помощи вычетов вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+4}{(z+1)^3(z+3)}\,dz$.

Задача 14

Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=10} \frac{z^{20}}{z^7+2}\,dz$.

Задача 15

Вычислите определенный интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t + 4}$.

Задача 16

Вычислите несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика : учеб. пособие. В 3 т. Т. 3 : Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1981. – 448 с.

3. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексной переменной : учеб. пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.

4. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 304 с.

5. Лаврентьев, М. Я. Методы теории функций комплексного переменного / М. Я. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – СПб. : Лань, 2002. – 749 с.

6. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. В 2 т. Т. 1 : Начала теории / А. И. Маркушевич. – СПб. : Лань, 2009. – 496 с.

7. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. В 2. т. Т. 2 : Дальнейшее построение теории / А. И. Маркушевич. – СПб. : Лань, 2009. – 624 с.

8. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.

9. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2006. – 256 с.

10. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики : учеб. пособие / Г. И. Кручкович [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1970. – 512 с.

11. Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 : Специальные разделы математического анализа / Болгов В. А. [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1966. – 368 с.

12. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 480 с.

13. Шахно, К. У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления / К. У. Шахно. – Минск : Выш. шк., 1975. – 400 с.

14. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учеб. пособие / В. Ф. Чудесенко. – М. : Выш. шк., 1999. – 126 с.

СОДЕРЖАНИЕ