

СРАВНЕНИЕ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: ФУРЬЕ АНАЛИЗ, ВЕЙВЛЕТЫ И БАНКИ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ФАЗОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ¹

Вашкевич М.И., к.т.н., доцент кафедры электронных вычислительных средств Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники,
e-mail: vashkevich@bsuir.by

Азаров И.С., д.т.н., доцент, заведующий кафедрой электронных вычислительных средств Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники,
e-mail: azarov@bsuir.by

Аннотация

Представлен сравнительный анализ трех методов частотно-временного представления сигналов: 1) кратковременное преобразование Фурье; 2) вейвлет-преобразование; 3) декомпозиция с использованием банка фильтров на основе фазового преобразования. Внимание уделено изучению частотно-временного покрытия, которое получается при использовании данных методов. Чтобы рассмотреть методы с единых позиций выбрана точка зрения на частотно-временное преобразования, как на результат работы банка фильтров. Особое внимание уделено объяснению механизма работы фазового преобразования, показана его связь с разложением сигнала на ортогональные дискретные последовательности Лагерра. Для визуализации конфигураций частотно-временного покрытия, получающихся при использовании указанных частотно-временных преобразований, рассчитывались прямоугольники Гейзенберга при помощи численного интегрирования соответствующих выражений.

Ключевые слова: частотно-временное преобразование, банк фильтров, фазовое преобразование, анализ с постоянной добротностью.

Comparison of time-frequency transforms: Fourier analysis, wavelets and allpass transformed filter banks

M.I. Vashkevich, I.S. Azarov

The article presents a comparative analysis of three time-frequency signal representation methods including 1) short-time Fourier transform, 2) wavelet transform, 3) decomposition based on allpass transformed filter bank. Attention is given to study time-frequency tiling associated with these methods. In order to consider the methods within an integrated framework we treat time-frequency transform as a filter bank. We also give attention to explaining the basic principle of allpass transform by showing its relation to decomposition of the signal into discrete orthonormal Laguerre sequences. In order to visualize configuration of time-frequency tiling for considered transforms Heisenberg rectangles were calculated using numerical integration of the corresponding expressions.

Key words: time-frequency transform, filter bank, allpass transform, constant Q analysis.

1 Введение

Практический анализ сигналов различной природы часто приводит к необходимости использования частотно-временных преобразований. Это объясняется нестационарной природой большинства сигналов, и как следствие, для корректного отображения содержащейся в них информации необходимо преобразование, позволяющее локализовать энергию сигнала на частотно-временной плоскости.

¹ Вашкевич, М.И. Сравнение частотно-временных преобразований: Фурье-анализ, вейвлеты и банки фильтров на основе фазового преобразования / М.И. Вашкевич, И.С. Азаров // Цифровая обработка сигналов. – №2. – 2020 г. – С. 13-26.

В данной работе рассмотрены три подхода к частотно-временному разложению сигнала:

- кратковременное преобразование Фурье [1];
- вейвлет-преобразование [2];
- банк фильтров на основе фазового преобразования [3, 4].

Целью статьи является сравнительный анализ особенностей и специфики данных подходов. Для этого в работе приводятся основные математические выкладки, позволяющие понять теоретическую основу указанных методов частотно-временного анализа. Чтобы рассматривать все методы с единых позиций был выбран подход, интерпретирующий частотно-временное преобразование, как результат работы банка фильтров.

Кратковременное преобразования Фурье (КВПФ) исторически явилось одним из первых методов, использованным для частотно-временного представления сигнала [1]. В соответствии с принципом неопределенности нельзя иметь неограниченно хорошее разрешение и во временной и в частотной областях [2]. Поэтому, если в КВПФ использовать короткие окна анализа, то можно достичь хорошего временного разрешения, теряя при этом в частотном разрешении. При длинных окнах анализа ситуация меняется на противоположную. В любом случае, особенностью КВПФ является равномерное покрытие частотно-временной области. Однако такое представление сигнала не всегда эффективно отображает информацию, содержащуюся в сигнале.

Вейвлет-преобразование [2] широко распространилось в 80-90-х годах XX столетия и явилось шагом в сторону более гибкого частотно-временного разрешения. В частности, при его использовании достигается разрешение с постоянной добротностью Q (англ. *constant-Q resolution*) [5], при котором временное разрешение возрастает, а частотное уменьшается по мере увеличения частоты. Анализ сигнала с постоянной добротностью имеет большое значение, поскольку моделирует работу периферийной части слуховой системы человека.

Третье из анализируемых направлений – банки фильтров, основанные на фазовом преобразовании, были впервые предложены в начале 80-х годов XX столетия [3, 4]. Они сочетают в себе преимущества КВПФ, а также вэйвлет-преобразования. Как и при практической реализации КВПФ в них можно использовать эффективные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). При этом в них также достижимо разрешение с постоянной добротностью Q . Важной их особенностью является гибкость – настраивая всего один параметр, отвечающий за степень деформации частотной оси, можно получать различные конфигурации покрытия частотно-временной плоскости. Этим они отличаются от банков фильтров на основе вейвлет-преобразования, где частотно-временное покрытие полностью определяется структурой банка фильтров.

Последующее изложение организовано следующим образом. В первом разделе рассмотрены основы КВПФ, при этом приводится его интерпретация как банка фильтров. Во втором разделе рассматриваются основы вейвлет-анализа и иллюстрируются его интерпретации в виде банка фильтров с древовидной структурой. В третьем разделе рассматриваются математические основы построения неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров. В четвертом разделе выполняется анализ частотно-временных покрытий, рассмотренных трех видов банков фильтров, и производится их сравнение.

2 Кратковременное преобразование Фурье

Для непрерывного временного сигнала $x(t)$ кратковременное преобразование Фурье (КВПФ) можно записать как

$$\text{STFT}_x(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t} dt, \quad (1)$$

где $w(t)$ – временная оконная функция, имеющая конечную длительность T . Умножение исходного сигнала на $w(t-\tau)$ локализует интеграл Фурье в окрестности $t = \tau$. Оконная функция, как правило, является вещественной и симметричной.

Рассмотрим вопрос, как происходит локализация энергии сигнала по времени и по частоте при использовании КВПФ. Для этого введем в рассмотрение семейство функций, называемых частотно-временными атомами Габора [2]:

$$w_{\omega, \tau}(t) = w(t-\tau)e^{-j\omega t}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), легко заметить, что атомы Габора являются теми «кирпичиками», на которые КВПФ раскладывает исходный сигнал $x(t)$.

Поскольку функция $w(t)$ является четной, то атомы Габора имеют центр в τ . Протяженность функции $w_{\omega, \tau}(t)$ во времени не зависит от ω и от τ , а её энергия сосредоточена в окрестности τ на интервале, измеряемом стандартным отклонением σ_t :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^2 |w_{\omega, \tau}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt. \quad (3)$$

Поскольку $w(t)$ вещественна и симметрична, то её преобразование Фурье обладает теми же свойствами. В свою очередь преобразование Фурье $w_{\omega, \tau}(t)$ есть

$$W_{\omega, \tau}(\nu) = W(\nu - \omega)e^{-j\tau(\nu - \omega)}, \quad (4)$$

где ν – частота, а $W(\nu)$ преобразование Фурье оконной функции $w(t)$. Таким образом, $W_{\omega, \tau}(\nu)$ есть сдвинутое на ω по частоте окно $W(\nu)$. Его частотная протяженность около ω не зависит от ω и от τ и может быть вычислена как

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \nu)^2 |W_{\omega, \tau}(\nu)|^2 d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |W(\nu)|^2 d\nu. \quad (5)$$

Таким образом, энергия атома Габора $w_{\omega, \tau}(t)$ локализована как по времени (3), так и по частоте (5). Графическим представлением энергии атома на частотно-временной плоскости (t, ν) служит прямоугольник Гейзенберга, как это показано на рис. 1.

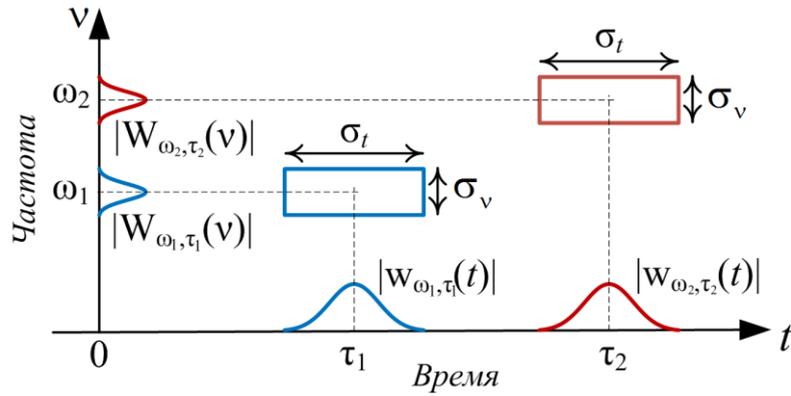


Рис. 1. Графическое представление протяженности энергии двух атомов Габора («прямоугольники Гейзенберга»)

Из представленного рисунка видно, что $w_{\omega,\tau}(t)$ соответствует прямоугольнику Гейзенберга, имеющий площадь $\sigma_t\sigma_v$ и центр в (τ, ω) . Приведенное изображение явно показывает, что КВПФ имеет одинаковое разрешение во всей частотно-временной плоскости.

Применительно к дискретным сигналам КВПФ, описываемое выражением (1), записывается следующим образом [6]:

$$\text{STFT}_x[k, t] = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n+t)e^{-j\omega_k n}, \quad (6)$$

где $\omega_k = 2\pi k/M$ – сетка частот на которой выполняется анализ, k – индекс частоты (или частотный бин), M – количество частот на которых производится анализ. Двумерное представление (6) одномерного сигнала $x(n)$ весьма избыточно поскольку для каждого нового момента времени производится вычисление дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Поэтому, чтобы уменьшить избыточность, вводят параметр временного шага (англ. *hop size*) L , который определяет временной сдвиг между соседними окнами анализа. В этом случае (6) можно воспринимать, как частный случай, когда $L = 1$. В общем же случае КВПФ для дискретных сигналов с временным шагом L записывается как

$$\text{STFT}_x[k, l] = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n+lL)e^{-j\omega_k n}. \quad (7)$$

С одной стороны, значения $\text{STFT}_x[k, l]$ характеризуют локальное частотно-временное поведение сигнала вблизи момента времени lL на k -й частоте. В этом смысле, выражение (7) часто называют преобразованием со скользящим окном (англ. *sliding-window transform*) [6].

С другой стороны, $\text{STFT}_x[k, l]$ можно интерпретировать, как набор временных последовательностей, т.е. как функцию от l для каждого частотного бина k . В этом случае преобразование (7) соответствует *банку фильтров*, который выполняет декомпозицию сигнала на частотные каналы или субполосы. Обе упомянутые интерпретации схематично представлены относительно частотно-временной плоскости на рис. 2.

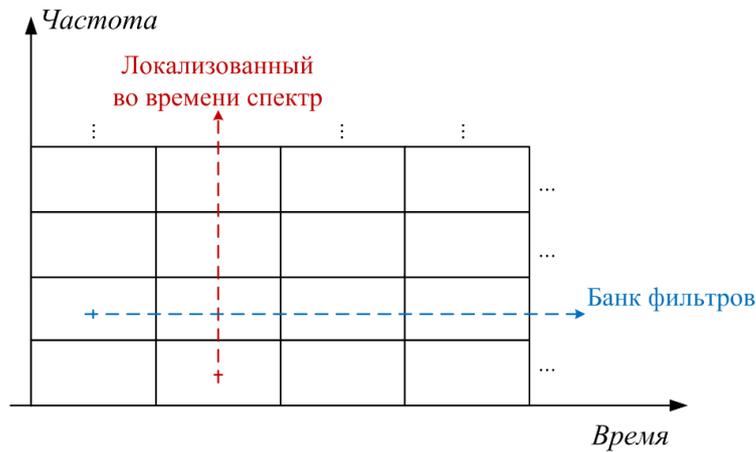


Рис. 2. Интерпретации кратковременного преобразования Фурье как ряда локализованных во времени спектров (вертикальная линия) и как банка полосовых фильтров (горизонтальная линия)

Рассмотрим более подробно интерпретацию КВПФ как банка фильтров. Получаемый в данном случае банк фильтров называется *модулированным* и играет важную роль во многих практических приложениях. Рассмотрим общую структуру модулированного банка фильтров анализа, показанную на рис. 3.

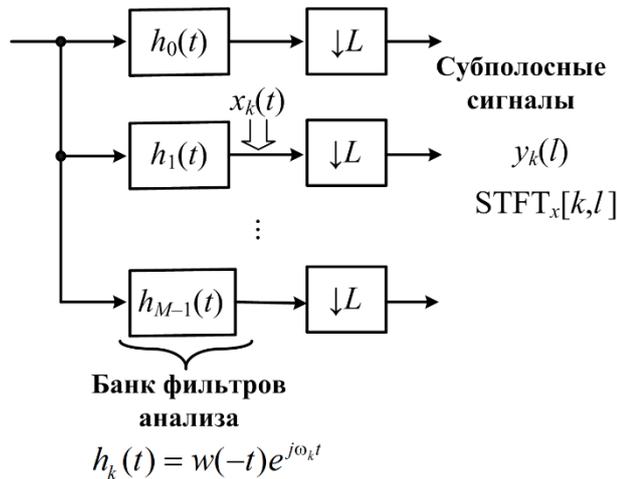


Рис. 3. Представление кратковременного преобразования Фурье в виде банка фильтров

Если фильтры анализа определить, как

$$h_k(t) = w(-t)e^{j\omega_k t}, \quad (8)$$

то структура, приведенная на рис. 3, реализует КВПФ (6). Данный вывод можно получить непосредственной проверкой:

$$x_k(t) = \sum_n h_k(n)x(t-n) = \sum_n w(-n)x(t-n)e^{j\omega_k n} = \sum_n w(n)x(t+n)e^{-j\omega_k n} = \text{STFT}_x[k, t]. \quad (9)$$

Децимация выходов банка фильтров в L раз позволяет получить субполосные сигналы, которые соответствуют кратковременному преобразованию Фурье, описываемому выражением (7):

$$y_k(l) = x_k(lL) = \sum_n w(n)x(n+lL)e^{-j\omega_k n} = \text{STFT}_x[k, l]. \quad (10)$$

Таким образом, выражения (8)–(10) позволяют интерпретировать кратковременное преобразование Фурье, как банк фильтров. Причем получающееся представление сигнала соответствует однородному, равномерному покрытию (от англ. *tiling*) частотно-временной плоскости, как показано на рис. 2.

3 Вейвлет-преобразование (ВП)

В качестве альтернативы КВПФ для спектрального анализа сигнала выступает вейвлет-преобразование, которое является мощным средством для представления локальных особенностей сигнала. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$ определяется как [2]:

$$\text{WT}_x(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt, \quad (11)$$

где вейвлет $\psi((t-\tau)/s)$ является результатом масштабирования вещественного базисного вейвлета $\psi(t)$ на величину s и временного сдвига на τ ; нормирующий множитель $1/\sqrt{s}$ – необходим для сохранения единичной энергии для масштаба s , поскольку изначально функция $\psi(t)$ нормирована, т.е. $\|\psi(t)\|=1$. На функцию $\psi(t)$ также накладываются несколько дополнительных ограничений [2].

Если КВПФ представляет сигнал в виде разложения на атомы Габора (2), то вейвлет-преобразование раскладывает сигнал на частотно-временные атомы вида

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right). \quad (12)$$

Обычно базисный вейвлет $\psi(t)$ имеет центр в нуле, из чего следует, что $\psi_{s,\tau}(t)$ имеет центр при $t = \tau$.

Частотно-временное разрешение вейвлет-преобразования (11) определяется частотно-временной протяженностью вейвлет-атомов (12). В [2] доказывается, что временная протяженность $\psi_{s,\tau}(t)$, по аналогии с (3), равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^2 |\psi_{s,\tau}(t)|^2 dt = s^2 \sigma_t^2, \quad (13)$$

где $\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt$. В тоже время, частотная протяженность $\Psi_{s,\tau}(\nu)$ равна σ_ν^2/s^2 , где σ_ν^2 есть частотная протяженность Фурье-образа базисного вейвлета $\Psi(\nu)$. Частотный центр $\Psi_{s,\tau}(\nu)$ есть ω_0/s , где ω_0 – частотный центр базисного вейвлета $\Psi(\nu)$. Таким образом, энергия частотно-временного вейвлет-атома $\psi_{s,\tau}(t)$ соответствует прямоугольнику Гейзенберга с центром в $(\tau, \omega_0/s)$ и размером $s\sigma_t$ по времени и σ_ν/s – по частоте. На рис. 4 схематично показан пример прямоугольника Гейзенберга для двух вейвлетов. Нужно отметить, что при любом масштабе s площадь прямоугольника остается равной $\sigma_t \sigma_\nu$.

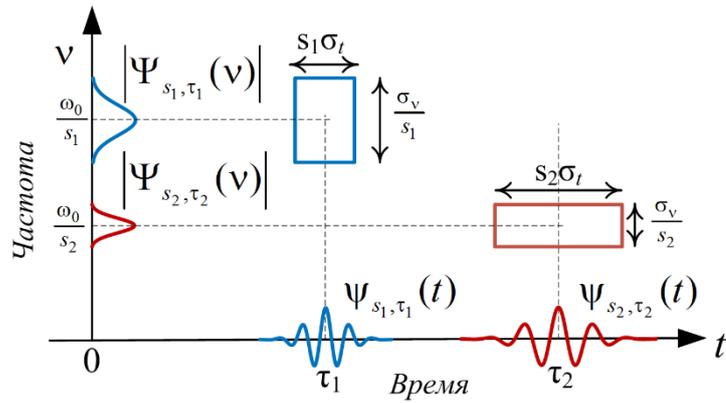


Рис. 4. Графическое представление протяженности энергии двух вейвлетов

Таким образом, для больших значений s функция $\psi_{s,\tau}(t)$ становится низкочастотной и растянутой во времени версией $\psi(t)$. При малых значениях s функция $\psi_{s,\tau}(t)$ становится сжатой версией $\psi(t)$, чья энергия концентрируется в высокочастотной области. Это приводит к тому, что покрытие частотно-временной плоскости не является регулярным, как в случае КВПФ. На высоких частотах ВП имеет хорошую локализацию по времени, но плохую по частоте, при этом на низких частотах ситуация изменяется – преобразование лучше локализовано в частотной области и плохо во временной.

Для конкретного значения s вейвлет-преобразование (11) можно интерпретировать, как результат фильтрации сигнала $x(t)$ фильтром с импульсной характеристикой $\bar{\psi}_{s,\tau}(t)$:

$$\text{WT}_x(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = x(t) * \bar{\psi}_{s,\tau}(t), \quad (14)$$

где $*$ – операция свертки, $\bar{\psi}_{s,\tau}(t) = \psi_{s,\tau}(-t)$ – обращенная во времени функция частотно-временного атома.

Если рассмотреть совокупность различных значений s , то выражение (11) можно интерпретировать как банк фильтров. На рис. 5 сравниваются разрешение КВПФ и вейвлет-преобразования в частотно-временной плоскости. Используя представление, показанное на рис. 5, и интерпретируя вейвлет-преобразование как банк фильтров, можно выделить его характерную особенность. Полосы пропускания банка фильтров $\Delta\omega_i$ монотонно увеличиваются по мере увеличения центральной частоты ω_0 . Таким образом, можно показать, что относительная полоса частот отдельного фильтра (или добротность) $Q = \Delta\omega_i/\omega_0$ не зависит от параметра s . Вследствие этого вейвлет-преобразование часто называют анализом с постоянной добротностью. Это очень похоже на частотный анализ выполняемый человеческим ухом [5].

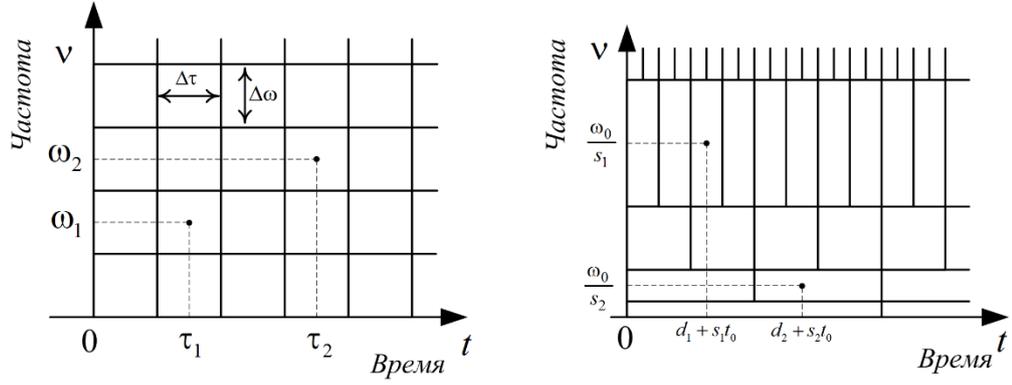


Рис. 5. Частотно-временное разрешение: кратковременного преобразования Фурье (слева) и вейвлет-преобразования (справа)

Когда вейвлет-преобразование (11) известно только для $s < s_0$, то для полного восстановления $x(t)$ необходима дополнительная информация, которая соответствует $WT_x(s, \tau)$ при $s > s_0$. Этого достигают введением масштабирующей функции $\varphi(t)$, которая представляет собой объединение вейвлетов с масштабами, большими s_0 . Модуль её преобразования Фурье равен [2]:

$$|\Phi(v)|^2 = \int_{s_0}^{+\infty} |\Psi(sv)|^2 \frac{ds}{s}, \quad (15)$$

где $\Psi(v)$ – Фурье-образ вейвлета $\psi(t)$, $\Phi(v)$ – Фурье-образ масштабирующей функции $\varphi(t)$.

Таким образом, масштабирующую функцию можно интерпретировать, как импульсную характеристику низкочастотного фильтра. Если обозначить

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad (16)$$

то низкочастотная аппроксимация $x(t)$ с масштабом s есть

$$L_x(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = x(t) * \bar{\varphi}_{s,\tau}(t), \quad (17)$$

где $\bar{\varphi}_{s,\tau}(t) = \varphi_{s,\tau}(-t)$ – обращенная по времени масштабирующая функция.

Вейвлет-преобразование сигнала (11) является избыточным и поэтому редко применяется на практике. Существует дискретная версия (11) называемая дискретным вейвлет-преобразованием (ДВП). Для его получения на первом этапе производят дискретизацию параметра масштаба s в логарифмической шкале. На втором этапе производят дискретизацию параметра время относительно параметра масштаба таким образом, что на каждом масштабном уровне используется различная частота дискретизации. Предположим, что параметр масштаба s выбирается равным положительной степени фиксированного числа s_0 , а τ зависит от s , таким образом, что

$$s_m = s_0^m, \quad \tau_{ml} = s_m l \tau_0 T, \quad (18)$$

где $s_0 > 1$, $\tau_0 > 0$, $m, l \in \mathbb{Z}$, а T – интервал дискретизации. Чтобы минимизировать число операций в ДВП, его параметры выбирают лежащими на диадической сетке. Для этого полагают $s_0 = 2$, а $\tau_0 = 1$, в результате чего вейвлет-преобразование (11) с учетом (18) приобретает вид:

$$\text{WT}_x(s_m, \tau_{ml}) = 2^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi(2^{-m}t - lT) dt, \quad (19)$$

а само преобразование выполняет октавный анализ (англ. *octave analysis*). Поскольку ДВП применяется к дискретному сигналу $x(n)$, то необходимо перейти от непрерывного временного параметра t к его дискретной версии, в результате чего (19) преобразуется к виду (полагается, что интервал дискретизации $T = 1$):

$$\text{WT}_x(2^m, 2^m l) = 2^{-m/2} \sum_n x(n) \psi(2^{-m}n - l) = \sum_n x(n) g(l - 2^{-m}n), \quad (20)$$

где $g(l - 2^{-m}n) = \psi(-(2^{-m}n - l))$.

ДВП (20) реализует октавный анализ с различной частотой дискретизации в каждой октаве. Необходимо заметить, что ДВП (20), вычисленное до масштаба 2^M , не дает полной информации о сигнале. Её необходимо дополнить низкими частотами (см. (17)), которые соответствуют масштабам, большим, чем 2^M . Переходя к дискретной версии выражения (17), получаем:

$$L_x(2^M, 2^M l) = \sum_n x(n) \varphi(2^{-M}n - l) = \sum_n x(n) f(l - 2^{-M}n). \quad (21)$$

где $f(l - 2^{-M}n) = \varphi(-(2^{-M}n - l))$.

Дискретное вейвлет-преобразование (20)–(21) можно представить в виде дерева, состоящего из фильтров низкой и высокой частоты. Такая реализация двоичного (англ. *diadic*) дискретного вейвлет-преобразования образуется при помощи алгоритма с «дырами» (фр. *algorithme a trous*) [7]. На рис. 6 показана схема получения такого банка фильтров.

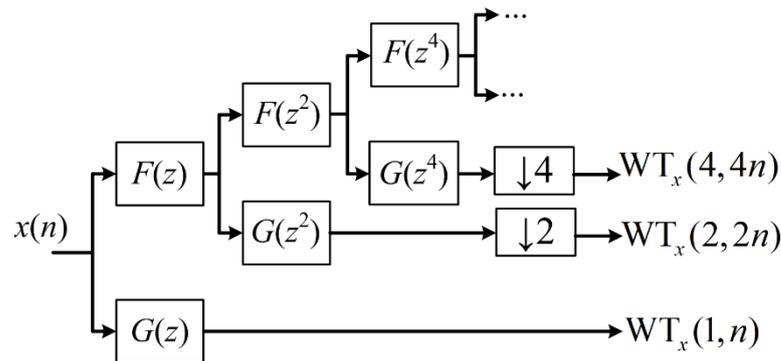


Рис. 6. Реализация дискретного вейвлет-преобразования в виде древовидной структуры

Через $G(z)$ обозначено z -преобразование базисного вейвлета, а через $F(z)$ – передаточная функция интерполяционного фильтра, который соответствует масштабирующей функции.

Таким образом показано, что хотя по сути вейвлет-преобразование является примером кратно-масштабного анализа, его можно интерпретировать и как частотно-временное

преобразование. При этом, как и в случае с КВПФ, вейвлет-преобразование представимо в виде банка фильтров. Важной особенностью получаемой структуры банка фильтров является то, что он раскладывает сигнал на частотные компоненты, имеющие различную ширину частотных полос, что приводит к неравномерному покрытию частотно-временной плоскости (см. рис. 5). Такое покрытие является важным в контексте многих задач, например, при моделировании частотного разрешения слуховой системы человека [5].

4 Банк фильтров на основе фазового преобразования

В предыдущих разделах, приступая к описанию частотно-временного преобразования, давалось его формулировка для случая непрерывного сигнала. После чего осуществлялся переход к дискретной версии частотно-временного преобразования, после чего выводилась его интерпретация как банка фильтров. В данном разделе мы приступаем к описанию частотно-временного преобразования, которое изначально имеет вид банка фильтров.

Процесс построения банка фильтров на основе фазового преобразования главным образом состоит из двух этапов: 1) получение полифазной структуры ДПФ-модулированного банка фильтров и 2) замена элементов задержки в полифазной структуре на фазовые звенья (второй этап и является собственно фазовым преобразованием).

Данный раздел организован следующим образом. Вначале рассмотрен процесс получения равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров, который является обобщением идеи кратковременного преобразования Фурье. Показывается также, как ДПФ-моделированный банк фильтров может быть эффективно реализован в виде полифазной структуры. Далее рассматриваются математические основы фазового преобразования, показывается его связь с разложением сигнала в базисе дискретных последовательностей Лагерра. Описывается процесс деформации частотной оси, происходящей в результате фазового преобразования. В заключении раздела описывается структура неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров на основе фазового преобразования.

4.1 Равнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров

Выражение (8) иллюстрирует идею получения банка фильтров, основанного на модуляции. Действительно, если необходимо получить M -канальный банк фильтров, то для этого достаточно рассчитать КИХ-фильтр-прототип нижних частот $h(n)$ с частотой среза π/M (см. рис. 7); после чего импульсные характеристики банка фильтров определяются путем модуляции:

$$h_k(n) = h(n)W^{-nk}, \quad 0 \leq k < M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (22)$$

где $W = \exp(-j2\pi/M)$, $N = mM$ – порядок фильтра-прототипа, а m – натуральное число.

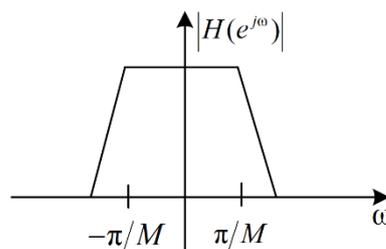


Рис. 7. Схемное представление АЧХ фильтра-прототипа

Если обозначить Фурье-образ фильтра-прототипа с коэффициентами $h(n)$ как $H(e^{j\omega})$, то используя свойство частотного сдвига, выражение (22) можно переписать следующим образом:

$$H_k(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega - \frac{2\pi k}{M})}). \quad (23)$$

Из выражения (23) следует, что частотные характеристики фильтров H_k являются сдвинутыми версиями фильтра-прототипа. Схемное изображение покрытия банком фильтров частотного диапазона показано на рис. 8. Поскольку банк фильтров состоит из равномерно сдвинутых копии фильтра-прототипа, то он называется *равнополосным*.

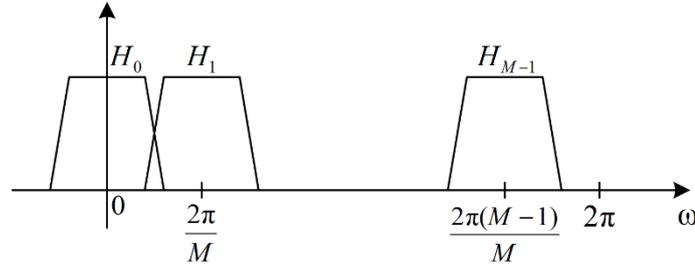


Рис. 8. Схемное представление АЧХ банка фильтров

Эффективная реализация банка фильтров (22) основывается на полифазной реализации фильтра-прототипа $H(z)$, которая заключается в его разбиении на сумму M полифазных компонент $E_l(z)$ [8]:

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M), \quad 0 \leq l < M, \quad (24)$$

где $E_l(z) = \sum_{n=0}^{N/M-1} e_l(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/M-1} h(l + Mn) \cdot z^{-n}$. Другими словами, импульсная характеристика $h(n)$ перегруппирована в M подпоследовательностей $e_l(n)$.

Исходя из (22), можно записать Z-образ банка фильтров

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W^{-kn} z^{-n} = H(z W^k). \quad (25)$$

Далее, подставляя выражение (24) в (25), получаем:

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} W^{-lk} E_l(z^M W^{kM}) = \sum_{l=0}^{M-1} W^{-lk} z^{-l} E_l(z^M). \quad (26)$$

При выводе последнего выражения использовалось тождество $W^{kM} = 1$. Выражение (26) удобно переписать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ H_2(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & W^{-(M-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & W^{-2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & W^{-(M-1)} & W^{-2(M-1)} & \dots & W^{-(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}}_{\text{ОДПФ}} \begin{bmatrix} E_0(z^M) \\ z^{-1}E_1(z^M) \\ z^{-2}E_2(z^M) \\ \vdots \\ z^{-(M-1)}E_{M-1}(z^M) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Легко заметить, что матрица $M \times M$ в правой части выражения является матрицей обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ), умноженная на константу M . Выражение (27) позволяет получить эффективную структуру банка фильтров, показанную на рис. 9 и называемую ДПФ-модулированным банком фильтров.

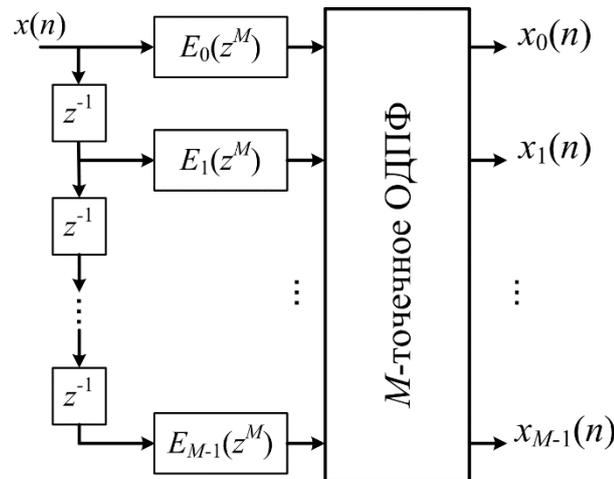


Рис. 9. Полифазная реализация ДПФ-модулированного банк фильтров

Эффективность данной структуры основывается на том, что для реализации обратного ДПФ могут быть использованы быстрые алгоритмы вычисления дискретного преобразования Фурье [9].

Представление сигнала, получаемое при помощи банка фильтров, показанного на рис. 9, является избыточным в том же смысле в каком избыточно КВПФ, описываемое выражением (6). Вообще можно заметить, что ДПФ-модулированный банк фильтров полностью соответствует КВПФ (6) в том случае, когда длина фильтра прототипа $h(n)$ равна числу каналов банка фильтров M . Поэтому ДПФ-модулированный банк фильтров является обобщением идеи КВПФ, поскольку включает КВПФ, как частный случай.

Для уменьшения избыточности субполосных сигналов операция децимации может быть внесена и в структуру равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров. При этом коэффициент децимации играет ту же роль, что и параметр временного шага L для КВПФ (7).

4.2 Дискретные последовательности Лагерра и фазовое преобразование

Появление фазового преобразования связано с исследованием дискретных ортонормированных последовательностей и способов их генерации. В частности, в работе [10] рассмотрен важный способ получения ортонормированных последовательностей $\{\phi_n^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots$. Известно, что последовательности $\{\phi_n^{(k)}\}$ являются ортонормированными, если скалярное произведение любой последовательности на саму

себя дает единицу, а произведение любых двух различных последовательностей равно нулю. В краткой форме это требование записывается следующим образом:

$$\{\phi_n^{(m)}\} \cdot \{\phi_n^{(k)}\} = \sum_n \phi_n^{(m)} \phi_n^{(k)} = \delta_{mk}, \quad (28)$$

где $\delta_{mk} = 1$, если $m = k$ и $\delta_{mk} = 0$ для $m \neq k$.

Если в выражении (28) от последовательностей перейти к их Z-преобразованиям, то операцию скалярного произведения можно заменить контурным интегралом вдоль единичной окружности в Z-плоскости [10]:

$$\{\phi_n^{(m)}\} \cdot \{\phi_n^{(k)}\} = \frac{1}{2\pi j} \oint \Phi^{(m)}(1/z) \Phi^{(k)}(z) dz/z = \delta_{mk}, \quad (29)$$

где

$$\Phi^{(k)}(z) = \sum_n \phi_n^{(k)} z^{-n}, \quad \Phi^{(m)}(1/z) = \sum_n \phi_n^{(m)} z^n.$$

Поскольку элементы последовательности $\phi_n^{(k)}$ можно восстановить из z-образа $\Phi^{(k)}(z)$, то задача нахождения $\{\phi_n^{(k)}\}$, $k=1,2,\dots$ сводится к поиску таких $\Phi^{(k)}(z)$, которые удовлетворяют (29).

Одним из возможных решений (29) является [11]

$$\Phi^{(k)}(z) = \Lambda^{(k)}(z) = \sqrt{1-\alpha^2} \frac{(z^{-1}-\alpha)^k}{(1-\alpha z^{-1})^{k+1}}, \quad |\alpha| < 1. \quad (30)$$

Этот случай соответствует дискретным последовательностям Лагерра, которые формируют полный ортонормированный базис в пространстве ℓ^2 причинных последовательностей с конечной энергией. Последовательность Лагерра k -го порядка в явной форме выражается следующим образом [11]:

$$\lambda^{(k)}(n) = \sqrt{1-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\min(k,n)} (-1)^{m+k} \frac{(n+k-m)!}{m!(n-m)!(k-m)!} \alpha^{k+n-2m}, \quad k, n = 0, 1, \dots$$

На рис. 10 представлены примеры нескольких последовательностей Лагерра.

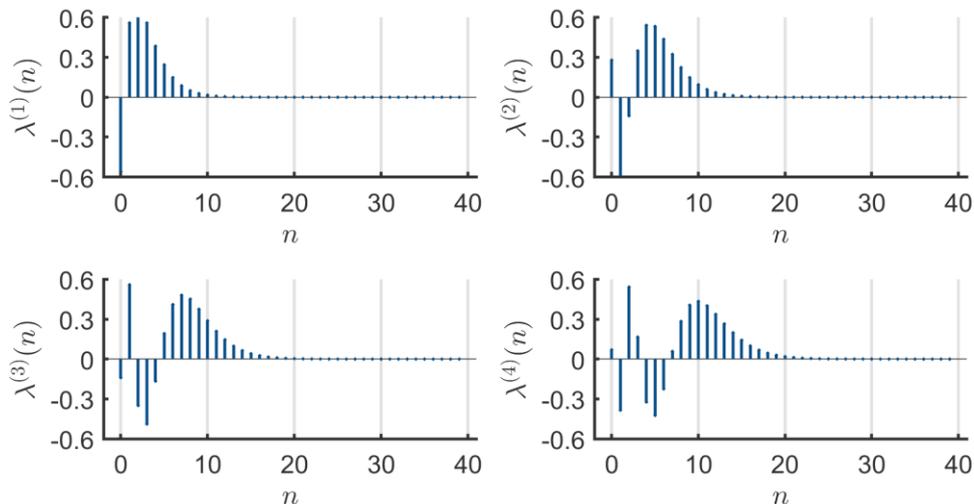


Рис. 10. Первые четыре последовательности Лагерра, значение параметра $\alpha = 0,5$

Z-преобразование последовательностей Лагерра (30) удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$\Lambda^{(k+1)}(z) = A(z)\Lambda^{(k)}(z) = A(z)^k \Lambda^{(0)}(z), \quad (31)$$

где

$$A(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (32)$$

передаточная функция устойчивого, детерминированного всепропускающего фильтра первого порядка. Иногда фильтр, описываемый передаточной функцией $A(z)$, называют *фазовым звеном*. Частотная характеристика фазового звена равна $A(e^{j\omega}) = e^{-j\theta(\omega)}$, где

$$\theta(\omega) = \omega + \arctg\left(\frac{\alpha \sin \omega}{1 - \alpha \cos \omega}\right). \quad (33)$$

Для дискретного временного сигнала $x(n)$ его представление в базисе последовательностей Лагерра имеет вид:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^{(k)}(n), \quad (34)$$

где

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \lambda^{(k)}(n). \quad (35)$$

Выражение (35) можно интерпретировать как линейную неинвариантную во времени операцию фильтрации сигнала $x(n)$ импульсной характеристикой $h(k, n) = \lambda^{(k)}(n)$, которая в соответствии с (31) обладает важным свойством

$$h(k+1, n) = h(k, n) * a(n), \quad (36)$$

где $a(n)$ – импульсная характеристика фазового звена (32).

Вспомним, что для обычной линейной инвариантной во времени системы уравнение свертки имеет вид

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(m-n). \quad (37)$$

Если мы хотим воспользоваться (37) для вычисления (35), то необходимо на вход подавать обращенный во времени сигнал $x(-n)$ и использовать импульсную характеристику $h(k, n)$
:

$$y_k(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)h(k, m-n). \quad (38)$$

Вычисляя (38) в момент времени $m = 0$, получаем

$$y_k(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)h(k, -n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k, n) = u_k. \quad (39)$$

Таким образом, устанавливается, что вычислить коэффициенты Лагерра u_k из выражения (35) можно при помощи операции линейной фильтрации (37), если подать на вход обращенную во времени последовательность $x(n)$ и зафиксировать выход фильтра в нулевой момент времени.

Схема для итеративного вычисления коэффициентов Лагерра, основанная на выражениях (35), (39) и рекурсии (31), (36), показана на рис. 11.

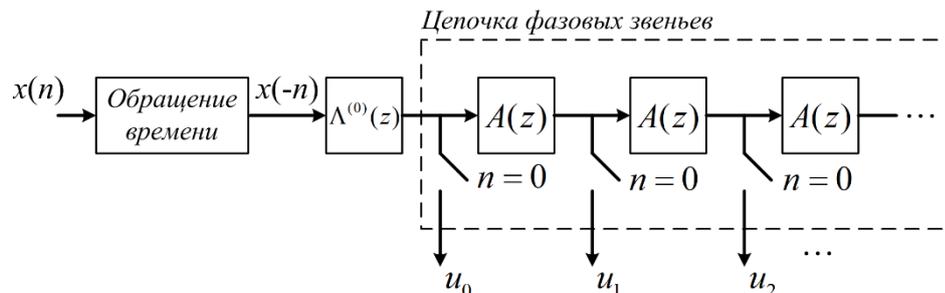


Рис. 11. Структура для вычисления коэффициентов Лагерра

Поскольку последовательности Лагерра образуют полную систему, исходный сигнал всегда можно восстановить по коэффициентам Лагерра. Структура системы синтеза, реализующая выражение (34), показана на рис. 12.

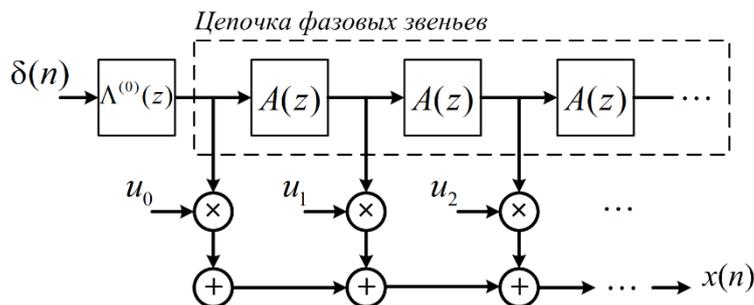


Рис. 12. Структура для восстановления исходного сигнала по коэффициентам Лагерра

В приведенной схеме на вход цепочки фазовых звеньев подается дельта-импульс, при этом на k -м по счету выходе цепочки происходит формирование последовательности Лагерра k -го порядка $\lambda^{(k)}(n)$. Далее в соответствии с выражением (34) производится умножение каждой последовательности на соответствующий коэффициент разложения, после чего все последовательности суммируются.

Поскольку структура, показанная на рис. 11, является антикаузальной системой (англ. *anticausal system*), то её реализация возможна только в случае, когда входной сигнал ограничен фиксированным числом отсчетов, т.е. $x(n) \neq 0$ только для $n = 0, 1, \dots, N$. В этом случае возможно выполнение операции обращения времени путем введения конечной задержки; получаемый при этом сигнал $y(n) = x(N - n)$ подается на фильтр $\Lambda^{(0)}(z)$, выход которого подается в цепочку фазовых звеньев. При этом переключатели в цепочке фазовых звеньев на рис. 11 замыкаются в момент времени $n = N$.

При практическом использовании схемы синтеза на рис. 12 цепочка фазовых звеньев ограничивается конечным числом элементов, которое должно быть равно числу коэффициентов Лагерра u_k . В работе [11] произведена оценка числа коэффициентов

разложения Лагерра K в зависимости от длины входного сигнала N и от коэффициента α в формуле передаточной функции фазового звена (32):

$$K \geq \frac{N(1+|\alpha|)}{1-|\alpha|}. \quad (40)$$

Из приведенного выражения легко заметить, что чем больше значение $|\alpha|$, т.е. чем ближе полюс всепропускающего фильтра к единичной окружности, тем больше коэффициентов Лагерра требуется для представления сигнала. Минимальное значение (40) достигается при α равном нулю, когда фазовое звено вырождается в простой элемент задержки, при этом $K = N$.

Приведем несколько примеров представления сигналов в виде коэффициентов Лагерра. На рис. 13 представлен ступенчатый сигнал длины $N = 100$. Выбирая значение $\alpha = 0,5$ по формуле (40) получаем, что необходимое число коэффициентов Лагерра равно $K = 300$. Из приведенных на рис. 13 графиков видно, что аппроксимация ступенчатого сигнала, состоящего из 100 отсчетов, при помощи 300 коэффициентов Лагерра дает ошибку реконструкции менее, чем 0,01.

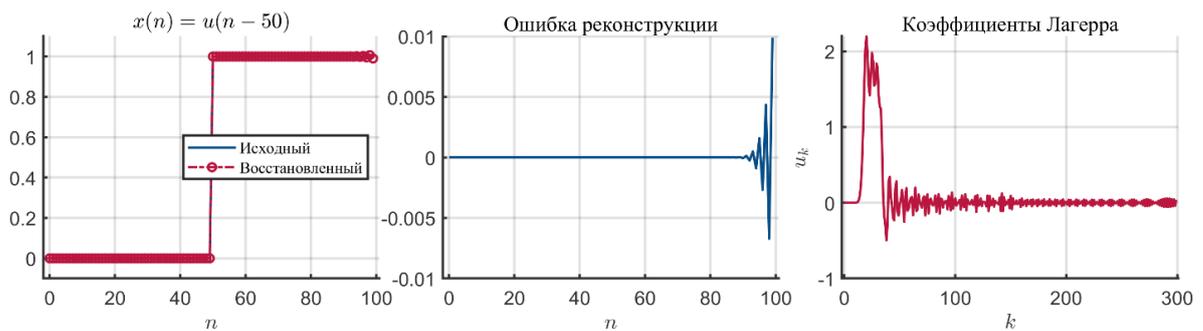


Рис. 13. Разложение ступенчатого сигнала по коэффициентам Лагерра

На рис. 14 показан пример представления низкочастотного синусоидального сигнала в виде коэффициентов Лагерра. Получающаяся ошибка реконструкции в данном примере имеет уровень меньший $5 \cdot 10^{-4}$. Примечательно, что последовательность коэффициентов Лагерра в этом случае также имеют форму синусоиды.

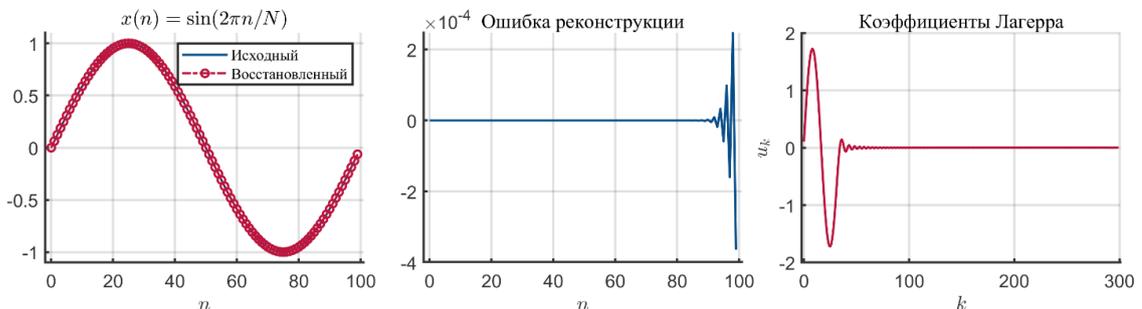


Рис. 14. Разложение низкочастотного синусоидального сигнала по коэффициентам Лагерра

На рис. 15 показан пример представления высокочастотного синусоидального сигнала в виде коэффициентов Лагерра. Ошибка реконструкции имеет в данном случае такой же уровень, как и в примере со ступенчатым сигналом. Внешний вид

последовательности коэффициентов Лагерра повторяют форму анализируемой синусоиды, являясь при этом «растянутой» версией исходного сигнала.

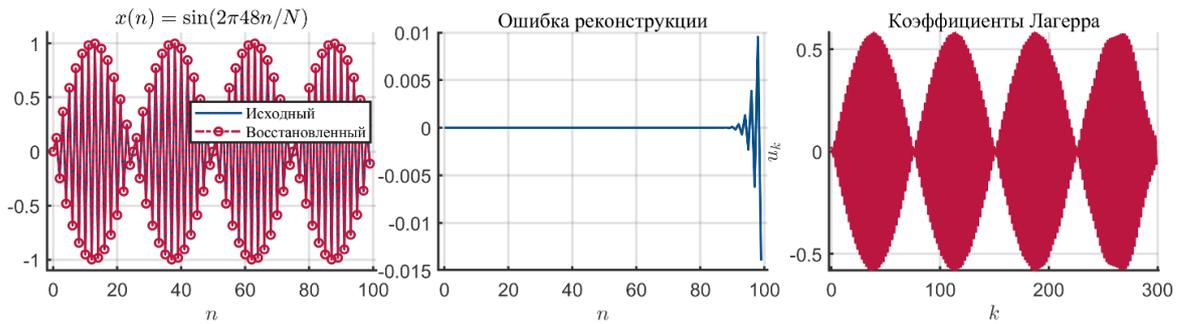


Рис. 15. Разложение высокочастотного синусоидального сигнала по коэффициентам Лагерра

Сравнивая представления сигналов, показанные на рис. 14 и 15, можно сделать вывод, что в случае низкочастотных сигналов происходит их «сжатие» в области коэффициентов Лагерра, в то время, как для высокочастотных сигналов происходит их «растяжение». Как будет показано в дальнейшем степень данного эффекта зависит от значения коэффициента α .

4.3 Деформация частотной оси

Разложение Лагерра связано с особым видом деформации частотной оси [11], [12]. Рассмотрим Z-преобразование от правой и левой части выражения (34)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Lambda^{(k)}(z). \quad (41)$$

Далее, применяя рекурсивное соотношение (31) к выражению (41), получаем

$$X(z) = \Lambda^{(0)}(z) \sum_{k=0}^{\infty} u_k A(z)^k = \Lambda^{(0)}(z) U(A(z)^{-1}). \quad (42)$$

Поскольку частотная характеристика фазового звена равна $A(e^{j\omega}) = e^{-j\theta(\omega)}$, то

$$X(e^{j\omega}) = \Lambda^{(0)}(e^{j\omega}) U(e^{j\theta(\omega)}), \quad \text{где} \quad (43)$$

$$U(e^{j\theta(\omega)}) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-jk\theta(\omega)}, \quad (44)$$

а $\theta(\omega)$ задается выражением (33).

Анализируя (43), можно прийти к простой интерпретации, что частотный спектр последовательности коэффициентов Лагерра u_k является деформированной версией исходного частотного спектра $X(e^{j\omega})$ взвешенного на частотную характеристику обратную к $\Lambda^{(0)}(e^{j\omega})$. Сама деформация частотной оси $\Omega = \theta(\omega)$ управляется параметром α фазового звена (32). В Z-области это отображение описывается заменой

$$z^{-1} \rightarrow A(z), \quad (45)$$

которое является уникальным однозначным отображением единичной окружности на себя, чей модуль равняется единице [12]. На рис. 16 показано семейство кривых, описывающих деформацию частотной оси, происходящую вследствие отображения (45).

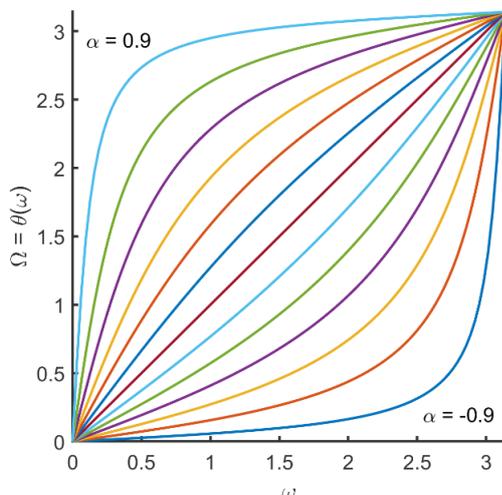


Рис. 16. Семейство кривых описывающих деформацию частотной оси, значение параметра α пробегает значения от $-0,9$ до $0,9$ с шагом $0,15$

Отметим, что предложенное в начале 1970-х А. Оппенгеймом и др. отображение (45) изначально использовалось как способ преобразования сигнала к такому представлению, чтобы можно было использовать обычный алгоритм быстрого преобразования Фурье для оценки спектра исходного сигнала в точках единичной окружности расположенных нерегулярно [12],[13].

Позже, в конце 1970-х, П. Вари [3, 4] рассмотрел структуру неравнополосного банка фильтров, получающегося путем простой замены элементов задержки полифазной структуры (см. рис. 9) на фазовые звенья. Другими словами, он предложил использовать отображение (45) не к сигналу, а к дискретной системе. Такая замена элементов в системе получила название – *фазовое преобразование* (англ. allpass transform). Подобная смена парадигмы открыла путь к обработке сигнала с использованием деформации частотной оси в реальном времени, поскольку фазовое преобразование не требует выполнения операции обращения времени (см. рис. 11). На рис. 17 схематично показано применение фазового преобразования к полифазной структуре банка фильтров.

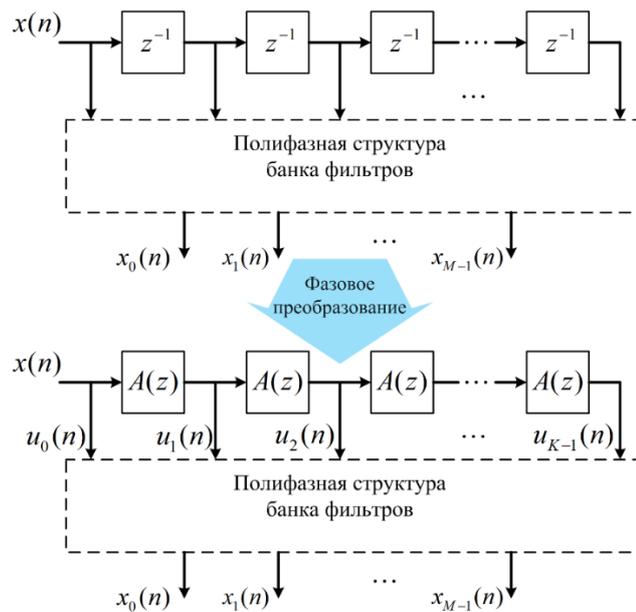


Рис. 17. Фазовое преобразование

Для лучшего понимания процессов, происходящих в дискретной системе под действием фазового преобразования, рассмотрим прохождение сигнала (состоящего из двух синусоидальных компонент следующих одна за другой) через обычную линию задержки и через цепочку фазовых звеньев (рис. 18).

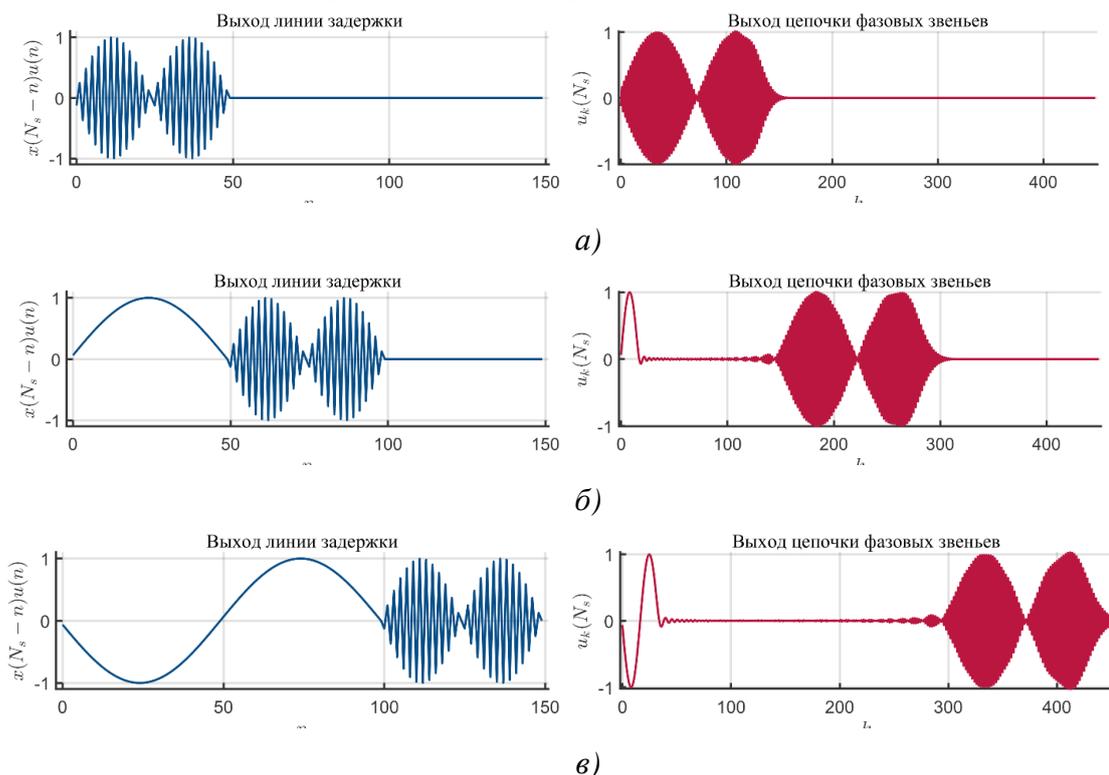


Рис. 18. Прохождение сигнала $x(n) = \sin(2\pi \cdot 0,48n)(u(n)-u(n-50)) + \sin(2\pi \cdot 0,01n)(u(n-50)-u(n-150))$ через линию задержки и через цепочку фазовых звеньев $\alpha = 0,5$: а) задержка $N_s = 50$; б) задержка $N_s = 100$; в) задержка $N_s = 150$

Поведение сигнала в линии задержки вполне ясно: по мере увеличения времени сигнал равномерно сдвигается вправо. Процесс распространения сигнала в цепочке фазовых звеньев гораздо менее очевидный. Высокочастотная компонента сигнала

«растягивается» в пространстве выходов цепочки фазовых звеньев, в то время, как низкочастотная компонента наоборот «сжимается». Также можно легко заметить, что скорость распространения высокочастотной компоненты в цепочке фазовых звеньев выше, чем скорость низкочастотной компоненты. Так происходит, поскольку цепочка фазовых звеньев является дисперсной системой. Вообще отображение частот исходного сигнала ω в область деформированных частот Ω описывается фазочастотной характеристикой фазового звена (33):

$$\theta: \omega \rightarrow \Omega. \quad (46)$$

Далее более подробно рассмотрим применение фазового преобразования к полифазной структуре ДПФ-модулированного банка фильтров.

4.4 Неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров на основе фазового преобразования

Целью применения фазового преобразования к полифазной структуре банка фильтров является получение неравнополосной версии банка фильтров. Такие банки востребованы в приложениях, где необходимо моделировать восприятие звуковой информации слуховой системой человека. На рис. 19 показана полифазная структура ДПФ-модулированного банка фильтров аналогичная той, что показана на рис. 9, но к которой применено фазовое преобразование (см. рис. 17).

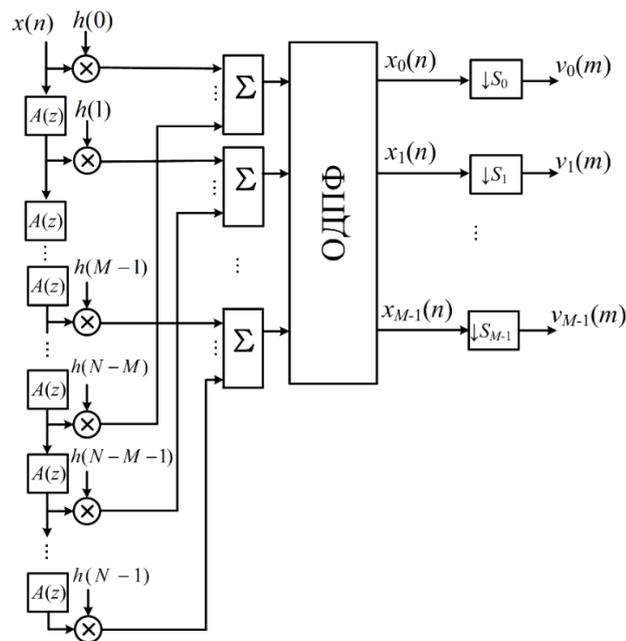


Рис. 19. Структура полифазного неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров полученного путем фазового преобразования

В отличие от структуры банка фильтров на рис. 9 в данном случае полифазные компоненты показаны в развернутом виде. Каждый сумматор отвечает за формирование выхода соответствующей полифазной компоненты фильтра-прототипа. После блока обратного ДПФ следуют блоки, выполняющие децимацию. Поскольку ширина полосы каждого канала банка фильтров отлична, то в каждом канале применяется свой коэффициент децимации S_k .

Уже отмечалось, что операция децимации может быть внесена и в структуру равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров (рис. 9). В этом случае во всех каналах необходимо использовать один и тот же коэффициент децимации, поскольку все полосы имеют равную ширину. Неодинаковые значения коэффициентов S_k в структуре неравнополосного банка фильтров вызывают небольшое неудобство с точки зрения аппаратной или программной реализации, зато позволяют значительно снизить число операций, выполняемых при последующей обработке канальных сигналов. В некоторых случаях [14] удастся использовать один и тот же коэффициент децимации во всех каналах банка фильтров. Эффективность такого подхода заключается в том, что в этом случае блоки децимации можно перенести внутрь полифазной структуры банка фильтров, поставив их сразу после цепочки фазовых звеньев. Это позволяет значительно уменьшить число операций, необходимых для реализации банка фильтров.

На рис. 20 показан процесс деформации частотной оси под действием фазового преобразования (45) и получение неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров.

Из приведенного рисунка видно, что банк фильтров является равнополосным относительно деформированной частотной оси Ω , однако если при помощи обратной функции

$$\theta^{-1} : \Omega \rightarrow \omega, \quad (47)$$

перейти к исходной оси частот, то ширина полос фильтров трансформируется, образуя неравнополосный банк фильтров.

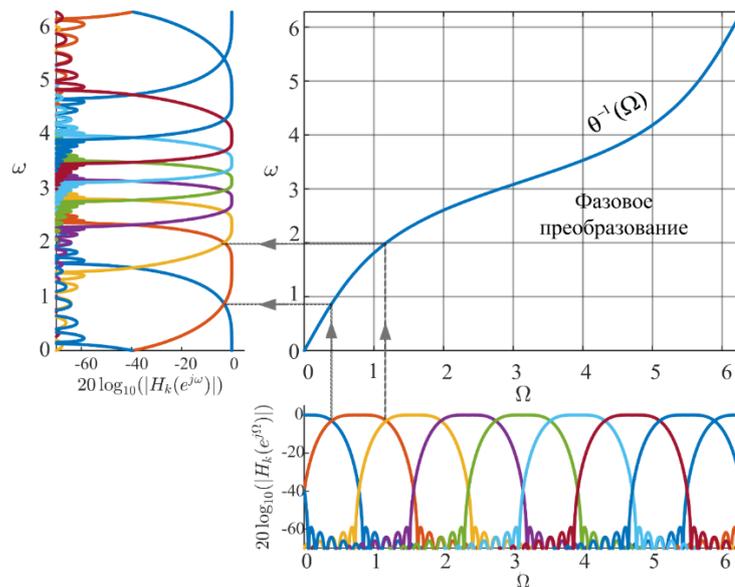


Рис. 20. Процесс получения неравнополосного банка фильтров с использованием фазового преобразования, коэффициент определяющий степень деформации частотной оси $\alpha = -0,4$

На рис. 21 сравниваются разрешение ДПФ-модулированного банка фильтров и его неравнополосной версии, полученной при помощи фазового преобразования.

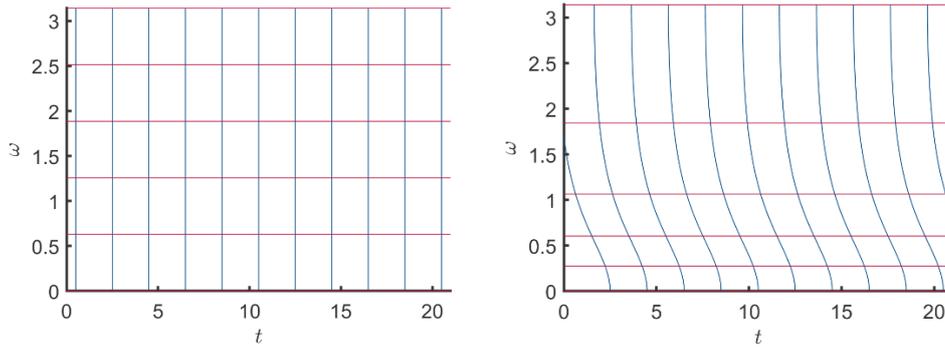


Рис. 21. Схематичное представление частотно-временного разрешения исходного ДПФ-модулированного банка фильтров (слева) и после фазового преобразования (справа), $\alpha = -0,4$

Можно заметить, что в результате фазового преобразования изменяется не только частотные, но и временные границы частотно-временного покрытия. Этот эффект объясняется тем, что в результате фазового преобразования изменяется ФЧХ дискретной системы (в данном случае банка фильтров), которая наследует форму ФЧХ фазового звена (33). Как следствие этого, изменяется и групповая задержка, которая для фазового звена равна [11]:

$$\tau_A(\omega) = \frac{d\theta}{d\omega} = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}. \quad (48)$$

Если исходный банк фильтров имел фиксированную групповую задержку D для всех частот, то после фазового преобразования групповая задержка банка фильтров станет зависимой от частоты и равной $D\tau_A(\omega)$.

Особенностью неравнополосного банка фильтров является и то, что его полосы пропускания $\Delta\omega_k$ монотонно увеличиваются по мере увеличения центральной частоты ω_{0_k} . Таким образом, получается, что неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров позволяет получить разложение близкое к анализу с постоянной добротностью Q , которое играет важную роль во многих приложениях связанных с обработкой звука.

5 Анализ частотно-временного разрешения банков фильтров

В данном разделе рассматриваются конфигурации частотно-временного покрытия, получающиеся при использовании рассмотренных выше банков фильтров. С этой целью, используя импульсные и частотные характеристики фильтров, входящих в состав банка, рассчитываются прямоугольники Гейзенберга при помощи численного интегрирования выражений для временной и частотной протяженности, полученные на основе (3) и (5).

Частотную протяженность предлагается вычислять как:

$$\sigma_\omega^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\omega - \omega_0)^2 |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega, \quad (49)$$

где ω_0 – центральная частота полосы пропускания фильтра $H_k(e^{j\omega})$.

В отличие от (5) в выражении (49) интегрирование ведется на интервале от $-\pi$ до π поскольку рассматриваемые банки фильтров являются системами дискретного времени и, следовательно, их частотные характеристики являются 2π -периодическими функциями.

Временную протяженность предлагается вычислять как:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau_0)^2 |h_k(t)|^2 dt, \quad (50)$$

где τ_0 – групповая задержка k -го фильтра на частоте ω_{0_k} .

В отличие от (3) в выражении (50) фигурирует параметр групповой задержки на частоте ω_{0_k} поскольку рассматриваемые в нашей работе импульсные характеристики банков фильтров $h_k(t)$ не обязательно являются симметричными четными функциями (как $w(t)$ в выражении (3)). Поэтому предлагается считать, что «центр» импульсной характеристики фильтра совпадает с групповой задержкой фильтра на центральной частоте ω_{0_k} .

В качестве банка фильтров, основанного на вейвлет-преобразовании, рассматривался 5-канальный диадический банк фильтров, структура которого приведена на рис. 22.

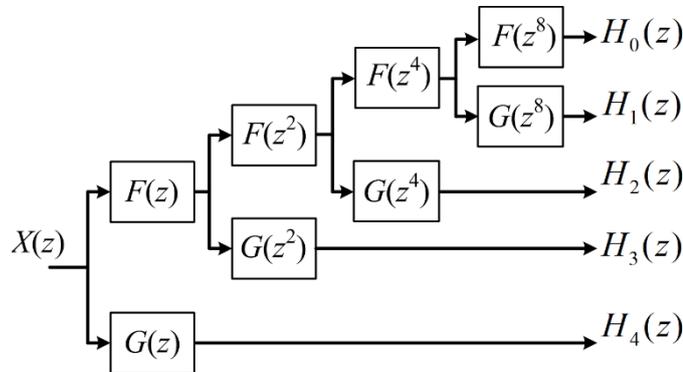


Рис. 22. Диадический банк фильтров

Для получения импульсных характеристик банка фильтров использовались вейвлет-функции Фейера-Коровкина шестого порядка [15]. На рис. 23 приведены импульсные характеристики банка, а также его частотное представление.

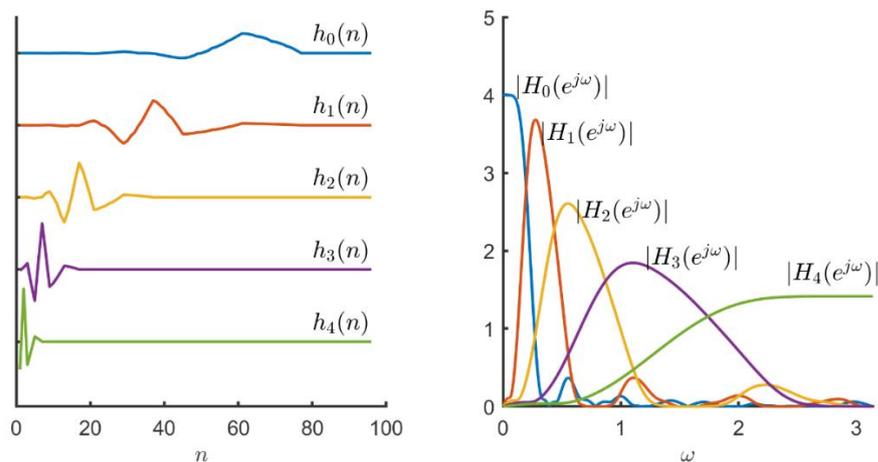


Рис. 23. Диадический банк фильтров: представление во временной (слева) и в частотной области (справа)

Вторым был рассмотрен 5-канальный ДПФ-модулированный. Получаемая в данном случае частотная декомпозиция сигнала соответствует кратковременному преобразованию Фурье. Импульсные характеристики, а также АЧХ банка фильтров приведены на рис. 24.

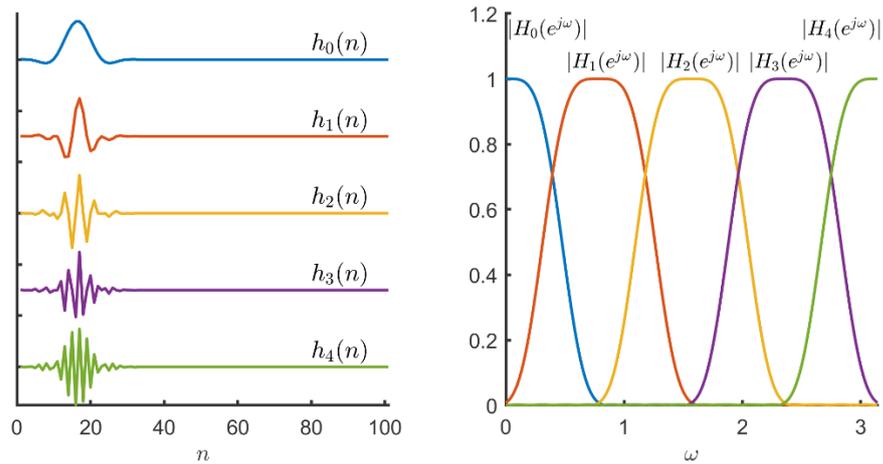


Рис. 24. ДПФ-модулированный банк фильтров: представление во временной (слева) и в частотной области (справа)

Также рассматривался 5-канальный неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров, полученный применением фазового преобразования к банку фильтров, показанному на рис. 24. Результирующие импульсные и частотные характеристики приведены на рис. 25.

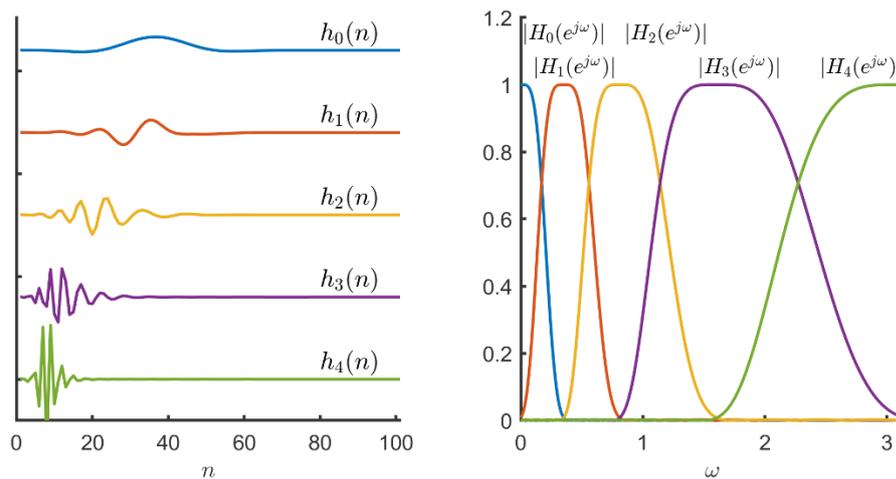


Рис. 25. Неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров ($\alpha = -0,4$): представление во временной (слева) и в частотной области (справа)

Можно заметить, что под действием фазового преобразования импульсные характеристики банка фильтров стали больше напоминать импульсные характеристики вейвлет-банка фильтров (см. рис. 23). Низкочастотный фильтр имеет наибольшую временную протяженность, в то время как высокочастотный фильтр, наоборот, имеет самую лучшую временную локализацию. Однако в отличие от вейвлет-банка фильтров ДПФ-модулированный банк на основе фазового преобразования имеет лучшую частотную селективность, которую он наследует от равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров (см. рис. 24).

Результат вычисления частотной и временной протяженности (49)–(50) для рассматриваемых банков фильтров показан на рис. 26. Для каждого банка фильтров получены 5 прямоугольников Гейзенберга, которые отражают частотную и временную локализацию, достигаемую при помощи соответствующего фильтра, входящего в состав банка.

На рис. 26, а изображено частотно-временное покрытие, получающееся при использовании вейвлет-банка фильтров. Можно заметить, что временная протяженность уменьшается вдвое при переходе от одного канала к другому. Частотная протяженность возрастает с увеличением центральной частоты, что соответствует принципу анализа сигналов с постоянной добротностью Q .

Частотно-временное покрытие равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров, показанное на рис. 26, б вполне ожидаемо имеет регулярную структуру. Частотная и временная протяженность не зависят от номера центральной частоты фильтра.

Неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров отличается нерегулярной структурой частотно-временного покрытия (рис. 26, в). В области низких частот временная протяженность фильтров приблизительно равна, но уменьшается по мере увеличения центральной частоты фильтра. Также с ростом центральной частоты фильтра наблюдается увеличение частотной протяженности, что как и в случае с вейвлет-банком фильтров, соответствует принципу анализа с постоянной добротностью Q . Кроме того, надо отметить, что частотно-временное покрытие зависит от параметра α и может гибко изменяться, в то время как покрытие, получающееся в вейвлет-банке фильтров, зависит от структуры банка фильтров (см. рис. 22).

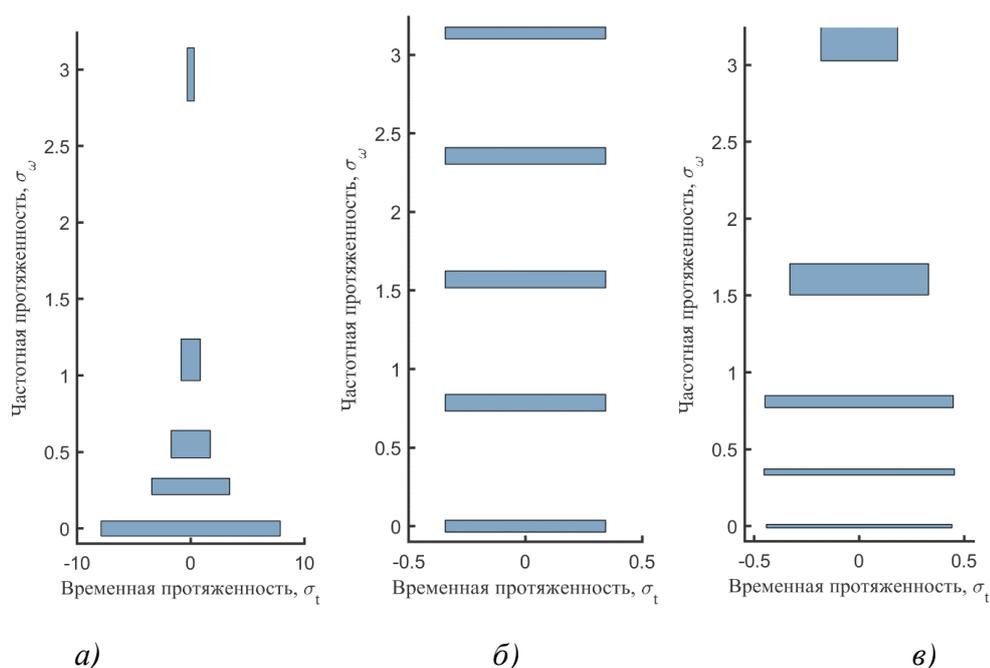


Рис. 26. Частотно-временное покрытие: а) банка фильтров на основе вейвлет преобразования; б) ДПФ-модулированного банка фильтров; в) неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров ($\alpha = -0,4$)

6 Заключение

В работе подробно рассмотрены три метода частотно-временной декомпозиции сигнала: кратковременное преобразование Фурье, вейвлет-преобразование и использование неравнополосного банка фильтров, полученного путем фазового преобразования. Показано, что кратковременное преобразование Фурье, а также вейвлет-преобразование можно рассматривать как декомпозицию сигнала с помощью банка фильтров. Дана характеристика указанных методов относительно получаемого в результате

частотно-временного покрытия. С использованием предложенных выражений для вычисления временной и частотной протяженности характеристик фильтров, входящих в состав банка получены оценки прямоугольников Гейзенберга для трех видов банков фильтров. На основе полученных данных можно сделать вывод, что кратковременное преобразование Фурье и соответствующий ему ДПФ-моделированный банк фильтров следует применять в том случае, когда требуется разложить сигнал на «атомы» равномерно покрывающие частотно-временную плоскость. Банк фильтров на основе вейвлет-преобразования, а также ДПФ-модулированный банк фильтров, получающийся путем фазового преобразования, хорошо подходят для выполнения анализа с постоянной добротностью Q . Такой анализ особенно важен в приложениях, где необходимо моделировать восприятие звуковой информации слуховой системой человека. Однако неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров имеет некоторое преимущество над вейвлет-банком фильтров в том, что позволяет получить лучшую частотную локализацию в области нижних частот. Кроме того, следует отметить гибкость подхода, основанного на использовании фазового преобразования. Степень деформации частотной оси зависит от одного параметра α , изменяя который, можно плавно управлять частотно-временным покрытием.

Литература

- [1] Рабинер, Л.Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л.Р. Рабинер, Р.В. Шафер. – М.: Радио и связь, 1981. – 496 с.
- [2] Малла, С. Вэйвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
- [3] Vary, P. Digital filter banks with unequal resolution // Short Communication Digest of European Signal Processing Conference (EUSIPCO), 1980. – pp. 41–42.
- [4] Vary, P. "Ein Beitrag zur Kurzzeitspektralanalyse mit digitalen Systemen" (PhD thesis), [Electronic resource]. 1978. Mode of access: <https://www.tib.eu/de/suchen/id/TIBKAT%3A020659989>.
- [5] Quatieri, T.F. Discrete-time speech signal processing: principles and practice / Prentice Hall Signal Processing Series. — Prentice Hall PTR, 2002. — P. 781.
- [6] Goodwin, M.M. The STFT, sinusoidal models, and speech modification // Springer Handbook of Speech Processing. – Springer, 2008. – pp. 229–258.
- [7] Shensa, M. J. The discrete wavelet transform: wedding the a trous and mallat algorithms // IEEE Transactions on signal processing. –1992. – vol. 40, no. 10. – pp. 2464–2482.
- [8] Vaidyanathan, P.P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: a tutorial // Proceedings of the IEEE. –1990. – vol. 78, no. 1. — pp. 56–93.
- [9] Блейхут, Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
- [10] Broome, P. W. Discrete orthonormal sequences / P. W. Broome // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1965. –vol. 12, no. 2. — pp. 151–168.
- [11] Evangelista, G. Frequency-warped filter banks and wavelet transforms: a discrete-time approach via laguerre expansion / G. Evangelista, S. Cavaliere // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1998. – vol. 46, no. 10. — pp. 2638–2650.
- [12] Оппенгейм, А. Вычисление спектров с неравномерным разрешением посредством быстрого преобразования Фурье / А. Оппенгейм, Д. Джонсон, К. Штейглиц // ТИИЭР: пер. с англ. – 1971. – Т. 59, № 2. – С. 138-139.
- [13] Oppenheim, A. Discrete representation of signals / A. Oppenheim, D. Johnson, K. Steiglitz // Proceedings of the IEEE. – 1972. – vol. 60. –pp. 681–691.
- [14] Gülzow, T. Comparison of a discrete wavelet transformation and a nonuniform polyphase filterbank applied to spectral-subtraction speech enhancement / T. Gülzow, A. Engelsberg, U. Heute // Signal processing.– 1998. –Vol. 64, no. 1.– pp. 5–19.

- [15] Nielsen, M. On the construction and frequency localization of finite orthogonal quadrature filters / M. Nielsen // *Journal of Approximation Theory*. – 2001. – vol. 108. — pp. 36–52.