ЛЕКЦИЯ 1

Нерелятивистский закон сложения скоростей и преобразования Галилея

Ньютоновская механика строится на основании принципа относительности Галилея, утверждающего, что все механические явления при одинаковых начальных условиях протекают в различных инерциальных системах отсчёта совершенно одинаково. При этом инерциальной системой отсчёта называют такую систему, относительно которой тело, не подверженное действию других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Построение ньютоновской механики начинается с постулирования существования такой системы отсчёта (I закон Ньютона). Сам Ньютон связывал ее с абсолютным пространством, которое представлялось им как безотносительное к чему-либо внешнему вместилище вещей, остающееся всегда одинаковым и неподвижным. Любая другая система отсчёта, движущаяся относительно постулированной поступательно с постоянной по величине и направлению скоростью также, является инерциальной.

Описание движения тела в выбранной системе отсчёта сводится к установлению кинематического закона движения, т.е. к заданию координат, однозначно определяющих его положение относительно этой системы как функций времени. При этом следует иметь в виду, что такое математическое описание имеет физический смысл только тогда, когда предварительно выяснено, что подразумевается здесь под «временем». Согласно Ньютону «абсолютное, истинное или математическое время само по себе и в силу своей внутренней природы течёт равномерно, безотносительно к чему-либо внешнему» (постулат абсолютности времени). В связи с этим считалось само собой разумеющимся, что промежутки времени между одними и теми же явлениями, наблюдаемыми из различных систем отсчета K и K', должны быть одинаковым, т.е.

$$\Delta t = \Delta t', \qquad (1.1)$$

где t и t' – показания одинаковых часов, покоящихся в K- и K'-системе соответственно. Причём под часами имеется в виду любой прибор, в котором идёт тот или иной повторяющийся процесс. Именно так понимаемое время принималось за аргумент функций, задающих кинематический закон движения тела. При этом вопрос о соотнесении координат и момента времени наблюдаемого физического события (т.е. явления, происходящего в весьма малой области пространства в течение очень малого промежутка времени) строго не ставился. Считалось, что в визуальном пространстве наблюдателя момент наступления события определяется одновременным с ним положением стрелки часов на лабораторном столе. Удалённость места события, а также конечность скорости распространения света во внимание не принимались. Понимание необходимости строгих определений, особенно применительно к удаленным разноместным событиям, пришло позже и стало одним из отправных пунктов построения теории относительности (определения синхронных часов и одновременности разноместных событий). Эти определения будут даны в следующих лекциях. Сейчас важно то, что в соответствии с равенством (1.1) показания часов в K- и K'-системах могут отличаться на аддитивную константу τ:

$$t = t' + \tau . \tag{1.2}$$

При проведении пространственных измерений в каждой системе отсчёта предполагаются справедливыми допущение о существовании твёрдых тел, геометрия Евклида и закон прямолинейного распространения света. Тогда, чтобы найти положение удаленного предмета, нужно отмерить масштабной линейкой (твёрдым эталонным стержнем, разделённым на равновеликие части) прямолинейный базисный отрезок и засечь с помощью лучей света и угломерных инструментов направления на предмет из концов этого отрезка, а затем, предполагая лучи света прямолинейными, вычислить с помощью теоремы синусов расстояние до предмета (<u>метод триангуляции</u>).

Найдём теперь преобразования координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую, на языке которых можно дать математическую формулировку принципа относительности Галилея.

Математическим выражением принципа относительности Галилея является требование неизменности вида уравнений, выражающих законы механики, при преобразованиях координат и времени, описывающих переход из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Их называют преобразованиями Галилея. Рассмотрим вывод этих преобразований и выясним, какие допущения при этом явно или неявно используются.

Рассмотрим системы отсчёта K и K', координатные оси которых параллельны друг другу. K'-система либо покоится относительно K-системы, либо движется относительно нее со скоростью $\vec{V}$ поступательно, т.е. их координатные оси остаются все время параллельными друг другу.

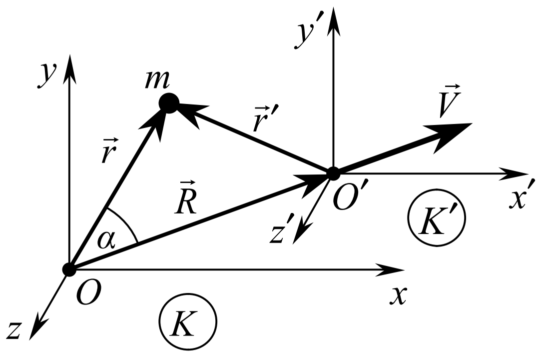

Рис. 1

Если K'-система покоится относительно K-системы, то в силу евклидовости пространства для любой неподвижной точки m *) (рис. 1) мы можем записать:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \tag{1.3}$$

и

$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha}, \tag{1.4}$$

где r', r и R – длины векторов $\vec{r}'$, $\vec{r}$ и $\vec{R}$ соответственно, α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{R}$.

Эмпирическая проверка уравнения (1.4), следующего из правила треугольника (1.3), осуществляется в этом случае только средствами пространственных измерений, т.е. масштабными линейками и угломерными инструментами. Часы как обязательный элемент системы отсчёта здесь не требуются.

Допустим теперь, что K'-система движется относительно K-системы с некоторой скоростью $\vec{V}$. Рассмотрим снова некоторую точку m, предполагая,

*) Для того чтобы «отметить» точку в пространстве, нужно поместить туда материальное тело достаточно малых размеров.

что она покоится в K'-системе. Тогда в ней $\vec{r}' = const$. Векторы же $\vec{r}$ и $\vec{R}$ становятся функциями времени t. Возникает вопрос: можно ли для любого момента времени t снова записать равенства (1.3) и (1.4)? В ньютоновской физике это считается само собой разумеющимся. Не следует однако забывать, что измерение вектора $\vec{r}'$ (т.е. определение его ориентации и длины) производится в K'-системе, а векторов $\vec{r}$ и $\vec{R}$ – в K-системе. Одинаковые ли для этого требуются инструментальные средства и измерительные операции? Простое рассуждение показывает, что это не так. Действительно, в K'-системе $\vec{r}' = const$. Поэтому для измерения $\vec{r}'$ требуются только масштабная линейка, перекладыванием которой устанавливается длина вектора $\vec{r}'$, и угломерные инструменты, определяющие его ориентацию в пространстве. Часы здесь снова не нужны. Иное дело измерение разности $\vec{r} - \vec{R}$ в K-системе. Так как точки с радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{R}$ в ней движутся, то кроме использования средств пространственных измерений нужно с помощью часов, покоящихся в этой системе, одновременно засечь положения этих точек в координатной сетке K-системы. Следовательно, процедура измерения разности $\vec{r} - \vec{R}$ в K-системе перестает быть чисто геометрической, поскольку в неё включаются часы, снабженные, строго говоря, предписанием, что понимается под одновременностью разноместных событий.

Таким образом, процедуры измерений векторов $\vec{r}'$ и $\vec{r} - \vec{R}$ оказываются принципиально различными, и поэтому нет никаких логических оснований для утверждения, что уравнение (1.3) остается справедливым в случае движущейся системы отсчёта K'. Его можно сделать таковым лишь постулативно. В ньютоновской физике фактически так и поступают, принимая это утверждение как очевидное. Но принимаемые постулаты – это вовсе не очевидные истины. В частности, преодоление «очевидности» постулата параллельности в евклидовой геометрии привело в конечном счете к созданию и обоснованию неевклидовых геометрий. Появление релятивистской физики также связано с преодолением «очевидности» постулата абсолютности времени, выраженного уравнением

(1.1), а также справедливости правила треугольника (1.3) применительно к сложению векторов, определяемых в разных системах отсчёта. Однако это было сделано лишь тогда, когда потребовалось включить в теоретическую схему описания физических явлений тот факт, что скорости движения тел и распространения излучений в любой инерциальной системе отсчёта ограничены сверху величиной $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с, совпадающей с величиной скорости света в вакууме.

Итак, в ньютоновской механике неявно предполагается, что правило треугольника (1.3) имеет абсолютный смысл, т.е. является справедливым применительно к векторам, отнесенным к различным системам отсчёта, независимо от относительного движения этих систем. При этом его справедливость не ограничивается проанализированным нами случаем, когда точка m покоится в движущейся системе отсчёта. Считается, что

$$\vec{r}'(t') = \vec{r}(t) - \vec{R}(t), \tag{1.5}$$

где $\vec{r}'(t')$ – некоторая функция времени t', связанного с t уравнением (1.2). В частности, может выполняться и $\vec{r}' = const$.

Уравнение (1.5) сразу позволяет найти закон преобразования скорости материальной точки m при переходе из одной системы отсчёта в другую. Действительно, дифференцируя (1.5) по времени t, получаем

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt}. \tag{1.6}$$

Здесь $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ – скорость точки m относительно K-системы, $\dfrac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ – скорость поступательного движения K'-системы относительно K-системы, тогда как в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \vec{\upsilon}'\frac{dt'}{dt}, \tag{1.7}$$

где $\vec{\upsilon}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$ – скорость точки m относительно K'-системы.

Таким образом, из (1.6) с учётом (1.7) получаем

$$\vec{\upsilon}'\frac{dt'}{dt}=\vec{\upsilon}-\vec{V}\,. \tag{1.8}$$

Теперь подчеркнём, что в соответствии с равенством (1.1), выражающим постулат абсолютности времени,

$$\frac{dt'}{dt}=1. \tag{1.9}$$

Последнему обстоятельству в учебной литературе уделяется явно недостаточное внимание, хотя только с учетом (1.9) можно придти к закону преобразования скорости

$$\vec{\upsilon}'=\vec{\upsilon}-\vec{V}\,, \tag{1.10}$$

называемому галилеевским законом сложения скоростей. То, что он также выражается векторным правилом треугольника, является прямым следствием постулата абсолютности времени.

Из закона (1.10) очевидно вытекает, что если в некоторой системе отсчёта K тело движется с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$, то в любой другой системе отсчёта K', движущейся относительно K-системы с постоянной скоростью $\vec{V}$, это тело также будет двигаться с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}'$. Таким образом, переход от одной инерциальной системы отсчета к другой определяется условием $\vec{V}=const$. В этом случае вектор $\vec{R}$, входящий в (1.5), имеет следующую зависимость от времени:

$$\vec{R}=\vec{R}_0+\vec{V}t\,,$$

где $\vec{R}_0$ – некоторый постоянный вектор, и поэтому равенство (1.5) перепишется так:

$$\vec{r}'(t')=\vec{r}(t)-\vec{V}t-\vec{R}_0\,. \tag{1.11}$$

Опуская теперь в уравнении (1.11) знаки аргументов и объединяя его с уравнением (1.2), приходим к следующему закону преобразования радиус-вектора рассматриваемой точки и момента времени происходящего в ней события при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t - \vec{R}_0, \tag{1.12}$$

$$t' = t - \tau\,. \tag{1.13}$$

Если выбрать начала координат систем отсчёта K и K' на прямой, параллельной вектору $\vec{V}$, и начать отсчёт времени по часам в системах K и K' в момент, когда начала координат совпадают, т.е. положить $t_0 = t_0' = 0$ при $\vec{R} = \vec{0}$, то преобразования (1.12) и (1.13) перепишутся в виде

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t\,, \tag{1.14}$$

$$t' = t\,. \tag{1.15}$$

Преобразования (1.14), (1.15) называются преобразованиями Галилея.

Если считать, что (см. рис.1) координатные оси K- и K'-систем параллельны друг другу, т.е. их координатные орты связаны простейшими уравнениями $\vec{e}_x = \vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_y = \vec{e}_{y'}$, $\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$, то, проектируя равенство (1.14) на координатные оси получим галилеевский закон преобразования координат и времени

$$\begin{aligned} x' &= x - V_x t\,, \\ y' &= y - V_y t\,, \\ z' &= z - V_z t\,, \\ t' &= t\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Таким образом, математическим выражением принципа относительности Галилея является требование неизменности вида уравнений, выражающих законы механики, при преобразованиях (1.16). В частности, основное динамическое уравнение ньютоновской механики, выражающее в математической форме II закон Ньютона, не изменяется при этих преобразованиях. Построенная на основании ньютоновских законов теория с высокой степенью точности описывает многие наблюдаемые механические явления. В частности, это относится к небесной механике, описывающей видимые движения планет, астероидов и комет, а также предсказывающей многочисленные астрономические явления. Однако расширение физического опыта и развитие таких областей физики, как оптика и электромагнетизм, привело к открытию законов, математическое выражение которых не удовлетворяло требованию неизменности их вида при преобразованиях Галилея. Речь идет об уравнениях максвелловской теории, описывающей как поведение электромагнитного поля, так и движущихся в нем заряженных частиц. Вместе с тем данные опыта указывали на то, что: 1) принцип относительности не ограничивается только механическими явлениями, но охватывает также электромагнитные явления (включая оптику); 2) скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с не зависит от скорости источника света, являясь верхней границей скорости движения тел и распространения излучений. Последнее обстоятельство явно противоречит галилеевскому закону сложения скоростей (1.10). Таким образом, настоятельно требовалась модификация физического описания, которая согласовывалась бы с этими фактами. Эта программа была реализована в начале прошлого века в виде специальной теории относительности (СТО). Ее основоположником является немецкий физик А. Эйнштейн. Прямыми предшественниками его следует считать французского математика и физика А. Пуанкаре и голландского физика Г. Лоренца.

Вопросы и задачи

1. Какие допущения используются при выводе преобразований Галилея?

2. Найти закон преобразования ускорения при переходе из одной системы отсчёта в другую в случае их поступательного относительного движения. Показать, что во всех инерциальных системах отсчёта ускорение материальной точки одинаковое.

Ответ: $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$, где $\vec{A} = d\vec{V}/dt$.

3. Показать, что при преобразованиях Галилея вид кинематических законов равномерного прямолинейного движения тела и его движения с постоянным ускорением не изменяется.

ЛЕКЦИЯ 2

Постулаты специальной теории относительности

Преобразования Лоренца

Понятие события и синхронизация часов

Исходным понятием специальной теории относительности (СТО) является понятие событие. Под событием в СТО понимают физическое явление, происходящее в столь малой области пространства и в столь короткий промежуток времени, что, идеализируя ситуацию, его можно считать происходящим в одной точке и мгновенно. Итак, событие – это физическое явление, происходящее в точке с координатами (x, y, z) данной системы отсчёта в момент времени t по неподвижным в ней часам, находящимся вблизи этой точки (в предельной идеализации – находящимся в той же точке). Таким образом, событие в данной системе отсчета определяется четверкой чисел (x, y, z, t).

Задача описания во времени некоторой совокупности событий (процесса) окажется осуществимой, если создать в пространстве относительно тела отсчёта равноотстоящие координатные метки и совместить с каждой меткой часы, по которым отсчитывается момент времени, когда происходит событие вблизи данной метки. Координатные метки можно нанести перекладыванием масштабной линейки. В качестве часов можно взять любое устройство, совершающее повторяющийся процесс. Кроме того, чтобы связать друг с другом во времени ряды событий, происходящих в различных точках пространства, часы, находящиеся в этих точках, должны быть одинаково поставлены, или, говоря иначе, синхронизированы. Чтобы исключить возможное влияние на ход часов их перенос из одной точки пространства в другую, лучше сначала расставить часы по своим местам и лишь затем произвести их синхронизацию. Практически проще всего это осуществить с помощью электромагнитных (световых) сигналов.

Пусть из некоторой точки A в момент времени t_A по часам в этой точке (часы A) посылается световой сигнал в направлении точки B, находящейся от неё на расстоянии r. Тогда часы в точке B (часы B) по определению синхронны с часами A, если в момент дохождения до них сигнала часы B показывают

$$t_B = t_A + \frac{r}{c}, \tag{2.1}$$

где c – скорость распространения сигнала. Постановку часов в разных точках пространства в соответствии с формулой (2.1) называют процедурой синхронизации. Именно показания синхронных часов, фиксируемые вместе с происходящими в точках их расположения событиями, определяют моменты времени этих событий и промежутки времени между ними в данной системе отсчёта, или, короче, время в данной системе отсчёта.

Сказанное позволяет представить систему отсчёта в виде жёсткой координатной сетки, во всех узловых точках которой находятся синхронно идущие часы. С точки зрения такой модели системы отсчёта движение относительно неё материальной точки (частицы) может быть описано следующим образом. Пусть частица проходит последовательно мимо неподвижных часов с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и т. д., причём часы с координатами (x_i, y_i, z_i) показывают при прохождении мимо них частицы время t_i. Тогда координаты $x(t), y(t), z(t)$ частицы в данной системе отсчёта будут такими функциями времени t этой системы, которые при $t = t_i$ принимают значения (x_i, y_i, z_i).

Однако с точки зрения наглядности и практической осуществимости, более предпочтительной является модель радиолокационной станции, позволяющая определять из одного места и положение движущейся частицы, и момент времени (по часам станции), к которому это положение относится. Как это осуществляется практически?

Пусть из точки A станции в момент времени t_A по её часам излучается радиолокационный сигнал в направлении движущейся частицы. Если расстояние от точки A до частицы в момент отражения от неё сигнала в точке B равно r, то отражение произойдёт в момент t_B, определяемый формулой (2.1). Если отраженный сигнал возвращается в точку A в момент t'_A, то опять же в соответствии с (2.1) можно записать

$$t'_A = t_B + \frac{r}{c}. \tag{2.2}$$

Здесь предполагается, что величина скорости радиолокационного сигнала не зависит от скорости движения источника (отражение сигнала от движущейся частицы – это переизлучение принадлежащих ей молекул, возбуждённых посланным сигналом) и направления его распространения. Вычитая теперь из (2.1) выражение (2.2), получаем формулу для косвенного измерения момента t_B по двум прямым измерениям по часам станции:

$$t_B = \frac{t'_A + t_A}{2}. \tag{2.3}$$

Положение частицы в этот момент времени определяется с помощью угломерных средств наведения антенны радиолокационной станции и следующей из (2.1) и (2.2) формулы $r = (t'_A - t_A)c/2$. Ясно, что в соответствии с принятой процедурой синхронизации часов обе модели дадут одни и те же значения координат и времени.

Постулаты СТО

При построении специальной теории относительности предполагается справедливым первый закон Ньютона, постулирующий существование инерциальной системы отсчёта, т.е. системы отсчёта, относительно которой тело, не подверженное действию других тел, сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения (закон инерции). По существу это – один из её исходных постулатов. Однако в качестве постулатов СТО обычно явно формулируют только два. Будем придерживаться в наших лекциях следующих формулировок:

1. Уравнения, выражающие физические законы, во всех инерциальных системах отсчёта имеют одинаковый вид.

2. В любой инерциальной системе отсчёта скорости движения тел и распространения излучений ограничены условием

$$\upsilon \le c, \tag{2.4}$$

где c – скорость света в вакууме, причём из равенства $\upsilon = c$ в одной системе отсчёта следует равенство $\upsilon' = c$ в любой другой.

Из первого постулата вытекает, что преобразования координат и времени, описывающие переход из одной инерциальной системы отсчёта в другую, а также соответствующие им преобразования других величин, на языке которых сформулированы уравнения, выражающие физические законы, должны оставлять вид этих уравнений неизменным. Уравнения, обладающие таким свойством, называют ковариантными (от лат. *co* – совместно и *vario* – изменяюсь).

Утверждение первого постулата является математическим выражением принципа относительности Эйнштейна-Пуанкаре, согласно которому во всех инерциальных системах отсчёта при одинаковых начальных условиях любые (а не только механические!) физические процессы протекают совершенно одинаково. Другими словами, равномерное и прямолинейное движение материальной системы как целого относительно инерциальной системы отсчёта не влияет на ход любых физических процессов, происходящих внутри системы.

Первая часть второго постулата утверждает, что существует предельная скорость движения тел и распространения излучений, численно равная в любой инерциальной системе отсчёта скорости света в вакууме. Вторая же часть обобщает тот факт, что модуль скорости света в вакууме не зависит ни от направления его распространения, ни от скорости источника света и, следовательно, не изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую.

Величину, остающуюся неизменной при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую, называют инвариантной или просто инвариантом (от фр. *invariant* – неизменный). Соответствующее свойство величины называют инвариантностью.

В связи с этим второй постулат при изложении теории относительности чаще всего формулируют в виде принципа постоянства (в смысле инвариантности) скорости света в вакууме. Данная здесь формулировка, утверждающая существование инвариантной предельной скорости движения тел и распространения излучений, численно равной скорости света в вакууме, придаёт скорости света универсальное значение, отражающее некоторое объективное свойство пространства и времени, которое нужно учитывать при описании любых, а не только оптических (электромагнитных) явлений.

Возводя соотношение (2.4) в квадрат и учитывая, что

$$\upsilon^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

его можно представить в виде

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2 \le 0, \qquad (2.5)$$

где знаку равенства соответствует движение с предельной скоростью. Тогда требование неизменности соотношения (2.5) при преобразованиях координат и времени, описывающих переход из одной инерциальной системы отсчёта в другую, будем рассматривать как основание для вывода формул этих преобразований.

Физическая теория, согласующаяся с постулатами СТО, называется релятивистской (от лат. *relativus* – относительный).

Преобразования Лоренца

Первоочередной задачей СТО является установление вида преобразований координат и времени события при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую с учётом факта существования предельной скорости и её инвариантности. Рассмотрим здесь вывод этих преобразований.

Пусть (x,y,z,t) – координаты и время некоторого события в инерциальной системе отсчета K, а (x',y',z',t') – координаты и время <u>того же</u> события в системе отсчета K', движущейся относительно K-системы поступательно с постоянной скоростью $\vec{V}$. При этом предполагается, что в каждой инерциальной системе отсчёта координатные сетки и часы проградуированы одинаковым образом с помощью одинаковых масштабных линеек и эталонных часов, а также произведена процедура синхронизации часов.

Необходимо найти такие преобразования $(x,y,z,t)\to(x',y',z',t')$, при которых: 1) сохраняется соотношение (2.5); 2) не нарушается закон инерции.

Второе требование означает, что если частица движется в K-системе с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$, то и в K'-системе она также должна двигаться с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}'$. Следовательно, из кинематического закона равномерного прямолинейного движения $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{\upsilon}(t-t_0)$ в K-системе при искомых преобразованиях должен следовать закон $\vec{r}'=\vec{r}_0'+\vec{\upsilon}'(t'-t_0')$ в K'-системе. Поскольку кинематический закон прямолинейного равномерного движения представляет собой <u>линейную</u> зависимость координат от времени, то второе требование будет удовлетворено, если преобразования $(x,y,z,t)\to(x',y',z',t')$ будут также <u>линейными</u>, т.е. каждая из переменных x',y',z',t' будет линейной функцией переменных x,y,z,t с коэффициентами, зависящими от компонент вектора скорости $\vec{V}$ (скорости K'-системы относительно K-системы). Примером таких линейных преобразований являются преобразования Галилея (1.17), рассмотренные в первой лекции.

Ясно, что преобразования $(x,y,z,t)\to(x',y',z',t')$ будут оставлять неизменным соотношение (2.5) при выполнении условия

$$(dx')^2+(dy')^2+(dz')^2-c^2(dt')^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2-c^2(dt)^2, \qquad (2.6)$$

означающего, что искомые преобразования должны оставлять инвариантной квадратичную форму

$$ds^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2-c^2(dt)^2. \qquad (2.7)$$

Попытаемся найти хотя бы частный вид линейных преобразований, оставляющих форму (2.7) инвариантной. Для этого рассмотрим простейший случай движения K'-системы относительно K-системы, показанный на рис. 2.

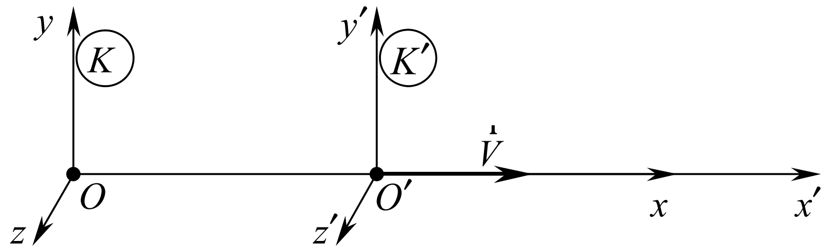

Рис. 2

Преобразования Галилея (1.16), соответствующие этому случаю, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Естественно предположить, что в рассматриваемом случае преобразования, сохраняющие инвариантной квадратичную форму (2.7), также не затрагивают координаты y и z, т.е.

$$y' = y, \qquad (2.9)$$

$$z' = z. \qquad (2.10)$$

Полагая, что показания часов, расположенных в началах координат O и O'

соответствующих систем отсчёта, в момент совпадения точек O и O' одинаковы и равны нулю, преобразования x и t с учётом предполагаемой линейности этих преобразований запишутся так:

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 t, \tag{2.11}$$

$$t' = \alpha_2 x + \beta_2 t. \tag{2.12}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ нужно подобрать так, чтобы удовлетворялось равенство (2.6). Поскольку преобразования (2.9) – (2.12) линейные, то точно так же преобразуются и дифференциалы рассматриваемых переменных, т.е.

$$dx' = \alpha_1 dx + \beta_1 dt, \tag{2.13}$$

$$dy' = dy, \tag{2.14}$$

$$dz' = dz, \tag{2.15}$$

$$dt' = \alpha_2 dx + \beta_2 dt. \tag{2.16}$$

Подставляя (2.13) – (2.16) в (2.6), получаем

$$\left(\alpha_1^2 - c^2\alpha_2^2\right)(dx)^2 + 2\left(\alpha_1\beta_1 - c^2\alpha_2\beta_2\right)dxdt + \left(\beta_1^2 - c^2\beta_2^2\right)(dt)^2 =$$
$$= (dx)^2 - c^2(dt)^2. \tag{2.17}$$

Сравнивая левую и правую части равенства (2.17), находим систему трёх уравнений для четырёх коэффициентов преобразования:

$$\alpha_1^2 - c^2\alpha_2^2 = 1, \tag{2.18}$$

$$\alpha_1\beta_1 - c^2\alpha_2\beta_2 = 0, \tag{2.19}$$

$$\beta_1^2 - c^2\beta_2^2 = -c^2. \tag{2.20}$$

Для нахождения четвёртого уравнения поступим следующим образом. Рассмотрим какую-либо неподвижную в K'-системе точку (например начало координат O'). Тогда $dx' = 0$ и из (2.13) следует, что

$$\alpha_1 \frac{dx}{dt} + \beta_1 = 0.$$

Но $dx/dt = V$ – скорость K'-системы относительно K-системы. Поэтому

$$\alpha_1 V + \beta_1 = 0. \tag{2.21}$$

Это и есть четвёртое уравнение, которое нужно добавить к системе уравнений (2.18) – (2.21). Решая теперь систему четырёх уравнений, легко показать, что

$$\alpha_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \beta_1 = \mp\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \alpha_2 = \mp\frac{V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \beta_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Знаки коэффициентов нужно выбрать так, чтобы при условии $V =\ c$ (или при $c \to \infty$)[*] искомые преобразования переходили в преобразования Галилея (2.8). Руководствуясь этим критерием, выберем для искомых коэффициентов верхние знаки, т.е.

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \beta_1 = -\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \alpha_2 = -\frac{V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (2.22)$$

Тогда преобразования (2.9)–(2.12) запишутся так

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (2.23)$$

$$y' = y, \qquad (2.24)$$

$$z' = z, \qquad (2.25)$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (2.26)$$

Легко видеть, что при $c \to \infty$ преобразования (2.23) – (2.26) переходят в преобразования Галилея (2.8).

---

[*] Здесь уместно отметить, что предельный переход $c \to \infty$, при котором уравнения СТО переходят в ньютоновские, некоторые авторы считают формальным, приписывая содержательный смысл неравенству $V \ll c$. Однако если исходить из постулата существования верхней границы скорости, равной c (а не постулата постоянства скорости света в различных инерциальных системах отсчёта), то предельный переход $c \to \infty$ означает не что иное, как снятие этого ограничения.

Поскольку предполагается, что в каждой инерциальной системе отсчёта координатные сетки проградуированы одинаковым образом с помощью одинаковых эталонов длины, а в рассматриваемом нами случае координатные оси параллельны, то их координатные орты одинаковы, т.е. $\vec{e}_x = \vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_y = \vec{e}_{y'}$, $\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$. Тогда, умножая каждое из трёх первых уравнений (2.23) – (2.26) на соответствующий орт и складывая их друг с другом, получаем

$$\vec{r}\,' = \frac{x\vec{e}_x - V\vec{e}_x t}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z . \tag{2.27}$$

Но в рассматриваемом случае

$$V\vec{e}_x = \vec{V} , \tag{2.28}$$

вектор же

$$\vec{r}_{\parallel} = x\vec{e}_x \tag{2.29}$$

параллелен вектору $\vec{V}$, а вектор

$$\vec{r}_{\perp} = y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{2.30}$$

перпендикулярен вектору $\vec{V}$.

С учётом равенств (2.27) – (2.30), а также того, что в рассматриваемом случае $xV = \left(\vec{r},\vec{V}\right)$, где $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ означает скалярное произведение векторов $\vec{r}$ и $\vec{V}$, формулы (2.27) и (2.26) перепишутся в виде

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_{\perp} + \frac{\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} , \tag{2.31}$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{\left(\vec{r},\vec{V}\right)}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} . \tag{2.32}$$

Можно показать, что преобразования (2.31) и (2.32) оказываются справедливыми не только в рассмотренном случае, когда K'-система движется относительно K-системы поступательно вдоль её оси OX, но и в более общем случае, а именно: когда оси координат K- и K'-систем по-прежнему параллельны, но вектор скорости $\vec{V}$ направлен произвольным образом. При этом формулы (2.29) и (2.30) обобщаются следующим образом:

$$\vec{r}_{\parallel} = \left(\vec{e}_V, \vec{r}\right)\vec{e}_V, \tag{2.33}$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \left[\vec{e}_V, \left[\vec{r}, \vec{e}_V\right]\right],$$

(2.34)

где $\vec{e}_V = \vec{V}/V$, а квадратные скобки означают векторное произведение векторов.

Учитывая, что $\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$, а $\vec{V}t = \vec{R}$ – радиус-вектор точки O' в K-системе, преобразование (2.31) можно представить в виде

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\left(\vec{r}_{\parallel} - \vec{R}\right). \tag{2.35}$$

Равенство (2.35) показывает, что правило треугольника $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$, принимаемое как очевидное в ньютоновской механике, справедливо лишь в случаях $\left(V^2/c^2\right) =$ 1 или $c \to \infty$ (т.е. при снятии верхней границы скорости). Отклонение от него тем значительней, чем ближе скорость относительного движения систем отсчёта K и K' к предельной скорости.

Преобразования (2.31) и (2.32) называют преобразованиями Лоренца. Легко видеть, что эти преобразования переходят в преобразования Галилея (2.14) и (2.15), если $\left(V^2/c^2\right) =$ 1 или $c \to \infty$. Преобразования Лоренца играют ключевую роль во всей релятивистской физике.

В заключение отметим, что преобразования (2.31) и (2.32) описывают переход из системы отсчёта K в систему отсчёта K'. Обратные преобразования, как легко понять, получаются из (2.31) и (2.32) переменой местами штрихов и заменой $\vec{V}$ на $-\vec{V}$, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}'_{\perp} + \frac{\vec{r}'_{\parallel} + \vec{V}t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{2.36}$$

$$t = \frac{t' + \frac{\left(\vec{r}', \vec{V}\right)}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{2.37}$$

Вопросы и задачи

1. Что понимается в СТО под событием?

2. Что такое синхронизация часов и как она осуществляется?

3. Какие допущения принимаются при выводе преобразований Лоренца?

4. Показать, что коэффициенты (2.22) удовлетворяют системе уравнений (2.18) – (2.21).

5. Показать, используя правило раскрытия двойного векторного произведения, справедливость равенства (2.34).

6. Доказать, что для любых $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ справедливы равенства $\vec{r}_{2\perp} - \vec{r}_{1\perp} = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_{\perp}$ и $\vec{r}_{2\parallel} - \vec{r}_{1\parallel} = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_{\parallel}$.

7. Какие величины в СТО называют инвариантными?

8. Показать, что преобразования (2.36), (2.37) оставляют инвариантной квадратичную форму $\Delta s^2 = \left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2 - c^2\left(\Delta t\right)^2 = \left(\Delta\vec{r}, \Delta\vec{r}\right) - c^2\left(\Delta t\right)^2$.

9. Проверить непосредственной подстановкой, что преобразования (2.36) и (2.37) являются обратными преобразованиям (2.31) и (2.32).

ЛЕКЦИЯ 3

Следствия из преобразований Лоренца

Релятивистский закон преобразования скорости

Найдем закон преобразования скорости частицы при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Для этого продифференцируем соотношение (2.31) по времени t' как сложную функцию

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_\perp+\frac{\vec{r}_\parallel-\vec{V}t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\frac{dt}{dt'}=\left(\frac{d\vec{r}_\perp}{dt}+\frac{\frac{d\vec{r}_\parallel}{dt}-\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\frac{dt}{dt'}. \tag{3.1}$$

Но $d\vec{r}'/dt'=\vec{\upsilon}'$, $d\vec{r}_\perp/dt=\vec{\upsilon}_\perp$, $d\vec{r}_\parallel/dt=\vec{\upsilon}_\parallel$, где $\vec{\upsilon}_\perp$ и $\vec{\upsilon}_\parallel$ – соответственно перпендикулярная и параллельная составляющие скорости частицы в K-системе по отношению к вектору $\vec{V}$. Поэтому

$$\vec{\upsilon}'=\left(\vec{\upsilon}_\perp+\frac{\vec{\upsilon}_\parallel-\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\frac{dt}{dt'}. \tag{3.2}$$

В ньютоновской физике $dt/dt'=1$(см. лекцию 1). В релятивистской физике это не так. Из (2.32) находим

$$\frac{dt}{dt'}=\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2}}. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), окончательно получаем

$$\vec{\upsilon}'=\left(\vec{\upsilon}_\perp+\frac{\vec{\upsilon}_\parallel-\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2}}. \tag{3.4}$$

Закон преобразования (3.4) значительно отличается от галилеевского закона сложения скоростей $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{V}$, но, как легко видеть, переходит в него в случае малых скоростей, т.е. при $\upsilon << c$ и $V << c$, или при снятии верхней границы скорости, т.е. при $c \to \infty$.

Далее, используя (3.4) (или равенства (2.6) и (3.3)), нетрудно показать, что

$$1-\left(\frac{\upsilon'}{c}\right)^2 = \frac{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2}\right)^2}. \tag{3.5}$$

Поскольку $V < c$, то из формулы (3.5) следует, что если в некоторой системе отсчета $\upsilon \le c$, то в любой другой системе отсчета $\upsilon' \le c$, что полностью соответствует утверждению второго постулата.

Рассмотрим теперь ряд необычных с точки зрения ньютоновской механики следствий из преобразований Лоренца, связанных с процедурами пространственных и временных измерений в различных инерциальных системах отсчёта. Для этого воспользуемся формулами, следующими из преобразований Лоренца (2.31) и (2.32):

$$\vec{r}_2' - \vec{r}_1' = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_\perp + \frac{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_\parallel - \vec{V}\left(t_2 - t_1\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{3.6}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}\right)/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{3.7}$$

При их выводе учтены вытекающие из (2.33) и (2.34) равенства $\vec{r}_{2\parallel} - \vec{r}_{1\parallel} = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_\parallel$ и $\vec{r}_{2\perp} - \vec{r}_{1\perp} = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_\perp$. Обратные им формулы запишутся так:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(\vec{r}_2' - \vec{r}_1'\right)_\perp + \frac{\left(\vec{r}_2' - \vec{r}_1'\right)_\parallel + \vec{V}\left(t_2' - t_1'\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{3.8}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \left(\vec{r}_2' - \vec{r}_1', \vec{V}\right)/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{3.9}$$

Одновременность событий

Синхронизация часов позволяет дать следующее определение одновременности событий, происходящих в данной системе отсчёта в различных точках пространства.

Определение. События в точках A и B называются одновременными в данной системе отсчета, если они происходят в один и тот же момент времени по синхронным часам в точках A и B.

Пусть в системе K в точках с радиус-векторами $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_1$ одновременно происходят два события, т.е. $t_2 - t_1 = 0$. В системе отсчёта K' эти события происходят в точках с радиус-векторами $\vec{r}_2'$ и $\vec{r}_1'$ в моменты времени t_2' и t_1'. Тогда из (3.7) для разности $t_2' - t_1'$ получаем

$$t_2' - t_1' = -\frac{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}\right)}{c^2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{3.10}$$

Если в K-системе события происходят одновременно в разных точках плоскости, перпендикулярной скорости $\vec{V}$, то $\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}\right) = 0$. Тогда из (3.10) вытекает, что $t_2' - t_1' = 0$, т.е. в этом случае события будут также одновременны и в системе отсчёта K'. В любом другом случае $t_2' - t_1' \neq 0$ и, следовательно, разноместные события, одновременные в K-системе, будут, вообще говоря, неодновременными в K'-системе. Таким образом, понятие одновременности событий с учётом существования предельной скорости протекания физических процессов теряет приписываемый ему ньютоновской физикой абсолютный (т.е. не зависящий от выбора системы отсчёта) смысл.

Если же ограничение $\upsilon \le c$ снять, полагая $c \to \infty$, то из (3.10) следует, что $t_2' - t_1' \to 0$ во всех системах отсчёта, т.е. восстанавливается абсолютный смысл одновременности.

Последовательность событий во времени и причинность

Из формулы (3.10) видно, что знак разности $t_2' - t_1'$ в системе отсчёта K' зависит от направления её движения относительно K-системы. Это означает, что последовательность одних и тех же событий в различных системах отсчёта может быть различной. Возникает вопрос: не может ли в одной системе отсчёта причина предшествовать следствию, а в другой – наоборот? Конечно, в теории, признающей объективность причинно-следственных связей, такая ситуация не может иметь места. Покажем, что причина и следствие могли бы поменяться местами, если бы скорость передачи материального воздействия $\vec{\upsilon}_{вз}$, осуществляющего причинную связь разноместных событий, превосходила по модулю предельную, что противоречит первому постулату СТО.

Пусть событие, произошедшее в момент времени t_1 в точке $\vec{r}_1$ K-системы, будет причиной события в точке $\vec{r}_2$, произошедшего в ней в момент $t_2 > t_1$. По синхронным часам K'-системы эти события происходят в моменты t_1' и t_2'. Тогда для разности $t_2' - t_1'$ согласно (3.7) имеем

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}\right)/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{3.11}$$

Если воздействие передаётся вдоль прямой, проходящей через точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{\upsilon}_{вз}\left(t_2 - t_1\right),$$

и формула (3.11) перепишется в виде

$$t_2' - t_1' = \frac{\left(t_2 - t_1\right)\left(1 - \frac{\left(\vec{\upsilon}_{вз}, \vec{V}\right)}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что поскольку $t_2 - t_1 > 0$, то причина и следствие могут поменяться местами в K'-системе (т.е. разность $t_2' - t_1'$ станет отрицательной), если

$$1 - \frac{\left(\vec{\upsilon}_{вз}, \vec{V}\right)}{c^2} < 0.$$

Но поскольку $V < c$, то это возможно лишь при условии $\upsilon_{вз} > c$, что противоречит первому постулату СТО. Таким образом, причинная связь событий является абсолютной, т.е. не существует системы отсчёта, в которой причина и следствие меняются местами.

Измерение пространственных промежутков[*)]

Если в некоторой инерциальной системе отсчёта две материальные точки (частицы) покоятся, то в любой другой они будут двигаться с одинаковыми скоростями (равными скорости системы с обратным знаком). Как определить меру пространственного промежутка между частицами в любом из этих механических состояний и, следовательно, имеющую смысл в любой инерциальной системе отсчёта? Естественно дать такое определение этой величины, чтобы в случае покоящихся частиц она совпадала с расстоянием между точками в обычном геометрическом смысле. Сделаем это следующим образом.

Пусть $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы частиц, определяющие их одновременные положения в рассматриваемой системе отсчёта по синхронным часам этой

[*)] Пространственным промежутком между двумя точками называют множество точек, принадлежащих отрезку прямой, соединяющему эти точки.

системы. Назовём расстоянием между частицами в данной системе отсчёта величину, определяемую формулой

$$l = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|_{t_2=t_1} = \sqrt{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}\Big|_{t_2=t_1}, \tag{3.13}$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Поскольку для неподвижных частиц не имеет никакого значения, как зафиксированы их положения – одновременно или нет, то l совпадает с расстоянием между ними в обычном геометрическом смысле.

Для движущихся частиц определённое таким образом расстояние между частицами уже не является чисто геометрическим понятием, так как его измерение предполагает обязательное использование помимо масштабной линейки также и часов, с помощью которых фиксируются одновременные положения частиц. В ньютоновской физике, в которой одновременность событий имеет абсолютный смысл, результат измерения в любой системе отсчёта будет одинаковым. Действительно, используя преобразования Галилея (1.14) и (1.15), получаем

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|_{t_2=t_1} = \left|\vec{r}_2' - \vec{V}t_2' - \vec{r}_1' + \vec{V}t_1'\right|_{t_2'=t_1'} = \left|\vec{r}_2' - \vec{r}_1'\right|_{t_2'=t_1'}.$$

Как установлено выше, в СТО одновременность разноместных событий не имеет абсолютного смысла, поэтому результат измерения расстояния между частицами будет зависеть от выбора системы отсчёта, т.е. определённое формулой (3.13) расстояние между частицами является величиной относительной. Рассмотрим это обстоятельство подробнее.

Пусть в системах отсчёта K и K' ведутся наблюдения за частицами m_1 и m_2, скорости которых одинаковы и в K-системе равны $\vec{\upsilon}$. Тогда в K'-системе каждая из них будет иметь скорость $\vec{\upsilon}'$, связанную с $\vec{\upsilon}$ формулой (3.4).

Допустим, что наблюдатель в K-системе зафиксировал одновременное появление частиц m_1 и m_2 в точках с радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в момент $t_1 = t_2$. Тогда наблюдатель в K'-системе зафиксирует эти события в точках $\vec{r}_1'$ и $\vec{r}_2'$ в моменты t_1' и t_2', связные с $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, t_1 и t_2 преобразованиями Лоренца (2.31) и (2.32). Но эти события не будут, вообще говоря, одновременными (см. ***Одновременность событий)***. Согласно (3.10) имеем

$$t_2' - t_1' = -\frac{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}\right)/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{3.14}$$

и, следовательно, если $\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}\right) \neq 0$, то $t_1' \neq t_2'$. Таким образом, $\left|\vec{r}_2' - \vec{r}_1'\right|$ равен определённому формулой (3.13) расстоянию между частицами в K'-системе только в случае, когда вектор $\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ перпендикулярен вектору $\vec{V}$. Тогда $\left(\vec{l}, \vec{V}\right) = 0$ и согласно (3.14) $t_1' = t_2'$. В любом другом случае наблюдаемые в моменты t_1' и t_2' положения частиц $\vec{r}_1'$ и $\vec{r}_2'$ не будут одновременными и для косвенного измерения по этим данным расстояния между частицами в K'-системе нужно сделать пересчёт к одновременным событиям. Делается это так.

Допустим, что $t_2' > t_1'$. Тогда за промежуток времени $t_2' - t_1'$ частица m_2 переместится на вектор $\vec{\upsilon}'\left(t_2' - t_1'\right)$, и вектор, соединяющий <u>одновременные</u> положения частиц m_1 и m_2 в момент t_1', будет иметь вид $\vec{l}' = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' - \vec{\upsilon}'\left(t_2' - t_1'\right)$. Следовательно, расстояние между ними в K'-системе равно модулю этого вектора:

$$l' = \left|\vec{r}_2' - \vec{r}_1' - \vec{\upsilon}'\left(t_2' - t_1'\right)\right|. \tag{3.15}$$

Из (3.6) при $t_1 = t_2$ следует, что

$$\vec{r}_2' - \vec{r}_1' = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_\perp + \frac{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)_\parallel}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \vec{l}_\perp + \frac{\vec{l}_\parallel}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{3.16}$$

Подставляя (3.14) и (3.16) в (3.15), получаем

$$l' = \left| \vec{l}_\perp + \frac{\vec{l}_\parallel}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \vec{\upsilon}' \frac{\left(\vec{l},\vec{V}\right)}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \right|. \tag{3.17}$$

Напомним, что в этой формуле $\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, а $\vec{\upsilon}'$ выражается через $\vec{\upsilon}$ и $\vec{V}$ формулой (3.4).

Если $\vec{l} \perp \vec{V}$, то $\left(\vec{l},\vec{V}\right) = 0$, $\vec{l}_\parallel = \vec{0}$, $\vec{l}_\perp = \vec{l}$ (см. (2.33) и (2.34)), и из (3.17) следует, что $l' = \left|\vec{l}\right| = l$, т.е. расстояние между частицами m_1 и m_2 в обеих системах отсчёта одно и то же. Обусловлено это тем, что в данном случае у наблюдателей в системах отсчёта K и K' <u>нет</u>, как установлено выше, разногласий по поводу одновременности наблюдаемых событий. В любом другом случае $l' \neq l$, и это тесно связано с относительностью одновременности.

Если в качестве K' взять систему отсчёта, в которой частицы покоятся (система покоя частиц), то формула (3.17) сильно упростится. Действительно, поскольку в этом случае $\vec{\upsilon}' = \vec{0}$, то третье слагаемое в (3.17) исчезает. Обозначая расстояние между частицами в их системе покоя через l_0 и учитывая, что в этом случае $\vec{V} = \vec{\upsilon}$, из (3.17) получаем

$$l_0 = \left| \vec{l}_\perp + \frac{\vec{l}_\parallel}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right|. \tag{3.18}$$

Вводя угол α $\left(0 \le \alpha \le \pi\right)$ между векторами $\vec{l}$ и $\vec{\upsilon}$, из (3.18) с помощью теоремы Пифагора находим

$$l_0^{\,2} = l^2 \sin^2\alpha + \frac{l^2\cos^2\alpha}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{l^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\sin^2\alpha\right)}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \tag{3.19}$$

откуда

$$l = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\sin^2\alpha}}. \qquad (3.20)$$

Из формулы (3.20) вытекает, что расстояние между движущимися в K-системе частицами m_1 и m_2, имеющими одинаковые скорости, равные $\vec{\upsilon}$, зависит как от величины скорости, так и угла α $\left(0 \le \alpha \le \pi\right)$ между прямолинейным отрезком, соединяющим эти частицы, и вектором $\vec{\upsilon}$, причём

$$l \le l_0. \qquad (3.21)$$

В частности, если $\alpha = 0$ (или π), т.е. отрезок, соединяющий m_1 и m_2, параллелен вектору $\vec{\upsilon}$, то

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \qquad (3.22)$$

а если $\alpha = \pi/2$, т.е. отрезок, соединяющий m_1 и m_2, перпендикулярен вектору $\vec{\upsilon}$, то

$$l = l_0. \qquad (3.23)$$

Конечно, в случаях $\upsilon^2/c^2 << 1$, характерных для повседневного опыта, отличие l от l_0, как это следует из (3.20), становится пренебрежимо малым и лежит за пределами чувствительности средств измерения.

Измерение промежутков времени

Промежутком времени между двумя событиями в данной системе отсчёта называют разность $\Delta t = t_2 - t_1$ показаний синхронных часов в точках с радиус-векторами $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_1$, фиксирующих моменты наблюдения событий, происходящих в этих точках.

Из соотношения (3.7) тогда следует, что промежутки времени между одними и теми же событиями, измеренные наблюдателями в системах отсчёта K

и K', не равны друг другу, т.е. являются относительными величинами.

Пусть в системах отсчёта K и K' наблюдаются два последовательных столкновения частицы m с другими частицами. Допустим, что наблюдатель в K-системе зафиксировал первое столкновение частицы m в точке с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в момент t_1 (событие 1), а второе – в точке с радиус-вектором $\vec{r}_2$ в момент t_2 (событие 2). Тогда наблюдатель в K'-системе зафиксирует эти события в точках $\vec{r}_1^{\,\prime}$ и $\vec{r}_2^{\,\prime}$ в моменты t_1' и t_2', связные с $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, t_1 и t_2 преобразованиями Лоренца (2.37) и (2.38).

Если предположить, что скорость частицы изменяется только при столкновениях, то промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ между рассматриваемыми событиями в K-системе связан с вектором перемещения частицы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ простой формулой

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{\upsilon}\Delta t\,, \tag{3.24}$$

где $\vec{\upsilon}-$скорость частицы m в K-системе после первого столкновения.

Тогда из (3.7) с учётом (3.24) для промежутка времени между этими событиями в K'-системе получаем

$$\Delta t' = \frac{1-\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\Delta t\,. \tag{3.25}$$

Из (3.25) следует, что $\Delta t' \neq \Delta t$, но знак неравенства между $\Delta t'$ и Δt зависит от значения скалярного произведения $\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)$.

В частности, если K'-система движется перпендикулярно скорости частицы, т.е. $\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)=0$, то

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} > \Delta t\,. \tag{3.26}$$

Если же $\vec{V} = \vec{\upsilon}$, т.е. K'-система является системой покоя частицы, то $(\vec{\upsilon}, \vec{V}) = V^2$ и

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < \Delta t\,. \tag{3.27}$$

Это необычное с точки зрения ньютоновской механики обстоятельство обусловлено, во-первых, фактом существования предельной скорости (из (3.25) видно, что в любом случае при $c \to \infty$ $\Delta t' \to \Delta t$), а во-вторых, – использованием наблюдателем в каждой системе отсчёта сигналов, распространяющихся с предельной скоростью, как инструментального средства синхронизации часов, являющейся необходимым элементом принятой в СТО процедуры измерения промежутков времени. Синхронность же часов, также как и одновременность событий, не имеет абсолютного смысла: показания разноместных часов, синхронизированных в одной системе отсчёта, не будут, вообще говоря, одинаковыми в данный момент времени по часам любой другой.

Трудность понимания рассмотренных в этой лекции следствий из преобразований Лоренца связана исключительно с нашей привычкой, основанной на повседневном опыте, считать расстояние между точками и промежутки времени между событиями абсолютными понятиями. Однако более строгий подход к описанию физической реальности, даваемый СТО, показывает, что это не так.

Вопросы и задачи

1. Показать, используя (2.6) и (3.3), что выполняется равенство (3.5).

2. Найти модули относительной скорости двух релятивистских частиц, движущихся со скоростями υ_1 и υ_2, если: 1) частицы движутся навстречу друг другу; 2) частицы движутся под прямым углом друг к другу.

Ответ: $\upsilon = (\upsilon_1 + \upsilon_2) \big/ \left(1 + \upsilon_1\upsilon_2/c^2\right)$; $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - (\upsilon_1\upsilon_2/c)^2}$.

3. В системе отсчёта K имеется прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза образует угол α_0 с одним из своих катетов. Будет ли мгновенный

образ этого треугольника в K'-системе, движущейся вдоль этого катета со скоростью $\vec{V}$, также иметь вид прямоугольного треугольника? Если да, то какой угол α образует его гипотенуза с катетом, параллельным вектору $\vec{V}$?

Ответ: $tg\alpha = tg\alpha_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

ЛЕКЦИЯ 4

Релятивистская динамика материальной точки

Согласно первому постулату СТО (см. лекцию 2), уравнения, выражающие физические законы, должны сохранять свой вид при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую, т.е. при преобразованиях Лоренца. Поэтому, чтобы записать уравнения релятивистской динамики, необходимо прежде всего найти величины, преобразующиеся при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую точно так же, как $\vec{r}$ и t, т.е. с помощью преобразований (2.31) и (2.32). Для этого запишем полученный в предыдущей лекции закон преобразования скорости

$$\vec{\upsilon}' = \left(\vec{\upsilon}_{\perp} + \frac{\vec{\upsilon}_{\parallel} - \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{\left(\vec{\upsilon}, \vec{V}\right)}{c^2}} \tag{4.1}$$

и следующее из него равенство (см. (3.4) и (3.5))

$$\sqrt{1 - \frac{\upsilon'^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{\left(\vec{\upsilon}, \vec{V}\right)}{c^2}} . \tag{4.2}$$

Разделив теперь обе части равенства (4.1) на (4.2), получаем

$$\frac{\vec{\upsilon}'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}} = \frac{\vec{\upsilon}_\perp}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{\frac{\vec{\upsilon}_\parallel}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \vec{V}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{4.3}$$

а затем, обращая (4.2), находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \vec{V}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4.4}$$

Введём теперь величины

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{4.5}$$

и

$$p_t = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{4.6}$$

где m – масса тела, измеряемая так же, как в ньютоновской механике в системе покоя тела путём сравнения с эталоном. Поскольку в соответствии с принципом относительности измерение массы в любой инерциальной системе отсчёта даст один и тот же результат, то, умножая равенства (4.3) и (4.4) почленно на m, перепишем их с учётом (4.5) и (4.6) в виде

$$\vec{p}' = \vec{p}_\perp + \frac{\vec{p}_\parallel - \vec{V}p_t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{4.7}$$

$$p_t' = \frac{p_t - \frac{1}{c^2}\left(\vec{p},\vec{V}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4.8}$$

Сопоставляя (4.7) и (4.8) с преобразованиями Лоренца (2.31) и (2.32), заключаем, что введённые величины $\vec{p}$ и p_t преобразуются при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую точно так же, как $\vec{r}$ и t.

Векторную величину (4.5) в СТО называют <u>импульсом материальной точки</u>. Легко видеть, что в случае малых скоростей, т.е. при $V^2/c^2 = 1$, вектор (4.5) совпадает с ньютоновским импульсом: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$.

В ньютоновской (нерелятивистской) механике закон изменения импульса материальной точки $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ в инерциальной системе отсчёта задаётся, как известно, уравнением (II закон Ньютона):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right). \tag{4.9}$$

Векторная функция $\vec{F}$, зависящая от положения материальной точки $\vec{r}$, её скорости $\vec{\upsilon}$ и возможно явно от времени t, называется силой, действующей на эту материальную точку со стороны других тел. Учитывая, что $d\vec{p}/dt = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение материальной точки, а ускорение и масса частицы одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта, уравнение (4.9) будет удовлетворять принципу относительности Галилея при условии, что при преобразованиях Галилея $\vec{F}'\left(\vec{r}',\vec{\upsilon}',t'\right) = \vec{F}\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$, т.е. при условии, что <u>сила является инвариантом этих преобразований</u>.

При описании движения замкнутой системы взаимодействующих частиц это условие обеспечивается тем экспериментальным фактом, что сила взаимодействия i-й и k-й частиц $\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{ik}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_k, \vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_k\right)$, т.е. зависит только их относительного положения $\vec{r}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$ и относительной скорости $\vec{\upsilon}_{ik} = \vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_k$, очевидно являющихся инвариантами преобразований Галилея. При описании движения частиц во внешнем силовом поле инвариантность сил поля является дополнительным условием, диктуемым принципом относительности Галилея.

Конечно, релятивистское обобщение уравнения (4.9) должно быть таким, чтобы при скоростях, малых по сравнению с предельной скоростью c, новое уравнение переходило в ньютоновское $m\vec{a} = \vec{F}$. Это требование будет очевидно выполнено, если предположить, что закон изменения релятивистского импульса (4.5), переходящего в ньютоновский при $\upsilon = c$, также задаётся в некоторой инерциальной системе отсчёта уравнением (4.9). Тогда в соответствии с принципом относительности Эйнштейна при переходе в любую другую инерциальную систему отсчёта оно должно перейти в уравнение

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}'\left(\vec{r}', \vec{\upsilon}', t'\right), \tag{4.10}$$

т.е. при преобразованиях Лоренца вид уравнения (4.9) должен оставаться неизменным. Однако теперь векторная функция $\vec{F}\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right)$ уже не является инвариантом преобразований Лоренца, поскольку таковым не является $d\vec{p}/dt$, т.е. $d\vec{p}'/dt' \neq d\vec{p}/dt$. Действительно, из (4.7) вытекает, что

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \left(\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} + \frac{\dfrac{d\vec{p}_\parallel}{dt} - \vec{V}\dfrac{dp_t}{dt}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \right) \frac{dt}{dt'}.$$

Но, как показано в лекции 3 (см. (3.3)),

$$\frac{dt}{dt'} = \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{\left(\vec{\upsilon}, \vec{V}\right)}{c^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \left(\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} + \frac{\dfrac{d\vec{p}_\parallel}{dt} - \vec{V}\dfrac{dp_t}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \right) \frac{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{(\vec{\upsilon},\vec{V})}{c^2}}. \qquad (4.11)$$

Учитывая теперь, что $d\vec{p}'/dt' = \vec{F}'$, а $d\vec{p}_\perp/dt = \vec{F}_\perp$ и $d\vec{p}_\parallel/dt = \vec{F}_\parallel$, перепишем равенство (4.11) в виде

$$\vec{F}' = \left(\vec{F}_\perp + \frac{\vec{F}_\parallel - \vec{V}\dfrac{dp_t}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \right) \frac{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{(\vec{\upsilon},\vec{V})}{c^2}}. \qquad (4.12)$$

Если теперь найти связь dp_t/dt с $\vec{F}$, то равенство (4.12) можно рассматривать как закон преобразования силы при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Для этого умножим обе части уравнения (4.9) скалярно на вектор $\vec{\upsilon}$:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{\upsilon} \right) = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon} \right). \qquad (4.13)$$

Преобразуем теперь левую часть равенства (4.13). Используя (4.5), приходим к следующему результату:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{\upsilon} \right) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \right), \vec{\upsilon} \right) = \frac{m\left(\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \vec{\upsilon} \right)}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{m\upsilon^2 \left(\vec{\upsilon}, \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} \right)}{c^2\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{m\left(\vec{\upsilon}, \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} \right)}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2} \right)} \right) = \frac{m\left(\vec{\upsilon}, \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} \right)}{\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \right).$$

Полученный результат позволяет представить (4.13) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right), \tag{4.14}$$

или, учитывая (4.6),

$$\frac{dp_t}{dt}=\frac{1}{c^2}\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right). \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в (4.12), находим закон преобразования силы, сохраняющий вид уравнения (4.9) при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую:

$$\vec{F}'=\left(\vec{F}_\perp+\frac{\vec{F}_\parallel-\frac{\vec{V}}{c^2}\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{\left(\vec{\upsilon},\vec{V}\right)}{c^2}}. \tag{4.16}$$

Таким образом, если в некоторой инерциальной системе отсчёта установлен аналитический вид вектора силы $\vec{F}=\vec{F}\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$, то выражая с помощью преобразований Лоренца и закона преобразования скорости переменные $\vec{r},\vec{\upsilon},t$ через $\vec{r}',\vec{\upsilon}',t'$, мы сможем, используя (4.16), найти зависимость силы $\vec{F}'$ от переменных $\vec{r}',\vec{\upsilon}',t'$ в любой другой инерциальной системе отсчёта. Однако для этой цели удобнее использовать формулу, следующую из (4.16) при подстановке в неё выражения

$$\vec{\upsilon}=\left(\vec{\upsilon}'_\perp+\frac{\vec{\upsilon}'_\parallel+\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{\left(\vec{\upsilon}',\vec{V}\right)}{c^2}},$$

следующего из формулы (4.1), если в ней поменять местами штрихи и заменить $\vec{V}$ на $-\vec{V}$, т. е. перейти к обратному преобразованию.

После несложной, но длинной выкладки получим

$$\vec{F}' = \vec{F}_{\parallel} + \frac{\vec{F}_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\left[\vec{\upsilon}',\left[\vec{V},\vec{F}\right]\right]}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{4.17}$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение.

В частности, из (4.17) очевидно следует, что если в исходной системе отсчёта сила $\vec{F}$ не зависит от скорости частицы $\vec{\upsilon}$, т.е. $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r},t\right)$, то в любой другой сила $\vec{F}'$ будет иметь составляющую $-\left[\vec{\upsilon}',\left[\vec{V},\vec{F}\right]\right]\Big/c^2\sqrt{1-\left(V^2/c^2\right)}$, зависящую от скорости частицы $\vec{\upsilon}'$ и <u>ортогональную</u> ей. Это утверждение релятивистской динамики экспериментально подтверждается во взаимодействиях электрически заряженных частиц.

Вернёмся теперь к уравнению (4.14). Правая часть этого уравнения имеет смысл мощности силы, действующей на частицу. Введём в рассмотрение величину, имеющую размерность энергии:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{4.18}$$

Поскольку mc^2 – константа, то закон изменения введённой величины T в соответствии с уравнением (4.14) запишется в виде

$$\frac{dT}{dt} = \left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right). \tag{4.19}$$

Как известно, в ньютоновской механике закон (4.19) определяет изменение кинетической энергии частицы $T = m\upsilon^2/2$. Покажем, что величина T, определённая формулой (4.18), при снятии верхнего предела скорости (т.е. при $c \to \infty$) перейдёт в $T = m\upsilon^2/2$. Для этого преобразуем выражение (4.18) следующим образом:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2 = \frac{mc^2\left(1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)} = \frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\alpha}+1-\alpha},$$

где $\alpha = \upsilon^2/c^2$. Так как при $c \to \infty$ $\alpha \to 0$, то из последнего выражения очевидно следует, что при $c \to \infty$ $T \to m\upsilon^2/2$.

Таким образом, величина T, определённая формулой (4.18), является релятивистским обобщением кинетической энергии частицы, а закон её изменения (4.19) совпадает по форме с соответствующим нерелятивистским законом.

Величину

$$E = T + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{4.20}$$

в СТО называют энергией частицы, а величину

$$E_0 = E\big|_{\upsilon=0} = mc^2 \tag{4.21}$$

называют энергией покоя частицы. Закон изменения энергии частицы задаётся, конечно, уравнением (4.14). Формулу (4.21), связывающую энергию покоя тела с его массой, называют формулой Эйнштейна. Эта формула играет фундаментальную роль в ядерной физике.

Найдём теперь связь между энергией и импульсом релятивистской частицы. Используя (4.5) и (4.20), получаем

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2, \tag{4.22}$$

откуда

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,, \tag{4.23}$$

где p – модуль вектора импульса (4.5).

Полученные формулы широко используются в физике элементарных частиц.

При переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую динамические переменные $\vec{p}$ и E, определённые формулами (4.5) и (4.20), преобразуются друг через друга следующим образом:

$$\vec{p}\,' = \vec{p}_{\perp} + \frac{\vec{p}_{\parallel} - \dfrac{1}{c^2}\vec{V}E}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{4.24}$$

$$E' = \frac{E - \left(\vec{p},\vec{V}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{4.25}$$

Преобразования (4.24) и (4.25) очевидно следуют из (4.7) и (4.8) с учётом того, что $E = p_t c^2$.

Уравнения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

и

$$\frac{dE}{dt} = \left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)$$

где $\vec{p}$ и E определены формулами (4.5) и (4.20), вместе с законами преобразования (4.17), (4.24) и (4.25) образуют фундамент релятивистской динамики.

В качестве иллюстрации применения закона преобразования силы рассмотрим следующий пример.

Пусть в K'-системе в статическом электрическом поле напряжённостью $\vec{E}'\left(\vec{r}\,'\right)$, созданном неподвижным зарядом Q, движется точечный заряд q.

Сила, действующая на этот заряд в рассматриваемом поле, задаётся, как известно, следующим выражением:

$$\vec{F}'\left(\vec{r}\,'\right) = q\vec{E}'\left(\vec{r}\,'\right). \tag{4.26}$$

Найдём выражение для силы, действующий на этот заряд в K-системе, имея в виду, что, согласно опыту, величина электрического заряда не зависит от выбора системы отсчёта. Для этого воспользуемся преобразованием, обратным преобразованию (4.17):

$$\vec{F} = \vec{F}'_{\parallel} + \frac{\vec{F}'_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{\left[\vec{\upsilon},\left[\vec{V},\vec{F}'\right]\right]}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4.27}$$

Подставляя (4.26) в (4.27), находим

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}'_{\parallel} + \frac{\vec{E}'_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) + q\frac{\left[\vec{\upsilon},\left[\vec{V},\vec{E}'\right]\right]}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4.28}$$

Определим теперь в K-системе векторные поля

$$\vec{E} = \vec{E}'_{\parallel} + \frac{\vec{E}'_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.29}$$

и

$$\vec{B} = k\frac{\left[\vec{V},\vec{E}'\right]}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{4.30}$$

где k – некоторая положительная константа. Тогда формула (4.28) перепишется в виде

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{k}\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]. \tag{4.31}$$

Поскольку заряд Q в K-системе движется со скоростью $\vec{V}$, то, как следует из (4.31), действие силового поля, создаваемого движущимся зарядом, на пробный заряд q, описывается не одной векторной характеристикой (как в K'-системе), а двумя – и $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)$ и $\vec{B}\left(\vec{r},t\right)$, получаемыми из (4.29) и (4.30) подстановкой в функцию $\vec{E}'(\vec{r}')$ аргумента $\vec{r}'$, выраженного через $\vec{r}$ и t с помощью преобразования Лоренца (2.32). Это поле называют электромагнитным, а векторы $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{B}(\vec{r},t)$ – соответственно напряжённостью электрической составляющей и магнитной индукцией магнитной составляющей электромагнитного поля. Используя (4.29) и (4.30) и учитывая независимость смешанного произведения трёх векторов $(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$ от циклической перестановки сомножителей, легко показать, что скалярное произведение $(\vec{B},\vec{E})=0$, т.е. $\vec{B}\perp\vec{E}$.

Силу (4.31), действующую на точечный заряд q в электромагнитном поле, называют силой Лоренца. Численное значение константы k фиксируется выбором системы единиц. В СИ $k=1$, а единица магнитной индукции называется ***тесла***. В гауссовой системе единиц $k=c$ (c – скорость света в вакууме), а единица магнитной индукции называется ***гаусс***.

Предполагая, что выражение (4.31) сохраняет свой вид при переходе в любую другую инерциальную систему отсчёта, с необходимостью придем к заключению, что статусом физической реальности обладает именно электромагнитное поле, которое по-разному проявляет себя в различных системах отсчёта. Соотношения (4.29) и (4.30) тогда следует рассматривать как частный случай закона преобразований компонент электромагнитного поля при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Нетрудно показать, используя требование неизменности вида выражения (4.31) для силы Лоренца, что в общем случае закон преобразования компонент электромагнитного поля имеет следующий вид:

$$\vec{E}=\vec{E}'_{\parallel}+\frac{\vec{E}'_{\perp}-[\vec{V},\vec{B}']}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad \vec{B}=\vec{B}'_{\parallel}+\frac{\vec{B}'_{\perp}+\frac{1}{c^2}[\vec{V},\vec{E}']}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ . \tag{4.32}$$

Легко видеть, что в статическом случае $\vec{E}'=\vec{E}'\left(\vec{r}'\right)$, $\vec{B}'=\vec{0}$ (покоящиеся заряды создают силовое поле, магнитная составляющая которого равна нулю) из формул (4.32) следуют (4.29) и (4.30).

Вопросы и задачи

1. Выразить ускорение $\vec{a}$ релятивистской частицы массой m через ее скорость $\vec{\upsilon}$ и действующую на нее силу $\vec{F}$.

Ответ: $\vec{a}=\dfrac{1}{m}\left(\vec{F}-\dfrac{\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon}}{c^2}\right)\sqrt{1-\dfrac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}$.

2. В каких случаях ускорение релятивистской частицы совпадает по направлению с силой $\vec{F}$?

Ответ: 1) $\vec{F}\perp\vec{\upsilon}\Rightarrow\vec{a}=\dfrac{1}{m}\vec{F}\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$; 2) $\vec{F}\parallel\vec{\upsilon}\Rightarrow\vec{a}=\dfrac{1}{m}\vec{F}\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

3. Привести выражение (4.16) к виду (4.17).

ЛЕКЦИЯ 5

Уравнение движения релятивистской частицы в четырёхмерной форме

Пространство событий и понятие 4-вектора

Как было отмечено в лекции 2, исходным понятием СТО является понятие события. Событие определяется местом $\left(x,y,z\right)$, где оно произошло, и временем t, когда оно произошло. Таким образом, событие в данной системе отсчета определяется четверкой чисел $\left(x,y,z,t\right)$. Вместо них удобно ввести четверку чисел $\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$, где

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=ct, \tag{5.1}$$

рассматривая их как координаты четырёхмерного радиус-вектора $\underline{r}=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ в воображаемом четырёхмерном пространстве, называемом пространством событий (его называют также пространством–временем или пространством Минковского). В этом пространстве событие изображается точкой, называемой мировой точкой. Всякой частице в пространстве событий соответствует некоторая линия, которую называют мировой линией частицы. Очевидно, что равномерно и прямолинейно движущейся частице соответствует прямая мировая линия.

Учитывая формулы (2.31) и (2.32), запишем преобразования Лоренца для пространственной $\vec{r} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$ и временной x_4 компонент четырёхмерного радиус-вектора $\underline{r}$ в виде

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_\perp + \frac{\vec{r}_\parallel - \dfrac{\vec{V}}{c} x_4}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{5.2}$$

$$x_4' = \frac{x_4 - \dfrac{\left(\vec{r}, \vec{V}\right)}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{5.3}$$

трактуя их теперь как преобразования четырёхмерной системы координат. Преобразования (5.2) и (5.3) оставляют инвариантной величину

$$s = \left[\left(x_1 - \tilde{x}_1\right)^2 + \left(x_2 - \tilde{x}_2\right)^2 + \left(x_3 - \tilde{x}_3\right)^2 - \left(x_4 - \tilde{x}_4\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.4}$$

называемую интервалом между событиями $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ и $\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\right)$.

Назовём четырёхмерным вектором, или иначе 4-вектором, четвёрку величин $\underline{A} = \left(A_1, A_2, A_3, A_4\right) = \left(\vec{A}, A_4\right)$, которые при преобразовании четырёхмерной системы координат преобразуются как координаты четырёхмерного радиус-вектора $\underline{r}$, т.е.

$$\vec{A}\,' = \vec{A}_\perp + \frac{\vec{A}_\parallel - \dfrac{\vec{V}}{c} A_4}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{5.5}$$

$$A_4' = \frac{A_4 - \frac{\left(\vec{A},\vec{V}\right)}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{5.6}$$

Принимая тогда во внимание преобразования импульса и энергии релятивистской частицы (4.24) и (4.25), легко понять, что проекции импульса $\vec{p}$ и величина $p_4 = E/c$ преобразуются как проекции 4-вектора:

$$\underline{p} = \left(p_1, p_2, p_3, p_4\right) = \left(\vec{p}, p_4\right), \tag{5.7}$$

где

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad p_4 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{5.8}$$

Четырёхмерный вектор (5.7) называют <u>4-импульсом</u> релятивистской частицы. Закон его преобразования в соответствии с (5.5) и (5.6) имеет следующий вид:

$$\vec{p}' = \vec{p}_\perp + \frac{\vec{p}_\parallel - \frac{1}{c}\vec{V}p_4}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{5.9}$$

$$p_4' = \frac{p_4 - \frac{1}{c}\left(\vec{p},\vec{V}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{5.10}$$

Уравнение движения релятивистской частицы в четырёхмерной форме

Перепишем теперь уравнения релятивистской динамики

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{5.11}$$

и

$$\frac{dE}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right) \tag{5.12}$$

в следующем виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

$$\frac{dE}{dt\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{\left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Или

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{5.13}$$

$$\frac{dp_4}{d\tau} = \frac{\left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right)}{c\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{5.14}$$

где

$$d\tau = dt\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)} = \sqrt{\left(cdt\right)^2 - \left(dx\right)^2 - \left(dy\right)^2 - \left(dz\right)^2} \Big/ c. \tag{5.15}$$

Учитывая теперь, что величина (5.15) в соответствии с (2.6) не изменяется при преобразованиях Лоренца (инвариантный параметр τ называют в СТО собственным временем частицы), на основании (5.13) и (5.14) легко понять, что величины

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{5.16}$$

и

$$f_4 = \frac{\left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right)}{c\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{5.17}$$

преобразуются при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую точно так же, как $\vec{p}$ и p_4:

$$\vec{f}' = \vec{f}_{\perp} + \frac{\vec{f}_{\parallel} - \frac{1}{c}\vec{V} f_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{5.18}$$

$$f_4' = \frac{f_4 - \frac{1}{c}\left(\vec{f}, \vec{V}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{5.19}$$

т.е. величины (5.16) и (5.17) являются компонентами 4-вектора $\underline{f} = \left(\vec{f}, f_4\right)$, называемого <u>силой Минковского</u>. С помощью 4-векторов $\underline{p}$ и $\underline{f}$ пара уравнений релятивистской динамики (5.13) и (5.14) может быть записана в виде одного уравнения

$$\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \underline{f}, \tag{5.20}$$

очевидно сохраняющего свой вид при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую (являющегося, как говорят, <u>явно ковариантным</u>).

Уравнение (5.20) называют уравнением движения релятивистской частицы в четырёхмерной форме.

В заключение отметим, что форма выражения (5.4) позволяет рассматривать интервал с формальной математической точки зрения как <u>расстояние</u> между двумя точками пространства событий с 4-радиус-векторами $\underline{r} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ и $\underline{\tilde{r}} = \left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4\right)$. Геометрию четырёхмерного пространства, расстояние в котором определено формулой (5.4), называют <u>псевдоевклидовой</u>, в отличие от обычной евклидовой геометрии, расстояние между точками в которой определяется формулой

$$s_e = \left[\left(x_1 - \tilde{x}_1\right)^2 + \left(x_2 - \tilde{x}_2\right)^2 + \left(x_3 - \tilde{x}_3\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(x - \tilde{x}\right)^2 + \left(y - \tilde{y}\right)^2 + \left(z - \tilde{z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Псевдоевклидова геометрия была введена в связи с теорией относительности немецким математиком Г. Минковским. Последовательная четырёхмерная формулировка СТО на языке псевдоевклидовой геометрии является наиболее удобной и экономной для выражения кинематических и динамических законов релятивистской физики. Это, однако, выходит за пределы курса общей физики. Мы ограничились здесь только представлением в четырёхмерной форме преобразований Лоренца и уравнения движения релятивистской частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок, В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – М.: Физматгиз, 1961.

2. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1967.

3. Мандельштам, Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л. И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972.

4. Принцип относительности / Сб. работ по специальной теории относительности, сост. А.А. Тяпкин. – М.: Атомиздат, 1973.

5. Синг, Дж. Л. Классическая динамика / Дж. Л. Синг. – М.: Физматгиз, 1963.

6. Неванлинна, Р. Пространство, время и относительность / Р. Неванлинна.– М.: Мир, 1966.

7. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1986.

8. Иродов, И. Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов. – М.: Высш. шк., 1978.

СОДЕРЖАНИЕ