Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Е. А. Баркова

Часть 7

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования по техническим специальностям

Минск БГУИР 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1. я 73
К 26

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра математики Минского высшего радиотехнического колледжа;
профессор кафедры высшей математики Белорусского
государственного аграрного технического университета,
доктор физико-математических наук, профессор А. П. Рябушко

Карпук, А. А.
К 26 Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 7: Интегральное исчисление функций многих переменных : учеб. пособие / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Е. А. Баркова. – Минск : БГУИР, 2007. – 119 с.: ил.
ISBN 978-985-488-148-5 (ч.7)

В части 7 сборника приводятся задачи по интегральному исчислению функций многих переменных.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1. я 73

Ч.1: Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия / А.А.Карпук, Р.М.Жевняк. – Мн.: БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

Ч.2: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч.2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А.А.Карпук, Р.М.Жевняк, В.В.Цегельник. – Мн.: БГУИР, 2004. – 154 с.

Ч.3: Сборник задач по высшей математике. Ч.3: Введение в анализ / Н.Н.Третьякова, Т.М.Пушкарева, О.Н.Малышева. – Мн.: БГУИР, 2005. – 116 с.

Ч.4: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч.4 : Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.А. Карпук [и др.]. – Мн.: БГУИР, 2006. – 107 с.

Ч.5: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 5 : Функции многих переменных / А.А. Карпук [и др.]. – Мн.: БГУИР, 2004. – 64 с.

Ч.6: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 6 : Интегральное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2006. – 148 с.

ISBN 978-985-488-148-5 (ч.7)
ISBN 978-985-444-727-8
ISBN 985-444-727-8

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание является 7-й частью «Сборника задач по высшей математике» в 10-ти частях и посвящено интегральному исчислению функций многих переменных. В него вошли разделы «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы», «Поверхностные интегралы», «Элементы векторного анализа». Структура 7-й части, как и предыдущих 6-ти частей, следующая. Сначала приводятся теоретические сведения по рассматриваемому вопросу, затем решения наиболее характерных задач этого типа и, наконец, приводятся задачи и упражнения для практических занятий в аудитории и для домашних заданий. Начало решения примера отмечено знаком Δ, конец решения – знаком ▲.

Книга будет полезной не только для студентов вузов, но и для преподавателей, ведущих практические занятия со студентами.

1. Кратные интегралы

1.1. Двойные интегралы

Определение двойного интеграла и его свойства. Вычисление двойных интегралов в прямоугольной декартовой системе координат. Замена переменных в двойных интегралах. Двойной интеграл в прямоугольной системе координат и обобщенной прямоугольной системе координат.

Пусть в области D с границей Γ задана непрерывная функция $f(x, y)$. Разобьем область D произвольным образом на n частичных областей D_i (рис. 1.1), площади которых равны ΔS_i, $i = \overline{1, n}$. В каждой частичной области выберем произвольную точку $P_i = (x_i, h_i)$ и составим сумму $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, h_i)\Delta S_i$, называемую *интегральной суммой Римана* для функции $f(x, y)$ по области D. Пусть Δ – наибольший из диаметров областей Δ_i и назовем его *диаметром разбиения* области D.

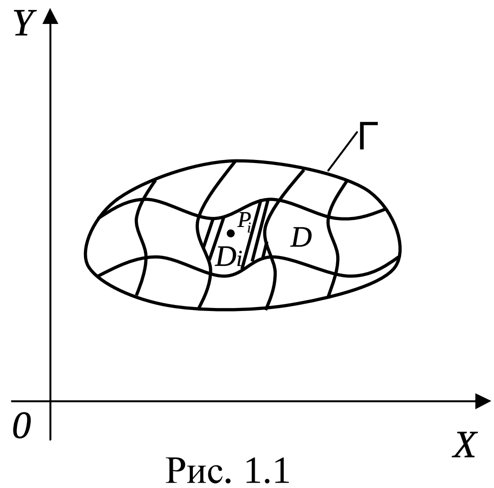

Рис. 1.1

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, h_i)\Delta S_i$, не зависящий ни от способа разбиения D на части D_i, ни от выбора точек $P_i = (x_i, h_i) \in D_i$, то говорят, что функция $f(x, y)$ *интегрируема по Риману в области* D, а сам предел называют *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* D и обозначают $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Итак, по определению

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, h_i)\Delta S_i. \quad (1.1)$$

Геометрически двойной интеграл (1.1) выражает собой объем v криволинейного цилиндра v – тела, ограниченного сверху поверхностью S с уравнением $z = f(x, y) \geq 0$, снизу – областью D, являющейся проекцией S на плоскость XY (границей служит замкнутая кривая Γ) и образующими, параллельными оси Z.

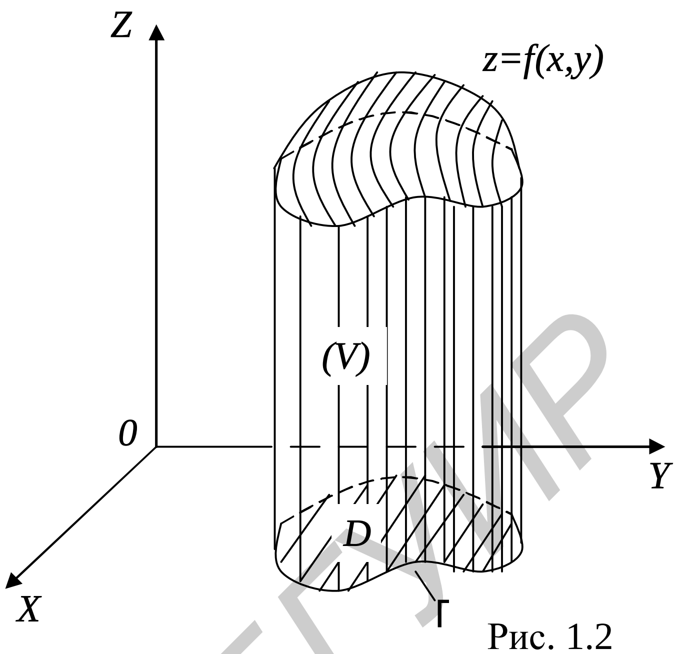

Рис. 1.2

Итак,

$$v = \iint_D f(x, y)\,dxdy. \qquad (1.2)$$

При $f(x, y) \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in D$ двойной интеграл

$$S = \iint_D dxdy \qquad (1.3)$$

есть площадь области D.

Если D – плоская пластинка, по поверхности которой непрерывно распределена масса с плотностью $m(x, y)$, то *масса* m такой *пластинки* выражается интегралом:

$$m = \iint_D m(x, y)\,dxdy. \qquad (1.4)$$

Пусть $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D (а значит, и интегрируема в ней). Справедливы следующие свойства двойных интегралов (функция $g(x, y)$ также интегрируема в D).

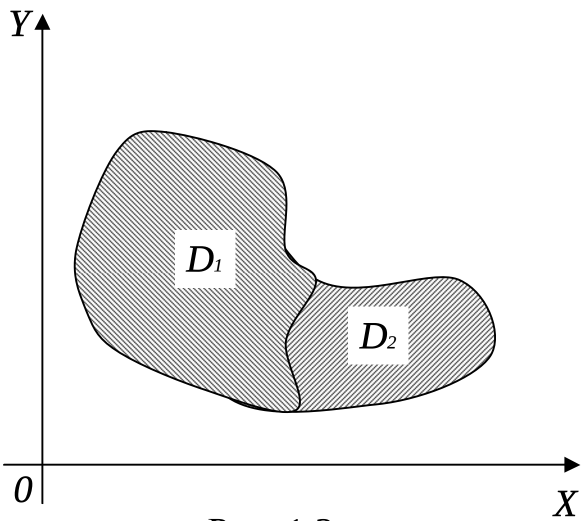

Рис. 1.3

1º. (*Линейность*). Для любых a и b из R

$$\iint_D \big(af(x, y) + bg(x, y)\big)dxdy =$$

$$= a\iint_D f(x, y)\,dxdy + b\iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

2º. (*Аддитивность*). Если $D = D_1 \cup D_2$ и D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy =$$

$$= \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dxdy.$$

3°. Если $f(x,y) \geq 0, \quad \forall (x,y) \in D,$ то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

4°. Если $f(x,y) \geq g(x,y), \quad \forall (x,y) \in D,$ то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$

5°. (*Оценка модуля интеграла*).

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy. \tag{1.5}$$

6°. (*Оценка интеграла*).

Пусть $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y), \quad m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$. Тогда

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS, \tag{1.6}$$

где S – площадь области D.

7°. Пусть D – прямоугольник $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ и $f(x,y) = j(x)g(y)$. Тогда

$$\iint\limits_D j(x)g(y)dxdy = \int\limits_a^b j(x)dx \cdot \int\limits_c^d g(y)dy.$$

8°. **(*Теорема о среднем*).** *Пусть* $f(x,y)$ *– функция, непрерывная в ограниченной замкнутой связной области* D. *Тогда существует точка* $(x,h) \in D$ *такая, что*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x,h) \cdot S, \tag{1.7}$$

где S *– площадь области* D.

Величина

$$f(x,h) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy \tag{1.8}$$

называется *средним значением функции* $f(x,y)$ *в области* D.

Вычисление двойных интегралов сводится к последовательному вычислению однократных интегралов.

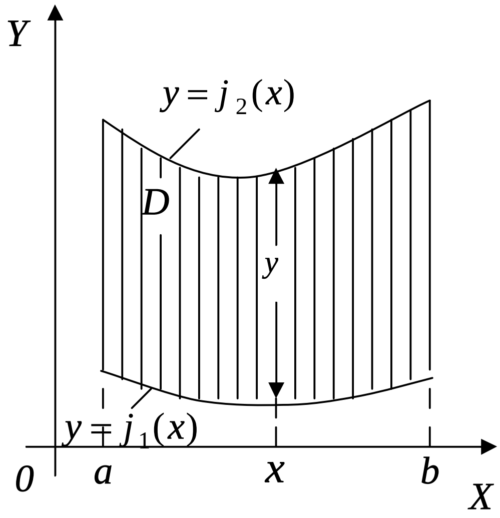

Рис. 1.4

На плоскости XY множество D вида

$$D = \{(x,y) \,|\, a \leq x \leq b, \ j_1(x) \leq y \leq j_2(x), \ \forall x \in [a,b]\} \tag{1.9}$$

называют *элементарным относительно оси* Y (рис. 1.4). Здесь функции $j_1(x)$ и $j_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$.

Аналогично определяется *множество* D, *элементарное относительно оси* X (рис. 1.5).

Теорема 1.1. *Если функция* f *интегрируема на множестве* Y *вида* ***(1.9)***, *элементарном относительно оси* Y, *то*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.10)$$

Правая часть в (1.10) является *повторным интегралом*, т.е. результатом последовательного вычисления сначала интеграла по y (внутреннего интеграла) при фиксированном x, а затем интеграла по $\boldsymbol{x}$ от получившейся функции.

Если множество D *элементарно относительно оси* X (рис. 1.5), то для интегрируемой по x функции $f(x,y)$ верно равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.11)$$

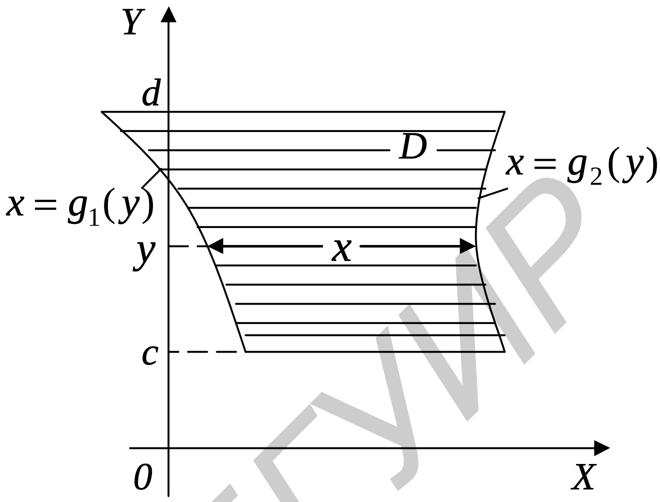

Рис. 1.5

Множество D, элементарное относительно каждой из осей X и Y, называется *элементарным*. Для него верно каждое из равенств (1.10) и (1.11), в частности,

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.12)$$

Равенство (1.12) используется *для перемены порядка интегрирования в повторном интеграле*.

1.1. Вычислить интеграл $I_j = \iint\limits_{D_j} f_j(x,y)dxdy,$ если

1) $f_1(x,y) = (1+x+y)^{-2}$, D_1 – треугольник, ограниченный прямыми $x = 2y$, $y = 2x$, $x + y = 6$;

2) $f_2(x,y) = y^2$, область D_2 ограничена линиями $x = y^2$, $y = x - 2$;

3*) $f_3(x,y) = x$, $D_3 = \{2rx \le x^2 + y^2 \le R^2, 0 < 2r < R\}$.

r 1) Треугольник D_1 изображен на рис. 1.6. Отрезком AB разделим D_1 на два треугольника Δ_1 и Δ_2. Тогда в силу свойства аддитивности

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} f_1(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta_1} f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Delta_2} f_2(x,y)dxdy.$$

По формуле (1.10) имеем:

$$\iint\limits_{\Delta_1} f_1(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{2x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-\frac{1}{1+x+y}\bigg|_{y=x/2}^{y=2x} \right) dx =$$

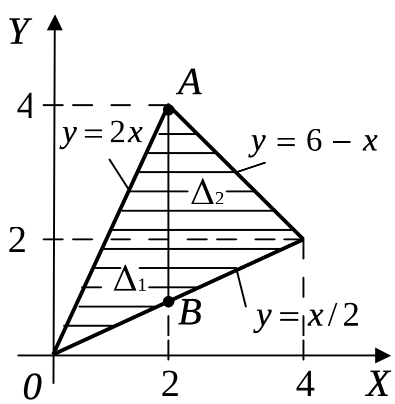

Рис. 1.6

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{1+3x} + \frac{1}{1+3x/2} \right) dx = -\frac{1}{3}\ln 7 + \frac{2}{3}\ln 4,$$

$$\iint_{\Delta_2} f_1(x,y)dxdy = \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \int_2^4 \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{1+3x/2} \right) dx = -\frac{2}{7} + \frac{2}{3}\ln\frac{7}{4};$$

следовательно, $I_1 = \frac{1}{3}\ln 7 - \frac{2}{7}$.

2) Множество D_2 изображено на рис. 1.7. Оно элементарно относительно оси X:

$$D_2 = \{(x,y) | -1 \le y \le 2, y^2 \le x \le y+2\}.$$

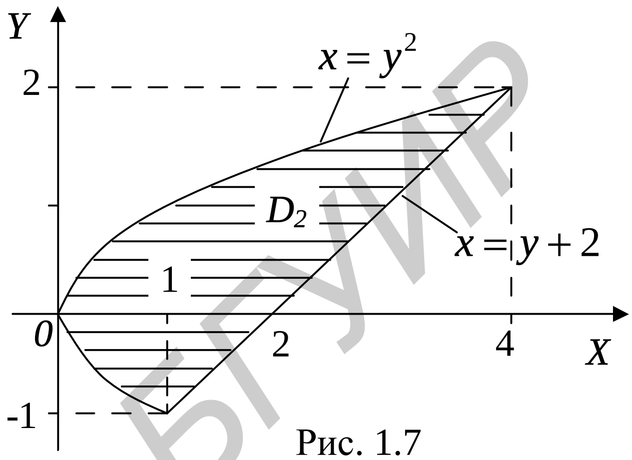

Рис. 1.7

Интеграл I_2 вычисляем по формуле (1.11):

$$I_2 = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} y^2 dx = \int_{-1}^{2} y^2 \left(x \Big|_{y^2}^{y+2} \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(y^3 + 2y^2 - y^4 \right) dy = \frac{63}{20}.$$

3) Неконцентричное кольцо D_3 изображено на рис. 1.8 и заштриховано вертикальными линиями. Вычисление интеграла I_3 производим следующим образом. Обозначим K_1 – круг $x^2 + y^2 \le R^2$, K_2 – круг $x^2 + y^2 \le 2rx$. Откуда $D_3 = K_1 \setminus K_2$. Тогда по свойству аддитивности двойного интеграла будем иметь

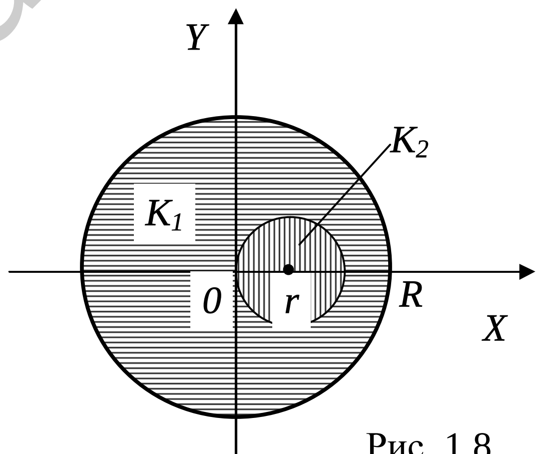

Рис. 1.8

$$I_3 = \iint_{K_1} xdxdy - \iint_{K_2} xdxdy,$$

первый интеграл здесь обозначим J_1, второй – J_2. Круги K_1 и K_2 зададим в виде

$$K_1 = \left\{ -R \le y \le R, -\sqrt{R^2 - y^2} \le x \le \sqrt{R^2 - y^2} \right\},$$
$$K_2 = \left\{ -r \le y \le r, r - \sqrt{r^2 - y^2} \le x \le r + \sqrt{r^2 - y^2} \right\}.$$

По формуле (1.11) находим

$$J_1 = \int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} xdx = 0,$$

так как функция x во внутреннем интеграле нечетна, то

$$J_2 = \int_{-r}^{r} dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{r+\sqrt{r^2-y^2}} x dx = 2r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy = pr^3.$$

Следовательно, $I_3 = J_1 - J_2 = -p\, r^3$. р

1.2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2/9}^{x} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_{x^2/9}^{1} f(x,y)dy. \qquad (1.13)$$

r Восстановим область интегрирования D. В первом повторном интеграле область в правой части равенства (1.13) определяется следующим образом:

$$D_1 = \left\{0 \le x \le 1, \frac{x^2}{9} \le y \le x\right\},$$

а область D_2 во втором повторном интеграле выражается так:

$$D_2 = \left\{1 \le x \le 3, \frac{x^2}{9} \le y \le 1\right\}.$$

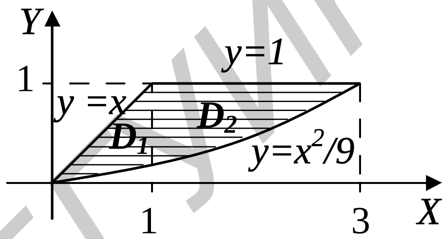

Рис. 1.9

Так как область $D = D_1 \bigcup D_2$ элементарна по X, то по формуле (1.11) получаем

$$I = \int_0^1 dy \int_{y}^{3\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Корень берем с положительным знаком потому, что все точки области D имеют неотрицательные абсциссы. р

1.3. Оценить интеграл $I = \iint\limits_D \sin\frac{x^2 - y + 1}{x^2 + y^2 + 1}dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 \le 9$.

r Воспользуемся оценкой интеграла (1.6). В нашем случае $S = pr^2 = 9p$. Так как $|\sin t| \le 1, \forall t$, то в качестве границ подынтегральной функции можно взять $m = -1$, $M = 1$. Тогда, согласно (1.6), $-9p \le I \le 9p$. р

1.4. Вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_D (x\sin y + y\cos x)dxdy$, $D = \{0 \le x \le p/2, 0 \le y \le p/2\}$.

2) $\iint\limits_D \frac{y}{x^2}\,dxdy$, $D = \{0 < x, x^3 \le y \le x^2\}$.

3) $\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy$, D ограничена линиями $x = y^2, x = 1$.

4) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $D = \{x^2 + y^2 \le a^2, x \ge 0\}$.

5) $\iint\limits_D (x^3 + y^3)dxdy$, $D = \{x^2 + y^2 \le R^2, y \ge 0\}$.

6) $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy,\ D$ – ограничена прямыми $y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3.$

7) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,\ D$ – ограничена прямыми $y=x, y=x+a, y=a, y=3a.$

8) $\iint\limits_D \sqrt{x-y}\,dxdy,\quad D=\left\{\frac{4}{5}x\le y\le x, 1\le y\le 4\right\}.$

9) $\iint\limits_D \sin p\,(x-y)\,dxdy,\ D-$треугольник с вершинами $(-4{,}1),(-1{,}1),(7/2{,}17/2).$

10) $\iint\limits_D y\,dxdy,\quad D=\{0\le y\le 6, x<6, xy>3, y-x<2\}.$

Отв.: 1) $p^2/4$; **2)** $1/15$; **3)** $4/27$; **4)** $2a^5/15$; **5)** $4R^5/15$; **6)** $76/3$; **7)** $14a^4$; **8)** $31/30$; **9)** $(10-45p)/6p^2$; **10)** $255/4$.

1.5*. Доказать, что при $|a|\ne 1$**:** $\int\limits_0^p \ln(a^2+1-2a\cos j\,)\,dj = \begin{cases} 2p\ln|a|, |a|>1, \\ 0, |a|<1. \end{cases}$

1.6. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy$; 3) $\int\limits_0^p dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$; 5) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$; 6) $\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)dy.$

Отв.: 1) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx + \int\limits_0^8 dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)dx$; **2)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)dx$;

3) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{p-\arcsin y} f(x,y)dx$; **4)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$;

5) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy$; **6)** $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)dx.$

1.7. Оценить интегралы:

1) $I=\iint\limits_D \left(x^2-y^2\right)dxdy,\quad D=\left\{x^2+y^2-2x\le 0\right\}$;

2) $I=\iint\limits_D (4+\cos xy)\,dxdy,\quad D=\left\{x^2+y^2\le 4\right\}$;

3) $I=\iint\limits_D (1+x+y)\,dxdy,\quad D=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$;

4) $I=\iint\limits_D \left(x^2+y^2-4x-4y+10\right)dxdy,\quad D=\left\{x^2+4y^2-2x-16y+13\le 0\right\}.$

Отв.: 1) $-p/2<I<4p$; **2)** $12p<I<20p$; **3)** $2<I<8$; **4)** $4p<I<22p$.

1.8. Найти средние значения заданных функций в указанных областях:

1) $f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$ в квадрате $\{0\le x\le p, 0\le y\le p\}$;

2) $f(x,y)=x^2+xy+2y^2$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y=1$;

3) $f(x,y)=\cos(x+y)$ в области, ограниченной прямыми $x=0, y=p, y=x$;

4) $f(x,y)=xy$ в области, ограниченной осью X и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=1$;

5) $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ в круге $x^2+y^2\le R^2$.

Отв.: 1) $1/4$; **2)** $7/12$; **3)** $-4/p^2$; **4)** $4/3p$; **5)** $2R/3$.

1.9. Найти площадь области, ограниченной кривыми:

1) $x^2+y^2=2ax, y=2ax, x=a$ (первый квадрант);

2) $4y=x^2-4x, x=y+3$;

3) $y^2=10x+25, y^2=9-6x$;

4) $y^2=2px+p^2, y^2=q^2-2qx, p>0, q>0$;

5) $x^2+y^2=4, y^2=4-4x, x<1$;

6) $y^2=2x, y^2=4x-x^2, 2x<y^2$;

7) $y=\cos x, y=\cos 2x, 0\le x\le 2p/3$;

8) $2x^2+2y^2=2x+1, x^2+y^2\ge 1$;

9)* $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x+y=a$;

10)* $(x+y)^2+x^2=a^2$.

Отв.: 1) $8a^2/3-pa^2/2$; **2)** $8/3$; **3)** $16\sqrt{15}/3$; **4)** $(p+q)\sqrt{pq}/3$;
5) $(6p+8)/3$; **6)** $(6p-16)/3$; **7)** $3\sqrt{3}/4$; **8)** $(p+6\sqrt{3})/24$;
9) $a^2/3$; **10)** pa^2.

Пусть функции

$$x=x(u,v), y=y(u,v) \tag{1.14}$$

осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области D плоскости UV на область G плоскости XY. Это означает, что существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $u=u(x,y), v=v(x,y)$ области G на область D и в области D *якобиан* преобразования, т.е.

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0, \forall (u,v)\in D.$$

Величины u и v можно рассматривать как прямоугольные координаты точек области D и в то же время как *криволинейные координаты* точек области G.

Если в двойном интеграле $\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$ произвести замену по формулам (1.14), то областью интегрирования полученного интеграла будет уже область D, которая при надлежащем выборе функций $x(u,v), y(u,v)$ может оказаться проще области *G,* и имеет место формула

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv. \qquad (1.15)$$

1.10. Вычислить $\mathrm{I} = \iint\limits_{G} \sqrt{xy}\,dxdy$,если область G ограничена кривыми $y^2=ax,\ y^2=bx,\ xy=p,\ xy=q\ (0<a<b,\ 0<p<q).$

r Перейдем к новым переменным u и v по формулам $y^2=ux,\ xy=v$. Тогда $x=u^{-1/3}v^{2/3},\ y=u^{1/3}v^{1/3},$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3},\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3}, \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3},$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u} \Rightarrow \left|J(u,v)\right| = \frac{1}{3u}$$

при $u > 0$.

Уравнения линий принимают вид $u=a,\ u=b,\ v=p,\ v=q$. Область *G* плоскости *XY* преобразуется в прямоугольник *D* плоскости *UV* (рис. 1.10).

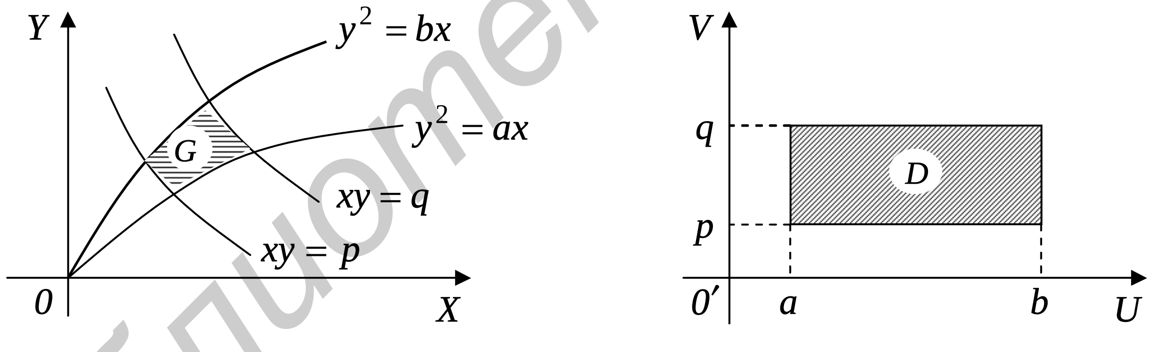

Рис. 1.10

Применив формулу (1.15), получим

$$I = \iint\limits_{D} \sqrt{v}\,\frac{dudv}{3u} = \frac{1}{3}\int_a^b \frac{du}{u}\int_p^q \sqrt{v}\,dv = \frac{2}{9}\left(q^{3/2} - p^{3/2}\right)\ln\frac{b}{a}. \quad \text{p}$$

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются полярные координаты (полярная система координат (ПСК)):

$$x=r\ \cos j,\ \ y=r\ \sin j,$$

для которых

$$J(r,j) = \begin{vmatrix} \cos j & -r\sin j \\ \sin j & r\cos j \end{vmatrix} = r,$$

и формула (1.15) записывается в виде

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos j, r\sin j)\, r\, dr\, dj. \qquad (1.16)$$

1.11. Вычислить $I = \iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy$, если G – кольцо между окружностями $x^2+y^2=e^2$, $x^2+y^2=e^4$.

r Перейдем к полярным координатам

$$I = \iint\limits_D \ln r^2 \cdot r\;\, dr\;\, dj = 2\iint\limits_D r\ln r\;\, dr\;\, dj = 2\int_0^{2p} dj \int_e^{e^2} r\ln r\;\, dr.$$

Взяв внутренний интеграл по частям, получим $I=pe^2(3e^2-1)$. р

Другой распространенной системой координат на плоскости является *обобщенная полярная система координат* (*обобщенная ПСК*). В ней обобщенные полярные координаты вводятся по формулам

$$\frac{x}{a} = r\cos j,\ \frac{y}{b} = r\sin j,\ \ r \ge 0,\quad 0 \le j \le 2p. \qquad (1.17)$$

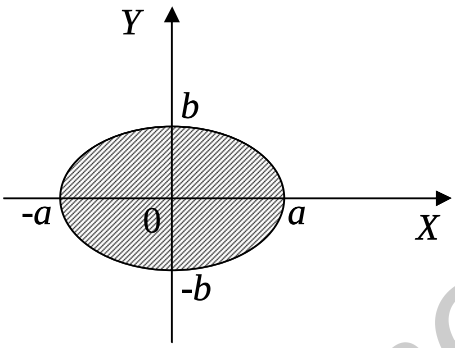

Рис. 1.11

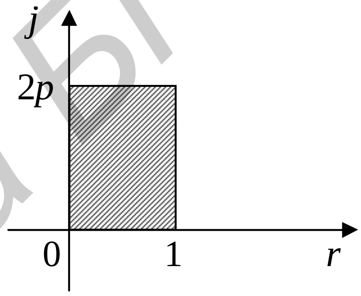

Рис. 1.12

Согласно (1.17) для эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ в обобщенной ПСК получаем уравнение $r = 1$, т.е. обобщенные полярные координаты отображают эллипс с полуосями a и b (рис. 1.11) на прямоугольник $\{0 \le r \le 1, 0 \le j \le 2p\}$ (рис. 1.12).

Для обобщеных полярных координат $J = abr$, так что формула замены переменных в обощенной ПСК имеет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_D f(ar\cos j, br\sin j)\, r\, dr\, dj. \qquad (1.18)$$

Для конкретной области G пределы изменения обобщенных полярных координат r и j находят из уравнений линий, ограничивающих эту область.

1.12. Найти массу пластины G, заданной неравенствами $1 \le x^2/4 + y^2/9 \le 36, x \ge 0, y \ge 3x/2$, имеющей поверхностную плотность $m = 9x/y^3$.

r Вводим обобщенные полярные координаты r и j по формулам $x = 2r\cos j, y = 3r\sin j \Rightarrow J = abr = 6r$. Из неравенств $1 \le x^2/4 + y^2/9 \le 36$ имеем $1 \le r^2 \le 36 \Rightarrow 1 \le r \le 6$. Из неравенства $x \ge 0$ вытекает, что

$2\rho\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, а из неравенства $y \geq 3x/2$ следует, что $tg\varphi \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}\right)$.

Значит, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$. В таком случае масса пластинки (эллиптическое кольцо)

$$m = \iint\limits_G \frac{9x}{y^3}dxdy = 4\iint\limits_D \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \cdot \frac{1}{\rho} d\rho\, d\varphi = 4\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^3\varphi} \int\limits_1^6 \frac{d\rho}{\rho} = 2\ln 6. \quad \text{p}$$

1.13. Произвести указанную замену переменных и вычислить интеграл:

1) $\iint\limits_D (2x - y)dxdy$, где D – параллелограмм, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$. Замена: $x + y = u$, $2x - y = v$;

2) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная окружностями $x^2 + y^2 + 2x - 10 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x = 0$. Замена : $x + 1 = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$;

3) $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где D – область, ограниченная линиями $xy = 1, x + y = 5/2$. Замена: $x + y = u, xy = v$;

4) $\iint\limits_D e^{k(x+y)^2}dxdy$, где область D определяется неравенствами $x \geq 0$, $x + y \leq 1$. Замена : $x = u - uv, y = uv$;

5)* $\iint\limits_D x^2 ydxdy$, где D – область, ограниченная гиперболами $xy = p, xy = q\ (0 < p < q), y = ax, y = bx\ (0 < a < b)$. Замена: $x = \sqrt{u/v}, y = \sqrt{uv}$.

Отв.: 1) $4/3$ **; 2)** 70π **; 3)** $165/128 - \ln 2$ **; 4)** $\left(e^k - 1\right)/2k$ **;**

5) $\frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\left(\sqrt{q^5} - \sqrt{p^5}\right)$**.**

1.14. Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам:

1) $\iint\limits_D xdxdy, \quad D = \{2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq x\}$;

2) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 - 1}, \quad D = \{9 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$;

3) $\iint\limits_D xy^2dxdy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$;

4) $\iint\limits_D (ax + by)dxdy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, x \leq y\}$;

5) $\iint\limits_D ydxdy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 2x, x > y\}$;

6) $\iint\limits_D x dx dy, \quad D=\left\{ax \le x^2+y^2 \le 2ax, y \ge 0\right\}, \ a>0;$

7)* $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, D ограничена линиями $x^2-y^2=6, x=3;$

8)* $\iint\limits_D y dx dy, \ D=\left\{\ 0 \le x \le (x^2+y^2)^{3/2} \le 1, y \ge 0\right\}.$

Отв.: 1) $13(9\pi+8)\big/6$; **2)** $\pi\ln 3$; **3)** $2a^5\big/15$; **4)** $\sqrt{2}(b-a)R^3\big/3$;

5) $-1\big/6$; **6)** $\pi a^2\big/16$; **7)** $(3\sqrt{3}-\pi)\big/108$; **8)** $1\big/5$.

Согласно формулам (1.3) и (1.16), площадь плоской фигуры G в ПСК выражается интегралом

$$S=\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi\ , \qquad (1.19)$$

где D – образ фигуры G при отображении $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

1.15. Найти площадь области, ограниченной кривыми:

1) $x^2+y^2=2ax, x^2+y^2=2bx, y=x, y=0, b>a>0;$

2) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right), x^2+y^2=a^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\ge a>0\right);$

3)* $\left(x^2+y^2-ax\right)=a^2\left(x^2+y^2\right), x^2+y^2=a\sqrt{3}y$ (область вне кардиоиды, но внутри окружности);

4)* $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2x^2-b^2y^2;$

5) $\left(x^2+y^2\right)^3=a\left(x^3+y^3\right).$

Отв.: 1) $(\pi+2)\left(b^2-a^2\right)/4$; **2)** $\left(3\sqrt{3}-\pi\right)a^2/3$; **3)** $3a^2\sqrt{3}/4$;

4) $ab+\left(a^2-b^2\right)arctg\left(a\big/b\right)$; **5)** $5\pi a^2/16$.

Масса плоской пластинки G с поверхностной плотностью $\mu(x,y)$, согласно формулам (1.4) и (1.16), выражается формулой

$$m=\iint\limits_D \mu\left(a\cos\varphi, b\sin\varphi\right)ab\ \rho\, d\rho\, d\varphi\ , \qquad (1.20)$$

где D – образ пластинки G при отображении (1.18).

1.16. Найти массу пластинки G, заданной неравенствами, если μ – поверхностная площадь:

1) G: $x^2+y^2/4\le 1; \mu=y^2.$ **Отв.:** 2π;

2) G: $1 \le x^2/4 + y^2/16 \le 5,\ x \ge 0, y \ge 2x;\ m = x/y$. **Отв.:** $4ln2$;

3) G: $1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 5,\ x \ge 0, y \ge 2x/3;\ m = x/y$. **Отв.:** $9ln2$;

4) G: $x^2/4 + y^2/9 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0;\ m = x^5 y$. **Отв.:** 12.

1.2. Тройные интегралы

Определение тройного интеграла и его свойства. Вычисление тройных интегралов в ПДСК. Замена переменных интегрирования в тройных интегралах. Тройной интеграл в цилиндрической системе координат (ЦСК) и в сферической системе координат (ССК).

Пусть функция $f(x,y,z)$ ограничена и непрерывна в замкнутой ограниченной области $V \subset R^3$ с границей $Г$. Разобьем область V с помощью конечного числа гладких поверхностей на частичные области (ячейки) $V_i, i = \overline{1,n}$, объем каждой из которых равен Δv_i. В ячейке V_i выберем произвольно точку (x_i, h_i, z_i) и построим *интегральную сумму Римана:*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, h_i, z_i)\Delta v_i. \qquad (1.21)$$

Пусть $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} diam V_i$. Если существует предел интегральных сумм (1.21) при $\Delta \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области V на V_i, ни от выбора точек $(x_i, h_i, z_i) \in V_i$, то его называют *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначают $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ или $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$. Функция f при этом называется *интегрируемой по Риману* в области V.

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

В случае *прямоугольной области* $V = \{a \le x \le b, c \le y \le d, p \le z \le q\}$ вычисление тройного интеграла сводится к вычислению *повторных интегралов* по формулам:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q fdz = \int_c^d dy \int_a^b dx \int_p^q fdz = \int_p^q dz \int_c^d dy \int_a^b fdx \quad \text{и т.д.}$$

(всего имеется 6 возможностей).

1.17. Вычислить тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dv,\ \ V = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\}$;

2) $\iiint\limits_V xydv,\ \ V = \left\{1 \le x \le 2,\ -2 \le y \le -1,\ 0 \le z \le \dfrac{1}{2}\right\}$;

3) $\iiint\limits_V r\sin q\, dr\, dj\, dq$, $V=\left\{0\le j\le\frac{p}{2},\ 0\le r\le 2,\ 0\le q\le\frac{p}{2}\right\}$;

4) $\iiint\limits_V \frac{dv}{(x+y+z)^3}$, $V=\{1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2,\ 1\le z\le 2\}$.

Отв.: 1) $\frac{abc}{2}(a+b+c)$; **2)** $-\frac{9}{8}$; **3)** p; **4)** $\frac{1}{2}\ln\frac{128}{125}$.

В случае криволинейной области $V=\{a\le x\le b, j_1(x)\le y\le j_2(x),\ q_1(x,y)\le z\le q_2(x,y)\}$ *имеет место следующая формула вычисления тройного интеграла*:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int\limits_a^b dx\int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)}dy\int\limits_{q_1(x,y)}^{q_2(x,y)}f(x,y,z)dz. \qquad (1.22)$$

Это означает, что сначала функция $f(x,y,z)$ интегрируется по z при фиксированных x и y, затем результат интегрируется по y при фиксированном x и, наконец, интегрирование производится по x в постоянных пределах от a до b.

Тройной интеграл

$$v=\iiint\limits_V dxdydz \qquad (1.23)$$

выражает собой объем v области (тела) V. Если подынтегральная функция $f(x,y,z)$ задает плотность $m(x,y,z)$ тела, занимающего область V, то тройной интеграл выражает массу m этого тела:

$$m=\iiint\limits_V m(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (1.24)$$

1.18. Вычислить интеграл $I=\iiint\limits_V (x+y+z)\ dv$, где область V ограничена плоскостями $x=0, y=0$, $z=0, x+y+z=1$.

r Множество V – тетраэдр, который можно задать в виде $V=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-x-y\}$ (рис. 1.13).

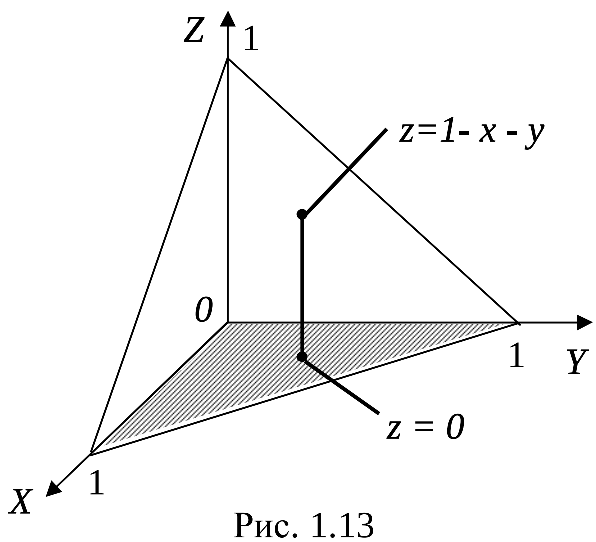

Рис. 1.13

По формуле (1.22) имеем

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)\ dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\frac{1}{2}(x+y+z)^2\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(1-(x+y)^2\right)\ dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(y-\frac{1}{3}(x+y)^3\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(y-\frac{1}{3}(1-x^3)-x\right)dx=\frac{1}{8}. \ \blacktriangle$$

1.19. Вычислить тройные интегралы по областям, ограниченным указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V yzdv;\quad x^2+y^2+z^2=R^2, z\ge 0;$

2) $\iiint\limits_V xyzdv;\quad x^2+y^2+z^2=R^2, x^2+y^2+z^2=2Rz; x\ge 0, y\ge 0;$ (общая часть)

3) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dv;\quad y^2+z^2=x^2,\quad x^2+y^2+z^2=R^2, x\ge 0;$ (общая часть)

4) $\iiint\limits_V xyzdv;\quad y=x^2, x=y^2, z=xy, z=0;$

5) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dv;\quad z=y^2-x^2, z=0, y=1.$

Отв.: 1) 0; **2)** $53R^6/3840$; **3)** $\left(2-\sqrt{2}\right)pR^5/5$; **4)** $1/96$; **5)** $4/15$.

1.20. Вычислить с помощью тройного интеграла объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

1) $x^2+y^2+4z^2=1;$

2) $z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2;$

3) $az=x^2+y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0);$

4) $x+y+z=a, x+y+z=2a, x+y=z, x+y=2z,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0;$

5) $y^2=4a^2-3ax, y^2=ax, z=\pm h;$

6) $y^2/b^2+z^2/c^2=2\,x/a, x=a.$

Отв.: 1) $2p/3$; **2)** $3/35$; **3)** $pa^3/6$; **4)** $49a^3/864$; **5)** $32a^2h/9$; **6)** $pabc$.

Пусть переход от переменных x,y,z к новым переменным u,v,w осуществляется по формулам $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$, где функции $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка и устанавливают взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области V пространства XYZ и точками некоторой области V' пространства UVW. Пусть далее якобиан J в области V' не обращается в нуль:

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}\ne 0. \tag{1.25}$$

Тогда пользуются формулой

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]|J|dudvdw \ . \qquad (1.26)$$

В частности, при переходе от декартовых координат к *цилиндрическим координатам* r, j, z $(ЦСК)$ (рис. 1.14), связанным с x, y, z соотношениями

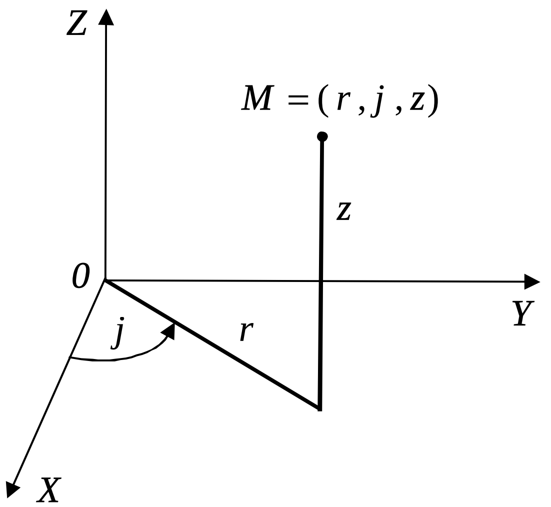

Рис. 1.14

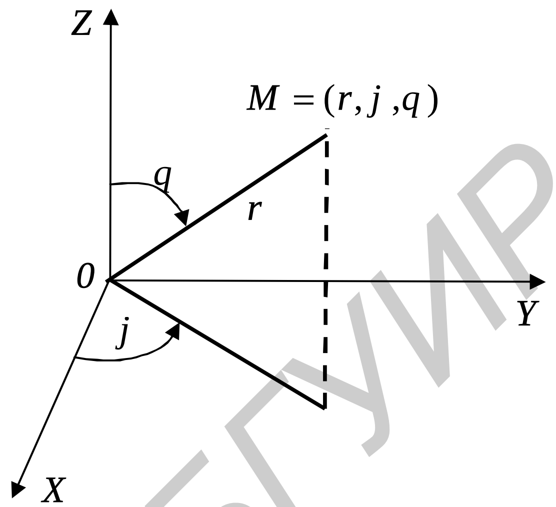

Рис. 1.15

$$x = r\cos j\,,\ y = r\sin j\,,\ z = z, \qquad (1.27)$$

$(0 \le r < +\infty, 0 \le j < 2p$ или $-p \le j < p, |z| < \infty)$, якобиан J преобразования (1.27), согласно формуле (1.25) $(u = r, v = j, w = z)$, равен $J = r$. Тогда, согласно (1.26), *формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам* имеет вид

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V} f(r\cos j, r\sin j, z)\, r\, dr\, dj\, dz. \qquad (1.28)$$

Заметим, что в ЦСК $x^2 + y^2 = r^2$. Далее, согласно (1.28), формулы (1.23) и (1.24) для объема тела V и его массы с плотностью $m(x,y,z)$ в ЦСК принимают вид соответственно:

$$v = \iiint\limits_{V'} r\, dr\, dj\, dz, \qquad (1.29)$$

$$m = \iiint\limits_{V'} m(r\cos j, r\sin j, z)\, r\, dr\, dj\, dz, \qquad (1.30)$$

где V' – образ области V при преобразовании (1.28).

При переходе от декартовых координат x, y, z к *сферическим координатам* r, j, q (ССК), связанным с x, y, z соотношениями

$$x = r\sin q\cos j\,,\ y = r\sin q\sin j\,,\ z = r\cos q\,, \qquad (1.31)$$

$(0 \le r \le +\infty, 0 \le j < 2p)$ или $(-p \le j < p, 0 \le q \le p)$, модуль якобиана J преобразования (1.31), согласно формуле (1.25) $(u = r, v = j, w = q)$, $|J| = r^2 \sin q$. Тогда, согласно (1.26), *формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам* имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\sin q\cos j, r\sin q\sin j, r\cos q)r^2\sin q\, drdj\,dq, \quad (1.32)$$

где V' – образ области V при преобразовании (1.31).

В ССК $x^2+y^2+z^2=r^2$. Далее, согласно (1.28), формулы (1.23) и (1.24) для объема тела V и его массы с плотностью $m(x,y,z)$ в ССК принимают вид соответственно:

$$v = \iiint\limits_{V'} r^2\sin q\, dr\,dq\,dj, \quad (1.33)$$

$$m = \iiint\limits_{V'} m(r\sin q\cos j, r\sin q\sin j, r\cos q)r^2\sin q\, dr\,dq\,dj, \quad (1.34)$$

где, по-прежнему, V' – образ области V при преобразовании (1.31).

1.21. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\mathrm{I} = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz:$$

а) в ПДСК; б) в ЦСК; в) в ССК, если V – цилиндр, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=H$ (рис. 1.16).

r а) В ПДСК задача решается наиболее просто:

$$\mathrm{I} = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^H f(x,y,z)\,dz;$$

б) В ЦСК угловая координата j изменяется, очевидно, от 0 до $2p$, полярная координата r в круге $x^2+y^2\le a^2$ изменяется от $r=0$ до $r=a$. Координата z в ЦСК имеет тот же смысл, что и в ПДСК. Поэтому в данном цилиндре z изменяется от 0 до H. Таким образом, в ЦСК, в силу формулы (1.30),

$$I = \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^a r\;\; dr \int\limits_0^H f(r\cos j, r\sin j, z)dz;$$

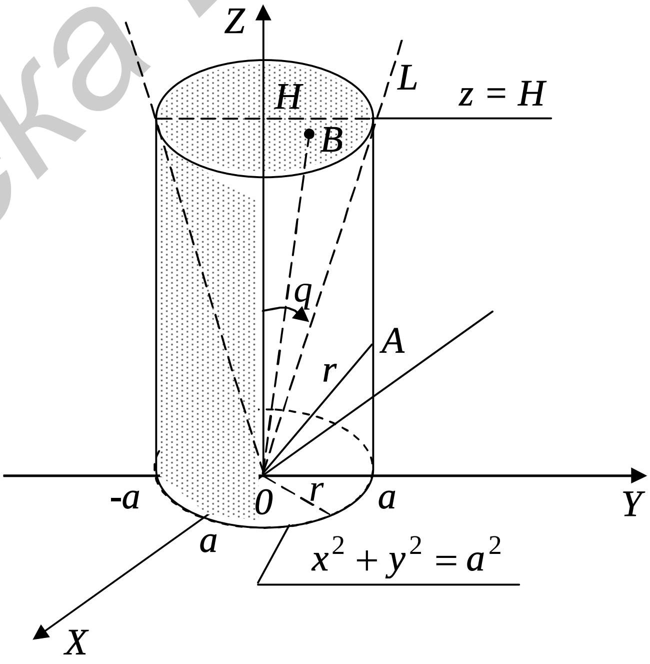

Рис. 1.16

в) В ССК одним тройным интегралом не удастся обойтись, ибо луч OL на поверхности цилиндра разделяет точки B, лежащие на поверхности $z=H$, от точек A, лежащих на боковой поверхности цилиндра. Уравнение поверхности $z=H$ в ССК, согласно (1.31), имеет вид $H=r\cos q \Rightarrow r = H/\cos q$. Уравнение боковой поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$ в ССК, согласно (1.31), принимает вид

$$r^2\sin^2 q\cos^2 j + r^2\sin^2 q\sin^2 j = a^2 \Rightarrow r^2\sin^2 q = a^2 \Rightarrow r = a/\sin q.$$

Для точек поверхности $z=H$ угол q очевидно изменяется в пределах от

$q=0$ до $q=q_1=arctg(a/H)$, а для точек боковой поверхности $x^2+y^2=a^2$ координата q изменяется от $q=arctg(a/H)$ до $q=\frac{p}{2}$. Координата j в обоих случаях изменяется от *0* до *2p*.

Таким образом, согласно (1.32), имеем

$$\mathrm{I}=\int_0^{2p}dj\int_0^{arctg(a/H)}\sin q\,dq\int_0^{H/\cos q}r^2 f(r\sin q\cos j, r\sin q\sin j, r\cos q)dr+$$

$$+\int_0^{2p}dj\int_{arctg(a/H)}^{\frac{p}{2}}\sin q\,dq\int_0^{a/\sin q}r^2 f(r\sin q\cos j, r\sin q\sin j, r\cos q)dr. \quad \text{p}$$

1.22. Вычислить интеграл

а) $\mathrm{I}_1=\iiint\limits_V\frac{(x^2+y^2)dv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\quad V=\left\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le a\right\}$;

б)* $\mathrm{I}_2=\iiint\limits_V dxdydz$, $V=\left\{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\le 4xyz, x\ge 0, y\ge 0\right\}$.

r а) Перейдем к цилиндрическим координатам $x=r\cos j$, $y=r\sin j$, $z=z$. Область интегрирования V – конус в ПДСК (рис. 1.17).

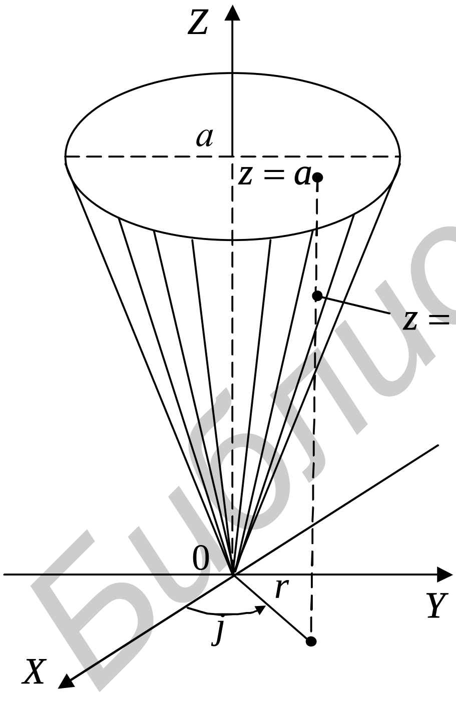

Рис. 1.17

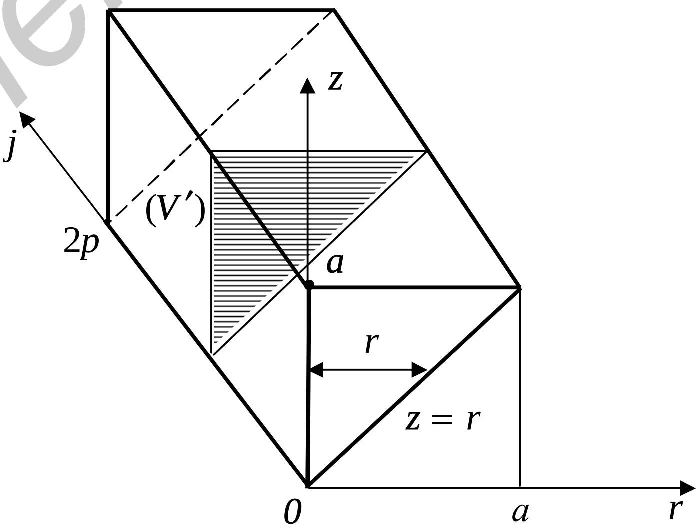

Рис. 1.18

$V'=\left\{0\le j\le 2p, 0\le r\le z\le a\right\}$, т.е. является призмой (рис. 1.18).

Вычисляем интеграл:

$$I_1=\iiint\limits_{V'}\frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}r\,dr\,dj\,dz=\int_0^{2p}dj\int_0^a dz\int_0^z\frac{r^3dr}{\sqrt{r^2+z^2}}=2p\int_0^a\frac{2-\sqrt{2}}{3}z^3dz=\frac{p}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)a^4.$$

б*) Перейдем к сферическим координатам

$$x = r\cos j\ \cos q,\quad y = r\cos j\ \sin q,\quad z = r\sin q, \qquad (1.31')$$

где $r \ge 0,\quad 0 \le j \le 2p,\ -p/2 \le 0 \le p/2$. Подстановка в заданные неравенства дает

$$\begin{cases} r^4 \le 4r^3\cos j\ \sin j\ \cos^2 q\ \sin q, \\ r\cos j\ \cos q \ge 0, r\sin j\ \cos q \ge 0. \end{cases}$$

Так как $r \ge 0, \cos q \ge 0$, то эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} r \le 2\sin 2j\ \cos^2 q\ \sin q, \\ \cos j \ge 0, \sin j \ge 0 \Rightarrow 0 \le j \le p/2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы имеет место тогда и только тогда, когда $\sin q \ge 0$, т. е. $0 \le q \le p/2$. Следовательно, образ V' области V при преобразовании декартовых координат в сферические по формулам (1.31′) имеет вид

$$V' = \left\{0 \le r \le 2\sin 2j\ \cos^2 q\ \sin q, 0 \le j \le p/2, 0 \le q \le p/2\right\}.$$

Совершаем замену в интеграле I_2 и вычисляем его (в этом случае $J = r^2\cos q$)

$$I_2 = \iiint\limits_{V'} r^2\cos q\ dr dq\ dj = \int_0^{2p} dj \int_0^{p/2}\cos q\ dq \int_0^{2\sin 2j\ \cos^2 q\ \sin q} r^2 dr =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{p/2}\sin^3 2j\ dj \int_0^{p/2}\cos^7 q\ \sin^3 q\ dq.$$

Первый интеграл вычисляется с помощью замены $\cos 2j = t$, второй – замены $\cos q = J$. В результате получим $I_2 = 2/45$. р

1.23. Вычислить интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам:

1) $\iiint\limits_V y dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, z = h$;

2) $\iiint\limits_V z dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2, z = a$;

3) $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$;

4) $\int_0^{a/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\, dz$.

Отв.: 1) $-4a^3h/3$; **2)** $pa^4/2$; **3)** $19p/24$; **4)** $a^4/10$.

1.24. Вычислить интегралы, перейдя к сферическим координатам по областям, ограниченным указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V yzdxdydz$, $x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$;

2) $\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)dxdydz}{x^2+y^2+z^2+1}$, $x^2+y^2+z^2=1$;

3) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2+z^2=2Rz$ (общая часть), $x\geq 0, y\geq 0$;

4) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, $y^2+z^2=x^2$, $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geq 0$ (общая часть);

5*) $\iiint\limits_V dxdydz$, $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$.

Отв.: 1) 0; **2)** 0; **3)** $53R^6/3840$; **4)** $pR^5(2-\sqrt{2})/5$; **5)** $pa^2/2$.

1.3. Приложения кратных интегралов

Геометрические и механические приложения двойных интегралов: площадь поверхности, объем криволинейного цилиндра, центр масс пластинки, статические моменты и моменты инерции пластинки. Геометрические и механические приложения тройных интегралов: объем тела, центр масс тела. Статические моменты и моменты инерции тела.

Кратные интегралы широко применяются при решении многих геометрических и физических задач. Двойные интегралы используются для вычисления объема криволинейного цилиндра (1.2), площади плоской фигуры (1.3), массы плоской пластинки с заданной поверхностной плотностью (1.4).

Примеры вычисления площади и массы плоской пластинки приведены выше. Вычислим некоторые объемы.

1.25. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1-x^2-y^2, y=x, y=x\sqrt{3}, z=0$ и расположенного в 1-м октанте.

r Данное тело ограничено сверху параболоидом $z=1-x^2-y^2$ и плоскостями

$y = x, y = x\sqrt{3}, z = 0$ (рис.1.19). Область интегрирования D – круговой сектор OAB, ограниченный линией пересечения параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$ с плоскостью $z = 0$ и прямыми $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ и $y = x$, $z = 0$. Следовательно, $v = \iint\limits_D 1 - x^2 - y^2 dxdy$. Перейдя в этом интеграле к полярным координатам ρ и φ, получим

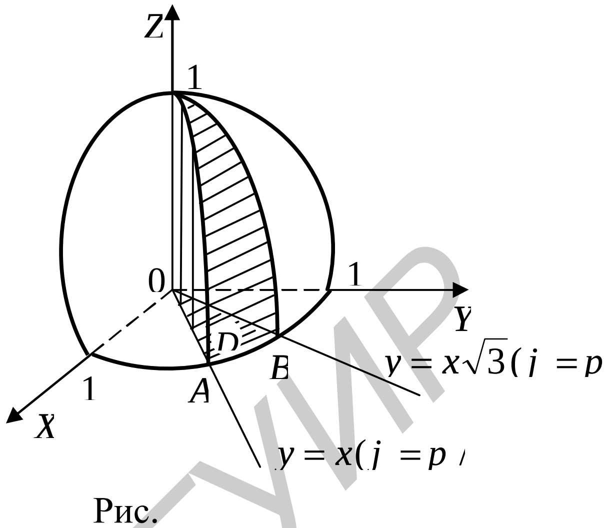

Рис.

$$v = \iint\limits_D (1 - \rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{48}. \quad ◄$$

1.26. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$ (рис. 1.20).

► Для объема части заданного тела имеем

$$\frac{1}{8}v = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2}\,dxdy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int\limits_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}a^3 \Rightarrow v = \frac{16}{3}a^3. \quad ◄$$

1.27. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

1) $x^2 + y^2 = 8, x = y = z = 0, x + y + z = 4$.

2) $x^2 + 4y^2 + z = 1, z = 0$.

3) $x = 2y^2, x + 2y + z = 4, x = y = 0$.

4) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$.

5) $z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = y = z = 0$.

6) $z^2 = xy, y = 4, x = y = z = 0$.

7) $z = 5x, x^2 + y^2 = 9, z = 0$.

8) $x + y + z = 6, 3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = z = 0$.

9) $z = x + y + 1, y^2 = x, x = 1, y = 0, z = 0$.

10) $z = xy, x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

11) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, y = 0, z = x/2, z = x$.

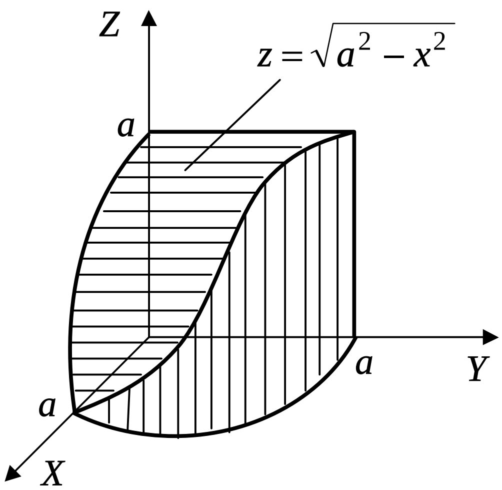

Рис. 1.20

Отв.: **1)** $8\pi - 32\sqrt{2}/3$; **2)** $\pi/4$; **3)** $17/5$; **4)** $88/105$; **5)** 40/3; **6)** 39/9; **7)** 90; **8)** 12; **9)** 79/60; **10)** 4; **11)** $a^2b/3$.

Если гладкая однозначная поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то *площадь поверхности* выражается формулой

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy, \qquad (1.35)$$

где D – проекция данной поверхности на плоскость XY. Аналогично, если поверхность задана уравнением $x = f(y, z)$, то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\, dydz, \qquad (1.36)$$

где D – проекция поверхности на плоскость YZ. Если же уравнение поверхности имеет вид $y = f(x, z)$, то

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\, dxdz, \qquad (1.37)$$

где D – проекция поверхности на плоскость XZ.

1.28. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ay$ (рис. 1.21).

r Из уравнения сферы (для 1-го октанта) имеем: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

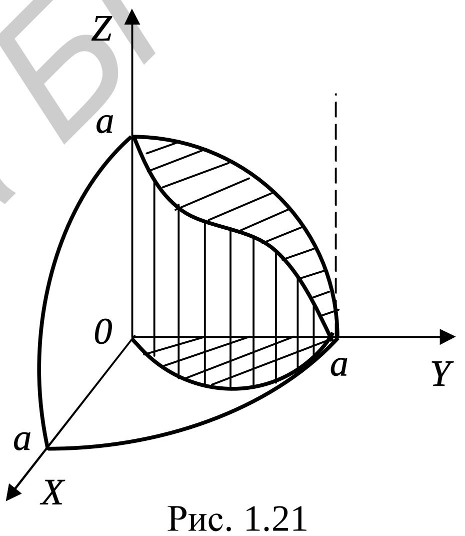

Рис. 1.21

Часть сферы, расположенная в 1-м октанте, проектируется в полукруг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = ay$ и осью Y. Этот полукруг и является областью интегрирования D.

Поверхность расположена в 4-х октантах, поэтому искомая площадь вычисляется по формуле (1.35):

$$S = 4a \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

В ПСК уравнение окружности $x^2 + y^2 = ay$ имеет вид $r = a\sin q$, и в этой системе

$$S = 4a \int\limits_0^{p/2} dj \int\limits_0^{a\sin q} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2a^2(p - 2). \ \text{р}$$

1.29. Вычислить площадь части поверхности параболоида $x = 1 - y^2 - z^2$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 1$ (рис. 1.22).

r Область интегрирования D –

окружность $y^2+z^2=1$, расположенная в плоскости YZ. Из уравнения параболоида имеем $x'_y=-2y, x'_z=-2z$.

Тогда по формуле (1.36) $S=\iint\limits_D \sqrt{1+4\left(y^2+z^2\right)}\,dydz$. Вводим полярные координаты r и j по формулам $y=r\cos j, z=r\sin j$. В итоге

$$S=\int_0^{2p} dj\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}.\ p$$

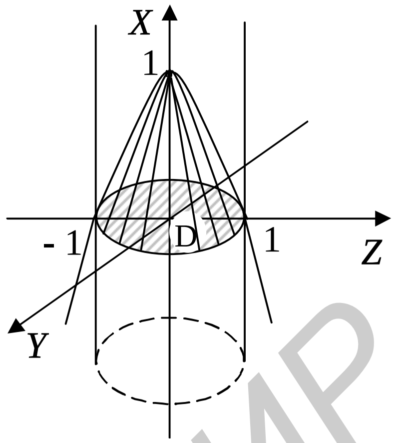

Рис. 1.22

1.30. Найти площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

Отв.: $p\sqrt{2}$.

1.31. Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2=2z$, отсеченной плоскостями $x=2y, y=2x, x=2\sqrt{2}$.

Отв.: 13.

1.32. Найти площадь части поверхности $y=x^2+z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+z^2=1$ и расположенной в 1-м октанте.

Отв.: $p(5\sqrt{5}-1)/24$.

1.33. Найти площадь части поверхности цилиндра $z=x^2$, вырезанной плоскостями $x+y=\sqrt{2}, x=0, y=0$.

Отв.: $5/6+\left(\sqrt{2}/4\right)\cdot\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

1.34. Вычислить площадь поверхности конуса $x^2=y^2+z^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2+z^2=1$.

Отв.: π.

1.35. Найти площадь поверхности цилиндра $x^2+z^2=4$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

Отв.: 32.

1.36. Найти площадь части поверхности $z^2=2xy$, вырезанной плоскостями $x=1, y=4, z=0$.

Отв.: $40\sqrt{2}/3$.

Если пластинка занимает область D в плоскости XY и имеет поверхностную плотность $m(x,y)$, то, согласно формуле (1.4), ее масса вычисляется по формуле

$$m = \iint_D m(x, y)\, dxdy\,.$$

Статические моменты пластинки D относительно осей X и Y находятся по формулам

$$M_x = \iint_D y m(x, y) dxdy, \quad M_y = \iint_D x m(x, y) dxdy\,. \qquad (1.38)$$

Координаты x_c, y_c *центра тяжести* пластинки D вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (1.39)$$

где m – масса пластинки. Если пластинка D однородна ($m(x, y) = const$), то формулы (1.39) принимают вид

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy, y_c = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy\,, \qquad (1.40)$$

где S – площадь пластинки D.

Моменты инерции пластинки D *относительно осей* X и Y вычисляются по формулам

$$I_x = \iint_D y^2 m(x, y) dxdy, \; I_y = \iint_D x^2 m(x, y) dxdy, \qquad (1.41)$$

а *момент инерции относительно начала координат* – по формуле

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy. \qquad (1.42)$$

Положив в формулах (1.41), (1.42) $m(x, y) = const$, получим формулы для вычисления моментов инерции плоской однородной фигуры.

1.37. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$ (рис. 1.23), $m = 1$.

r Так как фигура симметрична относительно оси X, то $y_c = 0$. Находим площадь области D. Поскольку она симметрична относительно оси X, то ее площадь

$$S = \iint_D dxdy = 2\int_0^2 dy \int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx = 8.$$

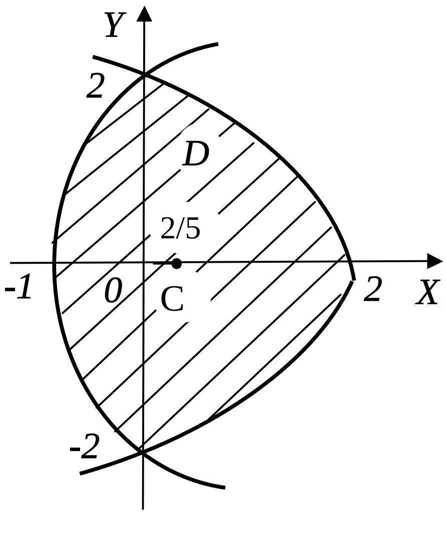

Рис. 1.23

Находим статический момент M_y по формуле (1.38):

$$M_y = \iint_D xdxdy = 2\int_0^2 dy \int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} xdx = \frac{16}{5}.$$

Следовательно, $x_c = M_y / s = 2/5$. Итак, центр тяжести данной плоской фигуры расположен в точке $C = (2/5, 0)$. р

1.38. Найти координаты центра тяжести и моменты инерции пластинки $D = \left\{ y \ge x^2, y \le 1 \right\}$, изображенной на рис. 1.24, если плотность $m(x, y) = x^2 y$.

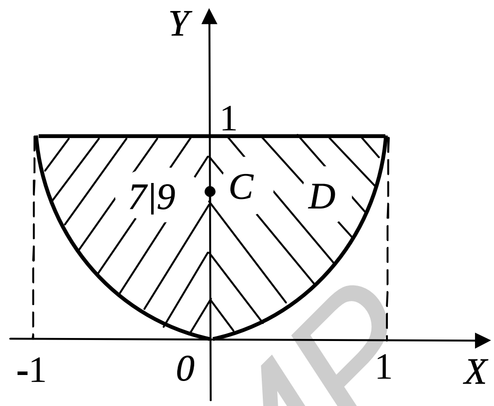

Рис. 1.24

Δ Находим массу пластинки

$$m = \iint_D x^2 y dx dy = \int_{-1}^{1} x^2 dx \int_{x^2}^{1} y dy = \frac{4}{21}.$$

Координаты центра тяжести находим по формулам (1.40):

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_D x^3 y dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^{1} x^3 dx \int_{x^2}^{1} y dy = 0,$$

(этого и следовало ожидать, поскольку D и $m(x, y)$ симметричны относительно оси *Y*).

$$y_c = \frac{1}{m} \iint_D x^2 y^2 dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^{1} x^2 dx \int_{x^2}^{1} y^2 dy = \frac{7}{9}.$$

Итак, $C = (0, 7/9)$.

По формулам (1.41), (1.42) определяем моменты инерции пластинки D:

$$I_x = \iint_D x^2 y^3 dx dy = \int_{-1}^{1} x^2 dx \int_{x^2}^{1} y^3 dy = \frac{4}{33};$$

$$I_y = \iint_D x^4 y dx dy = \int_{-1}^{1} x^4 dx \int_{x^2}^{1} y dy = \frac{4}{45};$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{104}{495}. \text{ р}$$

1.39. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и его хордой $x/5 + y/3 = 1$. **Отв.:** $\left(\frac{10}{3(p-2)}, \frac{2}{p-2} \right)$.

1.40. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, если ее плотность $m(x, y) = xy$. **Отв.:** $(8/5, 112/45)$.

1.41. Найти координаты центра тяжести кардиоиды $r = a(1 + \cos j)$ с плотностью $m(x, y) = 1$. **Отв.:** $(5a/6, 0)$.

1.42. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной параболами $y^2 = x$ и $x^2 = y$. **Отв.:** $(9/20, 9/20)$.

1.43. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = x^2 - x^4$, $x \ge 0$. **Отв.:** $(3p/16, 0)$.

1.44. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной кривой

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$ и осью X. **Отв.:** $(\pi a, 5a/6)$.

1.45. Вычислить момент инерции I_0 фигуры, ограниченной линиями $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,\ x = 0,\ y = 0.$ **Отв.:** $ab(a^2 + b^2)/12.$

1.46. Вычислить момент инерции I_x кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Отв.: $21\pi a^4/32.$

1.47. Вычислить момент инерции I_0 фигуры, ограниченной линией $x^2 + y^2 - 2x = 0,$ если ее плотность $\mu(x, y) = 3{,}5.$ **Отв.:** $21\pi/4.$

1.48. Вычислить момент инерции I_y эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (\mu = 1).$

Отв.: $\pi a^3 b/4.$

1.49. Вычислить момент инерции I_x треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 2, x = 2, y = 2 (\mu = 1).$ **Отв.:** 4.

1.50. Вычислить момент инерции I_x фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}, x + y = 3, y = 0\ (\mu = 1).$ **Отв.:** 2,4.

Объем v *тела* V в пространстве обычно вычисляется по формуле (1.23):

$$v = \iiint_V dxdydz,$$

в которой в тройном интеграле в случае необходимости можно переходить к различным координатам (цилиндрическим, сферическим и др.).

1.51. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1, z = 5 - x^2 - y^2$ (рис. 1.25).

◄ В ЦСК искомый объем $v = \iiint_V \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz,$

где

$$V = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2, 1 \le z \le 5 - \rho^2\right\}.$$

Тогда $v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho \int_1^{5-\rho^2} dz = 8\pi$. ►

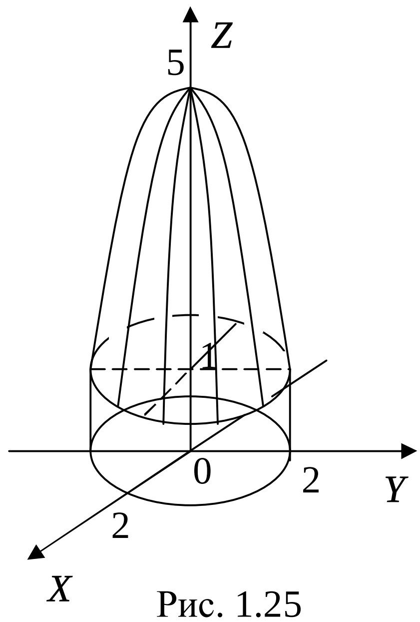

Рис. 1.25

Масса m *тела* V вычисляется по формуле (1.24):

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)dxdydz,$$

где $\mu(x, y, z)$ – объемная плотность тела.

1.52. Найти массу шара радиусом $R = 3,$ плотность которого пропорциональна расстоянию от центра шара, причем на расстоянии единицы от центра плотность равна двум.

◄ Поместим начало ССК в центр шара. В этой системе уравнение сферы есть $r = 3$. По условию задачи плотность $\mu = kr,$ где k – коэффициент пропорциональности. При $r = 1$ плотность $\mu = 2,$ т. е. $2 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \mu = 2r.$

Поэтому масса шара

$$m = \iiint\limits_V 2r \cdot r^2 \sin q \, dr \, dq \, dj \ = 2\int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^{p} \sin q \, dq \int\limits_0^{3} r^3 dr = 162p. \ \text{р}$$

1.53. Вычислить с помощью тройного интеграла объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

1) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1.$

2) $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2.$

3) $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, a > 0.$

4) $x + y + z = a, x + y + z = 2a, x + y = z, x + y = 2z.$

5) $y^2 = 4a^2 - 3ax, y^2 = ax, z = \pm h.$

6) $y^2 / b^2 + z^2 / c^2 = 2x / a, x = a.$

Отв.: 1) $2p/3$; **2)** $3/35$; **3)** $pa^3/6$; **4)** $49a^3/864$; **5)** $32a^2h/9$; **6)** $pabc.$

1.54. Из октанта шара $x^2 + y^2 + z^2 \le c^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ вырезано тело, ограниченное координатными плоскостями и плоскостью $x/a + y/b = 1,\ a \le c,\ b \le c$. Найти массу этого тела, если плотность в каждой его точке (x, y, z) пропорциональна аппликате точки.

Отв.: $ab(bc^2 - a^2 - b^2)/24.$

1.55. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a, x = y = z = 0,$ если плотность в каждой ее точке пропорциональна аппликате этой точки. **Отв.:** $a^4/24.$

1.56. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $z = h, z^2 = x^2 + y^2,$ если плотность в каждой его точке пропорциональна аппликате этой точки.

Отв.: $p\ h^4/4.$

1.57. Вычислить массу цилиндра радиусом R и высотой H, если его плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра. **Отв.:** $pR^2H(3R^2 + 2H^2)/6.$

1.58. Определить массу сферического слоя между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,$ если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

Отв.: $6kpa^2,$

где k – коэффициент пропорциональности.

Координаты центра тяжести C тела V с объемной плотностью $m(x, y, z)$ вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V xm(x, y, z)dv,\ y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V ym(x, y, z)dv,\ z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V zm(x, y, z)dv, \quad (1.43)$$

где m – масса тела.

Величины

$$M_{yz} = \iiint\limits_V xm(x,y,z)dv, M_{xz} = \iiint\limits_V ym(x,y,z)dv, M_{xy} = \iiint\limits_V zm(x,y,z)dv \quad (1.44)$$

называются *статическими моментами тела* относительно плоскостей YOZ, *XOZ*, *XOY* соответственно.

Моменты инерции относительно координатных осей X, Y, Z тела *V* определяются соответственно:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)m(x,y,z)dv, I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)m(x,y,z)dv,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)m(x,y,z)dv, \quad (1.45)$$

а *момент инерции* тела *V* *относительно начала координат* выражается формулой

$$I_0 = I_x + I_y + I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2+ \quad (1.46)$$

$$+z^2)m(x,y,z)dxdydz.$$

Моменты инерции тела *V* *относительно координатных плоскостей XY, YZ, XZ* вычисляются по формулам соответственно:

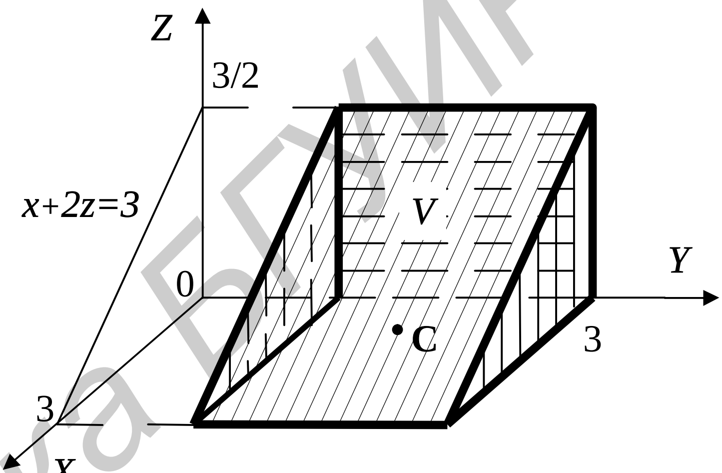

Рис. 1.26

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 m(x,y,z)dv,\ I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 m(x,y,z)dv,\ I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 m(x,y,z)dv. \quad (1.47)$$

1.59. Найти координаты центра тяжести призматического тела, ограниченного плоскостями $x=0,\ z=0,\ y=1,\ y=3,\ x+2z=3;$ плотность $m=1$ (рис. 1.26).

r Находим объем тела V (по сути дела его массу, поскольку плотность $m=1$):

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{(3-x)/2} dz = \frac{9}{2}.$$

Тогда

$$x_c = \frac{2}{9}\iiint\limits_V xdxdydz = \frac{2}{9}\int\limits_0^3 xdx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{(3-x)/2} dz = 1;$$

$$y_c = \frac{2}{9}\iiint\limits_V ydxdydz = \frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 ydy \int\limits_0^{(3-x)/2} dz = 2;$$

$$z_c = \frac{2}{9}\iiint\limits_V zdxdydz = \frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{(3-x)/2} zdz = \frac{1}{2}.$$

Итак, $C = (1, 2, 1/2)$. p

1.60. Вычислить моменты инерции однородного шара радиусом R и весом P относительно его центра и диаметра.

r Очевидно, что плотность шара $m = P/vg = 3P/4pgR^3$. Поместим центр шара в начале координат, тогда его поверхность будет определяться уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Момент инерции относительно центра шара вычислим в ССК:

$$I_0 = m\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dv = m\iiint\limits_{V'} r^4 \sin q \, dr\, dq\, dj =$$

$$= m\int_0^{2p} dj \int_0^{p} \sin q \, dq \int_0^R r^4 dr = m \cdot 2p \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{3PR^2}{5g}.$$

Ясно, что вследствие однородности ($m = const$) и симметрии шара его моменты инерции относительно любого диаметра равны. Вычислим, к примеру, момент инерции относительно диаметра, лежащего на оси Z.

$$I_z = m\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz = m\iiint\limits_{V'} r^2 \sin^2 q r^2 \sin q \, dr\, dq\, dj =$$

$$= m\int_0^{2p} dj \int_0^{p} \sin^3 q \, dq \int_0^R r^4 dr = \frac{2PR^2}{5g}. \text{ p}$$

1.61. Найти центр тяжести тела с плотностью m $(m_0 - const)$:

1) $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0, m = m_0/\sqrt{x^2 + y^2}$.

2) $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h, m = m_0 z^2$.

3) $x^2 + y^2 \le z \le h, m = m_0\sqrt{h - z}$.

4) $x^2 + y^2 - z^2 \le a^2, 0 \le z \le h, m = m_0 z$.

5) $0 \le z \le x^2 - y^2, x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, m = m_0 z$.

Отв.: **1)** $(8R/3p^2, 0, 0)$; **2)** $(0, 0, 5h/6)$; **3)** $(0, 0, 4h/7)$;

4) $\left(0, 0, \dfrac{4(5a^2 + 3h^2)}{15(2a^2 + h^2)} \cdot h\right)$; **5)** $(64\sqrt{2}/35p, 0, 4/3p)$.

1.62. Найти момент инерции I_z однородных тел $(m = 1)$:

1) $2ax \ge z^2, x^2 + y^2 \le ax$. 2) $x^2 + y^2 \le a^2, x + y + z \le a\sqrt{2}, z \ge 0$.

3) $0 \le z \le x^2 + y^2, |x + y| \le 1, |x - y| \le 1$. 4) $x^2 + y^2 + z^2 \le 2, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$.

5) $\sqrt{y^2/b^2 + z^2/c^2} \le x/a \le 1, a > 0, b > 0, c > 0$.

Отв.: **1)** $\dfrac{64\sqrt{2}}{135}a^5$; **2)** $pa^5/\sqrt{2}$; **3)** $14/45$;

4) $4p(4\sqrt{2} - 5)/15$; **5)** $pabc(b^2 + 4a^2)/20$.

1.63. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных $(m = 1)$ тел:

1) $x/a + y/b + z/c \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, a > 0, b > 0, c > 0$.

2) $\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2} \le z/c \le 1$.

3) $\frac{1}{2}\left(x^2/a^2+y^2/b^2\right)\le z/c\le x/a+y/b, a>0, b>0, c>0.$

Отв.:

1) $I_{xy}=abc^3/60, I_{yz}=a^3bc/60, I_{zx}=ab^3c/60.$

2) $I_{xy}=pabc^3/5, I_{yz}=pa^3bc/20, I_{zx}=pab^3c/20.$

3) $I_{xy}=7pabc^3/2, I_{yz}=4pa^3bc/3, I_{zx}=4pab^3c/3.$

2. Криволинейные интегралы

2.1. Криволинейные интегралы 1-го (КрИ-1) и 2-го (КрИ-2) рода

Определение и свойства КрИ-1. Вычисление КрИ-1 и их приложения. Определение и свойства КрИ-2. Вычисление КрИ-2 и их приложения.

Пусть на плоскости *XY* задана гладкая кривая l, в точках которой определена непрерывная функция $f(x,y)$. Кривую l произвольным образом разобьем на части l_i длиной Δl_i $i=\overline{1,n}$. В части l_i выберем произвольную точку (x_i,h_i) и составим интегральную сумму

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,h_i)\Delta l_i. \qquad (2.1)$$

Обозначим $\Delta=\max_{1\le i\le n}\Delta l_i$. Если существует предел интегральной суммы (2.1) при $\Delta\to 0$, не зависящий ни от способа деления l на части l_i, ни от выбора точек $(x_i,h_i)\in l_i$, то этот предел называется *криволинейным интегралом 1-го рода* (КрИ-1) *по дуге* l от функции $f(x,y)$ и обозначается $\int_l f(x,y)dl$.

Итак, по определению

$$\int_l f(x,y)dl=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,h_i)\Delta l_i,$$

(dl – дифференциал длины дуги).

Аналогично, если l – гладкая кривая в $\boldsymbol{R}^3$, а $f(x,y,z)$ – непрерывная функция в точках этой кривой, то КрИ-1 по l определяется равенством

$$\int_l f(x,y,z)dl=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,h_i,V_i)\Delta l_i.$$

Пусть A – начальная точка кривой l, B – конечная. *Если кривая AB задана явно уравнением* $y=g(x)$, $a\le x\le b$, *то* КрИ-1 *вычисляется по формуле*

$$\int_{AB} f(x,y)dl=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}dx. \qquad (2.2)$$

Если кривая l *задана в полярных координатах равенством* $r = r(j)$, $a \le j \le b$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(r(j)\cos j, r(j)\sin j)\sqrt{r^2 + r'^2}dj, \qquad (2.3)$$

где a, b – значения j, определяющие на кривой точки *A* и *B*.

В случае, *если* l *задана параметрически* уравнениями $x = x(t), y = y(t)$ и параметр t изменяется монотонно на отрезке $[a, b], (a < b)$ при перемещении по кривой l из *A* в *B*, верна следующая формула вычисления КрИ-1:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2 + y'^2}dt. \qquad (2.4)$$

Для пространственной кривой $l = l_{AB}$, заданной параметрически уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $a \le t \le b$, формула (2.4) заменяется формулой

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt. \qquad (2.5)$$

КрИ-1 обладает следующими свойствами:

1. *(Линейность).* Если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – непрерывные функции вдоль кривой l, то $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$:

$$\int\limits_{l}(af(x,y) + bg(x,y))dl = a\int\limits_{l} f(x,y)dl + b\int\limits_{l} g(x,y)dl.$$

2. *(Аддитивность).* Если кусочно-гладкая кривая l состоит из конечного числа k гладких дуг l_k, $k = \overline{1,m}$, то

$$\int\limits_{l} f(x,y)dl = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{l_k} f(x,y)dl.$$

3. *КрИ-1 не зависит от направления пути интегрирования,* т. е.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl.$$

4. *(Оценка модуля интеграла):*

$$\left|\int\limits_{l} f(x,y)dl\right| \le \int\limits_{l}\left|f(x,y)\right| dl.$$

5. $\int\limits_{l} dl = L,$ где L – длина кривой l.

6. (***Теорема о среднем***). *Если* $f(x,y)$ *непрерывна в точках кривой* l, *то* $\exists (x,h) \in l: \int\limits_{l} f(x,y)dl = f(x,h)L,$ *где L – длина кривой* l.

2.1. Вычислить КрИ-1:

$I=\int\limits_l \frac{x}{y}dl,$ где l – дуга параболы $y^2=2x,$ соединяющая точки $(1,\sqrt{2})$ и $(2,2).$

r Имеем: $y=\sqrt{2x}$, $y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}, dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx, 1\le x\le 2.$

По формуле (2.2) получаем

$$\int\limits_l \frac{x}{y}dl=\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}}\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}). \quad \text{p}$$

2.2. Вычислить КрИ-1:

$I=\int\limits_l y^2dl,$ где l – арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2p$.

r Имеем:

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt,$$

и потому по формуле (2.4)

$$\int\limits_l y^2dl=\int\limits_0^{2p} a^2(1-\cos t)^2 a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt=\frac{256}{15}a^3. \quad \text{p}$$

2.3. Вычислить $I=\int\limits_l (2z-\sqrt{x^2+y^2})dl,$ где l – первый виток *конической винтовой линии* $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, 0\le t\le 2p$.

r Находим

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt=\sqrt{2+t^2}dt.$$

Тогда $\int\limits_0^{2p}(2t-t)\sqrt{2+t^2}dt=\int\limits_0^{2p} t\sqrt{2+t^2}dt=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1+2p^2)^{3/2}-1\right).$ p

2.4. Вычислить КрИ-1:

$I=\int\limits_l \sqrt{x^2+y^2}dl,$ где l – кривая, заданная уравнением $(x^2+y^2)^{3/2}=a^2(x^2-y^2).$

r Перейдем к полярным координатам: $x=r\cos j, y=r\sin j$. Уравнение l примет вид $r=a^2\cos 2j$, где $j\in\Phi=\{j\,|\,-p/4\le j\le p/4,\quad 3p/4\le j\le 5p/4\}.$

Для вычисления интеграла применим формулу (2.3). Так как $\sqrt{x^2+y^2}=r=a^2\cos 2j$, $\sqrt{r^2+r'^2}dj=a^2\sqrt{1+3\sin^2 2j}\,dj$, то

$$I=\int\limits_{j\in\Phi} a^4\cos 2j\sqrt{1+3\sin^2 2j}\,dj=$$

$$=\frac{2a^4}{2\sqrt{3}}\int\limits_{-p/4}^{p/4}\sqrt{1+3\sin^2 2j}\,d(\sqrt{3}\sin 2j)=2a^4+\frac{a^4}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}+2). \quad \text{p}$$

2.5. Вычислить $I=\int\limits_l zdl,$ где l – линия пересечения поверхностей $x^2+y^2=z^2, y^2=ax,$ пробегаемая от точки $(0,0,0)$ до точки $(a,a,a\sqrt{2}).$

r В качестве параметра возьмем $x=t.$ Тогда параметрические уравнения кривой l примут вид $x=t,\, y=\sqrt{at},\, z=\sqrt{t^2+at},\, 0\le t\le a.$

Поскольку $dz=\dfrac{2t+a}{2\sqrt{t^2+at}}dt,\, dy=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{t}}dt,\, dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$ то применив формулу (2.5), получим

$$I=\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{8t^2+9at+2a^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{\left(2\sqrt{2}t+\frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{17}{32}a^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\left(2\sqrt{2}t+\frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{8t^2+9at+2a^2}-\frac{17}{32}\ln\left(2\sqrt{2}t+\frac{9a}{4\sqrt{2}}+\sqrt{8t^2+9at+2a^2}\right)\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right).$$ р

2.6. Вычислить КрИ – 1 по плоской кривой Γ:

1) $\int\limits_{\Gamma} x\,dl,$ Γ – отрезок с концами $(0,0)$ и $(1,2)$. **Отв.:** $\sqrt{5}/2.$

2) $\int\limits_{\Gamma}(2x+y)\,dl,$ Γ – ломаная $ABOA,$ где $A=(1,0), B=(0,2), O=(0,0).$

Отв.: $3+2\sqrt{5}.$

3) $\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,dl,$ Γ – граница треугольника с вершинами $(0,0),(1,0),(0,1).$

Отв.: $1+\sqrt{2}.$

4) $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}},$ Γ – отрезок с концами $(0,0)$ и $(1,2).$

Отв.: $\ln((3+\sqrt{5})/2).$

5) $\int\limits_{\Gamma} xy\,dl,$ Γ – граница прямоугольника с вершинами $(0,0),(4,0),(4,2),(0,2).$

Отв.: 24.

6) $\int\limits_{\Gamma} x^2 dl,$ Γ – дуга окружности $x^2+y^2=a^2,\ \ y\ge 0.$ **Отв.:** $pa^3/2.$

7) $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)^n dl,$ Γ – окружность $x^2+y^2=a^2,\ \ n>0.$ **Отв.:** $2pa^{2n+1}.$

8) $\int\limits_{\Gamma}(x-y)\,dl,$ Γ – окружность $x^2+y^2=ax.$ **Отв.:** $pa^2/2.$

9) $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dl,$ Γ – окружность $x^2+y^2=ax.$ **Отв.:** $2a^2.$

10) $\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,dl,$ Γ – правый лепесток лемнискаты $r=a^2\cos 2j$.

Отв.: $a^2\sqrt{2}.$

11) $\int\limits_{\Gamma} x\sqrt{x^2-y^2}\,dl,$ Γ – правый лепесток лемнискаты $r=a^2\cos 2j$.

Отв.: $2a^3\sqrt{2}/3.$

12) $\int\limits_{\Gamma}\left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)dl,$ Γ – астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. **Отв.:** $4a^{7/3}$.

13) $\int\limits_{\Gamma} ydl,$ Γ – арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2p$.

Отв.: $32a^2/3$.

14) $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)dl,$ Γ – дуга развертки окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t), 0\le t\le 2p$. **Отв.:** $2p^2a^3(1+2p^2)$.

15) $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}dl,$ Γ – дуга развертки окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t), 0\le t\le 2p$. **Отв.:** $\left(\left(1+4p^2\right)^{3/2}-1\right)a^2/3$.

2.7. Вычислить КрИ-1 по пространственной кривой Γ:

1) $\int\limits_{\Gamma}\frac{z^2}{x^2+y^2}dl,$ Γ – первый виток винтовой линии $x=a\cos t,$ $y=a\sin t,$ $z=bt.$ **Отв.:** $8p^3b^2\sqrt{a^2+b^2}/(3a^2)$.

2) $\int\limits_{\Gamma} zdl,$ Γ – дуга конической винтовой линии $x=t\cos t,$ $y=t\sin t,$ $z=t,$ $0\le t\le 2p$. **Отв.:** $\left(\left(1+2p^2\right)^{3/2}-1\right)2\sqrt{2}/3$.

3) $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{2y^2+z^2}dl,$ Γ – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,$ $x=y.$ **Отв.:** $2pa^2$.

4) $\int\limits_{\Gamma} xyzdl,$ Γ – четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2,$ $x=y,$ расположенная в первом октанте.

Отв.: $a^4/6$.

5) $\int\limits_{\Gamma} x^2dl,$ Γ – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,$ $x+y+z=0.$ **Отв.:** $2pa^3/3$.

6) $\int\limits_{\Gamma} zdl,$ Γ – дуга кривой $x^2+y^2=z^2,$ $y^2=ax$ от точки $(0,0,0)$ до точки $(a,a,a\sqrt{2}), a>0.$ **Отв.:** $100\sqrt{38}-72-17\ln((25+4\sqrt{38})/17))a^2\sqrt{2}/512$.

КрИ-1 применяется в геометрии и физике:

1) $\int\limits_{l_{AB}} dl=L,$ где L – длина дуги AB (см. свойство 5 КрИ-1).

2) *Масса дуги* l_{AB} вычисляется по формуле

$$m=\int\limits_{l_{AB}} m(x,y,z)dl, \qquad (2.6)$$

где $m(x,y,z)$ – линейная плотность дуги.

3) *Координаты центра тяжести дуги* l_{AB} с линейной плотностью $m(x,y,z)$ вычисляются по следующим формулам:

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{l_{AB}} x\mathrm{m}(x,y,z)dl,\;\; y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{l_{AB}} y\mathrm{m}(x,y,z)dl,\;\; z_c = \frac{1}{m}\int\limits_{l_{AB}} z\mathrm{m}(x,y,z)dl, \qquad (2.7)$$

где m – масса дуги l_{AB}.

4) *Моменты инерции относительно начала координат O, осей координат X, Y, Z и координатных плоскостей XY, XZ, YZ дуги* l_{AB} *с плотностью* $\mathrm{m}(x,y,z)$ *вычисляются соответственно по формулам*

$$I_0 = \int\limits_{l_{AB}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{m}\, dl, \qquad I_x = \int\limits_{l_{AB}} \left(y^2+z^2\right)\mathrm{m}\, dl,$$

$$I_y = \int\limits_{l_{AB}} \left(x^2+z^2\right)\mathrm{m}\, dl,\; I_z = \int\limits_{l_{AB}} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{m}\, dl, \qquad (2.8)$$

$$I_{xy} = \int\limits_{l_{AB}} z^2\mathrm{m}\, dl, \qquad I_{xz} = \int\limits_{l_{AB}} y^2\mathrm{m}\, dl, \qquad I_{yz} = \int\limits_{l_{AB}} x^2\mathrm{m}\, dl.$$

Моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z, \qquad I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

Если дуга l_{AB} лежит в плоскости *XY*, то рассматриваются только моменты I_0, I_x, I_y (при условии, что $z = 0$).

2.8. Найти массу m кривой l: $y = \ln x$, $1 \le x \le e$, если линейная плотность ее в каждой точке пропорциональна квадрату абсциссы, т. е. $\mathrm{m}(x,y) = kx^2$.

r Имеем

$$m = \int\limits_l kx^2 dl = \int\limits_1^e kx^2\sqrt{1+y'^2}dx = k\int\limits_1^e x^2\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx =$$

$$= \frac{k}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Bigg|_1^e = \frac{k}{3}\left[\left(1+e^2\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]. \qquad \text{p}$$

2.9. Найти координаты x_c, y_c, z_c центра тяжести первого полувитка винтовой линии l: $x = a\cos t,\, y = a\sin t,\, z = bt,\, 0 \le t \le p$, если ее линейная плотность постоянна и равна m.

r Находим массу $m = \int\limits_l \mathrm{m}\, dl$ этой линии. Так как

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2},$$

то $\quad m = \mathrm{m}\int\limits_0^p \sqrt{a^2+b^2}\,dt = p\mathrm{m}\sqrt{a^2+b^2}.$

Значения x_c, y_c, z_c находим по формулам (2.7):

$$x_c = \frac{\mathrm{m}}{m}\int\limits_l x dl = \frac{\mathrm{m}}{p\mathrm{m}\sqrt{a^2+b^2}}\int\limits_0^p a\sqrt{a^2+b^2}\cos t dt = 0;$$

$$y_c = \frac{m}{m}\int_l ydl = \frac{m}{pm\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^p a\sqrt{a^2+b^2}\sin tdt = 2a/p;$$

$$z_c = \frac{m}{m}\int_l zdl = \frac{m}{m\sqrt{a^2+t^2}}\int_0^p bt\sqrt{a^2+t^2}dt = \frac{pb^2}{2}.$$

Итак, центр тяжести $C = (0, 2a/p, pb^2/2)$. р

2.10.* Найти момент инерции I относительно диаметра окружности l: $x^2 + y^2 = a^2$, если ее линейная плотность $m = 1$.

r Зафиксируем какой-нибудь диаметр окружности. Тогда момент инерции I окружности l относительно этого диаметра выразится интегралом $I = \int_l d^2(x,y)dl$, где $d(x,y)$ – расстояние от точки $M = (x,y) \in l$ до диаметра (рис. 2.1). Перейдем к полярным координатам: $x = r\cos j$, $y = r\sin j$, $0 \le j \le 2p$. В этих координатах уравнение окружности примет вид $r = a$. Пусть диаметр лежит на прямой, образующей угол j_0 с осью X, где $j_0 \in [0, p]$. При этом

$$d(x,y) = d(a\cos j, a\sin j) = a|\sin(j - j_0)|.$$

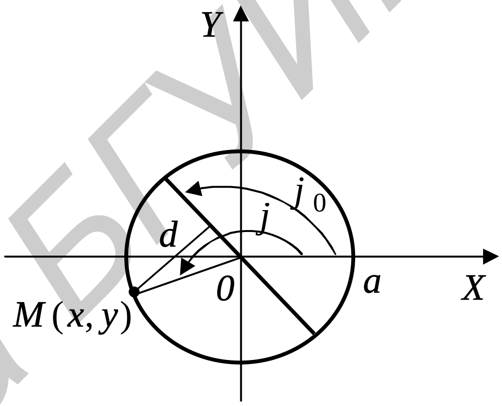

Рис. 2.1

С учетом формулы (2.3) и так как $\sqrt{r^2 + r'^2} = a$, находим

$$I = \int_0^{2p} a^2\sin^2(j - j_0)adj = a^3\int_0^{2p}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2j - 2j_0)\right)dj = pa^3.$$ р

2.11. Найти массу дуги AB плоской кривой Г с линейной плотностью $m = m(x,y)$, если:

1) Г – отрезок AB, $A = (1,1)$, $B = (2,3)$; $m = 2x + y$.

2) Г: $y = x^2/2$, $A = (1; 3/2)$, $B = (2,2)$; $m = y/x$.

3) Г: $y^2 = x$, $A = (1,1)$, $B = (4,2)$; $m = y$.

4) Г: $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $A = (0,0)$, $B = \left(4, \frac{16}{3}\right)$; $m = kL$, где L – длина дуги от точки (0,0).

Отв.: 1) $5\sqrt{5}$; **2)** $(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})/6$; **3)** $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12$; **4)** $4(63 - 5\sqrt{5})k/9$.

2.12. Найти массу плоской кривой Г с линейной плотностью m.

1) Г: $r = a\sqrt{\cos 2j}$; $m = kr$.

2) Г: $r = a\sqrt{1 + \cos j}$; $m = \sqrt{kr}$.

3) Г: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2p$; $m = y^{3/2}$.

4) Г: $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2arctgt - t$, $0 \le t \le 1$, $m = ye^{-x}$.

5) Г: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; $m=|xy|$.

6) Г: $x^2+y^2=ax$; $m=\sqrt{x^2+y^2}$.

Отв.: **1)** $kp\,a^2$; **2)** $p\,k(2a)^{3/2}$; **3)** $3\sqrt{2}p\,a^{5/2}$;

4) $\left(p^2-8\ln 2\right)/16$; **5)** $9p\,a^3/64$; **6)** $2a^2$.

2.13. Найти массу пространственной кривой Г с линейной плотностью m:

1) Г: $x=at,\ y=at^2/2,\ z=at^3/3,\ 0\le t\le 1;\ m=\sqrt{2y/a}$.

2) Г: $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2p;\ m=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3) Г: $x=ae^t\cos t,\ y=ae^t\sin t,\ z=ae^t,\ |t|<\infty;\ m=kz$.

4) Г – дуга кривой $y=x^2/\sqrt{2},\ z=x^3/3$ с началом в точке $A=(0,0,0)$ и концом $B=(4,8\sqrt{2},64/3)$; $m=k\sqrt{x^2+y^2}$.

5) $\Gamma=\left\{x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=a\right\},\ m=x^2$.

Отв.: **1)** $\dfrac{3a}{16}\left(\ln\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\right)$; **2)** $4\left(\left(1+2p^2\right)^{3/2}-1\right)/3$;

3) $\sqrt{3}ka^2/2$; **4)** $2644k/15$; **5)** $2\sqrt{6}pa^3/9$.

2.14. Найти координаты центра тяжести кривой Г с линейной плотностью $m=1$:

1) Г: $y=a\,ch(x/a),\ |x|\le a$.

2) Г: $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2p$.

3) Г – дуга окружности $r=R,\ |j|\le j_0\le p$.

4) Г – кардиоида $r=a(1+\cos j)$.

5) Г: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

6) Г: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ y\ge 0$.

7) Г: $y^2=ax^3-x^4$.

Отв.: **1)** $\left(0,\dfrac{sh2+2}{4sh1}a\right)$; **2)** $(p\,a,4a/3)$; **3)** $\left((R\sin j_0)/j_0,0\right)$;

4) $(4a/5,0)$; **5)** $x_c=y_c=\dfrac{7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\dfrac{a}{6}$; **6)** $(0,2a/5)$; **7)** $2\sqrt{6}pa^3/9$.

2.15.* Найти координаты центра тяжести винтовой линии $x=R\cos j$, $y=R\sin j$, $z=hj/2p$, $0\le j\le j_0$ с линейной плотностью $m=m_0e^{-z/h}$, считая, что $j_0=2pn,\ n\in \boldsymbol{N}$.

Отв: $\left(R/\left(1+4p^2\right);\ 2pR/\left(1+4p^2\right);\ h\left(1-(n+1)e^{-n}\right)/\left(1-e^{-n}\right)\right)$.

2.16. Найти координаты центра тяжести:

1. Однородной ($m=1$) кривой $x=e^{-t}\cos t,\ \ y=e^{-t}\sin t,\ \ z=e^{-t},\ \ 0\le t<+\infty$.

Отв.: $(2/5, 1/5, 1/2)$.

2. Однородного края поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(m=1)$.

Отв.: $x_c = y_c = z_c = \dfrac{a}{24}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)}$.

2.17. Найти момент инерции I_y окружности $x^2+y^2=2Rx,\ m=1$.

Отв.: $3pR^3$.

2.18. Найти моменты инерции I_x, I_y, I_z одного витка винтовой линии $x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ z=ht/2p,\ \ 0\le t\le 2p;\ \ m=1$.

Отв.: $I_x = I_y = \sqrt{4p^2a^2+h^2}\,(3a^2+2h^2)/6,\ I_z=\sqrt{4p^2a^2+h^2}\,a^3$.

2.19. Найти моменты инерции I_x и I_y одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t),\ \ |t|\le p;\ \ m=1$.

Отв.: $I_x = 32a^3/5,\ I_y = 8(p^2-256/45)a^3$.

2.20. Найти момент инерции I_0 плоской однородной кривой $\Gamma(m=1)$ относительно начала координат, если:

1) Γ: $|x|+|y|=a$; 2) Γ: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

3) Γ: $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ 0\le t\le 2p$.

Отв.: 1) $8\sqrt{2}a^3/3$; **2)** $3a^3$; **3)** $2p^2(2p^2+1)a^3$.

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в точках дуги АВ гладкой кривой l, имеющей уравнение $y=j(x),\ \ a\le x\le b$.

Интегральной суммой для функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ *по координатам* называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n}\big(P(x_k,h_k)\Delta x_k+Q(x_k,h_k)\Delta y_k\big)$, где $\Delta x_k, \Delta y_k$ – проекции элементарной дуги Δl_k на оси X и Y соответственно.

Криволинейным интегралом 2-го рода (КрИ-2) (или *криволинейным интегралом по координатам* от выражения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по направленной дуге АВ называется предел интегральной суммы при $\max\Delta x_k\to 0$ и $\max\Delta y_k\to 0$:

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\substack{\max\Delta x_k\to 0\\ \max\Delta y_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}P(x_k,h_k)\Delta x_k+Q(x_k,h_k)\Delta y_k.$$

С механической точки зрения (КрИ-2) *есть работа, совершаемая переменной силой* $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}=(P,Q)$ *на криволинейном пути* АВ. Если кривая l замкнутая, то КрИ-2 по такой кривой обозначается символом $\oint\limits_{l}$.

Из свойств КрИ-2 отметим следующие:

1. $\int\limits_{BA}Pdx+Qdy=-\int\limits_{AB}Pdx+Qdy$,

т. е. КрИ-2 *меняет свой знак на противоположный при изменении направления* *пути интегрирования*.

2. (*Аддитивность*) Если кривая l разбита на две части l_1 и l_2, т. е. $l = l_1 + l_2$, то

$$\int\limits_{l} Pdx + Qdy = \int\limits_{l_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{l_2} Pdx + Qdy.$$

Остальные свойства КрИ-2 аналогичны свойствам КрИ-1.

Если кривая l задана явно уравнением $y = j\,(x), x \in [a,b],$ то в этом случае КрИ-2 вычисляется по формуле

$$\int\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \{P[x, j\,(x)] + j\,'(x)Q[x, j\,(x)]\}dx. \qquad (2.9)$$

Если же кривая l задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2,$ то

$$\int\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt. \qquad (2.10)$$

Аналогичная формула имеет место для вычисления КрИ-2 по пространственной кривой l, заданной уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t),$ $t_1 \le t \le t_2$:

$$\int\limits_{l} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt. \ (2.11)$$

2.21. Вычислить КрИ-2: $I = \int\limits_{AB} xydx + (x^2 + y)dy,$ если АВ – дуга параболы $y = x^2$, расположенная между точками $A = (0,0)$ и $B = (2,4)$.

r В данном случае $j\,(x) = x^2, j\,'(x) = 2x, 0 \le x \le 2.$ Тогда по формулам (2.9) получаем

$$I = \int\limits_0^2 \left(xx^2 + (x^2 + x^2)2x\right)dx = \int\limits_0^2 5x^3 dx = 20.$$ р

2.22. Вычислить $\oint\limits_{l} ydx - x^2dy + (x+y)dz,$ если l – линия пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $x + y - z = 0$, «пробегаемая» в положительном направлении, когда при обходе этой линии (эллипса, очевидно) плоскость, ограниченная эллипсом, остается слева (рис. 2.2).

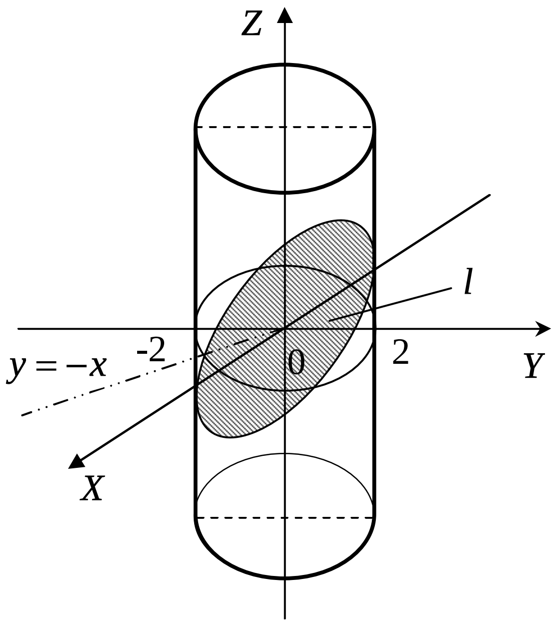

Рис. 2.2

Δ Составим параметрические уравнения эллипса l. Так как проекцией

l на плоскость XY является окружность $x^2+y^2=4$, то можно записать, что $x=2\cos t, y=2\sin t$. Тогда из уравнения плоскости находим, что $z=2(\cos t+\sin t)$. Таким образом,

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=2(\cos t+\sin t), t\in[0,2p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=-2\sin t dt, \\ dy=2\cos t dt, \\ dz=2(-\sin t+\cos t)dt. \end{cases}$$

Отсюда по формулам (2.11) имеем

$$I=\int_0^{2p}\left(-4\sin^2 t-8\cos^3 t+4(\cos^2 t-\sin^2 t)\right)dt=$$

$$=\int_0^{2p}\left(-2+2\cos 2t-8\cos t+8\sin^2 t\cos t+4\cos 2t\right)dt=-4p. \quad \text{p}$$

2.23. Вычислить $I=\int\limits_{AB} ydx+(x+z)dy+(x-y)dz,$ где AB – отрезок, соединяющий точки $A=(1,-1,1), B=(2,3,4).$

r Составим параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A и B: $x=1+t, y=-1+4t, z=1+3t.$ На отрезке AB параметр $0\le t\le 1.$ Тогда по формуле (2.11)

$$I=\int_0^1\left((-1+4t)+(2+4t)\cdot 4+(2-3t)\cdot 3\right)dt=\int_0^1(13+11t)dt=18{,}5. \quad \text{p}$$

2.24. Вычислить работу A силы $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ вдоль отрезка прямой BC, если $B=(1,1,1), C=(2,3,4).$

r Запишем параметрические уравнения отрезка BC: $x=1+t,\ y=1+2t,\ z=1+3t,\ 0\le t\le 1.$ Тогда работа A силы $\boldsymbol{F}$ на пути BC выразится интегралом

$$A=\int\limits_{BC} yzdx+xzdy+xydz=$$

$$=\int_0^1\left[(1+2t)(1+3t)+(1+t)(1+3t)\cdot 2+(1+t)(1+2t)\cdot 3\right]dt=23. \quad \text{p}$$

2.25. Вычислить КрИ-2 по кривой Г, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра x:

1) $\int\limits_\Gamma\left(x-\dfrac{1}{y}\right)dy,$ $\qquad \Gamma: y=x^2, 1\le x\le 2.$

2) $\int\limits_\Gamma xdy-ydx,$ $\qquad \Gamma: y=x^3, 0\le x\le 2.$

3) $\int\limits_\Gamma \dfrac{y}{x}dx+dy,$ $\qquad \Gamma: y=\ln x, 1\le x\le e.$

4) $\int\limits_\Gamma 2xydx-x^2dy,$ $\qquad \Gamma: y=\sqrt{x/2}, 0\le x\le 2.$

5) $\int\limits_{\Gamma} \cos y dx - \sin y dy,$ $\quad\quad\quad$ $\Gamma: y = -x, -2 \le x \le 2.$

6) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy,$ $\quad \Gamma: y = 1 - |x - 1|, 0 \le x \le 2.$

Отв.: 1) $(14 - 3\ln 4)3;$ **2)** $8;$ **3)** $3/2;$ **4)** $12/5;$ **5)** $2\sin 2;$ **6)** $4/3.$

2.26. Вычислить КрИ-2 по кривой Γ, пробегаемой от точки *A* до точки *B*:

1) $\int\limits_{\Gamma} xdy - ydx,$ $\quad \Gamma$ – ломаная *ACB*, где $A = (0,0), B = (1,2), C = (0,1).$

2) $\int\limits_{\Gamma} \frac{3x}{y} dx - \frac{2y^3}{x} dy,$ $\quad \Gamma: x = y^2, A = (4,2), B = (1,1).$

3) $\int\limits_{\Gamma} xdy,$ $\quad \Gamma: \{x^2 + y^2 = a^2, x \ge 0\}, A = (0,-a), B = (0,a).$

4) $\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) dy,$ $\quad A = (1,0), B = (3,4).$

5) $\int\limits_{\Gamma} (x + y)dx + (x - y)dy,$ $\quad A = (0,1), B = (2,3).$

Отв.: 1) $2;$ **2)** $-11;$ **3)** $(5 - \ln 8)/3;$ **4)** $12 + \ln 5;$ **5)** $4.$

2.27. Вычислить КрИ-2 по кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра *t*:

1) $\int\limits_{\Gamma} xdy + ydx,$ $\quad \Gamma: \{x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le p/2\}.$

2) $\int\limits_{\Gamma} y^2dx + x^2dy,$ $\quad \Gamma: \{x = a\cos t, y = b\sin t, 0 \le t \le p\}.$

3) $\int\limits_{\Gamma} (2a - y)dx + (y - a)dy,$ $\quad \Gamma$ – дуга циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),$ $0 \le t \le 2p.$

4) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}},$ $\quad \Gamma$ – дуга астроиды $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le p/2.$

Отв.: 1) $0;$ **2)** $-4ab^2/3;$ **3)** $pa^2;$ **4)** $3pa^{4/3}/16.$

2.28. Вычислить КрИ-2 по замкнутой кривой Γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева:

1) $\oint\limits_{\Gamma} (x^2 - 2xy)dx + (x - 2y)^2 dy,$ $\quad \Gamma$ – граница прямоугольника, образованного прямыми $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1.$

2) $\oint\limits_{\Gamma} (3x^2 - y)dx + (1 - 2x)dy,$ $\quad \Gamma$ – граница треугольника с вершинами $(0,0), (1,0), (1,1).$

3)* $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|},$ $\quad \Gamma$ – граница квадрата с вершинами $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1).$

4) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{xy^2dx - x^2ydy}{x^2 + y^2}$, Γ – правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2j$.

Отв.: 1) 4; **2)** $-1/2$; **3)** 0; **4)** 0.

2.29. Вычислить КрИ-2 по пространственной кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра *t*:

1) $\int\limits_{\Gamma} \left(y^2 - z^2\right)dx + 2yzdy - x^2dz$, Γ – кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$.

2) $\int\limits_{\Gamma} yzdx + z\sqrt{a^2 - y^2}dy + xydz$, Γ – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \frac{a}{2p}t$, $0 \le t \le 2p$.

3) $\int\limits_{\Gamma} xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz$, Γ –кривая $x = a\sin t, y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $0 \le t \le 2p$.

4) $\int\limits_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, Γ – окружность $x = a\cos a \cos t$, $y = a\cos a \sin t$, $z = a\sin a$ $(a - const)$.

Отв.: 1) $1/35$; **2)** 0; **3)** $-p a^2$; **4)** $-pa^2\cos^2 a$.

2.30. Вычислить КрИ-2 по пространственной кривой Γ:

1) $\int\limits_{\Gamma} xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, Γ – отрезок АВ, соединяющий точки $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,4)$.

2)* $\oint\limits_{\Gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, Γ – линия пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = Rx (R > 0, z \ge 0)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,0)$.

3)* $\oint\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, Γ – граница части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (лежащей в первом октанте), пробегаемая по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,0)$.

4) $\oint\limits_{\Gamma} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$, Γ – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси оси *Y*.

Отв.: 1) 13; **2)** $-p R^3/4$; **3)** -4; **4)** 0.

2.31. Найти работу силы $\boldsymbol{F}$ вдоль дуги AB, если:

1) $\boldsymbol{F}=(xy,-y)$; $\Gamma: y=x^2-1$, $A=(1,0)$, $B=(2,3)$.

2) $\boldsymbol{F}=(3xy^2,-x-y)$; $\Gamma: y^2=x+1$, $A=(0,1)$, $B=(3,2)$.

3) $\boldsymbol{F}=(-y,x)$; $\Gamma: x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $A=(0,0)$, $B=(2pa,0)$.

4) $\boldsymbol{F}=(y,-2x)$; $\Gamma: x^2+y^2=1$, $y\geq 0, A=(1,0)$, $B=(-1,0)$.

5) $\boldsymbol{F}=(0,2x)$; $\Gamma: x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $y\geq 0, A=(a,0)$, $B=(-a,0)$.

6) $\boldsymbol{F}=(yz,zx,xy)$; Γ – ломаная $ABCD$ с вершинами $A=(1,1,1)$, $B=(2,1,1), C=(2,3,1)$, $D=(2,3,4)$.

7) $\boldsymbol{F}=(x^2/y, y/x, \cos z)$; Γ – виток винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,$ от точки $(a,0,0)$ до точки $(0,0,2pb)$.

8) $\boldsymbol{F}=(y,-z,x)$; Γ – кривая $x^2+y^2+z^2=2a^2,\ y=x,$ ориентированная против часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси оси X.

9) $\boldsymbol{F}=(z,x,y)$; Γ – окружность $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x+y+z=R,$ ориентированная против часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси оси Z.

Отв.: **1)** 0; **2)** $113/3$; **3)** $-6pa^2$; **4)** $-3p/2$; **5)** pab;
6) 1; **7)** $\sin(2pb)-pa^2$; **8)** $2pa^2$; **9)** $2pR^2/\sqrt{3}$.

2.2. Формула Грина

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Формула Грина и ее применение к вычислению площадей плоских фигур.

Пусть V – область в $\boldsymbol{R}^3$ и $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемые в V функции. Пусть $l \in V$ – произвольная ориентированная кривая с начальной точкой M и конечной точкой N (рис. 2.3).

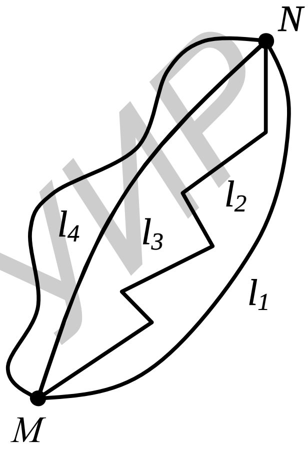

Рис. 2.3

Криволинейный интеграл

$$\int_l Pdx + Qdy + Rdz \qquad (2.12)$$

в общем случае зависит не только от положения начальной и конечной точек пути интегрирования, но и от пути, соединяющего эти точки. Если значение интеграла (2.12) одно и то же при любом выборе пути l, соединяющего M и N, то говорят, что *криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования*.

2.32. Вычислить КрИ-2 $I = \int_\Gamma ydx + xdy$ по кривой Γ с началом $O = (0,0)$ и концом $A = (1,1)$, если: 1) Γ – отрезок OA; 2) Γ – дуга параболы $y = x^2$; 3) Γ – дуга окружности радиусом 1 с центром в точке $(1,0)$.

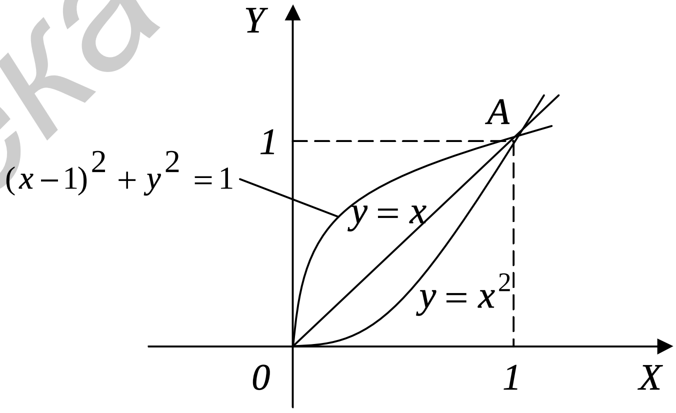

Рис. 2.4

r 1) Отрезок OA задается уравнением $y = x, 0 \le x \le 1$.

Тогда $I = \int_0^1 xdx + \int_0^1 ydy = 1.$

2) Если Γ – дуга параболы, то $\int_\Gamma ydx = \int_0^1 x^2 dx, \int_\Gamma xdy = \int_0^1 2x^2 dx,\ I = \int_0^1 3x^2 dx = 1.$

3) Так как уравнение дуги окружности можно записать в виде $x = 1 + \cos t, y = \sin t,\ 0 \le t \le p/2$, то

$$I = \int_0^{p/2} (\sin t(-\sin t) + (1+\cos t)\cos t)dt = 1.$$

Таким образом, интеграл I оказался не зависящим от выбранных трех путей интегрирования. p

Напомним, что область V называется *односвязной*, если любой гладкий замкнутый контур, лежащий в области, является краем некоторой гладкой поверхности, целиком содержащейся в области V.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть* P,Q,R *– непрерывно дифференцируемые функции в односвязной области* V*. Тогда следующие четыре условия равносильны.*

1. *По любому замкнутому пути* $l \in V$

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

2. *Интеграл (2.12) не зависит от пути интегрирования, т.е.*

$$\int_{l_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{l_2} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где l_1 *и* l_2 *– произвольные пути, расположенные в* V *и имеющие общие начало и конец.*

3. *Существует непрерывно дифференцируемая функция* $u = u(x, y, z)$ *такая, что* $Pdx + Qdy + Rdz$ *является ее полным дифференциалом, т. е.*

$$(du = Pdx + Qdy + Rdz) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \quad (2.13)$$

4. *Для дифференциальной формы* $W = Pdx + Qdy + Rdz$ *выполнены условия*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (2.14)$$

называемые условиями интегрируемости.

Если выполнены условия интегрируемости (2.14), то выражение $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ является полным дифференциалом функции $u = u(x, y, z)$, которую можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz + C = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz + C, \qquad (2.15)$$

где $M = (x_0, y_0, z_0)$ – начальная точка, $N = (x, y, z)$ – конечная точка пути интегрирования, целиком лежащем в V.

Формуле (2.15) равносильна следующая:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C. \qquad (2.16)$$

Здесь путем интегрирования является некоторая ломаная линия *MABN*, составленная из отрезков, параллельных координатным осям *X,Y* и *Z* и где $M = (x_0, y_0, z_0)$ – начальная точка, $A = (x, y_0, z_0)$, $B = (x, y, z_0)$ – промежуточные точки, $N = (x, y, z)$ – конечная точка ломаной.

Эти результаты сформулируем для случая функций двух переменных.

При выполнении условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (2.17)$$

выражение $W = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом в односвязной области V некоторой функции $u = u(x, y)$, которая находится по формуле

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+C=\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt+C. \qquad (2.18)$$

2.33. Восстановить функцию по ее полному дифференциалу

$$du=(1/x+1/y)dx+(2/y-x/y^2)dy.$$

r Имеем $P=1/x+1/y, Q=2/y-x/y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

т. е. условие (2.17) выполнено. В качестве точки (x_0,y_0) возьмем точку (1,1). Тогда по формуле (2.18) находим

$$u(x,y)=\int\limits_{1}^{x}\left(\frac{1}{t}+1\right)dt+\int\limits_{1}^{y}\left(\frac{2}{t}-\frac{x}{t^2}\right)dt=$$

$$=\left(\ln|t|+t\right)\Big|_{1}^{x}+\left(2\ln|t|+\frac{x}{t}\right)\Bigg|_{t=1}^{t=y}+C=\ln|x|+2\ln|y|+\frac{x}{y}-1+C. \text{ p}$$

2.34. Показать, что КрИ-2 $I=\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)}(x+y)dx+(x-y)dy$ не зависит от пути интегрирования и вычислить его.

Δ Функции $P(x,y)=x+y$ и $Q(x,y)=x-y$ вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$ непрерывны на всей плоскости *XY*, и данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Поэтому для вычисления интеграла I можно выбрать любой путь, соединяющий точки $A=(0,1)$ и $B=(2,3)$. Поскольку удобнее всего вычислять КрИ по отрезкам, параллельным осям координат, то выберем путь в виде ломаной, состоящей из двух звеньев *AC* и *CB*, параллельных осям координат (рис. 2.5).

Тогда $I=\int\limits_{(0,1)}^{(2,1)}+\int\limits_{(2,1)}^{(2,3)}$. На *AC*: $y=1\Rightarrow dy=0$. Тогда $\int\limits_{(0,1)}^{(2,1)}=\int\limits_{0}^{2}(x+1)dx=4$.

На CB: $x=2\Rightarrow dx=0$ и $\int\limits_{(2,1)}^{(2,3)}=\int\limits_{1}^{3}(2-y)dy=0.$

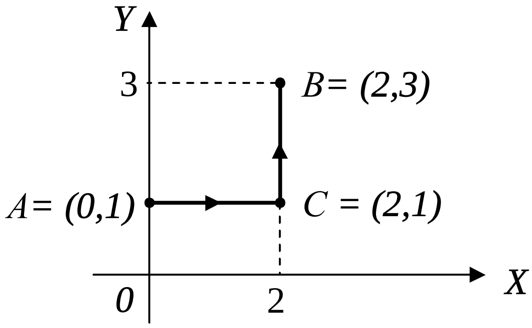

Рис. 2.5

Следовательно, $I=4$. p

2.35. Проверить, является ли выражение $W=\left(3x^2y+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$ полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x,y)$; если да, то найти эту функцию.

Δ Частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+y+\frac{1}{y}\right)=3x^2-\frac{1}{y^2}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3-\frac{x}{y^2}\right)=3x^2-\frac{1}{y^2}$ равны между собой. Непрерывность функций $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ имеет место для всех точек плоскости *XY*, за исключением точек оси *X*. Следовательно, КрИ-2 $\int\limits_{\Gamma}\left(3x^2y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\frac{x}{y^2}\right)dy$ не зависит от пути интегрирования и его можно вычислять по любому пути от точки (x_0, y_0) до точки (x, y), лишь бы только сам путь интегрирования, как и эти точки, находились в области непрерывности функций $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. Выберем путь интегрирования, как показано на рис. 2.6.

Тогда

$$u(x,y)=\int\limits_{(0,1)}^{(x,y)}\left(3x^2y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\frac{x}{y^2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_{(0,1)}^{(0,y)}+\int\limits_{(0,y)}^{(x,y)}=x^3y+\frac{x}{y}+C.\ \text{р}$$

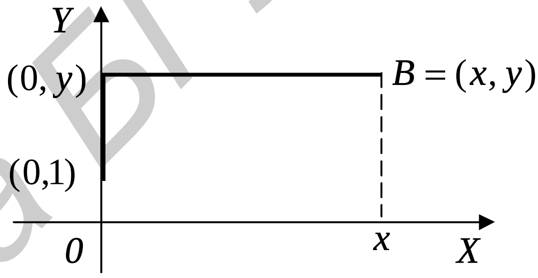

Рис. 2.6

При нахождении функции $u=u(x,y)$ по ее полному дифференциалу $du=Pdx+Qdy$ часто поступают следующим образом. Из равенства $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ имеем $u=\int P(x,y)dx+g(y)$, где $g(y)$ – некоторая дифференцируемая функция, играющая роль постоянной при интегрировании по x. Дифференцируя последнее равенство по y с учетом соотношения $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+g'(y)=Q(x,y)\Rightarrow g(y)=\int\left(Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)dy+C.$$

Таким образом,

$$u=\int P(x,y)dx+\int\left(Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)dy+C.$$

2.36. Найти функцию $u=u(x,y)$ по ее полному дифференциалу $du=e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy$.

r То, что это действительно полный дифференциал, следует из равенства $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-e^{-y}$, где $P=e^{-y}, Q=1-xe^{-y}$. В таком случае существует функция $u = u(x, y)$ такая, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 - xe^{-y}$. Интегрированием по x обеих частей первого равенства находим

$$u = \int e^{-y} dx + g(y) = xe^{-y} + g(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} + g'(y) = 1 - xe^{-y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y + C.$$

Тогда искомая функция $u(x, y) = xe^{-y} + g(y) = xe^{-y} + y + C$. р

По этой же методике можно восстанавливать функцию трех переменных по ее полному дифференциалу.

2.37. Является ли выражение $W = (2xy + z)dx + (x^2 - 2y)dy + xdz$ полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y, z)$? Если да, то восстановить эту функцию.

r Здесь условия интегрируемости (2.14) выполнены:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x.$$

Тогда существует функция $u = u(x, y, z)$, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2y, \ \frac{\partial u}{\partial z} = x. \tag{2.19}$$

Из первого уравнения системы (2.19) интегрированием по x получим $u = x^2 y + zx + j\,(y, z)$, где $j\,(y, z)$ – дифференцируемая функция, выполняющая роль константы при интегрировании по x. Ее найдем, используя второе уравнение системы (2.19):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial j}{\partial y} = x^2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial y} = -2y \Rightarrow j = \int -2ydy + y\,(z),$$

где $y\,(z)$ – некоторая дифференцируемая функция, играющая роль константы при интегрировании по y. Таким образом, $u = x^2 y + zx - y^2 + y\,(z)$. Отсюда и из третьего уравнения системы (2.19) находим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x + y\,'(z) = x \Rightarrow y\,'(z) = 0 \Rightarrow y\,(z) = C - const.$$

Итак, окончательно, искомая функция $u(x, y, z) = x^2 y + zx - y^2 + C$. р

2.38. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить КрИ-2 по кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B:

1) $\int\limits_{\Gamma} (x + y)dx + (x - y)dy, \quad A = (2, -1), B = (1, 0).$

2) $\int\limits_{\Gamma} 2xydx + x^2 dy, \quad A = (0, 0), B = (-2, -1).$

3) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy, \quad A = (3, 0), B = (0, -3).$

4) $\int\limits_{\Gamma} f(x+y)(dx+dy)$, $f(t)$ – непрерывная функция, $A=(0,0)$, $B=(x_0, y_0)$.

5) $\int\limits_{\Gamma} j\,(x)dx + y\,(y)dy$, $j\,(t), y\,(t)$ – непрерывные функции,

$A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$.

6) $\int\limits_{\Gamma} e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$, $A=(0,0), B=(x_0, y_0)$.

7) $\int\limits_{\Gamma} x dx + y^2 dy - z^3 dz$, $A=(-1,0,2), B=(0,1,-2)$.

8) $\int\limits_{\Gamma} yz dx + xz dy + xy dz$, $A=(2,-1,0), B=(1,2,3)$.

9) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A \in S_1, B \in S_2$, где

S_1 – сфера $x^2+y^2+z^2=R_1^{\,2}$, S_2 – сфера $x^2+y^2+z^2=R_2^{\,2}$ $(R_1>0, R_2>0)$.

Отв.: **1)** 1; **2)** -4; **3)** 0; **4)** $\int\limits_{0}^{x_0+y_0} f(t)dt$; **5)** $\int\limits_{x_1}^{x_2} j\,(t)dt + \int\limits_{y_1}^{y_2} y\,(t)dt$;

6) $e^{x_0}\cos y_0 - 1$; **7)** $-1/6$; **8)** 6; **9)** $R_2 - R_1$.

2.39. Найти функцию по ее заданному полному дифференциалу:

1) $du = (e^{2y} - 5y^3 e^x)dx + (2xe^{2y} - 15y^2 e^x)dy.$

2) $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy.$

3) $du = \frac{yz dx + zx dy + xy dz}{1+x^2y^2z^2}.$

4) $du = (x^2-2yz)dx + (y^2-2zx)dy + (z^2-2xy)dz.$

5) $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz.$

Отв.: **1)** $u = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$; **2)** $u = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + y + C$; **3)** $u = arctg(xyz) + C$;

4) $u = (x^3+y^3+z^3)/3 - 2xyz + C$;

5) $u = x - x/y + xy/z + C$.

2.40. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x,y)$, чтобы КрИ-2 $\int\limits_{\Gamma_{AB}} F(x,y)(y dx + x dy)$ не зависел от пути интегрирования Γ_{AB} между точками A и B? **Отв.:** $xF_x' = yF_y'$.

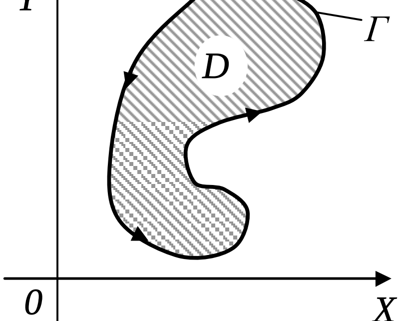

Рис. 2.7

Пусть граница Г плоской ограниченной области D состоит из конечного набора кусочно-гладких кривых. Тогда если функции $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в D вплоть до ее границы, то справедлива *формула Грина*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy, \tag{2.20}$$

где контур Γ ориентирован положительно, то есть при его обходе против часовой стрелки область D остается слева (рис. 2.7).

Из формулы (2.20) при $Q = x, P = -y$ получаем, что площадь S области D, ограниченной контуром Γ, выражается через КрИ-2 формулой

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx. \tag{2.21}$$

2.41. Вычислить с помощью формулы Грина КрИ-2 $I = \oint\limits_{\Gamma} x^2 ydx - xy^2 dy$, где Γ – окружность $x^2 + y^2 = R^2$ (обход контура положителен).

Δ По формуле Грина (2.20), где $P = x^2 y, Q = -xy^2, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -y^2, \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2$, получаем $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = -\pi R^4/2.$ ▲

2.42. Пользуясь формулой (2.21), найти площадь S, ограниченную астроидой $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$.

Δ Применяя формулы (2.21) и (2.10), получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} (\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2tdt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$ ▲

2.43. Применяя формулу Грина, вычислить КрИ-2 по контуру Г (обход контура положителен):

1) $\oint\limits_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = ax.$

2) $\oint\limits_{\Gamma} (2xy - y)dx + x^2 dy, \quad \Gamma: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$

3) $\oint\limits_{\Gamma} (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, Γ – граница треугольника с вершинами $(1,1), (3,2), (2,5)$.

4) $\oint\limits_{\Gamma} (y - x^2)dx - (x + y^2)dy$, Γ – граница кругового сектора $0 < \rho < R, 0 < \varphi < \alpha \le \pi/2$; (ρ, φ) – полярные координаты.

5) $\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{dx - dy}{x + y}$, Γ – граница квадрата с вершинами $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$.

6) $\oint\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy,\quad \Gamma: x^2+y^2=R^2.$

7)* $\oint\limits_{\Gamma}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy,$ Γ – граница области, образованной отрезком $[A,B]$, где $A=(1,1)$, $B=(2,6)$, и дугой параболы $y=ax^2+bx+c,$ проходящей через точки $A,B,O=(0,0)$.

Отв.: 1) $-\pi a^3/8$; **2)** πab; **3)** $-140/3$; **4)** 0;**5)** –4; **6)** $\pi R^4/4$; **7)** -2.

2.44. Применяя формулу Грина, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми:

1) $y=1-x^2,\ x-y=1.$

2) $x=12\sin^3 t,\ y=3\cos^3 t.$

3) $x=a\sin 2\varphi\,\cos^2\varphi,\ y=a\cos 2\varphi\,\cos^2\varphi,\ |\varphi|\le\pi/2.$

4) $x^2/a^2+y^2/b^2<1,\ x/a-y/b<(\sqrt{3}-1)/2.$

5)* $(y-x)^2+x^2=1.$

6) $(x+y)^2=ax,\quad y=0.$

7) $y^2=x^2-x^4.$

8) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ x\ge 0.$

9) $(x^2+y^2)^2=2ax^3.$

10)* $x^3+y^3=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0.$

Отв.: 1) $9/2$; **2)** $27\pi/2$; **3)** $3\pi a^2/8$; **4)** $(7\pi+3)ab/12$; **5)** π; **6)** $a^2/6$;
7) $4/3$; **8)** a^2; **9)** $5\pi a^2/8$; **10)** $(3\sqrt{3}+4\pi)/9\sqrt{3}$.

2.45.* Найти площадь области, ограниченной петлей кривой:

1) $x=3t/(1+t^2),\ y=3t^2(1+t^2).$ **Отв.:** $3/2$.

2) $x=a\cos\varphi,\ y=a\sin 2\varphi,\ x\ge 0.$ **Отв.:** $4a^2/3$.

3) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy.$ **Отв.:** $1/30$.

2.46. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной следующими кривыми:

1) Кардиоидой $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t).$

2)* Петлей декартова листа $x^3+y^3=3axy(a>0)$ (положить $y=tx$).

3) Лемнискатой $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ (положить $y=x\,tg\,\varphi$).

4) Параболой $(x+y)^2=ax(a>0)$ и осью X.

Отв.: 1) $6\pi a^2$; **2)** $3a^2/2$; **3)** a^2; **4)** $a^2/3$.

3. Поверхностные интегралы

3.1. Поверхностные интегралы 1-го рода (ПИ-1)

Определение ПИ-1 и его основные свойства. Вычисление ПИ-1 в случае явного и неявного задания поверхности. Приложения ПИ-1

Пусть $S\subset \boldsymbol{R}^3$ – гладкая поверхность и $f(x,y,z)$ – непрерывная в точках S функция. Разобьем поверхность S на части S_i, площадь каждой из которых равна $\Delta S_i, i=\overline{1,n}$. В каждой части S_i произвольно выберем точку $M_i=(x_i,y_i,z_i)$

и составим интегральную сумму $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$. Пусть $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} diam\Delta S_i$. Если существует предел интегральных сумм s_n при $\Delta \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения S на части S_i, ни от выбора точек $M_i \in S_i$, то он называется *поверхностным интегралом 1-го рода* (ПИ-1) от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$.

Таким образом $\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \lim\limits_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$.

ПИ-1 обладают свойствами линейности, аддитивности, для них справедлива теорема о среднем, их величина не зависит от выбора стороны поверхности (см. [3]).

Если поверхность задана явно уравнением $z = g(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, где D_{xy} – проекция S на плоскость XY, то ПИ-1 вычисляется следующим образом:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g'^2_x+g'^2_y}\,dxdy. \qquad (3.1)$$

В случае задания поверхности явно уравнением $x = j(y,z)$ или уравнением $y = y(x,z)$, где $(y,z)\in D_{yz}$ – проекция S на плоскость *YZ*, а $(x,z)\in D_{xz}$ – проекция S на плоскость *XZ*, то ПИ-1вычисляется по формуле соответственно

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{yz}} f(j(y,z),y,z)\sqrt{1+j'^2_y+j'^2_z}\,dydz, \qquad (3.2)$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,dxdz. \qquad (3.3)$$

Если же *поверхность* S *задана неявно уравнением* $F(x,y,z)=0$, $F'_z \ne 0$, $\forall(x,y,z)\in S$, тогда формула (3.1) принимает вид

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z)\frac{1}{|F'_z|}\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}\,dxdy, \qquad (3.4)$$

где D_{xy} – проекция S на плоскость *XY*.

При вычислении интеграла в правой части формулы (3.4) необходимо z выразить из уравнения поверхности $F(x,y,z)=0$ (предполагаем, что это возможно).

3.1. Вычислить ПИ-1 $I = \iint\limits_S zds$, где S – часть гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=4$.

r Поверхность S задана явно, ее проекцией $r^3\cos j\,\sin j\,\sqrt{1+r^2}dr$

D_{xy} на плоскость XY является круг $x^2 + y^2 = 4$. Применив формулу (3.1) и перейдя к полярным координатам, получим

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} z\sqrt{1+z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2p} dj \int_0^2 r^3 \cos j\, \sin j \sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{2p} \sin 2j\, dj \int_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}\,dr = 0. \quad \text{р}$$

3.2.* Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S y\,ds,$ где S – часть поверхности цилиндра $x = 2y^2 + 1$ при $y > 0,$ вырезанная поверхностями $x = y^2 + z^2,$ $x = 2, x = 3.$

r Вычислим I двойным интегрированием по области D_{xz} – проекции S на плоскость XZ. Для отыскания границы области D_{xz} исключим переменную у из уравнений $x = 2y^2 + 1$ и $x = y^2 + z^2$; получим $2z^2 = x + 1$. Граница области D_{xz} состоит из двух дуг этой параболы и отрезков прямых $x = 2,\ x = 3$ (рис. 3.1).

Из уравнения поверхности S: $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$ следует, что

$$\sqrt{1+y'^2_x + y'^2_z} = \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}}.$$

Воспользовавшись формулой (3.3), получим

$$I = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{\frac{x-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}}\,dxdz =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_2^3 \sqrt{8x^2 + x - 7}\,dx =$$

$$= \int_2^3 \sqrt{\left(x + \frac{1}{16}\right)^2 - \left(\frac{15}{16}\right)^2}\,dx =$$

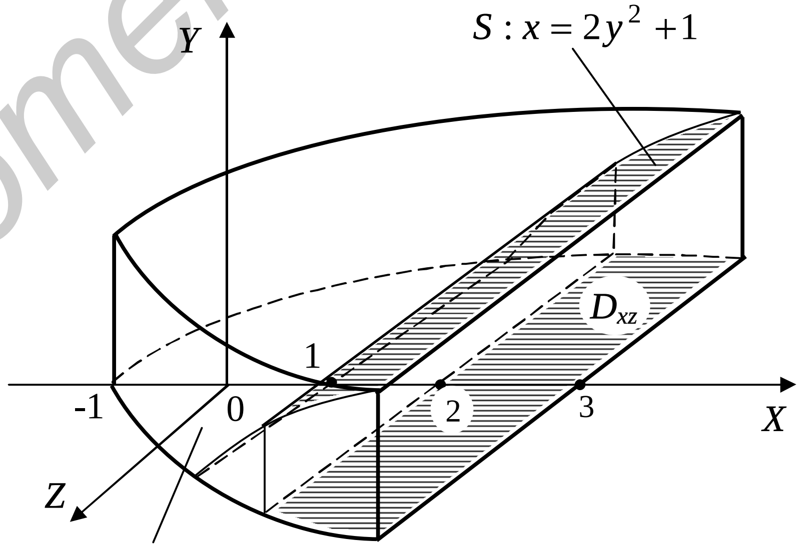

Рис. 3.1

$$= \left(\frac{x + 1/16}{2}\sqrt{x^2 + x/8 - 7/8} - \left(\frac{15}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left| x + \frac{1}{16} + \sqrt{x^2 + x/8 - 7/8} \right| \right)\Bigg|_{x=2}^{x=3} =$$

$$= \frac{98\sqrt{17} - 99\sqrt{3}}{64\sqrt{2}} + \left(\frac{15}{16}\right)^2 \ln\frac{33 + 12\sqrt{6}}{49 + 8\sqrt{3}\cdot 4} \approx 2{,}2. \quad \text{р}$$

3.3. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\,ds,$ где S – часть конической поверхности $x^2+y^2-z^2=0, \quad 0\le z\le 1.$

r Поверхность S задана неявно уравнением $F(x,y,z)= \ x^2+y^2-z^2=0.$ Ее проекция D_{xy} на плоскость XY есть круг $x^2+y^2\le 1.$ Так как $F'_x=2x, F'_y=2y, F'_z=-2z$ и для конуса $z=\sqrt{x^2+y^2},$ то по формуле (3.4)

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2z}2\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\sqrt{2}\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^1 r^2dr=\frac{2\sqrt{2}p}{3}. \text{ p}$$

3.4. Вычислить ПИ-1:

1. $\iint\limits_S(x+y+z)ds,$, где:

1) S – часть плоскости $x+2y+4z=1,$ определяемая условием $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0.$ **Отв.:** $7\sqrt{21}/3.$

2) S – часть сферы $x^2+y^2+z^2=1,$ определяемая условием $z\ge 0.$ **Отв.:** p .

2. $\iint\limits_S(x^2+y^2)ds,$ где:

1) S – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2.$ **Отв.:** $8pR^4/3.$

2) S – поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1.$ **Отв.:** $p(1+\sqrt{2})/2.$

3. $\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)ds,$ где:

1) S – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2,$ **Отв.:** $4pR^4.$

2) S – поверхность куба $|x|\le a, |y|\le a, |z|\le a.$ **Отв.:** $40a^4.$

3) S – поверхность октаэдра $|x|+|y|+|z|\le a.$ **Отв.:** $2\sqrt{3}a^4.$

4) S – полная поверхность цилиндра $x^2+y^2\le R^2, \quad 0\le z\le H.$

Отв.: $pR(R^3+2R^2H+RH^2+2H^3/3).$

4. 1) $\iint\limits_S(xy+yz+zx)ds.$ 2) $\iint\limits_S(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)ds.$

S – часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2},$ расположенная внутри цилиндра $x^2+y^2=2x.$ **Отв.: 1)** $64\sqrt{2}/15;$ **2)** $29p\sqrt{2}/8.$

3.5.* Доказать *формулу Пуассона*

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)ds=2p\int\limits_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,tdt,$$

где $f(t), \quad |t|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ – непрерывная функция, S – сфера $x^2+y^2+z^2=1.$

Отметим следующие *геометрические и механические приложения ПИ-1.* Пусть S – материальная поверхность с поверхностной плотностью $m(x,y,z)$ в каждой точке $(x,y,z)\in S$. Тогда справедливы следующие формулы:

1°. $\iint\limits_S ds = s,$ где s – *площадь поверхности* S;

2°. $m = \iint\limits_S m(x,y,z)ds$ - *масса поверхности* S;

3°. $M_{xy} = \iint\limits_S zm(x,y,z)ds, \quad M_{xz} = \iint\limits_S ym(x,y,z)ds, \quad M_{yz} = \iint\limits_S xm(x,y,z)ds$ – *статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей XY, XZ, YZ* соответственно.

4°. $x_c = M_{yz}/m, \quad y_c = M_{xz}/m, \quad z_c = M_{xy}/m$ – *координаты центра тяжести поверхности;*

5°. $I_x = \iint\limits_S (y^2+z^2)m(x,y,z)ds, \qquad I_y = \iint\limits_S (x^2+z^2)m(x,y,z)ds,$

$I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)m(x,y,z)ds, \qquad I_0 = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)m(x,y,z)ds$

– *моменты инерции поверхности относительно координатных осей X,Y,Z и начала координат соответственно.*

3.6. Найти координаты центра тяжести плоскости $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1,\ y = 0, x = 0$ (рис. 3.2). Поверхностная плотность $m = 1$.

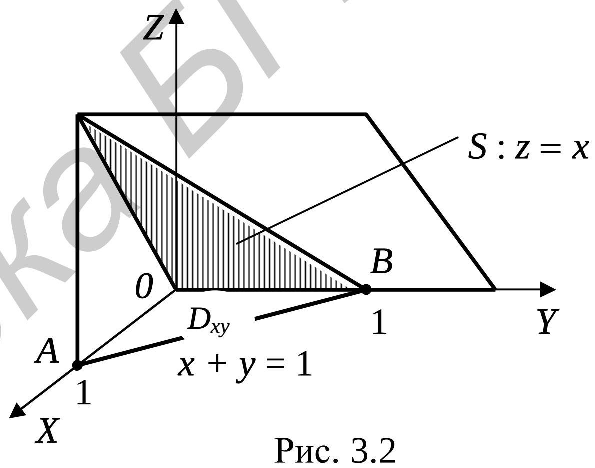

Рис. 3.2

r Так как $m = 1$, то масса этой части плоскости численно равна ее площади. Найдем ее. Имеем $z'_x = 1,\ z'_y = 0.$ Тогда

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\ dxdy = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Далее находим

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_S xds = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 xdx \int_0^{1-x}\sqrt{2}dy = \frac{1}{3};\ \ y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_S yds = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 xdx \int_0^{1-x}\sqrt{2}ydy = \frac{1}{3};$$

$$z_c = \frac{1}{S}\iint\limits_S zds = \frac{1}{S}\iint\limits_S xds = \frac{1}{3}.$$

Итак, центр тяжести $C = (1/3, 1/3, 1/3).$ p

3.7. Определить массу, распределенную:

1) по поверхности куба $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$ с плотностью $m = m_0 xyz.$ **Отв.:** $3m_0 a^3/4$;

2) по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с плотностью $m = m_0\sqrt{x^2 + y^2}.$

Отв.: $m_0 p^2 R^3$;

3) по части эллиптического параболоида $x^2 + y^2 = 2z,\ z \le 1$ с плотностью $m = m_0 z$. **Отв.:** $2p(1+6\sqrt{3})m_0/15$.

4) по части гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = 2z$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, с плотностью $m = m_0|z|$. **Отв.:** $8(1+\sqrt{2})m_0/15$.

3.8. Определить статический момент относительно плоскости $z = 0$ однородной ($m = m_0 = const$) поверхности:

1) $x + y + z = a,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. **Отв.:** $\sqrt{3}m_0 a^3/6$.

2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0$. **Отв.:** $pm_0 R^3$.

3.9. Определить аппликату z_c центра тяжести С полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0$ с поверхностной плотностью:

1) $m = m_0$, 2) $m = m_0\sqrt{x^2 + y^2}$, 3) $m = m_0(x^2 + y^2), m_0 = const.$

Отв.: 1) $R/2$; **2)** $4R/3p$; **3)** $3R/8$.

3.10. Определить координаты центра тяжести однородных поверхностей ($m = 1$):

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x \ge 0, y \ge 0, y + x \le R$.

3) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \le x$.

4) $z = 2 - (x^2 + y^2)/2, z \ge 0$.

Отв.: 1) $(R/2, R/2, R/2)$; **2)** $(R\sqrt{2}/4, R\sqrt{2}/4, R(\sqrt{2}+1)/4)$;

3) $(1/2, 0, 16/(9p))$; **4)** $(0, 0, (307 - 15\sqrt{5})/310)$.

3.11. Вычислить момент инерции относительно координатных плоскостей однородной ($m = m_0 = const$) поверхности $x + y + z = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. **Отв.:** $m_0\sqrt{3}/12$.

3.12. Вычислить момент инерции однородной ($m = m_0 = const$) поверхности $x^2 + y^2 = 2az,\ z \le a$ относительно оси Z.

Отв.: $4p(6\sqrt{3}+1)m_0 a^4/15$.

3.13. Вычислить момент инерции I_z относительно оси Z части однородной конической поверхности $x^2 + z^2 = y^2$, $y > 0$, плотности m_0, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$. **Отв.:** $pa^4 m_0/2$.

3.14.* Вычислить момент инерции однородной конической поверхности $x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/b^2 = 0, 0 \le z \le b$ с плотностью m_0 относительно прямой $x/1 = y/0 = (z-b)/0$. **Отв.:** $(1/12)pm_0 a(3a^2 + 2b^2)\sqrt{a^2 + b^2}$.

3.15. Вычислить моменты инерции относительно начала координат однородных поверхностей S_1, S_2 плотности $m = 1$, где S_1 – поверхность куба с центром в начале координат и ребром $2a$; S_2 – полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le H$. **Отв.:** $40a^4; pR(R(R+H)^2 + 2H^3/3)$.

3.2. Поверхностные интегралы 2-го рода (ПИ-2)

Ориентация и нормаль к поверхности. Определение ПИ-2 и его основные свойства. Вычисление ПИ-2

Пусть в пространстве R^3 задана гладкая поверхность S, описываемая явно, неявно или параметрически, причем нормаль к S отлична от нуля $\forall (x, y, z) \in S$. Тогда в каждой точке (x, y, z) поверхности определен единичный вектор нормали $\vec{n}^0 = \vec{n}^0(x, y, z)$, являющийся непрерывной функцией точек поверхности (рис. 3.3).

Если $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности, то единичный вектор $\vec{n}^0 = \pm \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

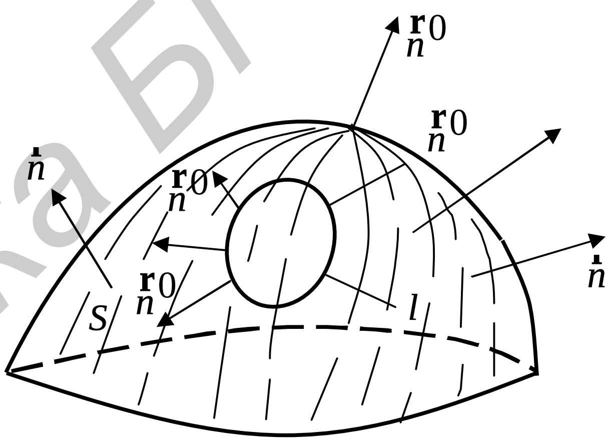

Рис. 3.3

Знаку «+» соответствует одна сторона поверхности S, а знаку «–» – другая сторона. Выбор вектора $\vec{n}^0$ с определенным знаком называется *ориентацией поверхности*. Одна из двух ориентаций с помощью $\vec{n}^0$ или $(-\vec{n}^0)$ называется *положительной*, а другая *отрицательной*.

Гладкая поверхность, у которой выбрана одна из ориентаций, называется *ориентированной* при помощи $\vec{n}^0$. Сторона поверхности S, обращенная в сторону вектора $+\vec{n}^0$, называется *положительной* или *внешней* и обозначается S^+. Другая сторона S, обращенная в сторону вектора $-\vec{n}^0$, называется *отрицательной* или *внутренней* и обозначается S^-. Поверхности, у которых различаются положительные и отрицательные стороны, называются *двусторонними*. К ним относятся, например, плоскость, сфера, параболоиды, гиперболоиды, конусы, цилиндры и т. д. Двусторонние поверхности характеризуются тем, что

Рис. 3.4

если вектор $\vec{n}^0$ перемещать по любому замкнутому контуру l, лежащему на поверхности, то он всегда возвращается в исходную точку с первоначальным направлением (рис. 3.3).

Примером *односторонней* поверхности является *лист Мёбиуса* (см. [3]).

В каждой точке гладкой двусторонней поверхности S определены два направления вектора нормали $\vec{n}$ к S, являющиеся взаимно противоположными. При выборе $\vec{n}$ необходимо следить за тем, чтобы он имел нужное направление, что соответствует правильному выбору нужной стороны поверхности. Так на рис. 3.4, *а, б* вектор $\vec{n}$ определяет положительную (верхнюю) сторону поверхности. Часто при выборе стороны поверхности указывается, какой угол, острый или тупой, составляет нормаль $\vec{n}$ к поверхности S с осью *Z*. Координатами единичного вектора нормали являются его направляющие косинусы, то есть $\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Поэтому для верхней (положительной) стороны поверхности $\cos\gamma > 0, 0 < \gamma < \pi/2$, а для нижней (отрицательной) стороны поверхности $\cos\gamma < 0, \pi/2 < \gamma < \pi$. Координаты вектора нормали для различных способов задания поверхности имеют следующую запись.

1. Поверхность S задана явно уравнением $z = f(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ – проекция S на плоскость *XY*:

$$\vec{n} = (-f'_x, -f'_y, 1), \cos\gamma > 0; \tag{3.5}$$

$$\vec{n} = (f'_x\; f'_y, -1), \cos\gamma < 0. \tag{3.6}$$

2. Поверхность S задана неявно уравнением
$F(x, y, z) = 0, F'_z \neq 0, \forall (x, y, z) \in S$:

$$\vec{n} = \frac{1}{F'_z}(F'_x, F'_y, F'_z) = \frac{1}{F'_z}\, \boldsymbol{grad}\, F, \cos\gamma > 0; \tag{3.7}$$

$$\vec{n} = -\frac{1}{F'_z}(F'_x, F'_y, F'_z) = -\frac{1}{F'_z}\, \boldsymbol{grad}\, F, \cos\gamma < 0. \tag{3.8}$$

3. Поверхность S задана параметрически равенствами $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v), (u, v) \in \Omega$. Вектор нормали имеет вид [3]:

$$\vec{n} = \left(\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|, \left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|, \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \right), \tag{3.9}$$

где

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь в точках гладкой ориентированной поверхности S определена непрерывная вектор-функция:

$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = (P, Q, R)$ и $\vec{n}^0 = \vec{n}^0(x, y, z)$ – единичный вектор ориентации этой поверхности.

Для скалярной непрерывной функции

$$f(x, y, z) = (\vec{a}(x, y, z), \vec{n}^0(x, y, z)) = (\vec{a}, \vec{n}^0)$$

интеграл

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_S (\vec{a},\vec{n}^0)ds \qquad (3.10)$$

называется *поверхностным интегралом второго рода (ПИ-2)* от вектора-функции $\vec{a} = (P,Q,R)$ по поверхности S. Он обладает следующими *свойствами*.

1°. Если $\vec{a} = a_1\vec{a}^1 + a_2\vec{a}^2$, то $\iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds = a_1\iint_S \left(\vec{a}^1,\vec{n}^0\right)ds + a_2\iint_S \left(\vec{a}^2,\vec{n}^0\right)ds.$

2°. $\iint_{S^+} \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds = -\iint_{S^-} \left(\vec{a},\vec{n}^0\right) ds$, т. е. *при смене ориентации S знак ПИ-2 меняется на противоположный*.

3°. Если $S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$, то $\iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right) ds = \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_k} \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds.$

Приведем формулы вычисления ПИ-2 для различных способов задания поверхностей.

Пусть в пространстве S поверхность задана *явно* уравнением $z = f(x,y)$ или *неявно* соотношением $F(x,y,z) = 0$ и D_{xy} – проекция S на плоскость XY. Тогда

$$\iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds = \iint_{D_{xy}} (\vec{a},\vec{n})dxdy, \qquad (3.11)$$

где $\vec{n}$ – выбранная нормаль к поверхности.

При параметрическом задании поверхности S в виде $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in W$ (u,v – параметры) вычисление ПИ-2 осуществляется по формуле

$$\iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds = \iint_W (\vec{a},\vec{n})dudv = \iint_W \left(P\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right| + Q\left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right| + R\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \right)dudv. \qquad (3.12)$$

Элемент площади $dudv$ в криволинейных координатах связан с элементами площадей $dxdy, dydz, dzdx$ соотношениями

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv = dxdy,\quad \left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|dudv = dydz,\quad \left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|dudv = dzdx.$$

Поэтому формула (3.12) принимает вид

$$\iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \qquad (3.13)$$

Поскольку $\left(\vec{a},\vec{n}^0\right) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$, то равенство (3.13) приводится к виду

$$\iint_S \left(\vec{a},\vec{n}^0\right)ds = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds =$$

$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \qquad (3.14)$$

Формула (3.14) устанавливает *связь между ПИ-1 и ПИ-2.*

И, наконец, из формул (3.11) и (3.14) получаем равенство

$$\iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (\vec{a}, \vec{n})\, dxdy. \qquad (3.15)$$

Замечание. Если же поверхность S проектируется на плоскость YZ или ZX, то соответствующим образом изменяется двойной интеграл в правой части (3.15): в первом случае интегрирование проводится по проекции D_{yz} поверхности S на плоскость YZ от выражения $(\vec{a}, \vec{n})dydz$. Кроме того, в первом случае уравнение поверхности задается в виде $x = f(x, y)$, а во втором – в виде $y = f(x, z)$. Далее, для первого случая вектор нормали ($\cos a > 0$)

$$\vec{n} = \left(1, -f'_y, -f'_z\right), \qquad (3.16)$$

а во втором случае ($\cos b > 0$) –

$$\vec{n} = \left(-f'_x, 1, -f'_z\right). \qquad (3.17)'$$

3.16. Вычислить ПИ-2 $I = \iint\limits_{S} zdydz - 4ydzdx + 8x^2 dxdy,$ где S – часть поверхности $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1.$ Нормаль указана на рис. 3.5.

Δ В данном случае $\vec{a} = (P, Q, R) = (z, -4y, 8x^2)$. Вектор нормали имеет вид (3.6), так как он составляет тупой угол с осью Z. Тогда $\vec{n} = \left(f'_x, f'_y, -1\right) = (2x,\ 2y,\ -1)$, и по формуле (3.15) находим

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} (\vec{a}, \vec{n})dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (z2x - 8y^2 - 8x^2)dxdy =$$

$$= -2\iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)(4 - x)dxdy.$$

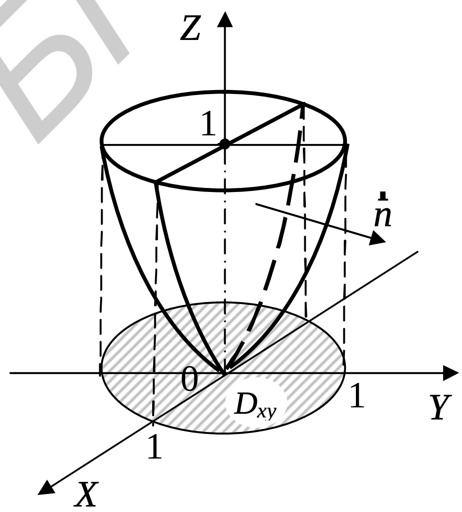

Рис. 3.5

Перейдя в этом двойном интеграле к полярным координатам $x = r\cos j,\ y = r\sin j,\ 0 \le j \le 2p,\ 0 \le r \le 1,$ получим

$$I = -2\int_0^{2p} dj \int_0^1 r^3(4 - r\cos j)dr = -2\int_0^{2p}\left(1 - \frac{1}{5}\cos j\right)dj = -4p. \ \text{р}$$

3.17. Вычислить ПИ-2: $I = \iint\limits_{S} (x + y)dydz + (y - x)dzdx + (z - 2)dxdy,$ где S – часть конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ 0 \le z \le 1.$ Нормаль указана на рис. 3.6.

Δ Поверхность задана неявно уравнением $F = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$ Согласно (3.8), вектор нормали $\vec{n}$ к S имеет вид

$$\vec{n} = -\frac{1}{F'_z}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right) = = \frac{1}{2z}(2x, 2y, -2z) = \frac{1}{z}(x, y, -z).$$

По формуле (3.15) ПИ-2

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{z}(x(x+y)+y(y-x)-z(z-2))dxdy=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{z}(x^2+y^2-z^2+2z)dxdy.$$

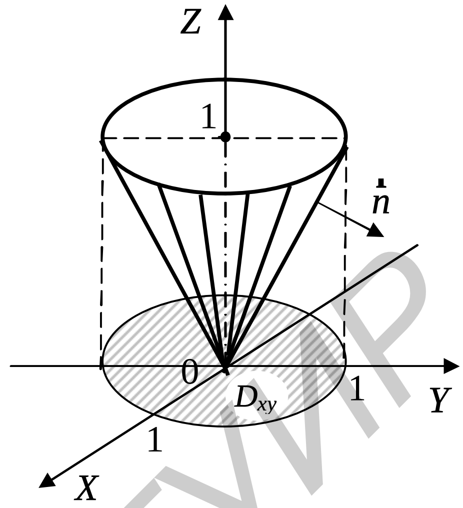

Рис. 3.6

Подставив в это выражение z из уравнения поверхности $x^2+y^2-z^2=0$, получим $I=2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=2p$, где p – площадь круга $x^2+y^2\le 1$. p

3.18. Вычислить ПИ-2: $I=\iint\limits_{S}xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy$, где S – внешняя сторона верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=9$.

r Запишем уравнение сферы параметрически (рис. 3.7):

$x=3\sin q\cos j$, $y=3\sin q\sin j$, $z=3\cos q$;

$$W=\{0\le q\le p/2, 0\le j\le 2p\}.$$

Роль параметров здесь играют $u=q, v=j$. Так как в нашем случае $P=x, Q=y+z, R=z-y$ и

$$\left|\frac{D(y,z)}{D(q,j)}\right|=9\sin^2 q\cos j,$$

$$\left|\frac{D(z,x)}{D(q,j)}\right|=9\sin^2 q\sin j,$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(q,j)}\right|=9\cos q\sin j,$$

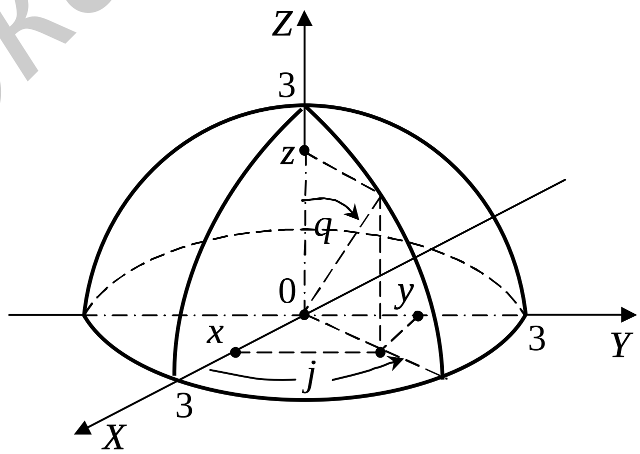

Рис. 3.7

то

$$I=\iint\limits_{W}(3\sin q\cos j\left|\frac{D(y,z)}{D(q,j)}\right|+(3\sin q\sin j+3\cos q)\left|\frac{D(z,x)}{D(q,j)}\right|+$$

$$+(3\cos q-3\sin q\sin j)\left|\frac{D(x,y)}{D(q,j)}\right|)dqdj=$$

$$=27\iint\limits_{W}(\sin^3 q+\sin q\cos^2 q)dqdj=27\int\limits_0^{2p}dj\int\limits_0^{p/2}\sin q dq=54p.\ \text{p}$$

3.19. Вычислить ПИ-2:

$I = \iint\limits_S x dydz + z dxdy,$ где S – сторона боковой поверхности цилиндра $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $z = h > 0$ (рис. 3.8).

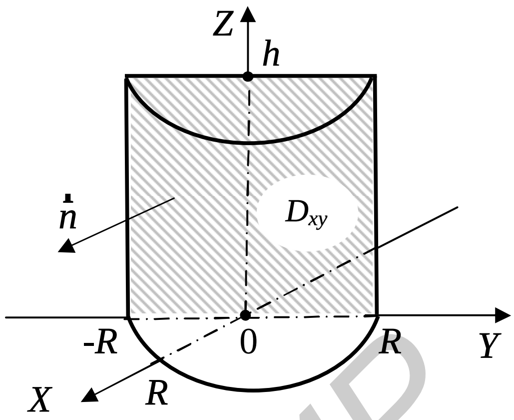

Рис. 3.8

◄ Имеем $\vec{a} = (x, 0, z)$. Так как поверхность S задана явно в виде $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $\cos\beta > 0$, согласно условию, то

$$\vec{n} = (-f'_x, 1, -f'_z) = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, 1, 0\right).$$

Тогда $(\vec{a}, \vec{n}) = x^2 / \sqrt{R^2 - x^2}$ и, значит,

$$I = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} dxdz = \int_0^h dz \int_{-R}^{R} \frac{x^2 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\pi R^2 h. \text{ ►}$$

3.20. Вычислить ПИ-2 по поверхности S:

1) $I = \iint\limits_S x dydz + z^3 dxdy;$ S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (нормаль внешняя).

Отв.: $32\pi/15$.

2*) $I = \iint\limits_S x dydz + y dzdx + z dxdy;$ S – внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = 9,$ заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = h.$ **Отв.:** $18\pi h.$

3) $I = \iint\limits_S z dydz - 4y dzdx + 8x^2 dxdy;$ S – часть поверхности $z = x^2 + y^2 + 1,$ отсеченной плоскостью $z = 2$ (нормаль внешняя). **Отв.:** -4π.

4*) $I = \iint\limits_S \frac{1}{x} dydz + \frac{1}{y} dzdx + \frac{1}{z} dxdy;$ S – внешняя часть эллипсоида $x = a\cos u \cos v, y = b \sin u \cos v, z = c \sin v, u \in [\pi/4, \pi/3], v \in [\pi/6, \pi/4].$

Отв.: $\dfrac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{24}\left(\dfrac{ab}{c} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{bc}{a}\right).$

5) $I = \iint\limits_S x dydz + dzdx + xz^2 dxdy;$ S – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ расположенная в первом октанте. **Отв.:** $5\pi/12 + 2/15.$

6) $I = \iint\limits_S (y^2 + z^2) dydz;$ S – часть поверхности параболоида $x = 9 - y^2 - z^2,$ нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с осью X, отсеченная плоскостью $x = 0.$ **Отв.:** $81\pi/2.$

7) $I = \iint\limits_S z^2 dxdy;$ S – внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2.$ **Отв.:** $0.$

8) $I = \iint\limits_S xzdydz + xydzdx + yzdxdy;$ S – внешняя поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1,$ отсеченная плоскостями $z = 0, z = 5.$ **Отв.:** 25π.

9) $I = \iint\limits_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy;$ S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2,$ нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с осью Z, вырезаемая цилиндром $x^2 + y^2 = 1.$ **Отв.:** $\pi/8$.

10) $I = \iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}};$ S – часть поверхности гиперболоида $x^2 + y^2 = z^2 + 1,$ отсекаемая плоскостями $z = 0, z = \sqrt{3}$ $(\cos\gamma < 0)$. **Отв.:** $-2\sqrt{3}\pi$.

11*) $I = \iint\limits_S 2xdydz + (1 - z)dxdy;$ S – внутренняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 4,$ отсекаемая плоскостями $z = 0, z = 1.$ **Отв.:** -8π.

12) $I = \iint\limits_S (y^2 + z^2)dydz - y^2dzdx + 2yz^2dxdy;$ S – часть поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2,$ отсекаемая плоскостями $y = 0, y = 1$ $(\cos\gamma < 0)$. **Отв.:** $\pi/2$.

13) $I = \iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy;$ S – одна из сторон поверхности $x^2 + y^2 = z^2, 0 < z < H.$

Отв.: 0.

14*) $I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy;$ S – верхняя сторона части гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2, |y| \le x \le a.$

Отв.: $-a^4/3$.

3.3. Формула Остроградского–Гаусса. Формула Стокса

Пусть функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области D и $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$. Область $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, \quad z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$ называется *z-цилиндрической* (рис. 3.9). Аналогично определяются *x*-цилиндрическая и *y*-цилиндрическая области.

Область V называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число как *x*-цилиндрических, так и *y*- цилиндрических и *z*-цилиндрических областей.

Теорема 3.1. *Пусть функции* $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ *и их частные производные* $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ *непрерывны в простой замкнутой области* V*, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью* S*. Тогда справедлива формула*

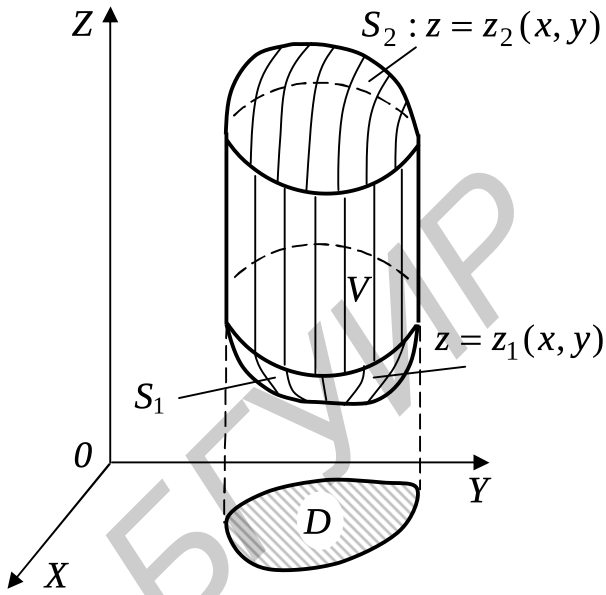

Рис. 3.9

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv, \qquad (3.17)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности (знак $\oiint\limits_S$ означает, что поверхностный интеграл вычисляется по замкнутой поверхности S).

Формула (3.17) называется *формулой Остроградского–Гаусса*.

При $P = x, Q = y, R = z$ из формулы (3.17) вытекает, что объём n области V, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S, можно вычислить с помощью ПИ-2 по формуле

$$n = \frac{1}{3} \oiint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy, \qquad (3.18)$$

где ПИ-2 вычисляется по внешней стороне S.

3.21. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить ПИ-2

$$I = \oiint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

где S – внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Δ Применяя формулу (3.17), получаем

$$I = \iiint\limits_V (2x + 2y + 2z) dxdydz,$$

где V – шар $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2$. Для вычисления интеграла I перейдём к сферическим координатам

$x = a + \rho\cos\varphi\,\sin\theta,\ y = b + \rho\sin\varphi\,\sin\theta,\ z = c + \rho\cos\theta,\ 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$.
Якобиан перехода $J = \rho^2\sin\theta$. Тогда

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \rho^2 [a + b + c + \rho(\cos\varphi\,\sin\theta +$$

$$+ \sin\varphi\,\sin\theta + \cos\theta\,]\,d\rho = \frac{8}{3}\pi\,(a + b + c)R^3. \quad ▲$$

3.22.* Вычислить ПИ-2 $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^2 dxdy$, где S – нижняя сторона части параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 2x$.

Δ Дополним поверхность S до замкнутой частью плоскости $z = 2x$. Обозначим плоскую часть через S_1 и выберем её верхнюю сторону. Для вычисления интеграла по замкнутой кусочно-гладкой поверхности $S \cup S_1$ применим формулу Остроградского–Гаусса. Тогда с учётом свойства аддитивности ПИ-2 для интеграла I получим

$$I = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 2z)dxdydz - \iint_{S_1} x^3 dydz + y^3 dzdx + x^2 dxdy,$$

где V – тело, ограниченное поверхностями $z = x^2 + y^2,\ z = 2x$. Область V проектируется на плоскость XY в область D, границей которой является окружность $2x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$.

Находим

$$I_1 = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 2z)dv =$$

$$= \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{2x} [3(x^2 + y^2) + 2z]dz =$$

$$= \iint_D [6x(x^2 + y^2) + 4x^2 - 4(x^2 + y^2)^2]dxdy.$$

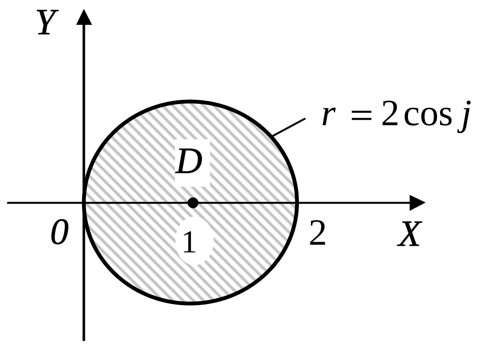

Рис. 3.10

Двойной интеграл вычислим в ПСК (рис. 3.10). В этой системе уравнение окружности имеет вид $r = 2\cos\varphi$, и поэтому двойной интеграл равен

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r[6r^3\cos\varphi + 4r^2\cos^2\varphi - 4r^4]dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{6}{5}r^5\cos\varphi + r^4\cos^2\varphi - \frac{2}{3}r^6\right)\Big|_{r=0}^{r=2\cos\varphi} d\varphi = \frac{176}{15}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{11}{3}\pi.$$

Вычислим теперь интеграл по верхней стороне поверхности $S_1 : z = 2x$. Для неё вектор нормали $(\cos\gamma > 0)$ есть $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2, 0, 1)$, и по формуле (3.14) будем иметь

$$I_2=\iint\limits_{S_1} x^3dydz+y^3dzdx+z^2dxdy=\iint\limits_{D}(-2x^3+z^2)\,dxdy=\iint\limits_{D}(-2x^3+4x^2)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}(-2r^3\cos^3\varphi+4r^2\cos^2\varphi)r\,dr=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\frac{64}{5}\cos^8\varphi+16\cos^6\varphi\right)d\varphi=\frac{3}{2}\pi\ .$$

Таким образом, данный интеграл $I=I_1-I_2=\frac{11}{3}\pi-\frac{3}{2}\pi=\frac{13}{6}\pi$. р

3.23. Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, вычислить ПИ-2 по внешней стороне поверхности S (если поверхность не замкнутая, дополнить её до замкнутой):

1) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, S – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2, 0\le z\le h$.

Отв.: 0.

2) $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, S – часть поверхности $z=1-\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 1$.

Отв.: π.

3) $\iint\limits_S ydydz+zdzdx+xdxdy$, S – поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=a\ (a>0), x=0, y=0, z=0$. **Отв.:** 0.

4) $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, S – сфера $x^2+y^2+z^2=x$. **Отв.:** $\pi/5$.

5) $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, S – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$. **Отв.:** $12\pi a^5/5$.

6) $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, S – поверхность куба

$0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$. **Отв.:** $3a^4$.

7) $\iint\limits_S zdxdy+(5x+y)dydz$, где S:

а) внутренняя сторона эллипсоида $x^2/4+y^2/9+z^2=1$. **Отв.:** -48π.

б) внешняя сторона границы области $1<x^2+y^2+z^2<4$. **Отв.:** 56π.

3.24. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I=\iint\limits_S\frac{\cos\gamma}{r^2}ds,$$

где S – поверхность ограничивающая простую замкнутую область V, $N=(\xi,\eta,\zeta)$ – фиксированная точка вне области V, $M=(x,y,z)\in S$ $\vec{r}=(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$, $r=|\vec{r}|$, $\vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ – вектор внешней единичной нормали к поверхности S в точке M. **Отв.:** 0.

Формула Стокса связывает криволинейный интеграл по замкнутой пространственной кривой Γ с поверхностным интегралом по поверхности, краем которой является Γ. При этом ориентации кривой Γ и поверхности S считаются согласованными, если наблюдатель, «идущий» по контуру Γ в указанном направлении, видит поверхность S слева от себя. Другими словами, вектор $\vec{n}$ нормали к поверхности S и направление, идущее от ног к голове наблюдателя, составляют между собой острый угол (рис. 3.11).

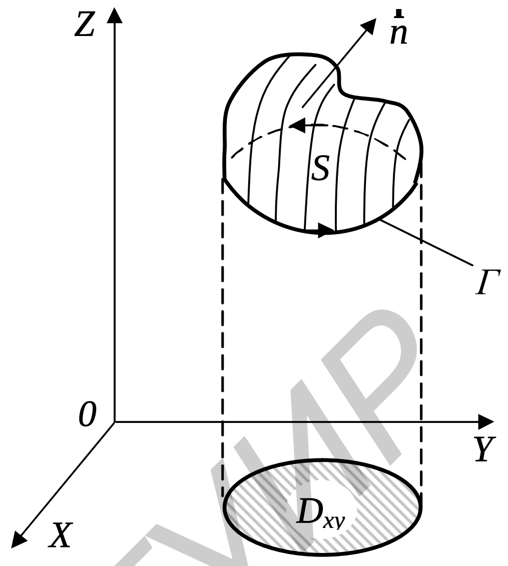

Рис. 3.11

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть* Γ *– замкнутая кусочно-гладкая кривая в* R^3 *и* S *– гладкая поверхность с краем* Γ*, причем ориентации* Γ *и* S *согласованы (рис. 3.11).*

Пусть, далее, в окрестности S *задана вектор-функция* $\vec{a} = (P, Q, R)$*, координатные функции* P, Q, R *которой непрерывны вместе со своими первыми частными производными в этой окрестности. Тогда имеет место* ***формула Стокса*:**

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (3.19)$$

Формула Стокса легко запоминается, если воспользоваться следующим приёмом. Формально составим определитель

$$\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (3.20)$$

Раскладывая его по элементам первой строки и учитывая, что произведение $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ на функцию понимается как операция частного дифференцирования по соответствующей переменной, получаем подынтегральное выражение в правой части формулы Стокса (3.19). Таким образом, формально формула

Стокса может быть записана в виде

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (3.21)$$

Отметим, что в формуле Стокса вид поверхности S с краем Γ не играет никакой роли. Важна лишь ориентация S в пространстве. Поэтому при решении конкретных примеров поверхность выбирается такой, чтобы ПИ по ней вычислялся наиболее простым способом.

Учитывая связь ПИ-1 и ПИ-2 (3.13), формулу Стокса можно переписать в виде

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma)ds,$$

где $\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) -$ единичный вектор нормали к S.

3.25. Вычислить КрИ-2, используя формулу Стокса

$$I = \oint_\Gamma (x + 3y + 2z)dx + (2x + z)dy + (x - y)dz,$$

где $\Gamma -$ контур треугольника с вершинами $A = (2,0,0)$, $B = (0,3,0)$, $C = (0,0,1)$ (обход контура указан на рис. 3.12).

r По условию $P = x + 3y + 2z$, $Q = 2x + z$, $R = x - y$. За поверхность S примем плоскость треугольника ABC, уравнение которой (в отрезках) имеет вид $x/2 + y/3 + z/1 = 1$ или $F = 3x + 2y + 6z - 6 = 0$. По формуле Стокса (3.19) (или(3.20)) имеем

$$I = \iint_S -2dydz + dzdx - dxdy.$$

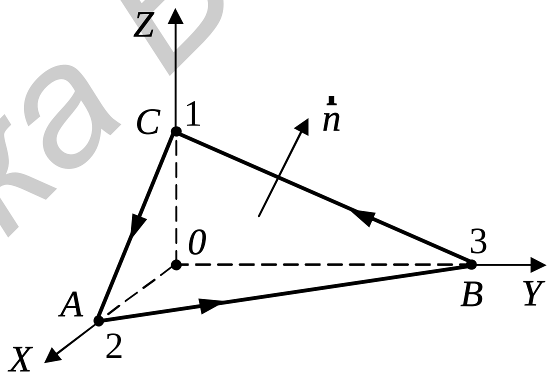

Рис. 3.12

Вектор нормали к S (градиент) имеет координаты $F'_x = 3$, $F'_y = 2$, $F'_z = 6$, т.е

$$\vec{n} = \frac{1}{6}(3,2,6).$$

Тогда по формуле (3.14)

$$I = \int_{\Delta AOB} \frac{1}{6}(-2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 6)dxdy = -\frac{5}{3}\iint_{\Delta AOB} dxdy = -5,$$

так как площадь треугольника AOB равна 3. р

3.26. Вычислить интеграл

$$I = \oint_\Gamma (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz$$

по контуру $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, z > 0, \end{cases}$ пробегаемому против часовой стрелки.

Δ Контур интегрирования Γ есть окружность $x^2 + y^2 = 2$, $z = \sqrt{2}$ – результат пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и конуса $x^2 + y^2 = z^2$ (рис. 3.13)

За поверхность S возьмём плоскость круга с краем Γ. По формуле Стокса

$$I = 2\iint_S ydydz + zdzdx + xdxdy.$$

Так как $z=\sqrt{2}$ – уравнение поверхности S (плоскости), то вектор нормали к ней $\vec{n}=(0{,}0{,}1)$. По формуле (3.14) получаем

$$I=2\iint\limits_{D_{xy}} x\,dx\,dy=2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos\varphi\, d\rho =0.$$ р

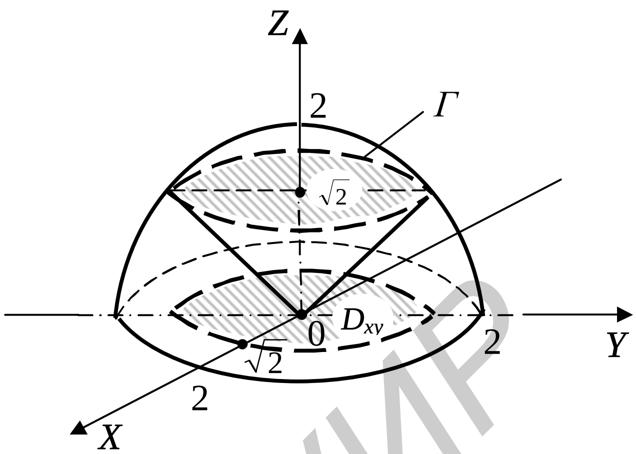

Рис. 3.13

3.27. Пользуясь формулой Стокса, вычислить КрИ-2:

1) $\oint\limits_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz$, где Г – кривая пересечения параболоида $x^2+y^2+z=3$ с плоскостью $x+y+z=2$, ориентированная положительно относительно вектора $\vec{n}=(1{,}0{,}0)$. **Отв.:** -12π .

2) $\oint\limits_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где Г – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $0<\alpha<\pi/2$, обход которой совершается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a,\,0,\,0)$. **Отв.:** $2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\pi/4-\alpha\right)$.

3*) $\int\limits_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz$, где Г – виток винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$, пробегаемый от точки $(1{,}0{,}0)$ до точки $(1{,}0{,}2\pi)$. **Отв.:** -2π . *Указание*. Дополнить кривую Г отрезком так, чтобы контур стал замкнутым.

4) $\oint\limits_{\Gamma}\left(y^2+z^2\right)dx+\left(x^2+z^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$, где Г – линия пересечения верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$ $(z>0)$ с цилиндром $x^2+y^2=2rx$, $0<r<R$. Линия Г пробегается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0{,}0{,}2R)$. **Отв.:** $2\pi Rr^2$.

5) $\oint\limits_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dx$, где Г – граница сечения куба $\{0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a\}$ плоскостью $x+y+z=3a/2$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a{,}0{,}0)$. **Отв.:** $-9a^3/2$.

6) $\oint\limits_{\Gamma}(y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dx$, где Γ – контур, ограничивающий часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$ при $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$. Направление обхода Γ берётся против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2{,}0{,}0)$. **Отв.:** -4.

3.28.* Пользуясь формулой Стокса, вычислить КрИ-2:
$I = \int\limits_{OA} yzdx + 3xzdy + 2xydz$, где OA– кривая

$$x = t\cos t,\;\; y = t\sin t,\;\; z = t^2, 0 \le t \le 2p,$$

$$O = (0,0,0), \quad A = (2p, 0, 4p^2).$$

Δ Незамкнутая кривая $OA = OB\,\mathbf{U}\,BC\,\mathbf{U}\,CA$ лежит на поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$. Действительно, $x^2 + y^2 = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = t^2$, т.е. $x^2 + y^2 = z$. Дополним кривую интегрирования OA до замкнутого контура $Г$ дугой AO параболы $z = x^2$, лежащей в плоскости XZ. Заметим, что эта парабола лежит также на поверхности $z = x^2 + y^2$ (рис. 3.14). Тогда

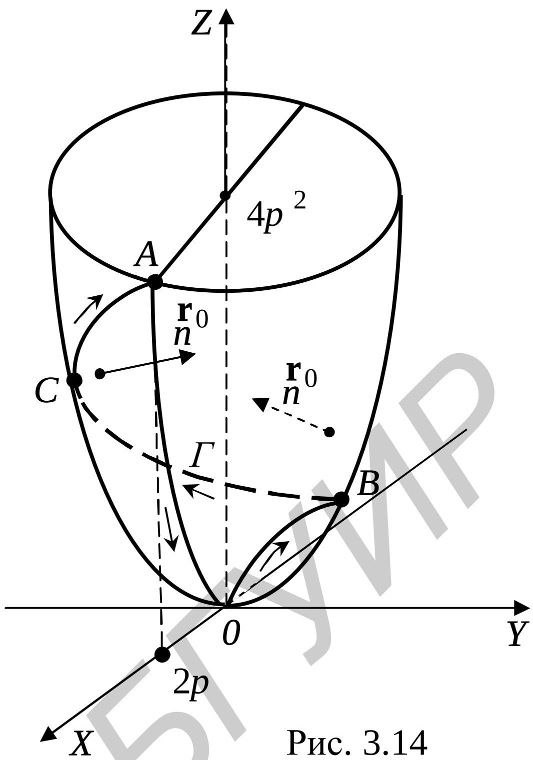

Рис. 3.14

$$I = \oint\limits_{Г} yzdz + 3xzdy + 2xydz - \int\limits_{A_0} yzdz + 3xzdy + 2xydz.$$

Но так как вдоль кривой AO $y = 0, dy = 0$, то $\int\limits_{AO} = 0$, и поэтому

$$I = \oint\limits_{Г} yzdz + 3xzdy + 2xydz.$$

Контур $Г$ лежит на параболоиде $S: z = x^2 + y^2$ и обходится в направлении, указанном на рис. 3.14.

Выберем на части параболоида непрерывное множество единичных нормалей $\overset{\mathbf{r}}{n}{}^0(M) = \{\cos a, \cos b, \cos g\}$так, чтобы обход контура был положительным, т.е. внутреннюю сторону параболоида.

Находим $\dot{n} = (-2x, -2y, 1) \Rightarrow$

$$\overset{\mathbf{r}}{n}{}^0 = \left\{ \frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4x^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right\}.$$

Для нахождения КрИ-2 по замкнутому контуру $Г$ применим формулу Стокса. Так как $P = yz,\; Q = 3xz,\; R = 2xy$, то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -x,\; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -y,\; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2z.$$

По формуле Стокса (3.19) находим $I = \oint\limits_{Г} yzdx + 3xzdy + 2xydz =$

$$= \iint\limits_{S} \left[\frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(-x) + \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(-y) + \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right] ds =$$

$$= 2\iint_S \frac{x^2 + y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dx\,. \qquad (3.22)$$

Этот интеграл вычислим по формуле

$$\iint_S f(x, y, z)\, ds = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy\,,$$

где $z = z(x, y)$ – явное уравнение поверхности S, D_{xy} – проекция S на плоскость XY. В нашем случае

$$z = x^2 + y^2,\; z'_x = 2x,\; z'_y = 2y,\; \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,.$$

Поэтому из (3.22) имеем $I = 2\iint_S \frac{x^2 + y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} ds = 4\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\, dxdy,$

где D_{xy} – область на плоскости, ограниченная кривой $g : x = t\cos t,\; y = t\sin t$, $(0 \le t \le 2p)$ и отрезком $[0{,}2p]$ оси X (см. рис. 3.14).

Двойной интеграл по D_{xy} вычислим в ПСК. Перейдя к полярным координатам $x = r\cos j$, $y = r\sin j$ и подставив эти выражения для x и y в уравнения кривой Г, получим $r\cos j = t\cos t,\; r\sin j = t\sin t$

Отсюда, учитывая, что t и j изменяются в одних и тех же пределах от 0 до $2p$ находим $r = t,\; j = t$, т.е. уравнение кривой Г в ПСК имеет вид $r = j,\; 0 \le j \le 2p$. Таким образом, $I = 4\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\, dxdy = 4\int_0^{2p} dj \int_0^{j} r^3 dr = \frac{32}{5} p^5$. р

4. Элементы векторного анализа

4.1. Скалярные и векторные поля

Скалярное поле. Линии и поверхности уровня скалярного поля. Градиент скалярного поля. Единичный вектор нормали к поверхности. Векторное поле и его векторные линии

Пространство (или часть его V), в каждой точке которого определена скалярная величина, называется *скалярным полем*. Таким образом, скалярное поле определяется числовой функцией $u = u(x, y, z)$, заданной в некоторой области V пространства. В этом случае говорят, что в V задано скалярное поле. Если скалярное поле задано функцией двух переменных $u = u(x, y)$, то оно называется *плоским*.

Графически скалярное поле u изображается с помощью *поверхностей уровня*, определяемых равенством $u(x, y, z) = C$, где $C - const$. Если поле u плоское, то равенство $u(x, y) = C$ определяет *линию уровня* поля.

Пусть $u = u(x, y, z)$ – гладкая функция, определяющая скалярное поле. Напомним, что *производной скалярного поля* u *по направлению вектора*

$\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ называется число

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (4.1)$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Градиентом скалярного поля U в точке M_0 называется вектор

$$\boldsymbol{grad}\, U(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = \frac{\partial u(M_0)}{dx}\vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{dz}\vec{k}. \qquad (4.2)$$

Из равенств (4.1) и (4.2) следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial l} = (\boldsymbol{grad}\, u, \vec{l})$. (4.3)

Вектор $(\boldsymbol{grad}\, u)$ часто обозначается ∇u (читается «набла» u). Итак, $\nabla u = (u'_x, u'_y, u'_z)$.

Производная поля в данной точке M_0 по направлению $\vec{l}$ характеризует скорость изменения поля в направлении вектора $\vec{l}$. Градиент скалярного поля в точке M_0 есть вектор, в направлении которого производная поля максимальна и равна $|\boldsymbol{grad}\, u(M_0)|$. Вектор-градиент, как известно, направлен по нормали к поверхности уровня поля в сторону наибольшего возрастания функции u. Отсюда следует, что *единичный вектор нормали к поверхности* определяется формулой

$$\vec{n}^{\,0} = \pm\frac{\boldsymbol{grad}\, u(M_0)}{|\boldsymbol{grad}\, u(M_0)|}. \qquad (4.4)$$

4.1. Найти и изобразить на чертеже линии уровня скалярного поля $u = xy$. Вычертить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках $(1, 1)$ и $(1, -1)$.

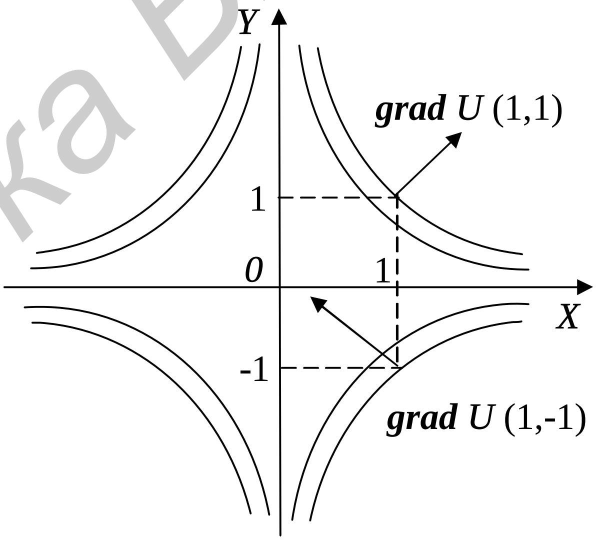

Рис. 4.1

Δ Линии уровня функции $u = xy$ задаются соотношением $xy = C$ – const, т.е. семейство гипербол $y = C/x$, а также две прямые $x = 0$, $y = 0$ (рис. 4.1).

Далее, по формуле (4.2) $\boldsymbol{grad}\, u = y\vec{i} + x\vec{j}$. Тогда $\boldsymbol{grad}\, u(1,1) = \vec{i} + \vec{j} = (1,1)$, $\boldsymbol{grad}\, u(1,-1) = -\vec{i} + \vec{j} = (-1,1)$.

На рисунке видно, что в указанных точках $\boldsymbol{grad}\, u$ перпендикулярен линиям уровня, проходящим через эти точки. В точке (1,1) функция $u = xy$ быстрее всего возрастает в направлении от начала координат по биссектрисе 1-го квадранта, и скорость её возрастания в этом направлении равна

$$\frac{\partial u(1,1)}{\partial l} = |\boldsymbol{grad}\, u(1,1)| = \sqrt{2}.$$

В точке $(1,-1)$ функция $u = xy$ возрастает быстрее всего в направлении к началу координат по биссектрисе 4-го квадранта и скорость её возрастания в этом направлении также равна $\sqrt{2}$. р

4.2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz$ в точке $M = (-2,3,4)$. Чему равна в этой точке производная поля u в направлении вектора $\vec{a} = (3,-4,12)$?

Δ По формуле (4.2) имеем $\boldsymbol{grad}\, u(M) = \left(\dfrac{\partial u(M)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(M)}{\partial y}, \dfrac{\partial u(M)}{\partial z} \right) =$

$= (yz, zx, xy)\big|_M = (12,-8,-6).$

Находим теперь орт $\vec{a}^{\,0}$ вектора $\vec{a}$: $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (3/13, -4/13, 12/13).$

По формуле (4.3) получаем $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l} = \dfrac{3}{13}\cdot 12 + \dfrac{4}{13}\cdot 8 - \dfrac{12}{13}\cdot 6 = -\dfrac{4}{13}$. р

4.3. Найти градиент функции $f(r)$, где $r = |\vec{r}|$, $\vec{r} = (x, y, z)$ - радиус-вектор точки (x, y, z).

r Имеем

$$\boldsymbol{grad}\ f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\vec{r} = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Итак, $\boldsymbol{grad}\ f(r) = f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$. р (4.5)

4.4. Найти поверхность уровня поля $u = x^2 - y^2 + z^2$, содержащую точку $(1,2,1)$. **Отв.:** $x^2 - y^2 + z^2 = -2$.

4.5. Написать уравнение нормали в точке $(2,2,-2)$ к поверхности уровня поля $u = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, проходящей через эту точку.

Отв.: $x - 2 = y - 2 = (z+2)/2$.

4.6.* Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Найти поверхности уровня поля $u = e^{(\vec{a},\vec{b},\vec{r})}$, где $(\vec{a},\vec{b},\vec{r})$ – смешанное произведение векторов. **Отв.:** плоскости $(\vec{a},\vec{b},\vec{r}) = C$.

4.7. Найти линии уровня скалярного поля $u = e^{2x/(x^2+y^2)}$ и нарисовать линии уровня $u(x,y) = e$ и $u(x,y) = e^{1/2}$. Вычислить и начертить вектор $\boldsymbol{grad}\, u$ в точках $(1,1), (2,0), (1,-1)$.

Отв.: $(x-c)^2 + y^2 = c^2, x^2 + y^2 \neq 0, (x-1)^2 + y^2 = 1,\ (x-2)^2 + y^2 = 4,$
$\boldsymbol{grad}\, u(2,0) = -(e/2)\vec{i}$, $\boldsymbol{grad}\, u(1,-1) = e\vec{j}$, $\boldsymbol{grad}\, u(1,1) = -e\vec{j}$.

4.8. Найти $\boldsymbol{grad}\, u(M_0)$, если:

1) $u = xy + yz + zx,\ M_0 = (1,1,1).$ 2) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2),\ M_0 = (1,1,-1).$

3) $u = \dfrac{9(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ M_0 = (1,-2,-2).$ 4) $u = ze^{x^2+y^2+z^2},\ M_0 = (0,0,0).$

Отв.: 1) $(2,2,2)$; 2) $(2/3, 2/3, -2/3)$; 3) $(4,1,1)$; 4) $(0,0,1)$.

4.9. Найти угол между $\boldsymbol{grad}\ u(M_1)$ и $\boldsymbol{grad}\,u(M_2)$, если:

1) $u = arctg\dfrac{x}{y+z},\ M_1 = (1,1,0), M_2 = (-1,0,1).$

2) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, M_1 = (3,\sqrt{3},-2), M_2 = (\sqrt{3},1,2\sqrt{3}).$

Отв.: 1) $\arccos(-1/3)$; 2) $p/2$.

4.10. На поверхности уровня поля $u = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, проходящей через точку $(1,1,1)$, найти наименьшее значение $|\boldsymbol{grad}\ u|$. **Отв.:** $1/9$.

4.11. Доказать, что: а) $\boldsymbol{grad}\, r = \dfrac{\vec{r}}{r}$; б) $\boldsymbol{grad}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$;

в) $\boldsymbol{grad} \sin r = \cos r \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$; где $\vec{r} = (x, y, z)$.

4.12. Для скалярного поля $u = u(x, y)$ найти $\boldsymbol{grad}\, u$, если функция $u(x, y)$ определяется неявно уравнением

а) $u^3 - 3xyu = a^2$; б) $x + y + u = e^u$; в) $x + y + u = e^{-(x+y+u)}$.

Отв.: а) $\dfrac{u}{u^2 - xy}(y\vec{i} + x\vec{j})$; **б)** $(e^u - 1)^{-1}(\vec{i} + \vec{j})$; **в)** $-\vec{i} - \vec{j}$.

4.13. Найти производную поля u по направлению единичного вектора $\vec{n}^0 = (\cos a, \cos b, \cos b)$, если $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \vec{r} = (x, y, z)$:

1) $u = r$. 2) $u = 1/r$. 3) $u = (\vec{a}, \vec{r}), \vec{a} = const$. 4) $u = f(r)$.

Отв.: 1) $(\vec{r}, \vec{n}^0)/r$; **2)** $-(\vec{r}, \vec{n}^0)/r^3$; **3)** $(\vec{n}^0, \vec{a})$; **4)** $f'(r)(\vec{n}^0, \vec{r})/r$.

4.14. Найти производную поля $u = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ в точке $M = (x, y, z)$ по направлению радиус-вектора $\vec{r}$ этой точки.

Отв.: $2u/r,\quad r = |\vec{r}|$.

4.15. Пусть u и v – дифференцируемые поля. Найти производную поля u по направлению вектора $\boldsymbol{grad}\, v$.

Отв.: $(\boldsymbol{grad}\, u, \boldsymbol{grad}\, v)/|\boldsymbol{grad}\, v|$.

4.16.* Пусть u – дифференцируемое поле, $f(t)$ – дифференцируемая функция, $t \in R$.

Доказать, что $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

4.17.* Пусть u и v – дифференцируемые поля, $f(t,s)$ – дифференцируемая функция, $(t,s) \in R^2$. Доказать, что

$$\nabla f(u,v)=\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\nabla u+\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\nabla v .$$

Если в каждой точке пространства или его части v определен вектор $\vec{a}=(P,Q,R)$, где $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ – скалярные функции, то говорят, что в пространстве или в области v задано *векторное поле* $\vec{a}$.

Одной из важных характеристик векторного поля $\vec{a}$ является векторная или силовая линия поля. *Векторной (силовой) линией поля* называется кривая, в каждой точке M которой касательная к ней совпадает с направлением поля $\vec{a}$ (рис. 4.2).

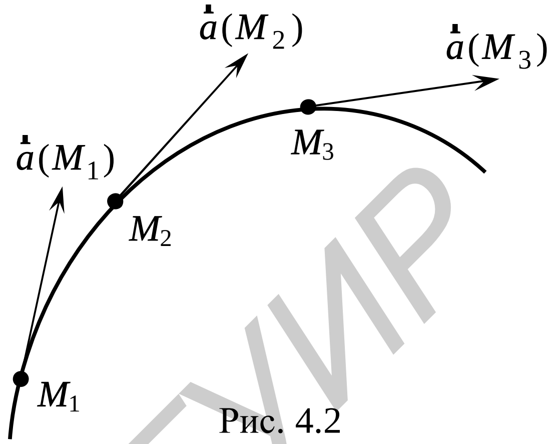

Рис. 4.2

Для составления уравнений векторных линий поля $\vec{a}=(P,Q,R)$ нужно составить соотношения

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}, \tag{4.6}$$

называемые *дифференциальными уравнениями* (ДУ) *векторных линий*.

4.18. Найти векторные линии поля:
1) $\vec{a}=(y+z,-x,-x)$; 2) $\vec{a}=\boldsymbol{grad}\ u$, $u=xyz$.

r а) Согласно соотношениям (4.6) имеем

$$\left(\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-x}\right)\Rightarrow\begin{cases} xdy=xdz,\\ xdx=-(y+z)dy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x(dy-dz)=0,\\ xdx=-(y+z)dy.\end{cases} \tag{4.7}$$

Из первого уровня этой системы получаем $dy-dx=0\Rightarrow y-z=C-const$. Согласно равенству $dy=dz$, из второго уровня системы (4.7) находим $(xdx+ydy+zdz=0)\Rightarrow x^2+y^2+z^2=R^2$, $R-const$.

Таким образом, векторными линиями поля $\vec{a}$ являются линии пересечения сфер $x^2+y^2+z^2=R^2$ и параллельных плоскостей $y-z=C$ т.е. окружности $\{x+y+z=R, y-z=C\}$.

Δ б) Для поля $\vec{a}(M)=\nabla u=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ из уравнений (4.6) находим $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}=\frac{dz}{xy}$ или $xdx=ydy$ и $ydy=zdz$, откуда $\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+C_1$, $\frac{y^2}{2}=\frac{z^2}{2}+C_2$. Эти уравнения определяют два семейства гиперболических цилиндров с образующими, параллельными соответственно осям Z и X, а также (при $C_1=C_2=0$) две пары плоскостей $x=\pm y$ и $y=\pm z$. Любая векторная линия поля $\vec{a}(M)$ является линией пересечения этих двух поверхностей при некоторых фиксированных значениях C_1 и C_2. Например, при $C_1=C_2=0$ линия пересечения $x=y$ и $y=z$ представляет собой прямую, проходящую через начало координат: $x=y=z$. В точках этой прямой $\vec{a}(M)=(x^2,x^2,x^2)$. p

4.19. Найти векторные линии поля $\vec{a}$:

1) Кулоновского поля $\vec{a} = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$ точечного заряда e, находящегося в начале координат $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

Отв.: Лучи, исходящие из начала координат.

2*) Векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \vec{r}]$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор.

Отв.: Окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных прямой $l \parallel \vec{c}$ и проходящей через начало координат; центры этих окружностей лежат на l.

3) Векторного поля $\vec{a} = \left(-a^2 y, b^2 x\right)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$. **Отв.:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4) Векторного поля $\vec{a} = \left(x^2, y^2\right)$. **Отв.:** $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1$, $z = C_2$.

5) Векторного поля $\vec{a} = (z - y, x - z, y - x)$.

Отв.: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = C$.

4.20. Найти векторную линию поля $\vec{a}$, проходящую через точку M_0, если

1) $\vec{a} = (-y, x, c)$, $c - const$, $M_0 = (1,0,0)$.

2) $\vec{a} = \left(x^2, -y^3, z^2\right)$, $M_0 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

3) $\vec{a} = \left(xz, yz, x^2 + y^2\right)$, $M_0 = (1,1,0)$.

Отв.: **1)** $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = ct$.

2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2} = 4$. **3)** $y = x$, $z^2 = 2\left(x^2 - 1\right)$.

4.21. Найти линии наибыстрейшего изменения скалярных полей:

1) $u = x^2 - y^2$. 2) $u = \frac{x^2}{2} + y^2$. 3) $u = x^2 + 2y^2 + z^2$.

Отв.: 1) $xy = C$; **2)** $y = C x^2$ и $x = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$; **3)** $z^2 = 2(x^2 - 1)$.

4.2. Поток векторного поля через поверхность

Поток векторного поля через ориентированную поверхность. Поток векторного поля через замкнутую поверхность. Дивергенция векторного поля и её некоторые свойства

Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)$ – векторное поле, а S – ориентированная гладкая поверхность в $\boldsymbol{R}^3$. *Потоком векторного поля* $\vec{a}$ (или вектора $\vec{a}$) через поверхность S в направлении единичного вектора $\vec{n}^0$ нормали $\vec{n}$ к поверхности называется ПИ-2

$$\Pi = \iint\limits_S \left(\vec{a}(M), \vec{n}^0\right) ds = \iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy =$$

$$= \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds, \qquad (4.8)$$

где $M=(x,y,z)\in S;\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали к S.

Поток – скалярная величина. При этом, если $(\vec{a},\wedge\ \vec{n}^0)<\pi/2$, то $\Pi>0$. В этом случае поток вектора $\vec{a}$ идёт с внутренней на внешнюю сторону поверхности S. Если же $(\vec{a},\wedge\ \vec{n}^0)>\pi/2$, то $\Pi<0$, и значит, поток вектора идёт с внешней на внутреннюю сторону поверхности S. При смене ориентации поверхности S знак потока Π изменяется на противоположный. Способы вычисления ПИ-2, выражающих поток Π, в случае явного, неявного и параметрического заданий поверхности изложены в п. 3.2. Для этих способов ещё раз приведём соответствующие формулы. Пусть $\gamma=\left(\vec{n},\hat{\ }z\right)\le\dfrac{\pi}{2}$.

1°. Если S задана явно уравнением $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$ – проекция S на плоскость XY, то $\vec{n}=\left(-f_x{}',-f_y{}',1\right)$, и из формулы (4.8) получаем

$$\Pi=\iint\limits_{D_{xy}}\left(-f'_x\,P(x,y,f(x,y))-f'_y\,Q(x,y,z(f(x,y))+R(x,y,f(x,y))\right)dxdy. \qquad (4.9)$$

2°. Если S задана неявно уравнением

$F(x,y,z)=0, F'_z\ne 0,$ то $\vec{n}=\dfrac{1}{F'_z}\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)=-\dfrac{1}{F'_z}\nabla F$ и, следовательно,

$$\Pi=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{1}{F'_z}(F'_x\,P(x,y,z)+F'_y\,Q(x,y,z)+F'_z\,R(x,y,z)\right)dxdy, \qquad (4.10)$$

где z необходимо выразить из уравнения поверхности S.

Замечание. Если $\gamma>\pi/2$, то в $1^0\ \vec{n}=\left(f'_x,f'_y,-1\ \right)$, а в $2^0\ \vec{n}=-\dfrac{1}{F'_z}\nabla F.$

Соответствующим образом изменятся формулы (4.9) и (4.10).

3°. Если поверхность S задана параметрически в виде $x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ (u,v)\in\Omega$, то, согласно формуле (3.11),

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}\left(P(u,v)\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|+Q(u,v)\left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|+R(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\right)dudv, \qquad (4.11)$$

где $P(u,v)=P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad Q(u,v)=Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$
$R(u,v)=R(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).$

4.22. Вычислить поток вектора $\vec{a}=\left(y,x,z^2\right)$ через часть поверхности параболоида $1-z=x^2+y^2$, отсекаемой от него плоскостью $z=0$ (рис 4.3, нормаль внешняя).

Δ Так как $P=y,Q=x,R=z^2$, $z'_x=-2x, z'_y=-2y$ и проекцией D_{xy} поверхности параболоида на плоскость XY является круг $x^2+y^2\le 1$, то по формуле (4.9) с последующим переходом к полярным координатам получаем

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} \left(2xy + 2yx + z^2\right) dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left(4xy + \left(1 - \left(x^2 + y^2\right)\right)^2\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (4r^2 \cos\varphi \sin\varphi - (1 - r^2)^2)\, r\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2r^3 \sin 2\varphi - r(1 - r^2)^2)\, dr = \pi/3.$$ ▲

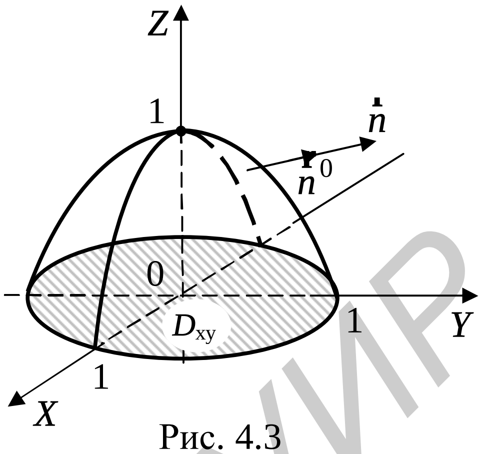

Рис. 4.3

4.23. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (2, -x, 5z)$ через верхнюю сторону треугольника, полученного при пересечении плоскости $x + 2y + 3z = 6$ с координатными плоскостями (рис. 4.4).

► Поверхность S треугольника ABC задана неявно уравнением $F = x + 2y + 3z - 6 = 0$. Так как $P = 2, Q = -x, R = 5z$ и $F'_x = 1, F'_y = 2, F'_z = 3,$ то по формуле (4.10) $(\gamma < \pi/2)$

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{3}(2 - 2x + 15z)\,dxdy,$$ где D_{xy} – треугольник АОВ. Из уравнения плоскости имеем $z = 2 - x/3 - 2y/3$. Поэтому

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} (32 - 7x - 10y)\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{6-2y} (32 - 7x - 10y)\,dx = 24.$$ ▲

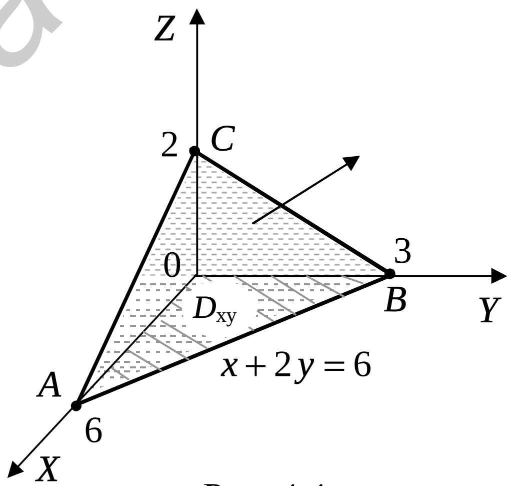

Рис. 4.4

4.24. Найти поток вектора $\vec{a} = \left(x + xy^2, y - yx^2, z\right)$ через полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \ge 0.$ Нормаль внешняя.

► Зададим полусферу параметрически в виде $x = 3\sin\theta\cos\varphi$, $y = 3\sin\theta\sin\varphi$, $z = 3\cos\theta$, $\Omega : \{0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Так как

$$\left|\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}\right| = 9\sin^2\theta\cos\varphi,\ \left|\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}\right| = 9\sin^2\theta\sin\varphi,\ \left|\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}\right| = 9\cos\theta\sin\theta.$$

$P = x\left(1 + y^2\right), Q = y\left(1 - y^2\right), R = z,$ то по формуле (4.11) получаем

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega} \left(3\sin\theta\cos\varphi\left(1 + 9\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)\right) + 3\sin\theta\sin\varphi\left(1 - 9\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)9\sin^2\theta\sin\varphi +$$

$$+ 3\cos\theta\, 9\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\, d\varphi = 27\iint\limits_{\Omega} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 27\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = 54\pi.$$ ▲

4.25. Найти поток вектора электрической напряженности $\vec{E} = q \cdot \vec{r}\big/ r^3$,

$r=|\vec{r}|$, точечного заряда q через поверхность сферы радиусом R в направлении внешней нормали к сфере, если заряд q расположен в её центре.

r В нашем случае $\vec{a}=\vec{E}$. В каждой точке сферы вектор внешней нормали совпадает с её радиус-вектором $\vec{r}$, если за начало координат принять центр сферы. Тогда $\vec{n}^0=\vec{r}/r$ и по формуле (4.8) поток

$$\Pi=\iint_S\left(\vec{E},\vec{n}^0\right)ds=\iint_S\left(q\frac{\vec{r}}{r^3},\frac{\vec{r}}{r}\right)ds=q\iint_S\frac{|\vec{r}|^2}{r^4}ds=q\iint_S\frac{ds}{r^2}=q\iint_S\frac{ds}{R^2}=\frac{q}{R^2}\iint_S ds=\frac{q}{R^2}\cdot 4\pi R^2=4\pi q,$$

так как на сфере $r=R$, а интеграл $\iint_S ds$ равен $4\pi R^2$ – площади поверхности сферы радиусом R. р

4.26. Найти поток поля $\vec{a}$ через ориентированную нормалью $\vec{n}$ поверхность S $(\vec{r}=(x,y,z), r=|\vec{r}|)$:

1) $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)-$постоянный вектор, $S-$ круг радиусом R, лежащий в плоскости $(\vec{r},\vec{n})=d$. **Отв.:** $\pi R^2(\vec{a},\vec{n})$.

2) $\vec{a}=\vec{r}$; $S-$внешняя сторона конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h$. **Отв.:** πh^3.

3) $\vec{a}=\vec{r}$; $S-$внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2\le R^2$, $0\le z\le h$. **Отв.:** $3\pi hR^2$.

4*) $\vec{a}=f(r)\vec{r}$; $S-$ внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. **Отв.:** $4\pi R^3 f(R)$.

5) $\vec{a}=\left(y^2,x^2,z^2\right)$; $S-$часть внешней стороны цилиндра $x^2+y^2=a^2$, расположенная в 1-м октанте между плоскостями $z=0$ и $z=a, a>0$. **Отв.:** $2a^4/3$.

6) $\vec{a}=\left(0,y^2,z\right)$; $S-$ограниченная часть внешней стороны параболоида $z=x^2+y^2$, отсеченная плоскостью $z=2$. **Отв.:** -2π.

7) $\vec{a}=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2-1}\right)$; $S-$часть внешней стороны гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, заключенная между плоскостями $z=0, z=\sqrt{3}$. **Отв.:** $2\pi\sqrt{3}$.

8*) $\vec{a}=(y,z,x)$; $S-$часть внутренней стороны цилиндра $x^2+y^2=R^2$, расположенная в области $x>|z|$. **Отв.:** 0.

9) $\vec{a}=(3x,-y,-z)$; $S-$часть внешней стороны параболоида $x^2+y^2=9-z$, расположенная в 1-м октанте. **Отв.:** $81\pi/8$.

10) $\vec{a}=\left(xz,yz,z^2\right)$; $S-$ часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=9$, расположенная в области $z>2$. **Отв.:** 45π.

11*) $\vec{a}=(x,y,xyz)$; $S-$часть внешней стороны цилиндра $x^2+y^2=R^2$, расположенная в области $x>|y|$ и отсеченная плоскостью $z=0$ и параболоидом

$z = x^2 - y^2$. **Отв.:** R^4.

12*) $\vec{a} = (xy - y^2, -x^2 + xy + 2x, z)$; S – часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, отсеченная конусом $z^2 = x^2/2 + y^2$ **Отв.:** 0.

Пусть S – замкнутая кусочно-гладкая поверхность с единичным вектором внешней нормали $\vec{n}^0$. Тогда *поток* Π *вектора* $\vec{a} = (P, Q, R)$ *через замкнутую поверхность* S можно вычислить с помощью формулы Остроградского–Гаусса (3.17):

$$\Pi = \oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \qquad (4.12)$$

Пусть $\vec{a}(M)$ – поле скоростей несжимаемой жидкости. Если $\Pi > 0$, то из (4.12) следует, что из области V вытекает больше жидкости, чем втекает. Это означает, что внутри области V имеются *источники* – точки, из которых жидкость вытекает. Если $\Pi < 0$, то из области V вытекает меньше жидкости, чем втекает в неё. В этом случае говорят, что внутри V имеются *стоки*, т.е. точки, в которые жидкость втекает. При $\Pi = 0$ в V втекает столько же жидкости, сколько вытекает.

Пусть в области V задано векторное поле $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$, где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ имеют непрерывные частные производные в точке $M = (x, y, z) \in V$ по x, y, z соответственно. *Дивергенцией или расходимостью векторного поля* $\vec{a}(M)$ в точке M, обозначаемой $div\,\vec{a}(M)$, называется скалярная величина

$$div\,\vec{a}(M) = \left. \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right|_M. \qquad (4.13)$$

С физической точки зрения $div\,\vec{a}(M)$ характеризует плотность источников и стоков векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M. Если $div\,\vec{a}(M) > 0$, то точка M является источником, если $div\,\vec{a}(M) < 0$, то – стоком. Если $div\,\vec{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни источников, ни стоков.

4.27. Найти $div\,\vec{a}(M)$, если $\vec{a} = (x, y^2, z^3)$, $M = (-2, 4, 5)$.

r По формуле (4.13) находим

$$div\,\vec{a}(M) = (1 + 2y + 3z^2)\big|_M = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 25 = 84. \text{ p}$$

4.28. Найти дивергенцию электрического поля $\vec{E} = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$, e – точечный заряд, помещённый в начале координат.

Δ Имеем по определению:

$$div\,\vec{E} = ke\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3} \right) \right] = ke\left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right) =$$

$$= ke\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = ke\frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0 \quad (\text{при } r \neq 0).$$

Физически это означает отсутствие источников электрического поля, кроме начала координат. В нём $div\vec{E} = \infty$ (бесконечная плотность заряда). р

Дивергенция обладает следующими свойствами:

1^0. $div\,\vec{c} = 0$, $\vec{c}$ – постоянный вектор.

2^0. $div\left(a\vec{a} + b\vec{b}\right) = a\ div\,\vec{a} + b\ div\,\vec{b}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$.

3^0. $div(\varphi\vec{a}) = \varphi\ div\,\vec{a} + (\vec{a}, \boldsymbol{grad}\,\varphi)$, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – скалярная функция.

4.29. Найти $div\left(x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}\right)$ в точке $M = (1,2,-1)$. **Отв.:** 14.

4.30. Найти $div\left(\dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}\right)$. **Отв.:** $-2/(x+y+z)^{5/3}$.

4.31. Магнитное поле, создаваемое электрическим током силы I, текущим по бесконечному проводу, определяется формулой

$\vec{H}(M) = \vec{H}(x, y) = 2I \cdot \dfrac{x\vec{j} - y\vec{i}}{x^2 + y^2}$. Вычислить $div\,\vec{H}(M)$. **Отв.:** 0.

4.32. Найти $(\vec{r} = (x, y, z), r = |\vec{r}|)$:

1) $div\,\boldsymbol{grad}\,r^2$; 2) $div\,\boldsymbol{grad}\,(1/r)$; 3) $div\,r\vec{c}, \vec{c} - const$;

4) $div\,\boldsymbol{grad}\ f(r)$; 5) $div(f(r)\vec{c}), \vec{c} - const$; 6) $div[\vec{c}, \vec{r}]$; 7) $div[\vec{r}, [\vec{c}, \vec{r}]]$.

Отв.: **1)** 6; **2)** 0; **3)** $(\vec{r}, \vec{c})/r$; **4)** $f''(r) + 2f'(r)/r$; **5)** $(\vec{r}, \vec{c})\,f'(r)/r$; **6)** 0; **7)** $-2(\vec{c}, \vec{r})$.

4.33. Найти поток поля $\vec{a}$ через полную поверхность S:

1) $\vec{a} = \left(x^3, y^3, z^3\right)$; S – внешняя поверхность куба $|x| \le a, |y| \le a, |z| \le a$.

2) $\vec{a} = (z - y, x - z, y - x)$; S – внешняя поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x + y - z = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

3) $\vec{a} = \left(y^2z, -yz^2, x\left(y^2 + z^2\right)\right)$; S – внешняя поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \le a^2$, $0 \le x \le a$.

4) $\vec{a} = (2x, 2y, -z)$; S – внешняя поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le H$.

5) $\vec{a} = (x + z, y + x, z + y)$; S – поверхность тела $x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le y$.

6) $\vec{a} = \left(x^2y, xy^2, xyz\right)$; S – поверхность тела

$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Отв.: **1)** $24a^5$; **2)** 0; **3)** $-\pi a^{5/4}$; **4)** πH^3; **5)** $2R^3$; **6)** $R^5/3$.

Если замкнутая поверхность S образована двумя поверхностями S_1 и S_2, т.е. $S = S_1 \cup S_2$, то вследствие аддитивности ПИ-2 поток вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$, например, через поверхность S_1 можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_{S_1}\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)ds = \oiint\limits_{S}\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)ds - \iint\limits_{S_2}\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)ds = \iiint\limits_{V} div\,\vec{a}\,dxdydz - \iint\limits_{S_2}\left(\vec{a}, \vec{n}^0\right)ds, \qquad (4.14)$$

где V – тело, ограниченное поверхностью S.

4.34. Найти поток поля $\vec{a}=\left(x-y,\ x+y,\ z^2\right)$ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2=1$, заключенную между плоскостями $z=0$ и $z=2$ (рис. 4.5, нормаль внешняя).

Δ В нашем случае $P=x-y,\ Q=x+y,\ R=z^2,\ div\,\vec{a}=(2+2z)$. Образуем замкнутую поверхность S, состоящую из цилиндрической поверхности $x^2+y^2=1$ и плоскостей $P_1: z=0$ и $P_2: z=2$. Тогда в соответствии с формулой (4.14) искомый поток $\Pi=\iiint\limits_V 2(1+z)\,dxdydz-\iint\limits_{P_1}\left(\vec{a},\vec{n}_1^{\,0}\right)ds-\iint\limits_{P_2}\left(\vec{a},\vec{n}_2^{\,0}\right)ds.$

Вычислим каждый из интегралов по отдельности. Для тройного интеграла переходом к цилиндрическим координатам находим

$2\iiint\limits_V(1+z)\,dxdydz=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_0^2(1+z)dz=8\pi$. Так как нормаль к плоскости P_1 имеет вид $\vec{n}_1^{\,0}=(0,0,-1)$, то $\iint\limits_{P_1}(\vec{a},\vec{n}_1^{\,0})ds=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}z^2dxdy=0$, поскольку $z=0$ в плоскости P_1.

Далее, на плоскости P_2 имеем $z=2,\ \vec{n}_2^{\,0}=(0,0,1)$. Поэтому

$$\iint\limits_{P_2}\left(\vec{a},\vec{n}_2^{\,0}\right)ds=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}z^2dxdy=4\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=4\pi\,.$$

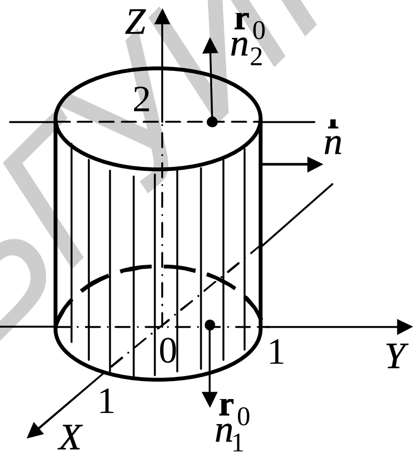

Рис. 4.5

Таким образом, $\Pi=8\pi-0-4\pi=4\pi$. $\blacktriangle$

4.35. Найти поток поля $\vec{a}=\left(x^2yz, xy^2z, xyz^2\right)$ через часть внешней стороны эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, расположенную в первом октанте.

Отв.: $a^2b^2c^2/8$.

4.36. Найти поток поля $\vec{a}=\left(x^3, y^3, z^3\right)$ через половину внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=2x,\ z\ge 0$. **Отв.:** 0.

4.37. Найти поток поля $\vec{a}=\left(x+xy^2, y-yx^2, z-3\right)$ через часть поверхности S, вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями):

1) $\vec{a}=\left(x+xy^2, y-yx^2, z-3\right);\ S: x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0),\ P: z=1.$
2) $\vec{a}=\left(x+xz, y, z-x^2\right);\ S: x^2+y^2+z^2=4\ (z\ge 0),\ P: z=0.$

Отв.: 1) 3π; **2)** 16π.

4.3. Циркуляция векторного поля

Циркуляция векторного поля вдоль контура и её физический смысл. Ротор векторного поля и его некоторые свойства

Пусть в прямоугольной ДСК определено векторное поле $\vec{a}=(P,Q,R)$. Криволинейный интеграл

$$C=\oint_{\Gamma}\left(\vec{a},\vec{\tau}^{\,0}\right)dl=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz, \tag{4.15}$$

взятый по замкнутому контуру Г, называется *циркуляцией вектора* $\vec{a}$ *вдоль этого контура*. Здесь $\vec{\tau}^{\,0}$ – единичный вектор касательной к контуру Г, указывающий направление движения вдоль этого контура. Если $\vec{a}$ – вектор силы, то циркуляция (4.15) представляет собой работу этой силы по замкнутому контуру Г. В этом и состоит *физический смысл циркуляции*. Если контур Г не является замкнутым, то КрИ $\int_{\Gamma}\left(\vec{a},\vec{\tau}^{\,0}\right)dl$ обычно называют *линейным интегралом* от вектора $\vec{a}$ вдоль ориентированной с помощью $\vec{\tau}^{\,0}$ кривой Г.

4.38. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a}(M)=\left(x,-2z^2,y\right)$ вдоль линии Г пересечения цилиндра $x^2/16+y^2/9=1$ с плоскостью $z=x+2y+2$ в положительном направлении обхода относительно вектора нормали плоскости $\vec{n}=(-1,-2,1)$.

Δ Составим параметрические уравнения кривой Г. Параметрические уравнения направляющей цилиндра $x^2/16+y^2/9=1$ имеют вид $x=4\cos t$, $y=3\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. Тогда параметрическими уравнениями кривой Г (в плоскости сечения – это эллипс) будут $x=4\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4\cos t+6\sin t+2$, $0\le t\le 2\pi$. Поэтому искомая циркуляция будет равна

$$C=\oint_{\Gamma}xdx-2z^2dy+ydz=$$

$$=\int_0^{2\pi}(4\cos t(-4\sin t)-2(4\cos t+6\sin t+2)^2 3\cos t+3\sin t(-4\sin t+6\cos t)dt=$$

$$=-\int_0^{2\pi}(96\cos^2 t+12\sin^2 t)dt=-\int_0^{2\pi}48(1+\cos 2t)dt-6\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=-48\cdot 2\pi-6\cdot 2\pi=-108\pi. \qquad ▲$$

4.39. Найти циркуляцию поля $\vec{a}$ вдоль контура Г в направлении, соответствующем возрастанию параметра t:

1) $\vec{a}=(x,-z^2,y)$; $\Gamma: x=2\cos t, y=3\sin t, z=4\cos t-3\sin t-3$.
2) $\vec{a}=(y-z,z-x,x-y)$; $\Gamma: x=2\cos t, y=2\sin t, z=3(1-\cos t)$.
3) $\vec{a}=(-2z,-x,x^2)$; $\Gamma: x=(\cos t)/3, y=(\sin t)/3, z=8$.
4) $\vec{a}=(x,-3z^2,y)$; $\Gamma: x=\cos t, y=4\sin t, z=2\cos t-4\sin t+3$.

5) $\vec{a} = (x, -2z^2, y)$; $\Gamma: x = 3\cos t, y = 4\sin t, z = 6\cos t - 4\sin t + 1$.

Отв.: 1) 60π; **2)** -20π; **3)** $-\pi/9$; **4)** -152π; **5)** -120π.

4.40. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = (y, -z, x)$ вдоль эллипса $\left\{ \frac{(x^2 + y^2)}{2} + z^2 = a^2,\ z = x \right\}$ в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Отв.: $2\pi a^2$.

Ротором или *вихрем векторного поля* $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ называется вектор

$$\mathbf{rot}\,\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}. \tag{4.16}$$

Этот вектор можно символически (формально) получить из определителя

$$\mathbf{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

разложив его по элементам первой строки.

Используя понятие ротора и циркуляции, формулу Стокса (3.19) можно записать в векторной форме:

$$C = \oint_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau}^{\,0})\,dl = \iint_S (\mathbf{rot}\,\vec{a}, \vec{n}^{\,0})\,d\sigma, \tag{4.17}$$

т. е. *циркуляция векторного поля* $\vec{a}(M)$ *вдоль замкнутого контура* Γ *равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность* S, *краем которой является* Γ (направление обхода по Γ и сторона поверхности S согласованы).

Если $\mathbf{rot}\,\vec{a} \neq 0$, то это свидетельствует о вращении поля $\vec{a}(M)$, то есть поле носит вихревой характер.

Отметим *некоторые свойства ротора* векторного поля.

1. $\mathbf{rot}\,\vec{c} = \vec{0}$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор.

2. $\mathbf{rot}\,(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\,\mathbf{rot}\,\vec{a} + \beta\,\mathbf{rot}\,\vec{b}$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

3. $\mathbf{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\,\mathbf{rot}\,\vec{a} + [\mathbf{grad}\,\varphi, \vec{a}]$, где $\varphi(x, y, z)$ – скалярная гладкая функция.

4.41. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (y, x^2, -z)$ по окружности $\Gamma: x^2 + y^2 = 4, z = 3$ в положительном направлении обхода относительно орта $\vec{k}$ двумя способами: 1) по формуле (4.15); 2) по формуле Стокса (4.17).

Δ 1) При возрастании параметра t от 0 до 2π движение по окружности Γ происходит против хода часовой стрелки относительно орта $\vec{k}$ (рис. 4.6).

Поэтому параметрические уравнения Г есть $x = 2\cos t, y = 2\sin t, \quad z = 3, 0 \le t \le 2p$. Тогда

$$C = \oint\limits_{\Gamma} y dx + x^2 dy - z dz = \int\limits_0^{2p} (2\sin t(-2\sin t) +$$

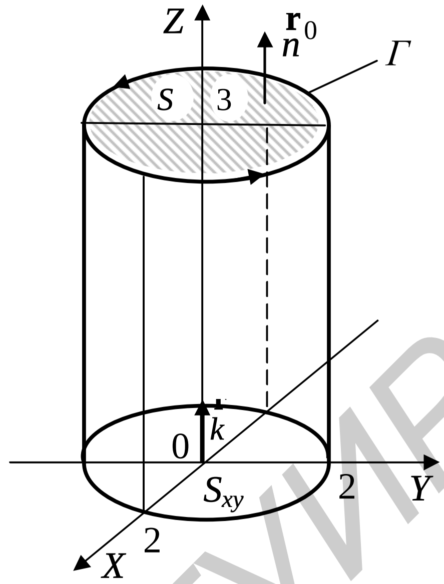

Рис. 4.6

$$+ 4\cos^2 t 2\cos t) dt = 8\int\limits_0^{2p} \cos^3 t dt - 4\int\limits_0^{2p} \sin^2 t dt = -4p.$$

2) В качестве поверхности S с краем Г удобнее всего выбрать круг $x^2 + y^2 \le 4, z = 3$ (рис. 4.6). Тогда $\vec{n}^0 = \vec{k}$. Далее $rot\ \vec{a} = (2x-1)\vec{k}$, и тогда, применив полярные координаты, получим

$$C = \oiint\limits_S (\mathbf{rot}\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iint\limits_{S_{xy}} (2x-1) dx dy =$$

$$= \iint\limits_S (2r\cos j - 1) dr dj = \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^2 (2r\cos j - 1) r\, dr = -4p. \qquad р$$

4.42. Вершины *D,B,A’* куба *ABCDA’B’C’D’* находятся соответственно в точках (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (y, z, x)$ вдоль ломаной *C′CDABB′A′D′* (рис. 4.7).

Δ Обозначим данную ломаную через L_1. Чтобы сделать возможным применение формулы Стокса для вычисления искомого интеграла

$$\int\limits_{L_1} (\vec{a}, \vec{t}^0) dl,$$

выражающего работу, дополним ломаную L_1 до замкнутой кривой L отрезком L_2 прямой, соединяющим точки D' и C'. На контур L «натянем» кусочно-гладкую поверхность S, состоящую из квадратов *C′CDD′,D′DAA′*

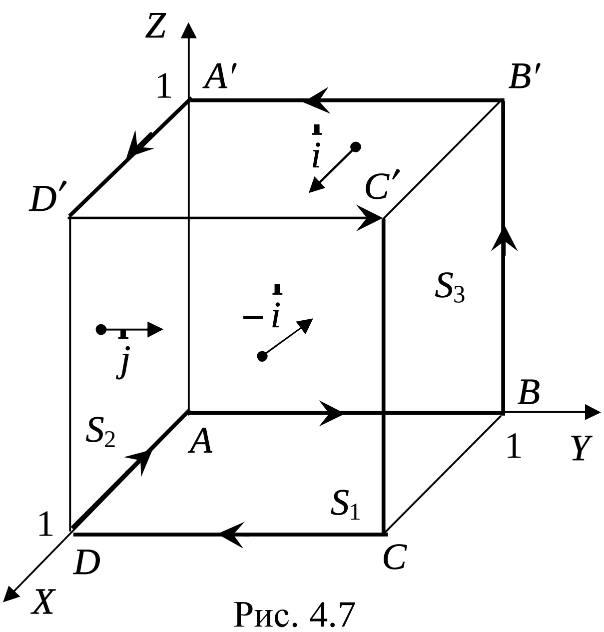

Рис. 4.7

и $A'ABB'$. Их обозначим соответственно S_1, S_2, S_3. Применяя формулу (4.17) к контуру L и поверхности S, имеем

$$\int_{L_1}(\vec{a},\vec{t}^{\,0})dl+\int_{L_2}(\vec{a},\vec{t}^{\,0})dl=\iint_{S_1}(\mathbf{rot}\,\vec{a},\vec{n}^{\,0})ds+\iint_{S_2}(\mathbf{rot}\,\vec{a},\vec{n}^{\,0})ds+\iint_{S_3}(\mathbf{rot}\,\vec{a},\vec{n}^{\,0})ds. \qquad (4.18)$$

Находим $\mathbf{rot}\,\vec{a}=(-1,-1,-1)$. Орты нормалей на частях S_1, S_2, S_3 поверхности S с учетом направления обхода контура L_1 имеют вид $\vec{n}^{\,0}(S_1)=-\vec{i}$, $\vec{n}^{\,0}(S_2)=\vec{j}$, $\vec{n}^{\,0}(S_3)=\vec{i}$. Вычисляем поток вектора $\mathbf{rot}\,\vec{a}$ через поверхность S, т. е. величину выражения в правой части (4.18):

$$\iint_{S}(\mathbf{rot}\,\vec{a},\vec{n}^{\,0})ds=\iint_{S_1}ds-\iint_{S_2}ds-\iint_{S_3}ds=-1.$$

Находим теперь циркуляцию поля $\vec{a}$ вдоль отрезка L_2 от точки D' до точки C'. На этой прямой вектор $\vec{a}=(y,1,1)$, $\vec{t}^{\,0}$, $dl=\vec{j}dy$ и, значит, $\int_{L_2}(\vec{a},\vec{t}^{\,0})dl=\int_0^1 dy=1$.

Из формулы (4.18) следует, что искомый интеграл $\int_{L_1}(\vec{a},\vec{t}^{\,0})dl$ (циркуляция поля $\vec{a}$ вдоль L_1) равен разности ПИ (поток $\mathbf{rot}\,\vec{a}$ через поверхность S) и КрИ $\int_{L_2}(\vec{a},\vec{t}^{\,0})dl$ (циркуляция вдоль L_2): $\int_{L_1}(\vec{a},\vec{t}^{\,0})dl=-1-1=-2$. ◄

4.43. Проверить указанные равенства в координатной форме ($a, b\in\boldsymbol{R}$; φ, $\vec{a},\vec{b}$ – дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\vec{c}$ – постоянный вектор):

1) $\mathbf{rot}\,\varphi\vec{c}=[\mathbf{grad}\,\varphi,\vec{c}]$. 2) $\mathbf{rot}[\vec{c},\vec{a}]=\vec{c}\,div\,\vec{a}-(\vec{c},\nabla)\vec{a}$.

3*) $\mathbf{rot}[\vec{a},\vec{b}]=\vec{a}\,div\,\vec{b}-\vec{b}\,div\,\vec{a}+(\vec{b},\nabla)\vec{a}-(\vec{a},\nabla)\vec{b}$.

4) $div[\vec{a},\vec{b}]=\vec{b}(\mathbf{rot}\,\vec{a})-(\vec{a},\mathbf{rot}\,\vec{b})$.

4.44. Найти ($\vec{r}=(x,y,z), r=|\vec{r}|$; $\vec{a},\vec{b}$ – постоянные векторы, $\varphi(r)$ – дифференцируемое поле):

1) $\mathbf{rot}(r\vec{a})$. 2) $\mathbf{rot}((\vec{r},\vec{a})\vec{b})$. 3) $\mathbf{rot}(\varphi(r)\vec{a})$. 4) $\mathbf{rot}(\varphi(r)\vec{r})$.

Отв.: 1) $[\vec{r},\vec{a}]/r$; **2)** $[\vec{a},\vec{b}]$; **3)** $\varphi'(r)[\vec{r},\vec{a}]/r$; **4)** 0.

4.45. Найти угол между $\mathbf{rot}\,\vec{a}(M_1)$ и $\mathbf{rot}\,\vec{a}(M_2)$ если

1) $\vec{a}=(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$; $M_1=(1,2,3), M_2=(1,1,-1)$.

2) $\vec{a}=(z^3, x^3+y^3, xyz)$; $M_1=(1,2,0), M_2=(1,12,4)$.

Отв.: 1) $\pi/2$; **2)** $\arccos(3/5)$.

4.46. Показать, что поле $\mathbf{rot}\,\vec{a}(M)$ свободно от источников и стоков.

4.47. Найти функцию $f(x,z)$, если $rot(yz, f(x,z), xy)=(-1,0,1)$.

Отв.: $f(x,z)=xz+x+z+c$, $c-const$.

4.4. Соленоидальные и потенциальные векторные поля

Соленоидальные векторные поля. Потенциальные векторные поля. Потенциалы. Криволинейный интеграл в потенциальном поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным* в области V, если в этой области

$$div(\vec{a}(M)) = 0. \qquad (4.19)$$

Равенство (4.19) называется *условием соленоидальности* векторного поля $\vec{a}(M)$ в V.

Так как $div(\vec{a}(M))$ характеризует плотность источников поля $\vec{a}$, то в области соленоидальности поля нет источников и стоков этого поля. Например, электрическое поле $\vec{E}$ точечного заряда соленоидально, ибо $div\vec{E} = 0$ всюду вне точки нахождения заряда (в этой точке $div\vec{E} = \infty$).

В соленоидальном поле V векторные (силовые) линии не могут начинаться или заканчиваться. Они могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе поля.

Из формулы Остроградского–Гаусса следует, что в соленоидальном поле поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность S, лежащую в этом поле, равен нулю:

$$\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0) ds = 0.$$

Если векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить в виде ротора некоторого векторного поля $\vec{b}(M)$, то $\vec{b}(M)$ называется *векторным потенциалом* поля $\vec{a}(M)$.

Легко проверить, что $div\,\mathbf{rot}\,\vec{b} = 0$, т.е поле вектора $\vec{a} = \mathbf{rot}\,\vec{b}$ является соленоидальным.

4.48. Является ли векторное поле $\vec{a}$ соленоидальным, если

1) $\vec{a} = (x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2))$.

2) $\vec{a} = (y^2, -(x^2 + y^3), z(3y^2 + 1))$.

3) $\vec{a} = (1 + 2xy, -y^2 z, z^2 - 2zy + 1)$.

4) $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}], \vec{u} = (x, y, z), \vec{v} = (y, z, x)$.

Отв.: 1) Да. **2)** Нет. **3)** Да. **4)** Нет.

4.49. Найти дивергенцию *сферического векторного поля* $\vec{a} = f(r) \cdot \vec{r}$, $\vec{r} = (x, y, z), r = |\vec{r}|$. Определить вид функции $f(r)$, для которой поле $\vec{a}$ является соленоидальным. **Отв.:** $div\vec{a} = f'(r)r + 3f(r)$; $f(r) = c / r^3, c - const.$

4.50. Показать, что поле вектора $\vec{E} = \frac{q}{r^2}\vec{r}^0$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$ является соленоидальным во всякой области, не содержащей начала координат $O=(0,0,0)$.

Векторное поле $\vec{a}=(P,Q,R)$ называется *потенциальным* или *безвихревым* в некоторой области V, если

$$\boldsymbol{rot}\,\vec{a}(M)=\vec{0},\ \forall M\in V. \qquad (4.20)$$

Равенство (4.20) называется *условием потенциальности* поля $\vec{a}$. Это условие, согласно определению ротора, равносильно выполнению равенств

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (4.21)$$

Имеет место следующее утверждение: *если в односвязной области V задано векторное поле $\vec{a}=(P,Q,R)$, где P,Q,R – гладкие функции, то для того, чтобы поле $\vec{a}$ было потенциальным, в V необходимо и достаточно, чтобы существовала дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция $u=u(x,y,z)$, такая, что*

$$\vec{a}=\boldsymbol{grad}\,u. \qquad (4.22)$$

Функция $u=u(x,y,z)$, удовлетворяющая в области V равенству (4.22), называется *потенциалом* или *потенциальной функцией* векторного поля $\vec{a}$.

Соотношение (4.22) равносильно следующим трем скалярным равенствам:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z). \qquad (4.23)$$

Потенциал поля определяется неоднозначно с точностью до постоянной.

В случае потенциальности поля $\vec{a}=(P,Q,R)$ задача нахождения потенциала u равносильна восстановлению функции u по ее полному дифференциалу $du=Pdx+Qdy+Rdz$.

Потенциал u поля $\vec{a}=(P,Q,R)$ можно найти по формуле

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz, \qquad (4.24)$$

где (x_0,y_0,z_0) – некоторая фиксированная точка поля, а (x,y,z) – произвольная текущая точка. Обычно в качестве пути, соединяющего точку $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ и $M=(x,y,z)$, выбирают ломаную M_0ABM, звенья которой параллельны координатным осям и не выходят за пределы области: M_0A параллельно X, AB параллельно Y, BM параллельно Z (рис. 4.8). Тогда формула (4.24) примет вид

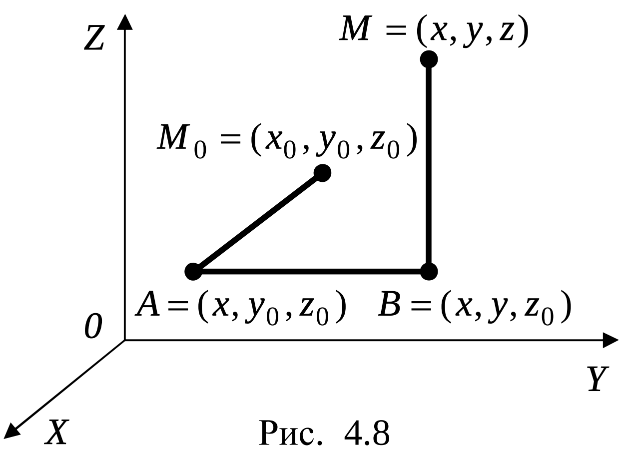

Рис. 4.8

$$u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz, \qquad (4.25)$$

где *x,y,z* – координаты текущей точки на звеньях ломаной, вдоль которых ведется интегрирование.

Линейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(\vec{a},\vec{t}^{\,0})dl=\int\limits_{\Gamma}(\vec{a},d\vec{r})$, *где* $d\vec{r}=\vec{t}^{\,0}dl$ *в потенциальном поле* $\vec{a}(M)$ *равен разности значений потенциала* $u(M)$ *в конечной* M_2 *и начальной* M_1 *точках интегрирования*:

$$\int\limits_{M_1}^{M_2}(\vec{a},d\vec{r})=u(M_2)-u(M_1). \qquad (4.26)$$

4.51. Являются ли следующие векторные поля потенциальными?

1) $\vec{a}=(xz,\,2y,\,xy)$.

2) $\vec{a}=(2xy+z^2,\,2yz+x^2,\,2xz+y^2)$.

3) $\vec{a}=\frac{1}{3}(x^3,y^3,xz^3)$.

4) $\vec{a}=(yz\cos xy,\,xz\cos xy,\,\sin xy)$.

5) $\vec{a}=(\ln(1+z^2),\,\ln(1+x^2),\,xz)$.

6) $\vec{a}=\left(\frac{z}{x^2}+\frac{1}{y},\,\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z},\,\frac{y}{z^2}+\frac{1}{x}\right)$.

Отв.: 1) Нет. **2)** Да. **3)** Нет. **4)** Да. **5)** Нет. **6)** Нет.

4.52. Доказать, что поле $\vec{a}=f(r)\cdot\vec{r}$, где $\vec{r}=(x,y,z),\,r=|\vec{r}|$, $f(r)$ – дифференцируемая функция, является потенциальным.

4.53. Доказать, что векторное поле $\vec{a}=(y+z,\,z+x,\,x+y)$ является потенциальным, и найти его потенциал.

Δ *1-й способ*. Имеем

$$\textbf{rot}\,\vec{a}(M)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (y+z) & (z+x) & (x+y)\end{vmatrix}=(1-1)\vec{i}+(1-1)\vec{j}+(1-1)\vec{k}\equiv\vec{0},$$

т. е. поле $\vec{a}$ является потенциальным. Потенциал этого поля найдем с помощью формулы (4.25). За начальную фиксированную точку возьмем начало координат $O=(0,0,0)$. Тогда

$$u(x,y,z)=\int\limits_{0}^{x}(0+0)dx+\int\limits_{0}^{y}(x+0)dy+\int\limits_{0}^{z}(x+y)dz=xy+xz+yz+c, c-const.$$

2-й способ. Векторное равенство $\vec{a}=\textbf{grad}\,u$ равносильно трем скалярным равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z, \qquad (4.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+z, \qquad (4.28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x + y. \tag{4.29}$$

Интегрируя (4.27) по x, получаем

$$u(x,y,z) = \int_0^x (y+z)dx = xy + xz + f(y,z), \tag{4.30}$$

где $f(y,z)$ – произвольная дифференцируемая функция, играющая роль константы при интегрировании по x. Дифференцируя обе части (4.30) по y с учетом (4.28), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow x + z = x + \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow z = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4.31}$$

Равенство (4.31) интегрируем по y:

$$f(y,z) = \int_0^y f(y,z)dy = \int_0^y zdy = zy + F(z), \tag{4.32}$$

где $F(z)$ – неопределенная пока функция от z. Из (4.32) и (4.30) имеем

$$u(x,y,z) = xy + xz + F(z).$$

Это равенство дифференцируем по z и с учетом (4.29) получим

$$x + y = x + y + \frac{\partial F}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Rightarrow F = c - const.$$

Итак, $u(x,y,z) = xy + xz + zy + c$. р

4.54. Вычислить криволинейный интеграл в поле вектора $\vec{a} = (yz+1, xz, xy)$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $O = (0,0,0)$ и $A = (1,2,3)$.

Δ Убедившись, что поле $\vec{a}$ потенциально, как и в примере 4.53, найдем его потенциал $u(x,y,z) = x + xyz + c$. По формуле (4.26) искомый КрИ

$$\int_0^A (yz+1)dx + xzdy + xydz = u(A) - u(0) = (1\cdot 2\cdot 3 + 1 + c) - c = 7.$$ р

4.55. Доказать потенциальность поля и найти его потенциал:

1) $\vec{a} = (3x^2y - y^3, x^3 - 3xy^2)$.

2) $\vec{a} = \left(\dfrac{\sin 2x \cos 2y}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, \dfrac{\cos 2x \sin 2y}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}\right)$.

3) $\vec{a} = (yz - xy, xz - x^2/2 + yz^2, xy + y^2 z)$.

4*) $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}, \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}, \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)$.

5*) $\vec{a} = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}, \dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}, \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)$.

Отв.: **1)** $xy(x^2 - y^2) + c$; **2)** $\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} + c$;

3) $xyz-\frac{1}{2}(x^2y+y^2z^2)+c$; **4)** $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+c$; **5)** $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}-\frac{xy}{z^2}+c$.

4.56. Доказать потенциальность поля $\vec{a}(M)$, найти его потенциал и вычислить значения соответствующего КрИ-2 по дуге *AB*, где *A* – начало дуги, *B* – ее конец:

1) $\vec{a}=(2xyz,x^2z,x^2y)$, $A=(1,-1,2), B=(-2,4,2)$.

2) $\vec{a}=(x^2-2yz,y^2-2xz,z^2-2xy)$, $A=(1,-1,1), B=(-2,2,3)$.

3) $\vec{a}=(2xy+z^2,2xy+x^2,2xz+y^2)$, $A=(0,1,-2), B=(2,3,1)$.

Отв.: 1) 34; **2)** 92/3; **3)** 25.

4.5. Дифференциальные операции 2-го порядка. Векторные операции в криволинейных ортогональных координатах

Оператор Гамильтона «набла». Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа. Гармонические функции. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве. Коэффициенты Ламэ в различных ортогональных системах координат. Градиент, дивергенция, ротор и оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат

Операции $\textbf{\textit{grad}}\, u$, $div\,\vec{a}$, $\textbf{\textit{rot}}\,\vec{a}$, $\vec{a}=(P,Q,R)$ выражаются через частные производные первого порядка:`

$$\textbf{\textit{grad}}\, u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right);\ div\,\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z};\quad \textbf{\textit{rot}}\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Эти соотношения могут быть записаны кратко с помощью символического вектора «набла» (*оператора Гамильтона*):

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),\ \text{т. е.}$$

$$\nabla u=\textbf{\textit{grad}}\ u\,.$$

Для производной поля u в точке M по направлению произвольного единичного вектора $\vec{l}^{\,0}=(l_x^0,l_y^0,l_z^0)$ верна формула

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(\vec{l}^{\,0},\textbf{\textit{grad}}\ u). \qquad (4.33)$$

Вводя скалярный дифференциальный символ $(\vec{l}^{\,0},\nabla)$, имеющий координатный вид

$$(\vec{l}^{\,0},\nabla)=l_x^0\frac{\partial u}{\partial x}+l_y^0\frac{\partial u}{\partial y}+l_z^0\frac{\partial u}{\partial z},$$

равенство (4.33) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(\vec{l}^{\,0},\nabla)u. \qquad (4.34)$$

Далее,

$$(\nabla,\vec{a})=\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q+\frac{\partial}{\partial z}R=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

т. е.

$$(\nabla,\vec{a})=div\,\vec{a}. \qquad (4.35)$$

Кроме того, $[\nabla,\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$, т. е.

$$[\nabla,\vec{a}]=\boldsymbol{rot}\,\vec{a}. \qquad (4.36)$$

Если символический *оператор* ∇ действует на произведение, то необходимо применять его к каждому сомножителю отдельно, считая другой сомножитель постоянным. Затем, пользуясь правилами векторной алгебры, следует преобразовать каждое слагаемое так, чтобы оператор ∇ стоял перед последним сомножителем.

4.57. Используя правила действия с ∇, показать, что

а) $\boldsymbol{grad}\;(uv)=v\;\;\boldsymbol{grad}\;\;u+u\;\;\boldsymbol{grad}\;\;v;$

б) $\boldsymbol{rot}[\vec{a},\vec{c}]=(\vec{c},\nabla)\vec{a}-\vec{c}\,div\,\vec{a},\quad \vec{c}-\boldsymbol{const}.$

r а) Имеем: $\boldsymbol{grad}(uv)=\nabla(\hat{u},v)+\nabla(u,\hat{v})$ («шапочка» $\frown$ указывает функцию, на которую «действует» оператор). Но

$\nabla(\hat{u}v)=v\nabla u=v\;\boldsymbol{grad}\,u,\;\nabla(u\hat{v})=u\nabla v=u\;\boldsymbol{grad}\,v,$ и формула а) доказана.

б) По известной формуле векторной алгебры $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=(\vec{a},\vec{c})\vec{b}-(\vec{a},\vec{b})\vec{c}.$

Учитывая соотношение $[\nabla,[\vec{a},\hat{\vec{c}}]]=0,$ ($\vec{c}-const,$ и поэтому результат действия ∇ на $\vec{c}$ есть нуль), имеем:

$$\boldsymbol{rot}[\vec{a},\vec{c}]=[\nabla,[\vec{a},\vec{c}]]=[\nabla,[\hat{\vec{a}},\vec{c}]]+[\nabla,[\vec{a},\hat{\vec{c}}]]=(\nabla,\vec{c})\hat{\vec{a}}-(\nabla,\hat{\vec{a}})\vec{c}.$$

Но $(\nabla,\vec{c})\vec{a}=(\vec{c},\nabla)\vec{a},$ а это и есть производная вектора $\vec{a}$ по направлению вектора $\vec{c}$ (см. 4.34). Таким образом, равенство б) доказано. p

4.58. С помощью оператора ∇ доказать следующие равенства ($\vec{c}$ – постоянный, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – переменные векторы):

1) $div(\vec{c}u)=(\vec{c},\boldsymbol{grad}\,u).$ 2) $div(\vec{a}u)=u\,div\,\vec{a}+(\vec{a},\boldsymbol{grad}\,u).$

3) $\boldsymbol{grad}(\vec{a},\vec{c})=[\vec{c},\boldsymbol{rot}\,\vec{a}]+(\vec{c},\nabla)\vec{a}.$

4) $\boldsymbol{grad}(\vec{a},\vec{b})=[\vec{b},\boldsymbol{rot}\,\vec{a}]+[\vec{a},\boldsymbol{rot}\,\vec{b}]+(\vec{b},\nabla)\vec{a}+(\vec{a},\nabla)\vec{b}.$

5) $div\,[\vec{a},\vec{c}]=(\vec{c},\boldsymbol{rot}\,\vec{a}).$ 6) $div\,[\vec{a},\vec{b}]=(\vec{b},\boldsymbol{rot}\,\vec{a})-(\vec{a},\boldsymbol{rot}\,\vec{b}).$

7) $\boldsymbol{rot}\,(\vec{c}u)=[\boldsymbol{grad}\,u,\vec{c}].$ 8) $\boldsymbol{rot}\,(\vec{a}u)=u\,\boldsymbol{rot}\,\vec{a}+[\boldsymbol{grad}\,u,\vec{a}].$

9) $\boldsymbol{rot}[\vec{a},\vec{b}]=(\vec{b},\nabla)\vec{a}-(\vec{a},\nabla)\vec{b}+\vec{a}\,div\vec{b}-\vec{b}\,div\vec{a}$.

Пусть $u=u(x,y,z)$ – скалярное поле, $\vec{a}=(P,Q,R)$ – векторное поле. Предполагаем, что в области задания V этих полей функции u,P,Q,R имеют непрерывные частные производные второго порядка. Тогда $\boldsymbol{grad}\,u(M)$ и $\boldsymbol{rot}\,\vec{a}(M)$ являются дифференцируемыми векторными полями, а $div\,\vec{a}(M)$ – дифференцируемым скалярным полем.

К *дифференциальным операциям второго порядка* относятся следующие:

$$div\ \boldsymbol{grad}\,u,\ \ \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{grad}\,u,\ \ \boldsymbol{grad}\ div\,\vec{a},\ \ div\,\boldsymbol{rot}\,\vec{a},\ \ \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{rot}\,\vec{a}.$$

Эти операции с помощью оператора Гамильтона ∇ записываются следующим образом:

$$\begin{gathered} div\,\boldsymbol{grad}\,u=(\nabla,\nabla u);\ \ \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{grad}\,u=[\nabla,\nabla u];\ \ \ \boldsymbol{grad}\ div\vec{a}=\nabla((\nabla,\vec{a}));\\ div\boldsymbol{rot}\vec{a}=(\nabla,[\nabla,\vec{a}]);\qquad \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{rot}\vec{a}=[\nabla,[\nabla,\vec{a}]]. \end{gathered} \tag{4.37}$$

Символ ∇ может встречаться в выражении не раз, создавая дифференциальные символы второго и более высоких порядков.

Символ $div\,\boldsymbol{grad}=(\nabla,\nabla)=\nabla^2$ обозначается Δ и называется *оператором Лапласа, или лапласианом*. Нетрудно видеть, что

$$\Delta u=\nabla^2 u=div\,\boldsymbol{grad}\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{4.38}$$

Уравнение $\Delta u=0$ называется *уравнением Лапласа*. Оно используется в уравнениях математической физики. Функция $u=u(x,y,z)$, удовлетворяющая в области V уравнению Лапласа, называется *гармонической* в этой области.

Можно легко показать, что

$$div\,\boldsymbol{rot}\,\vec{a}\equiv 0,\qquad \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{grad}\,u\equiv\vec{0}. \tag{4.39}$$

4.59. Доказать следующие равенства (u и v – скалярные поля):

а) $div(u\,\boldsymbol{grad}\,v)=(\boldsymbol{grad}\,u,\boldsymbol{grad}\,v)+u\Delta v$;

б)* $\Delta(uv)=v\Delta u+2(\boldsymbol{grad}\,u,\boldsymbol{grad}\,v)+u\Delta v$.

r а) Используя оператор Гамильтона, получаем

$$div(u\,\boldsymbol{grad}\,v)=(\nabla,(u\nabla v))=(\nabla u,\nabla v)+u\nabla^2 v=(\boldsymbol{grad}\,u,\boldsymbol{grad}\,v)+u\Delta v.$$

б) Используя формулы

$$\Delta u=\nabla^2 u=(\nabla,\nabla u),\quad \nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v,\quad (\nabla,v\nabla u)=(\nabla u,\nabla v)+v\nabla^2 u,$$

находим

$$\begin{gathered}\Delta(uv)=(\nabla,\nabla(uv))=(\nabla,(v\nabla u+u\nabla v))=(\nabla,v\nabla u)+(\nabla,u\nabla v)=\\ =(\nabla v,\nabla u)+v\nabla^2 u+u\nabla^2 v=v\nabla^2 u+2(\nabla u,\nabla v)+u\nabla^2 v=\\ =v\Delta u+2(\boldsymbol{grad}\,u,\boldsymbol{grad}\,v)+u\Delta v.\end{gathered}$$ p

4.60.* Доказать, что для векторного поля $\vec{a}$ справедлива формула

$$\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{rot}\,\vec{a}=\boldsymbol{grad}\ div\,\vec{a}-\Delta\vec{a}.$$

4.61. Вычислить:

1) $\Delta(1/r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, r\neq 0$. **Отв.:** 0.

2) $\Delta\vec{a}$, если $\vec{a}=((y^2+z^2)x,(x^2+z^2)y,(x^2+y^2)z)$. **Отв:** $4\vec{r}=4(x,y,z)$.

4.62. Доказать гармоничность плоского поля

$$\vec{a} = \vec{r}/r^2, \quad \vec{r} = (x, y), r = |\vec{r}|.$$

4.63. Доказать гармоничность поля сил тяготения точечной массы и поля кулоновских сил точечного заряда.

Пусть x, y, z – прямоугольные координаты точки M. Как отмечено в п. 1.2, ее положение можно задать также с помощью криволинейных координат q_1, q_2, q_3, связь которых с x, y, z запишем в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \qquad (4.40)$$

При изменении q_1 и фиксированных значениях q_2, q_3 точка с координатами x, y, z, определяемая формулами (4.40), описывает в пространстве некоторую кривую, называемую *координатной линией* q_1. Аналогично определяются координатные линии q_2, q_3. Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если в любой точке три координатные линии, проходящие через нее, попарно ортогональны, т. е. попарно ортогональны касательные к координатным линиям в этой точке.

Элементы dl_1, dl_2, dl_3 длин дуг координатных линий q_1, q_2, q_3 выражаются формулами $dl_1 = H_1 dq_1, dl_2 = H_2 dq_2, dl_3 = H_3 dq_3,$ соответственно. Здесь величины

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \qquad (4.41)$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

называются *параметрами Ламэ* криволинейных координат q_1, q_2, q_3. Они характеризуют в каждой точке пространства изменение длины координатной линии dl_i в зависимости от изменения dq_i соответствующей криволинейной координаты $q_i, i = 1,2,3$.

В *цилиндрической системе координат* $q_1 = r, q_2 = j, q_3 = z$ формулы (4.41) дают $H_1 = 1,\ H_2 = r,\ H_3 = 1,$ а в *сферической системе координат* $q_1 = r, q_2 = q, q_3 = j \ - H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r\sin q$.

Запишем теперь операции $\textbf{grad}, div, \textbf{rot}, \Delta$ в цилиндрической и сферической системах координат.

Цилиндрическая система координат (ЦСК)

Пусть $\{\vec{e}_r, \vec{e}_j, \vec{e}_z\}$ – базис в точке M (базисные единичные векторы $\vec{e}_r, \vec{e}_j, \vec{e}_z$ направлены по касательным к координатным линиям в точке M в сторону возрастания r, j, z). Тогда в ЦСК для скалярного поля $u(M)$ и векторного поля $\vec{a}(M)=(P,Q,R)$:

$$\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z;$$

$$div\,\vec{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial (rP)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial z};$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{a}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \varphi}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{e}_r+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rQ)}{\partial r}-\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z; \qquad (4.42)$$

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Сферическая система координат (ССК)

Пусть теперь $\{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\}$ – базис в точке M в ССК r,θ,φ. Тогда

$$\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi;$$

$$div\,\vec{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2P)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (Q\sin\theta)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial \varphi};$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{a}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (R\sin\theta)}{\partial \theta}-\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \varphi}-Q\frac{\partial (rR)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+ \qquad (4.43)$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rQ)}{\partial r}-\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi;$$

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

4.64. Найти общий вид потенциального поля $\vec{a}$ в сферических координатах с проекциями, зависящими только от радиальной координаты $\vec{r}$ (*сферически симметричное поле*).

Δ В ССК поле $\vec{a}=a_r\vec{e}_r+a_\theta\vec{e}_\theta+a_\varphi\vec{e}_\varphi$, где по условию

$$a_r=a_r(r), a_\theta=a_\theta(\theta), a_\varphi=a_\varphi(r). \qquad (4.44)$$

Для поля $\vec{a}$, согласно (4.43) и условию задачи, имеем

$$\mathbf{rot}\,\vec{a}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (a_\varphi\sin\theta)}{\partial \theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}-\frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi=\vec{0}.$$

Отсюда, приравнивая к нулю координаты, с учетом (4.44), получаем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a_\varphi(r)}{r}ctg\theta=0,\\&-\frac{da_\varphi(r)}{dr}-\frac{a_\varphi(r)}{r}=0,\\&\frac{da_\theta(r)}{dr}+\frac{a_\theta(r)}{r}=0\end{aligned}\right\} \qquad (4.45)$$

(здесь принято обозначение дифференцирования через *d*, так как функции a_r,a_θ,a_φ зависят только от r). Из первого равенства системы (4.45) имеем

$a_\varphi(r)=0,$ а из третьего равенства получим

$$\frac{da_\theta}{dr}=-\frac{a_\theta}{r}\Rightarrow\frac{da_\theta}{a_\theta}=-\frac{dr}{r}\Rightarrow d\ln a_\theta=d(-\ln r).$$

Так как функции с равными дифференциалами отличаются на постоянную, которую для удобства обозначим $\ln c, c>0,$ то

$$\ln a_\theta=-\ln r+\ln c\Rightarrow a_\theta=\frac{c}{r},\quad c-const.$$

Таким образом, искомое поле имеет вид

$\vec{a}=f(r)\vec{e}_r+\dfrac{c}{r}\vec{e}_\theta$, где $f(r)$ – произвольная дифференцируемая функция. ■

4.65. Найти сферически симметричное решение уравнения Пуассона $\Delta u=1/r,$ т. е. решение, зависящее только от r.

Отв: $u=r/2-c_1/r+c_2;\quad c_1,c_2-const.$

4.66. *Перейти к цилиндрическим координатам в выражении для $\vec{a}=\vec{r}/r$, $\vec{r}=(x,y,0)$, $r=|\vec{r}|$ и найти $div\,\vec{a}$ и $\boldsymbol{rot}\,\vec{a}$.

Отв.: $div\,\vec{a}=2z^2/(r^2+z^2)^{3/2}$, $\boldsymbol{rot}\,\vec{a}=-(2rz/(r^2+z^2)^{3/2})\vec{e}_\varphi$.

4.67. Найти все гармонические функции вида: а) $u=f(r)$; б) $u=f(\varphi)$;

в) $u=f(z)$. (r,φ,z) – цилиндрические координаты.

Отв.: а) $u=c_1\ln r+c_2$; **б)** $u=c_1\varphi+c_2$; **в)** $u=c_1z+c_2$.

4.68. Найти все гармонические функции вида: а) $u=f(\theta)$; б) $u=f(\varphi)$. $(\theta,\varphi$ – две из трех сферических координат r,θ,φ).

Отв.: а) $u=c_1\ln tg\dfrac{\theta}{2}+c_2$; **б)** $u=c_1\varphi+c_2$.

4.69. Перейти к сферическим координатам в выражении $\vec{a}=(x\vec{j}-y\vec{i})/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и найти $\vec{a}, div\,a, \boldsymbol{rot}\,\vec{a}$.

Отв.: $\vec{a}=\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$, $div\,\vec{a}=0$, $\boldsymbol{rot}\,\vec{a}=\dfrac{1}{r}(2\cos\theta\,\vec{e}_r-\sin\theta\,\vec{e}_\theta)$.

4.70. Найти градиенты скалярных полей в цилиндрических координатах:

1) $u=r+z\cos\varphi$. 2) $u=r^2+2r\cos\varphi-e^z\sin\varphi$.

3) $u=r\cos\varphi+z\sin^2\varphi-3^r$.

Отв.:

1) $\vec{e}_r-\dfrac{1}{r}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi+\cos\varphi\,\vec{e}_z$.

2) $2(r+\cos\varphi)\vec{e}_r-\left(2\sin\varphi+\dfrac{1}{r}e^z\cos\varphi\right)\vec{e}_\varphi-e^z\sin\varphi\,\vec{e}_z$.

3) $(\cos\varphi-3^r\ln 3)\vec{e}_r+\left(\dfrac{z}{r}\sin 2\varphi-\sin\varphi\right)\vec{e}_\varphi-e^z\sin\varphi\,\vec{e}_z$.

4.71. Найти градиенты скалярных полей в сферических координатах:

1) $u = r + \dfrac{\sin q}{r} - \sin q \cos j$. 2) $u = r^2 \cos q$.

3) $u = 3r^2 \sin q + e^g \cos j$. 4) $u = m\dfrac{\cos q}{r^2}, m - const.$

Отв.: 1) $\left(1 - \dfrac{\sin q}{r}\right)\vec{e}_r + \dfrac{\cos q}{r}\left(\dfrac{1}{r} - \cos j\right)\vec{e}_q + \dfrac{\sin j}{r}\vec{e}_j$; **2)** $2r\cos q\,\vec{e}_r - r\sin q\,\vec{e}_q$;

3) $\left(6r\sin q + e^r \cos j - 1\right)\vec{e}_r + 3r\cos q\,\vec{e}_q - \dfrac{e^r \sin j}{r\sin q}\vec{e}_j$; **4)** $-m\left(\dfrac{2\cos q}{r^3}\vec{e}_r + \dfrac{\sin q}{r^3}\vec{e}_q\right)$.

4.72. Вычислить дивергенцию векторов:

1) $\vec{a} = r\,\vec{e}_r + z\sin j\,\vec{e}_j + e^j \cos z\,\vec{e}_z$. 2) $\vec{a} = 2arctg\,r\,\vec{e}_r + 2\vec{e}_j + z^2 e^z \vec{e}_z$.

3) $\vec{a} = r^2\vec{e}_r - 2\cos^2 j\,\vec{e}_q + \dfrac{j}{r^2+1}\vec{e}_j$.

Отв.: 1) $2 + \dfrac{z}{r}\cos j - \vec{e}^{\,j}\sin z$; **2)** $\dfrac{j}{r}arctg\,r + \dfrac{j}{1+r^2} - (z^2+2z)\vec{e}^{\,z}$;

3) $4r - \dfrac{2}{r}\cos^2 j\;ctgq + \dfrac{1}{r(r^2+1)\sin q}$.

4.73. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}$:

1) $\vec{a} = (2r + a\cos j)\vec{e}_r - a\sin q\,\vec{e}_q + r\cos q\,\vec{e}_j, a - const.$

2) $\vec{a} = r^2\vec{e}_r + 2\cos q\,\vec{e}_q - j\,\vec{e}_j$. 3) $\vec{a} = \cos j\,\vec{e}_r - \dfrac{\sin j}{r}\vec{e}_j + r^2\vec{e}_z$.

Отв.: 1) $\dfrac{\cos 2q}{\sin q}\vec{e}_r - \left(2\cos q + \dfrac{a\sin j}{r\sin q}\right)\vec{e}_q - \dfrac{a\sin q}{r}\vec{e}_j$;

2) $-\dfrac{j}{r}ctgq\,\vec{e}_r + \dfrac{j}{r}\vec{e}_q + \dfrac{2\cos q}{r}\vec{e}_j$; **3)** $-2r\,\vec{e}_j + \dfrac{\sin j}{r}\vec{e}_z$.

4.74. Доказать потенциальность поля $\vec{a} = \dfrac{2\cos q}{r^3}\vec{e}_r + \dfrac{\sin q}{r^3}\vec{e}_q$.

Пусть S – часть координатной поверхности $u = c - const$, ограниченная координатными линиями

$$q_1 = a_1, \quad q_2 = a_2 (a_1 < a_2);$$
$$q_3 = b_1, \quad q_3 = b_2 (b_1 < b_2).$$

Тогда поток вектора $\vec{a} = P(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_1 + Q(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_2 + R(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_3$ через поверхность S в направлении вектора $\vec{e}_1$ вычисляется по формуле

$$\Pi = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} P(c,q_2,q_3)H_2(c,q_2,q_3)H_3(c,q_2,q_3)dq_1 dq_2, \qquad (4.46)$$

где H_2, H_3 – коэффициенты Ламэ.

Аналогично вычисляется поток через часть поверхности $q_2 = c$ или через часть поверхности $q_3 = c$, где $c = const$.

4.75. Найти поток векторного поля, заданного в сферических координатах: $\vec{a} = r^2 q\,\vec{e}_r + r^2 e^{2q}\,\vec{e}_q$ через внешнюю сторону верхней полусферы S радиусом R с центром в начале координат.

Δ Полусфера S – часть координатной поверхности $r = const$, именно, $r = R$. На S имеем

$$q_1 = r = R,\ q_2 = q\,,\ q_3 = j\,;\ 0 \le q \le p\,/\,2,\ \ 0 \le j \le 2p\,.$$

Учитывая, что в сферических координатах $H_1 = H_r = 1, H_2 = H_q = r$, $H_3 = H_j = r\sin q$, по формуле (4.46) найдем

$$\Pi = \int\limits_0^{p/2} dq \int\limits_0^{2p} R^4 q \sin q\; dj \; = 2pR^4 \int\limits_0^{p/2} q\; sinq\; dq \; = 2pR^4. \quad \text{p}$$

4.76. Вычислить поток векторного поля, заданного в цилиндрических координатах: $\vec{a} = r\;\vec{e}_r + z\vec{e}_j$ через замкнутую поверхность $S = \{z = 0, z = 1, r = 1\}$ по формуле Гаусса–Остроградского.

Δ Искомый поток $\Pi = \iiint\limits_V div\vec{a}dv.$

Так как в цилиндрических координатах

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\,rP) + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial j} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

в нашем случае получим

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial j} = 2.$$

Поэтому искомый поток $\Pi = \iiint\limits_V 2dv = 2p.$ p

4.77. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$, заданного в цилиндрических координатах, через данную поверхность S непосредственно и с помощью формулы Гаусса–Остроградского.

1. $\vec{a} = r\vec{e}_r - \cos j\;\vec{e}_j + z\vec{e}_z;\ S = \{r = 2, z = 0, z = 2\}.$ **Отв.:** $24p$.

2. $\vec{a} = r\;\vec{e}_r + r\,j\;\vec{e}_j - 2z\vec{e}_z;\ S = \{r = 1, j = 0, j = p\,/\,2, z = -1, z = 1\}.$ **Отв.:** $p\,/\,2$.

4.78. Найти поток вектора $\vec{a} = r\vec{e}_r + r\sin q\;\vec{e}_q - 3r\,j\,\sin q\;\vec{e}_j$, заданного в сферических координатах, через замкнутую поверхность S, ограниченную верхней полусферой радиуса R и поверхностью $q = p\,/\,2$.

Отв.: $2pR^3/3$. *Указание*. При непосредственном вычислении потока надо рассматривать потоки через все координатные поверхности $r = 0, r = R,$

$$q = 0, q = p\,/\,2, \quad j = 0, j = 2p\,.$$

4.79. Найти поток вектора $\vec{a} = r^2\vec{e}_r + R^2 r\sin q\,\cos j\,\vec{e}_j$, заданного в сферических координатах, через замкнутую поверхность, ограниченную координатными поверхностями $r = R,\ j = 0,\ j = p\,/\,2, q = p\,/\,2$, непосредственно и с помощью формулы Остроградского–Гаусса.

Отв.: $\frac{1}{2}\pi R^4 - \frac{R^5}{3}$.

Пусть в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 задано векторное поле $\vec{a}(M) = P(q_1,q_2,q_3)\vec{e}^{\,1} + Q(q_1,q_2,q_3)\vec{e}^{\,2} + R(q_1,q_2,q_3)\vec{e}^{\,3}$, которое является потенциальным в некоторой области Ω изменения переменных q_1, q_2, q_3, т.е. $\textbf{\textit{rot}}\,\vec{a} = \vec{0}$ в Ω.

Для нахождения потенциала $u = u(q_1, q_2, q_3)$ этого поля равенство $\vec{a}(M) = \textbf{\textit{grad}}\,u(M)$ записывается в виде

$$P\vec{e}^{\,1} + Q\vec{e}^{\,2} + \mathrm{R}\vec{e}^{\,3} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e}^{\,1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e}^{\,2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e}^{\,3}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = PH_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial q_2} = QH_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial q_3} = RH_3. \tag{4.47}$$

Система уравнений (4.47) решается так же, как при нахождении потенциала в декартовых координатах.

В *цилиндрических координатах* ($q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z$) система (4.47) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_r, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r\,a_\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_z; \tag{4.48}$$

в *сферических координатах* ($q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$) – вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_r, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = ra_\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r\sin\theta\, a_\varphi. \tag{4.49}$$

4.80. Найти потенциал векторного поля:

1) $\vec{a} = \left(\frac{arctgz}{r} + \cos\varphi\right)\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + \frac{\ln r}{1+z^2}\vec{e}_z$.

2) $\vec{a} = \frac{1}{r}e^{\theta\varphi}\vec{e}_r + \frac{\theta\ln r}{r\sin\theta}e^{\theta\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\ln r}{r}\varphi e^{\theta\varphi}\vec{e}_\theta$.

Δ По формуле (4.42) для $\textbf{\textit{rot}}\,\vec{a}$ в цилиндрических координатах убеждаемся, что $\textbf{\textit{rot}}\,\vec{a} = \vec{0}$, то есть поле $\vec{a}$ потенциально. Согласно (4.48), его потенциал $u = u(r, \varphi, z)$ является решением следующей системы:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{arctgz}{r} + \cos\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \cdot r, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln r}{1+z^2}. \tag{4.50}$$

Из первого уравнения этой системы интегрированием по r находим, что

$$u = \ln r \cdot arctgz + r\cos\varphi + c(\varphi, z) \tag{4.51}$$

($c(\varphi, z)$ играет роль константы при интегрировании по r). Дифференцируя (4.51) по φ и используя второе соотношение из (4.50), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi + \frac{\partial c}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \varphi} \equiv 0, \text{ т. е. } c(\varphi, z) = c_1(z).$$

Тем самым,

$$u = \ln r \cdot arctgz + r\cos\varphi + c_1(z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln r}{1+z^2} + c_1'(z) = \frac{\ln r}{1+z^2}$$

в силу третьего соотношения из (4.51). Значит, $c_1'(z) \equiv 0 \Rightarrow c_1(z) = c - const.$

Итак, потенциал данного поля $u(r, \varphi, z) = \ln r \cdot arctgz + r\cos\varphi + c.$

По формуле (4.43) для $\boldsymbol{rot}\,\vec{a}$ в ССК убеждаемся, что $\boldsymbol{rot}\,\vec{a} = \vec{0}$, т. е. поле потенциально в области $\{r > 0, \theta \neq n\pi; n \in \boldsymbol{Z}\}$.

Система равенств (4.49) для отыскания потенциала $u = u(r, \theta, \varphi)$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{e^{\theta\varphi}}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \varphi\, e^{\theta\varphi}\ln r, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \theta\, e^{\theta\varphi}\ln r. \tag{4.52}$$

Интегрируя по r первое из равенств этой системы, получаем $u = e^{\theta\varphi}\ln r + c(\theta, \varphi)$. Отсюда и из второго уравнения системы (4.52) имеем $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \varphi\, e^{\theta\varphi}\ln r = \varphi e^{\theta\varphi}\ln r + \frac{\partial c}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \theta} \equiv 0$, т. е. $c(\theta, \varphi) \equiv c_1(\varphi)$, и, значит, $u = e^{\theta\varphi}\ln r + c_1(\varphi)$. Отсюда с учетом третьего уравнения системы (4.52) находим $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \theta\, e^{\theta\varphi}\ln r = \theta\, e^{\theta\varphi}\ln r + c_1'(\varphi) \Rightarrow c_1'(\varphi) = 0$, то есть $c_1(\varphi) = c - const.$

Искомый потенциал равен $u(r, \theta, \varphi) = e^{\theta\varphi}\ln r + C.$ р

4.81. Установить потенциальность следующих векторных полей и найти их потенциалы:

1) $\vec{a} = r\,\vec{e}_r + \frac{\varphi}{r}\vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z.$ 2) $\vec{a} = \varphi\, z\,\vec{e}_r + z\vec{e}_\varphi + r\varphi\,\vec{e}_z.$

3) $\vec{a} = e^r\sin\varphi\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}e^r\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + 2z\vec{e}_z.$ 4) $\vec{a} = \varphi\cos z\vec{e}_r + \cos z\vec{e}_\varphi - r\varphi\sin z\vec{e}_z.$

5) $\vec{a} = 2r\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\vec{e}_\theta.$ 6) $\vec{a} = \frac{1}{2}\varphi^2\vec{e}_r + \frac{\varphi}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi + \frac{\theta}{r}\vec{e}_\theta.$

7) $\vec{a} = \cos\varphi\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\,\vec{e}_\theta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi.$

8) $\vec{a} = e^r\sin\theta\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}e^r\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \frac{2\varphi}{(1+\varphi^2)r\sin\theta}\vec{e}_\varphi.$

Отв.: 1) $u = (r^2 + \varphi^2 + z^2)/2 + c$; **2)** $u = r\varphi z + c$;

3) $u = e^r sin\varphi + z^2 + c$; **4)** $u = r\varphi\cos z + c$; **5)** $u = r^2 + \varphi + \theta + c$;

6) $u = (r\varphi^2 + \theta^2)/2 + c$; **7)** $u = r\cos\varphi\sin\theta + c$; **8)** $u = e^r\sin\theta + \ln(1+\varphi^2) + c.$

Пусть векторное поле $\vec{a}$ в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 определено и непрерывно в области Ω их изменения и имеет вид

$$\vec{a}(M) = P(q_1, q_2, q_3)\vec{e}^{\,1} + Q(q_1, q_2, q_3)\vec{e}^{\,2} + R(q_1, q_2, q_3)\vec{e}^{\,3}.$$

Как известно [4], дифференциал $d\vec{r}$ радиуса-вектора $\vec{r}$ любой точки $M \in \Omega$ равен

$$d\vec{r} = H_1 dq_1\vec{e}^{\,1} + H_2 dq_2\vec{e}^{\,2} + H_3 dq_3\vec{e}^{\,3}.$$

Поэтому *линейный интеграл вектора* $\vec{a}(M)$ *по ориентированной гладкой или кусочно-гладкой кривой* $L \subset \Omega$ будет равен

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L PH_1 dq_1 + QH_2 dq_2 + RH_3 dq_3. \qquad (4.53)$$

В частности, для цилиндрических координат $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$ будем иметь

$$\vec{a} = a_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi + a_z(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z,$$
$$d\vec{r} = d\rho\, \vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi + dz\, \vec{e}_z.$$

Поэтому в ЦСК линейный интеграл

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_\rho d\rho + a_\varphi \rho d\varphi + a_z dz. \qquad (4.54)$$

Для сферических координат $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ имеем

$$\vec{a} = a_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\varphi,$$
$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\, \vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi,$$

и, значит, в ССК линейный интеграл

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_r dr + r a_\theta d\theta + r a_\varphi \sin\theta\, d\varphi. \qquad (4.55)$$

Циркуляция C поля $\vec{a}(M)$ в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 в общем случае вычисляется по формуле (4.53), а в ЦСК или ССК – по формулам (4.54) или (4.55).

4.82. Вычислить линейный интеграл в поле $\vec{a} = 4\rho\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + ze^\rho\vec{e}_\varphi + (\rho + \varphi)\vec{e}_z$ вдоль прямой $L = \{\varphi = \pi/4, z = 0\}$ от точки $O = (0, \pi/4, 0)$ до точки $A = (1, \pi/4, 0)$.

r В нашем случае $a_\rho = 4\rho\sin\varphi, a_\varphi = ze^\rho, a_z = \rho + \varphi$. По формуле (4.54) искомый линейный интеграл

$$I = \int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L 4\rho\sin\varphi\, d\rho + \rho z e^\rho d\varphi + (\rho + \varphi)dz.$$

На прямой L имеем $\varphi = \pi/4, d\varphi = 0; z = 0, dz = 0; 0 \le \rho \le 1$.
Поэтому

$$I = \int_L 2\sqrt{2}\rho\, d\rho = \sqrt{2}\int_0^1 2\rho\, d\rho = \sqrt{2}. \quad \text{p}$$

4.83. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = \rho\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \rho z\vec{e}_\varphi + \rho^3\vec{e}_z$ по кривой $L = \{z = 0, \rho = \sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi\}$ непосредственно и по формуле Стокса.

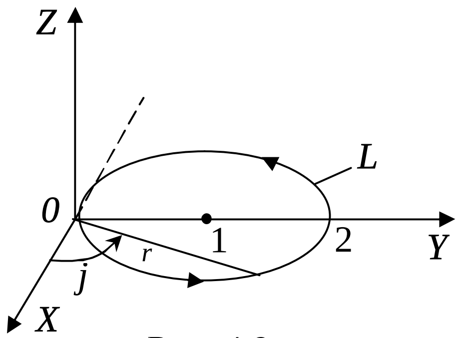

Рис. 4.9

r Контур L есть окружность с центром в точке (0,1), расположенная в плоскости $z = 0$ (рис. 4.9). Координаты вектора $\vec{a}$: $a_\rho = \rho\sin\varphi, a_\varphi = \rho z, a_z = \rho^3$.

1. Вычисляем циркуляцию непосредственно. По формуле (4.54) имеем

$$C=\oint_L r\sin\varphi\, dr + r^2 z d\varphi + r^3 dz.$$

На кривой L: $z=0, dz=0; r=\sin\varphi, dr=\cos\varphi\, d\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi$. Поэтому

$$C=\oint_L r\sin\varphi dr=\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi=0.$$

2. Вычисляем циркуляцию по формуле Стокса:

$$C=\oint_L(\vec a, d\vec r)=\iint_S\left(\mathbf{rot}\,\vec a, \vec n^0\right)ds,$$

где S – поверхность, натянутая на контур L.

Находим далее:

$$\mathbf{rot}\,\vec a=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec e_r & r\vec e_\varphi & \vec e_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ r\sin\varphi & r^2 z & r^3\end{vmatrix}=-r\vec e_r-3r^2\vec e_\varphi+(2z-\cos\varphi)\vec e_z,\quad r\ne 0.$$

При $r=0$ имеем $\mathbf{rot}\,\vec a(0,\varphi,z)=(2z-\cos\varphi)\vec e_z$.

В качестве поверхности S возьмем часть плоскости $z=0$, ограниченной контуром L. Тогда $\vec n^0=\vec e_z$, и, значит,

$$\left(\mathbf{rot}\vec a, \vec n^0\right)=\left(-r\vec e_r-3r^2\vec e_\varphi+(2z-\cos\varphi)\vec e_z, \vec e_z\right)=2z-\cos\varphi,$$

в силу ортонормированности базиса $\{\vec e_r, \vec e_\varphi, \vec e_z\}$.

Искомая циркуляция равна: $C=\iint_S(2z-\cos\varphi)dS.$

Учитывая, что $z=0$ на S и элемент площади dS координатной поверхности $z=0$ равен $dS=r\,dr\,d\varphi$, окончательно получаем

$$C=-\iint_S\cos\varphi\, dS=-\int_0^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi\int_0^{\sin\varphi}r\,dr=0.\quad р$$

4.84. Вычислить циркуляцию вектора $\vec a=r\vec e_r+(R+r)\sin\theta\,\vec e_\varphi$ по окружности $L=\{r=R, \theta=\pi/2\}$ в направлении возрастания угла φ.

r В данном случае $a_r=r, a_\theta=0, a_\varphi=(R+r)\sin\theta$. По формуле (4.55) искомая циркуляция равна

$$C=\oint_L rdr+(R+r)\sin\theta\, r\sin\theta\, d\varphi=\oint_L rdr+r(R+r)\sin^2\theta\, d\varphi.$$

На данной окружности L, центр которой находится в начале координат, имеем:

$r=R, dr=0; \theta=\pi/2; 0\le\varphi<2\pi$, и, значит, $C=2R^2\oint_L d\varphi=2R^2\int_0^{2\pi}d\varphi=4\pi R^2$. р

4.85. Вычислить линейный интеграл по данным линиям L в векторных полях, заданных в цилиндрических или сферических координатах:

1) $\vec a=z\vec e_r+r\varphi\,\vec e_\varphi+\cos\varphi\,\vec e_z$; L – отрезок прямой $\{r=a, \varphi=0, 0\le z\le 1\}$.

2) $\vec{a} = e^{r}\cos\varphi\,\vec{e}_r + r\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + r\,\vec{e}_z$; L – виток винтовой линии $\{r = R, z = \varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$.

3) $\vec{a} = e^{r}\cos\theta\,\vec{e}_r + 2\theta\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \varphi\,\vec{e}_\varphi$; L – полуокружность $\{r = 1, \varphi = 0, 0 \le \theta \le \pi\}$.

4) $\vec{a} = \sin^2\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta + r\varphi\theta\,\vec{e}_\varphi$; L – отрезок прямой $\{\varphi = \pi/2, r = 1/\sin\theta, \pi/4 \le \theta \le \pi/2\}$.

Отв.: 1) 1; **2)** $2\pi R$; **3)** π^2; **4)** $\pi/4 + \sqrt{2}/2 - 1$.

Самостоятельная работа

«Интегральное исчисление функций многих переменных»

Структура

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле.
2. Вычислить площадь фигуры D с помощью двойного интеграла.
3. Пластинка D задана неравенствами, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.
4. С помощью двойного интеграла найти объем тела V, заданного ограничивающими его поверхностями.
5. Вычислить тройной интеграл в ПДСК.
6. Найти объем тела V, заданного ограничивающими его поверхностями, перейдя: а) к цилиндрическим координатам; б) к сферическим координатам.
7. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела.
8. Вычислить КрИ-1 по плоской кривой Γ.
9. Вычислить КрИ-2 по кривой Γ.
10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл (обход контура положителен).
11. Найти векторные линии поля $\vec{a}$.
12. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Z).
13. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).
14. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).
15. Доказать потенциальность векторного поля $\vec{a}$ и найти его потенциал.

Вариант 1

1. $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy.$ **Отв.:** $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$

2. D – фигура, лежащая в первом квадранте, ограниченная окружностью $x^2+y^2=2ax,$ параболой $y^2=2ax$ и прямой $x=2a.$ **Отв.:** $8a^2/3-pa^2/2.$

3. $D=\{x^2/4+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}, m=6x^3y^3.$ **Отв.:** 1.

4. $V=\{y=1+x^2, z=3x, y=5, z\ge 0, y\ge 0, x\ge 0\}.$ **Отв.:** 12.

5. $\iiint\limits_V(4+8z^3)dxdydz;\ \ V=\{y=x, y=0, x=1, z=0, z=\sqrt{xy}\}.$ **Отв.:** 1.

6. **а)** $V=\{z=\sqrt{9-x^2-y^2}, 9z/2=x^2+y^2\}.$ **Отв.:** $171p/16.$

б) $V=\{1\le x^2+y^2+z^2\le 49, -\sqrt{(x^2+y^2)/35}\le z\le\sqrt{(x^2+y^2)/3}\}.$ **Отв.:** $19p.$

7. V – цилиндр радиусом R и высотой h. Плотность m в каждой точке пропорциональна высоте этой точки и равна 1 на нижнем основании.

Отв.: $pR^2h(kh+2)/2.$

8. $\int\limits_\Gamma\frac{x}{y}ds,$ где Г – дуга параболы $y^2=2x,$ лежащая между точками $(1,\sqrt{2})$ и $(2,2).$ **Отв.:** $(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})/6.$

9. $\oint\limits_\Gamma(xy-y^2)dx+xdy,$ Г – кривая $y=2\sqrt{x},$ пробегаемая от точки $(0,0)$ до точки $(1,2).$ **Отв.:** $8/15.$

10. $\int\limits_\Gamma(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy,$ Г – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ **Отв.:** 0.

11. $\vec{a}=(4y,-9x).$ **Отв.:** $9x^2+4y^2=C.$

12. $\vec{a}=(2x,5y,5z),\ \ P: x/2+y/3+z=1.$ **Отв.:** 23.

13. $\vec{a}=(y+6x,5x+5z,4y),\ \ S:\{y=x, y=2x, y=2, z=x^2+y^2, z=0\}.$ **Отв.:** 19.

14. $\vec{a}=(4y,-3x,x),\ \ \Gamma:\{x=4\cos t, y=4\sin t, z=4-4\cos t\}.$ **Отв.:** $-128p.$

15. $\vec{a}=(2xy,x^2-2yz,-y^2).$ **Отв.:** $u=x^2y-y^2z+c.$

Вариант 2

1. $\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{x^2/4}^{2-x}f(x,y)dy.$ **Отв.:** $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{8}dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)dx.$

2. $D=\{x=\sqrt{36-y^2}, x=6-\sqrt{36-y^2}\}.$ **Отв.:** $24p-18\sqrt{3}.$

3. $D=\{1\le x^2/4+y^2\le 25, x\ge 0, y\ge x/2\}, m=x/y^2.$ **Отв.:** $2\ln 5.$

4. $V=\{z=1-x^2-y^2, y=x, y=x\sqrt{3}, z\ge 0, y\ge 0, x\ge 0\}.$ **Отв.:** $p/48.$

5. $\iiint\limits_V (1+2x^3)dxdydz;\quad V=\{y=36x, y=0, x=1, z=0, z=\sqrt{xy}\}.$ **Отв.:** $96.$

6. а) $V=\{z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=\sqrt{(x^2+y^2)/255}\}.$ **Отв.:** $5p.$

б) $V=\{4\le x^2+y^2+z^2\le 64, z\le\sqrt{(x^2+y^2)/3}, -x\sqrt{3}\le y\le 0\}.$ **Отв.:** $42p.$

7. V – шар $x^2+y^2+z^2=2x,$ плотность m в каждой точке равна расстоянию от начала координат до этой точки. **Отв.:** $8p/5.$

8. $\int\limits_\Gamma y^3 ds,$ где Γ – арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2p.$

Отв.: $256a^3/15.$

9. $\int\limits_\Gamma (y+x^2)dx+(2x-y)dy,$ Γ – дуга параболы $y=2x-x^2,$ расположенная между точками $(1,1)$ и $(3,-3).$ **Отв.:** $12.$

10. $\oint\limits_\Gamma (y+x^5)dx+(3x+y^{8)}dy,\ \Gamma:\{x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, y=0, (y\ge 0)\}.$

Отв.: $3p.$

11. $\vec{a}=(2y,3x).$ **Отв.:** $3x^2-2y^2=c.$

12. $\vec{a}=(x,y,z),\quad P:2x+y/2+z=1.$ **Отв.:** $25.$

13. $\vec{a}=(y+2z,-y,3x),\ S:\{3z=27-2(x^2+y^2), z=x^2+y^2 (z\ge 0)\}.$ **Отв.:** $-36p.$

14. $\vec{a}=(-z,-x,xz),\quad \Gamma:\{x=5\cos t, y=5\sin t, z=4\}.$ **Отв.:** $-25p.$

15. $\vec{a}=(3x^2y-y^3, x^3-3xy^2).$ **Отв.:** $u=x^3y-xy^3+c.$

Вариант 3

1. $\int\limits_0^{2/3}dx\int\limits_{2x}^{2-x}f(x,y)dy.$ **Отв.:** $\int\limits_0^{4/3}dy\int\limits_0^{y/2}f(x,y)dx+\int\limits_{4/3}^{2}dy\int\limits_0^{2-y}f(x,y)dx.$

2. $D=\{x^2+y^2=72, 6y=-x^2 (y\le 0)\}.$ **Отв.:** $18p+12.$

3. $D=\{x^2/9+y^2/4\le 1\}, m=x^2y^2.$ **Отв.:** $9p.$

4. * $V=\{x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2\}.$ **Отв.:** $16a^3/3.$

5. $\iiint\limits_V 21xzdxdydz;\quad V=\{y=0, y=x, x=2, z=0, z=xy\}.$ **Отв.:** $64.$

6. а) $V=\left\{z=\sqrt{\frac{16}{9}-x^2-y^2}, 2z=x^2+y^2\right\}.$ **Отв.:** $\frac{76}{81}p.$

б) $V=\{1\le x^2+y^2+z^2\le 36, z\ge\sqrt{(x^2+y^2)/99}, -x\sqrt{3}\le y\le x\sqrt{3}\}.$ **Отв.:** $43p.$

7. * V – конус высотой h и радиусом основания $R,$ плотность m в каждой точке пропорциональна расстоянию от вершины до этой точки.

Отв.: $\frac{kph^4}{6}\left[\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right)^{3/2}-1\right].$

8. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{ds}{x+y}$, где Γ – отрезок прямой $y = x + 2$, соединяющей точки $(2,4)$ и $(1,3)$.

Отв.: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$.

9. $\int\limits_{\Gamma} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, Γ – отрезок прямой, соединяющей точки $(1,1,1)$ и $(2,3,4)$. **Отв.:** 13.

10. $\oint\limits_{\Gamma} e^{-(x^2+y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$, Γ – контур $x^2 + y^2 = R^2$. **Отв.:** 0.

11. $\vec{a} = (2x, 4y)$. **Отв.:** $y = cx^2$.

12. $\vec{a} = (2x, y, -2z)$, $P: 2x + y/2 + z = 1$. **Отв.:** 34.

13. $\vec{a} = (z, 3y - x, -z)$, $S: \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2 + 2, z = 0\}$. **Отв.:** $5p$.

14. $\vec{a} = (z, x, y)$, $\Gamma: \{x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0\}$. **Отв.:** $4p$.

15. $\vec{a} = (y + 2, x + z, y + x)$. **Отв.:** $u = xy + yz + xz + c$.

Вариант 4

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2/9}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2/9}^{1} f(x,y)dy$. **Отв.:** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{3\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

2. $D = \{y^2 = 4ax + 4a^2, x + y = 2a (a > 0)\}$. **Отв.:** $64a^2/3$.

3. $D = \{x^2/16 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}, m = 5xy^7$. **Отв.:** 1.

4. $V = \{x = 2y^2, x + 2y + z = 4, y = 0, z = 0\}$. **Отв.:** $17/5$.

5. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1 + \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} + \dfrac{z}{3}\right)^6}$; $V = \left\{\dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} + \dfrac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0\right\}$. **Отв.:** 2.

6. **а)** $V = \left\{z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{(x^2 + y^2)/99}\right\}$. **Отв.:** $75p$.

б) $V = \left\{25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, 0 \le z \le \sqrt{(x^2 + y^2)/24}, y \le -x/\sqrt{3}, y \le -x\sqrt{3}\right\}$

Отв.: $175p$.

7. $V = \{(z - 2)^2 = x^2 + y^2, z = 0\}; m = z$. **Отв.:** $8p/3$.

8. $\int\limits_{\Gamma} x^2 ds$, где Γ – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$. **Отв.:** $pa^3/2$.

9. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, Γ – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$ от точки $(2,0)$ до точки $(0,2)$. **Отв.:** $3\sqrt[3]{2}p/8$.

10. $\oint\limits_{\Gamma} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, Γ – контур треугольника с вершинами в точках $A = (1,1), B = (2,2), C = (1,3)$. **Отв.:** $-4/3$.

11. $\vec{a} = (x, 3y)$. **Отв.:** $y = cx^3$.

12. $\vec{a} = (x, y, 2z)$, $\quad P: 2x + y/2 + z = 1$. **Отв.:** 128.

13. $\vec{a} = (y, x + 2y, x)$, $\quad S: \left\{x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0\right\}$. **Отв.:** $3p$.

14. $\vec{a} = (y - z, z - x, x - y)$, $\Gamma: \{x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 2(1 - \cos t)\}$. **Отв.:** $-30p$.

15. $\vec{a} = \left(e^{y/x}, \dfrac{1}{z}\left(e^{y/x}(x+1)\right) + ze^{yz}, -\dfrac{e^{y/x}(x+1)}{z^2}y + ye^{yz} + e^{-z}\right)$.

Отв.: $u = e^{y/x}(x+1) + e^{yz} + e^{-z} + c$.

Вариант 5

1. $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{x}^{3} f(x,y)dy.$ **Отв.:** $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)dx.$

2. $D = \left\{y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, x = 2y, x = 0, (a > 0)\right\}$. **Отв.:** $a^2(p - 1)$.

3. $D = \left\{x^2/4 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}$, $m = 30x^3y^7$. **Отв.:** 1.

4. $V = \left\{x^2 + 4y^2 + z = 1, z = 0\right\}$. **Отв.:** $p/4$.

5. $\iiint\limits_V (x^2 + 3y^2)dxdydz;\quad V = \{z = 10x, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0\}$. **Отв.:** 1.

6. **а)** $V = \left\{z = 21\sqrt{x^2 + y^2}/2, z = 23/2 - x^2 - y^2\right\}$. **Отв.:** $4p$.

б) $V = \left\{1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, 0 \le z \le \sqrt{(x^2 + y^2)/24}, y \le -x/\sqrt{3}, y \le -x\sqrt{3}\right\}$.

Отв.: $112p$.

7. $V = \{x + y + z = 1, x = y = z = 0\}$; $m = 1/(x + y + z + 1)^4$. **Отв.:** $1/48$.

8. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}ds$, где Γ – кривая $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2p$.

Отв.: $a^2\left[\left(1 + 4p^2\right)^{3/2} - 1\right]/6$.

9. $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, Γ – ломаная ABC; $A = (1,2), B = (3,2), C = (3,5)$.

Отв.: $194/3$.

10. $\oint\limits_{\Gamma} (x + y)dx - (x - y)dy$, Γ – контур, образованный параболой AmB и хордой AnB, где $A = (1,0), B = (2,3)$.

11. $\vec{a} = (x, 4y)$. **Отв.:** $y = cx^4$.

12. $\vec{a} = (-x, y, 12z)$, $\quad P: 2x + y/2 + z = 1$.

13. $\vec{a} = (x + y + z, 2y - x, 3z + y)$, $\quad S: \left\{y = x, y = 2x, x = 1, z = x^2 + y^2, z = 0\right\}$.

Отв.: 5.

14. $\vec{a} = (2y, -z, x)$, $\quad \Gamma: \{x = \cos t, y = \sin t, z = 4 - \cos t - \sin t\}$. **Отв.:** $-2p$.

15. $\vec{a} = (yz\cos xy, xz\sin xy, \sin xy)$. **Отв.:** $u = z\sin xy + c$.

Вариант 6

1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{-\sqrt{2}/2}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

Отв.: $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{2}/2}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

2. $D = \{x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = 2bx, y = x, y = 0, (0 < a < b)\}.$

Отв.: $\frac{1}{4}(b^2 - a^2)(p + 2).$

3. $D = \{1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 3, y \ge 0, y \le 2x/3\}, m = y/x.$ **Отв.:** $2\ln 2.$

4. $V = \{z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0\}.$ **Отв.:** $40/3.$

5. $\iiint\limits_{V}(60y + 90z)dxdydz;\ \ V = \{y = x, y = 0, x = 1, z = x^2 + y^2, z = 0\}.$ **Отв.:** $23.$

6. **а)** $V = \{z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{(x^2 + y^2)/80}\}.$ **Отв.:** $16p.$

б) $V = \{16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, z \le \sqrt{(x^2 + y^2)/3}, -x\sqrt{3} \le y \le -x/\sqrt{3}\}.$

Отв.: $78p.$

7. V – круговой цилиндр радиусом R и высотой h; плотность m в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до центра основания цилиндра.

Отв.: $pR^2h(3R^2 + 2h^2)/6.$

8. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где Г – отрезок прямой, соединяющей точки $(0,0)$ и $(1,2)$.

Отв.: $\ln\frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$

9. $\int\limits_{\Gamma} xydx + yzdy + zxdz$, Г – четверть окружности $OA: x = \cos t, y = \sin t,\ \ z = 1,$ пробегаемая в направлении возрастания t. **Отв.:** $1/6.$

10. $\oint\limits_{\Gamma}(x + y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, Г – контур треугольника с вершинами в точках $A = (1,1), B = (3,2), C = (2,5).$ **Отв.:** $-140/3.$

11. $\vec{a} = (3x, 6z).$ **Отв.:** $y = cx^2.$

12. $\vec{a} = (x, 3y, 8z);\quad P: x + 2y + z/2 = 1.$ **Отв.:** $1.$

13. $\vec{a} = (7x, z, x - y + 5z),\quad S: \{z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1\}.$

Отв.: $7.$

14. $\vec{a} = (xz, x, z^2),\quad \Gamma: \{x = \cos t, y = \sin t, z = \sin t\}.$ **Отв.:** $p.$

15. $\vec{a} = (yz + 1, xz, xy).$ **Отв.:** $u = x + xyz + c.$

Вариант 7

1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f(x,y)dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f(x,y)dy.$

Отв.: $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y+4} f(x,y)dx + \int\limits_3^8 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f(x,y)dx.$

2. $D=\{y=\sqrt{x}/2, y=1/(2x), x=16\}.$ **Отв.:** $21-\ln 4.$

3. $D=\{x^2+y^2/25\le 1, y\ge 0\}, \mu=7x^4y.$ **Отв.:** $10.$

4. $V=\{z=5x, x^2+y^2=9, z=0\}.$ **Отв.:** $90.$

5. $\iiint\limits_V \left(\frac{10}{3}x+\frac{5}{3}\right)dxdydz;\quad V=\{y=9x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0\}.$ **Отв.:** $25.$

6. **а)** $V=\left\{z=\sqrt{1-x^2-y^2}, 3z/2=x^2+y^2\right\}.$ **Отв.:** $19\pi/48.$

б) $V=\left\{4\le x^2+y^2+z^2\le 49, z\ge\sqrt{(x^2+y^2)/99}, y\le 0, y\le x\sqrt{3}\right\}.$ **Отв.:** $78\pi.$

7. V – тело, вырезанное из октанта шара $x^2+y^2+z^2\le c^2,\quad x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0,$ ограниченное координатными плоскостями и плоскостью $x/a+y/b=1, (a\le c, b\le c);$ плотность μ в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки. **Отв.:** $\frac{ab}{24}(bc^2-a^2-b^2).$

8. $\int\limits_\Gamma (x+y)ds,$ где Γ – правый лепесток лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

Отв.: $\frac{1}{54}(56\sqrt{7}-1).$

9. $\int\limits_\Gamma \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}},$ Γ – отрезок, пробегаемый от точки $(1,1,1)$ до точки $(4,4,4).$ **Отв.:** $3\sqrt{3}.$

10. $\oint\limits_\Gamma e^x((1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy),\ \Gamma=\{0\le x\le\pi, 0\le y\le\sin x\}.$

Отв.: $(1-\pi)/5.$

11. $\vec a=(4z,-9x).$ **Отв.:** $9x^2+4z^2=c.$

12. $\vec a=(x,-y,6z);\quad P: x+2y+z/2=1.$ **Отв.:** $17.$

13. $\vec a=(17x,7y,11z),\quad S:\left\{z=x^2+y^2, z=2(x+y^2), y=x^2, y=x\right\}.$ **Отв.:** $3.$

14. $\vec a=(-x^2y^3,3,y),\quad \Gamma:\{x=\cos t, y=\sin t, z=5\}.$ **Отв.:** $\pi/8.$

15. $\vec a=(2x+5yz, 5xz-6y, 5xy+4z).$ **Отв.:** $u=x^2-3y^2+5xyz+2z^2+c.$

Вариант 8

1. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy.$ **Отв.:** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)dx.$

2. $D=\{x=4y-y^2, x+y=6\}.$ **Отв.:** $1/6.$

3. $D=\{x^2+y^2/9\le 1, y\ge 0\}, m=35x^4y^3.$ **Отв.:** $36.$

4. $V=\{x+y+z=6, 3x+2y=12, 3x+y=6, y=0, z=0\}.$ **Отв.:** $12.$

5. $\iiint\limits_V (9+18z)dxdydz;\quad V=\{y=4x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy},\quad z=0\}.$ **Отв.:** $34.$

6. а) $V=\left\{z=\sqrt{36-x^2-y^2}, z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/63}\right\}.$ **Отв.:** $126p.$

б) $V=\left\{4\le x^2+y^2+z^2\le 64, 0\le z\le\sqrt{(x^2+y^2)/24}, y\le x\sqrt{3}, y\le x/\sqrt{3}\right\}.$

Отв.: $28p.$

7. $V=\{x+y+z=a, x=0, y=0, z=0\};$ плотность m в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки. **Отв.:** $a^4/24.$

8. $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,ds,$ где Γ –окружность $x^2+y^2=ax.$ **Отв.:** $2a^2.$

9. $\int\limits_{\Gamma} x(z-y)dx+y(x-z)dy+z(y-x)dz,$ где Γ – ломаная $ABCA: A=(a,0,0),\ B=(0,a,0), C=(0,0,a).$ **Отв.:** $a^3.$

10. $\oint\limits_{\Gamma}(y-x^2)dx+(x+y^2)dy,$ Γ – контур, ограничивающий круговой сектор радиусом R с углом $0\le j\le p/2.$ **Отв.:** $2/3.$

11. $\vec{a}=(2z,3x).$ **Отв.:** $z=cx^4.$

12. $\vec{a}=(x,2y,5z);\quad P: x+2y+z/2=1.$ **Отв.:** $32.$

13. $\vec{a}=(x,-2y,3z),\quad S:\{z=x^2+y^2, z=2x\}.$ **Отв.:** $p.$

14. $\vec{a}=(7z,-x,yz),\quad \Gamma:\{x=6\cos t, y=6\sin t, z=1/3\}.$ **Отв.:** $-3p.$

15. $\vec{a}=(yz,xz,xy).$ **Отв.:** $u=xyz+c.$

Вариант 9

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$ **Отв.:** $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy.$

2. $D=\{x=y^2-2y, x+y=0\}.$ **Отв.:** $1/6.$

3. $D=\{x^2/4+y^2/9\le 1\}, m=x^2.$ **Отв.:** $6p.$

4. $V=\{z=x+y+1, y^2=x, x=1, y=0, z=0\}.$ **Отв.:** $79/60.$

5. $\iiint\limits_V 3y^2dxdydz;\quad V=\{y=2x, y=0, x=2, z=xy, z=0\}.$ **Отв.:** $128.$

6. а) $V=\left\{z=\sqrt{144-x^2-y^2}, 18z=x^2+y^2\right\}.$ **Отв.:** $684p.$

б) $V=\left\{9\le x^2+y^2+z^2\le 81, -\sqrt{(x^2+y^2)/3}\le z\le -\sqrt{(x^2+y^2)/15}, 0\le y\le -x\sqrt{3}\right\}.$

Отв.: $39p.$

7. $V=\{z=h, x^2+y^2=z^2\},$ плотность m в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки. **Отв.:** $ph^4/4$.

8. $\int\limits_{\Gamma}\frac{yds}{\sqrt{x}}$, где Г - дуга полукубической параболы $y^2=(4/9)x^3$ от $A=(3{,}2\sqrt{3})$ до $B=(8{,}32\sqrt{2}/3)$. **Отв.:** $2152/45$.

9. $\int\limits_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, Г – граница части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, (лежащей в первом октанте), пробегаемая по ходу часовой стрелки с положительной полуоси Y. **Отв.:** 0.

10. $\oint\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}dx+y\left[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]dy$, Г – контур прямоугольника $\{0\le x\le 4, 0\le y\le 2\}$. **Отв.:** 8.

11. $\vec{a}=(4y,8z)$. **Отв.:** $3x^2-2z^2=c$.

12. $\vec{a}=(x,4y,5z)$; $P: x+2y+z/2=1$. **Отв.:** 16.

13. $\vec{a}=(2x+y,0,y+2z)$, $S:\{z=2-4(x^2+y^2), z=4(x^2+y^2)\}$. **Отв.:** p.

14. $\vec{a}=(xy,x,y^2)$, $\Gamma:\{x=\cos t, y=\sin t, z=\sin t\}$. **Отв.:** p.

15. $\vec{a}=(y+z,x+z,x+y)$. **Отв.:** $u=xy+xz+yz+c$.

Вариант 10

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$. **Отв.:** $\int\limits_1^{1/2}dy\int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int\limits_{1/2}^{1}dy\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

2. $D=\{y^2=4x-x^2, y^2=2x\}$ (вне параболы). **Отв.:** $2p-16/3$.

3. $D=\{1\le x^2+y^2/16\le 9, y\ge 0, y\ge 4x\}$, $m=y/x^3$. **Отв.:** $8\ln 3$.

4. $V=\{x^2/a^2+y^2/b^2=1, y=0, z=x/2, z=x\}$. **Отв.:** $a^2b/3$.

5. $\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{(1+x/2+y/4+z/6)^4}$; $V=\{x/2+y/4+z/6=1, x=y=z=0\}$. **Отв.:** 1.

6. **а)** $V=\{z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2), y=x, y^2=x\}$. **Отв.:** $3/35$.

б)* $V=\{(x^2+y^2+z^2)^2=2axyz, (a>0)\}$. **Отв.:** $a^3/45$.

7. V – сферический слой между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=4a^2$; плотность m в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат. **Отв.:** $61pa^2$.

8. $\int\limits_{\Gamma}xyds$, где Г – контур прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0, y=0, x=4, y=2$. **Отв.:** 24.

9. $\int\limits_{\Gamma}ydx+zdy+xdz$, Г – отрезок CO, где $C=(0,0,a)$. **Отв.:** $-3a^2/2$.

10. $\oint\limits_{\Gamma}y^2dx+(x+y)^2dy$, Г – контур треугольника с вершинами

$A=(2,0), B=(2,2), C=(0,2)$. **Отв.:** $16/3$.

11. $\vec{a}=(y,3z)$. **Отв.:** $z=cy^3$.

12. $\vec{a}=(x,y,z)$; $P: 2x+3y+z=1$. **Отв.:** 5.

13. $\vec{a}=(2y-3z, 3x+2z, x+y+z)$, $S:\{x^2+y^2=1, z=4-x-y, z=0\}$. **Отв.:** $4p$.

14. $\vec{a}=(x,-z^2,y)$, $\Gamma:\{x=2\cos t, y=3\sin t, z=4\cos t-3\sin t-3\}$. **Отв.:** $60p$.

15. $\vec{a}=\left(2xyz, x^2z, x^2y\right)$. **Отв.:** $u=x^2yz+c$.

Вариант 11

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{1-x}^1 f(x,y)dy+\int\limits_1^e dx\int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy$. **Отв.:** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{1-y}}^{e^y} f(x,y)dx$.

2. $D=\{y^2+2y-3x+1=0, 3x-3y=7\}$. **Отв.:** $125/18$.

3. $D=\{x^2/9+y^2\le 1, x\ge 0\}$, $m=11xy^8$. **Отв.:** 2.

4. $V=\{z=x^2+y^2+1, x=4, x=0, y=4, y=0, z=0\}$. **Отв.:** $560/3$.

5. $\iiint\limits_V x^2dxdydz$; $V=\{z=10(x+3y), x+y=1, x=y=z=0\}$. **Отв.:** 1.

6. а) $V=\{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1\}$. **Отв.:** $\frac{4}{3}pabc$.

б) $V=\left\{36\le x^2+y^2+z^2\le 144, z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, x\sqrt{3}\le y\le\frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$. **Отв.:** $126p$.

7. $V=\{25(x^2+y^2)=z^2, x^2+y^2=4, x=0, y=0, z=0\}$; $m=2(x^2+y^2)$.

Отв.: $32p$.

8. $\int\limits_\Gamma\left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)ds$, где Γ – дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}, a>0$.

Отв.: $4a^{7/3}$.

9. $\int\limits_\Gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, Γ – виток винтовой линии $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2p$. **Отв.:** $-2pa(a+b)$.

10. $\oint\limits_\Gamma xdy-ydx$, Γ – контур, ограниченный параболами $y^2=x, x^2=y$.

Отв.: $2/3$.

11. $\vec{a}=(2x,8z)$. **Отв.:** $z=cx^4$.

12. $\vec{a}=(2x,y,z)$; $P: 2x+3y+z=1$. **Отв.:** 4.

13. $\vec{a}=(-2x, z, x+y)$, $S:\{x^2+y^2=2y, z=x^2+y^2, z=0\}$. **Отв.:** $-3p$.

14. $\vec{a}=(y-z, z-x, x-y)$, $\Gamma:\{x=2\cos t, y=2\sin t, z=3(1-\cos t)\}$. **Отв.:** $-20p$.

15. $\vec{a}=\left(yz-xy, xz-x^2/2, xy+y^2z\right)$. **Отв.:** $u=xyz-x^2y/2+y^2z^2/2+c$.

Вариант 12

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$ **Отв.:** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{2-x} f(x,y)dy.$

2. $D = \{y = 4x - x^2, y = 2x^2 - 5x\}.$ **Отв.:** $27/2.$

3. $D = \{1 \le x^2/4 + y^2/16 \le 5, x \ge 0, y \ge 2x\}, m = x/y.$ **Отв.:** $4\ln 2.$

4. $V = \{z = y^2/2, 2x + 3y - 12 = 0\}.$ **Отв.:** $16.$

5. $\iiint\limits_V (8y + 12z)dxdydz;\quad V = \{y = x, y = 0, x = 1, z = 3x^2 + 2y^2, z = 0\}.$ **Отв.:** $17.$

6. а) $V = \{z = x^2 + y^2, z = 0, y = 1, y = 2x, y = 6 - x\}.$ **Отв.:** $78\frac{15}{32}.$

б) $V = \{(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)\}.$ **Отв.:** $\frac{p^2a^3}{4}.$

7. $V = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}.$ **Отв.:** $14p.$

8. $\int\limits_\Gamma xyds,$ где Γ - контур квадрата $|x| + |y| = a, a > 0.$ **Отв.:** $0.$

9.* $\int\limits_\Gamma ydx + zdy + xdz,$ Γ – окружность: $x = R\cos a \cos t, y = R\cos a \sin t,$ $z = R\sin a, (a = const),$ пробегаемая в направлении возрастания параметра. **Отв.:** $-pR^2\cos^2 a.$

10. $\oint\limits_\Gamma xdy - ydx,$ Γ – астроида: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le 2p.$

Отв.: $3pa^2/4.$

11. $\vec{a} = (x, 3z).$ **Отв.:** $z = cx^3.$

12. $\vec{a} = (2x, 3y, z);\quad P: 2x + 3y + z = 1.$ **Отв.:** $1.$

13. $\vec{a} = (2y - 5x, z - y, 3y - x),\quad S: \{z = 3x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = 1/4, z = 0\}.$

Отв.: $-5p.$

14. $\vec{a} = (-2z, -x, x^2),\quad \Gamma: \left\{x = \frac{1}{3}\cos t, y = \frac{1}{3}\sin t, z = 8\right\}.$ **Отв.:** $-p/9.$

15. $\vec{a} = \left(\frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}, \frac{zx}{1 + x^2y^2z^2}, \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2}\right).$ **Отв.:** $u = c + arctg(xyz).$

Вариант 13

1. $\int\limits_0^{p/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{p/4}^{p/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)dx.$ **Отв.:** $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_{\arcsin x}^{\arccos x} f(x,y)dy.$

2. $D = \{y = 2/x, y = 5e^x, y = 2, y = 5\}.$ **Отв.:** $3.$

3. $D = \{1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 5, x \ge 0, y \ge 2x/3\}, m = x/y.$ **Отв.:** $9\ln 2.$

4. $V=\{z=4-y^2, y=x^2/2, z=0\}$. **Отв.:** $12\frac{4}{21}$.

5. $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})dxdydz;\ \ V=\{y=x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0\}$. **Отв.:** 32.

6. а) $V=\left\{z=\sqrt{(x^2+y^2)^3}, z=8, z\geq 0\right\}$. **Отв.:** $96p/5$.

б) $V=\{(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz\}$. **Отв.:** $a^3/6$.

7. $V=\{x^2+y^2=1, x^2+y^2=6z, z=0, x\geq 0, y\geq 0\}$; $m=90y$. **Отв.:** 3.

8. $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)ds$, где Γ – дуга логарифмической спирали $r=ae^{3j}$ от $A=(a,0)$ до $O=(0,0)$. **Отв.:** $a^5\sqrt{10}/15$.

9.* $\int\limits_\Gamma xydx+yzdy+zxdz$, Γ – дуга окружности $x^2+y^2+z^2=2Rx, z=x$, расположенная по ту сторону от плоскости XZ, где $y>0$.

Отв.: $(1/6+p\sqrt{2}/16)R^3$.

10. $\oint\limits_\Gamma \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, Γ – граница квадрата с вершинами $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$.

Отв.: 0.

11. $\vec{a}=(4z,-9y)$. **Отв.:** $9y^2+4z^2=c$.

12. $\vec{a}=(2x,3y,4z)$; $P: 2x+3y+z=1$. **Отв.:** 13.

13. $\vec{a}=(y+z, x-2y+z, x)$, $S:\{x^2+y^2=1, z=x^2+y^2-1, z=0\}$. **Отв.:** $-p$.

14. $\vec{a}=(x,-3z^2,y)$, $\Gamma:\{x=\cos t, y=4\sin t, z=2\cos t-4\sin t+3\}$. **Отв.:** $-152p$.

15. $\vec{a}=(y,x,e^z)$. **Отв.:** $u=xy+e^z+c$.

Вариант 14

1. $\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-(2+x)}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0}f(x,y)dy$. **Отв.:** $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-(2+y)}^{y^3}f(x,y)dx$.

2. $D=\{x^2+y^2=12, x\sqrt{6}=y^2, (x\geq 0)\}$. **Отв.:** $3p+2$.

3. $D=\{x^2/4+y^2/9\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}, m=x^5y$. **Отв.:** 12.

4. $V=\{x^2+y^2=r^2, z=x^3/a^2, z\geq 0\}$. **Отв.:** $4r^5/(15a^2)$.

5. $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz;\ \ V=\{y=x, y=0, x=1, z=30x^2+60y^2, z=0\}$. **Отв.:** 16.

6.* а) $V=\{z^2=x^2+y^2, x^2+y^2+a^2=2z^2, a>0, (z>0)\}$. **Отв.:** $p(2-\sqrt{2})a^3/3$.

б) $V=\left\{x^2+y^2+z^2=2az, z\geq\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ **Отв.:** pa^3.

7. $V=\{x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=9z^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$; $m=10z$. **Отв.:** $9p$.

8. $\int\limits_{\Gamma} xyds,$ где Γ – четверть эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$ лежащая в первом квадранте. **Отв.:** $ab(a^2 + ab + b^2)/(3(a+b)).$

9.* $\int\limits_{\Gamma} (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz,$ Γ – линия пересечения поверхностей $x^2+y^2+z^2 = 2Rx, x^2+y^2 = 2rx, 0 < r < R, z \ge 0,$ пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Z.

10. $\oint\limits_{\Gamma} \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2+y^2},$ Γ – окружность $x^2+y^2 = R^2.$ **Отв.:** $-2p$.

11. $\vec{a} = (2z, 3y).$ **Отв.:** $3y^2 - 2z^2 = c.$

12. $\vec{a} = (x, 9y, 8z);$ $P: x + 2y + 3z = 1.$ **Отв.:** 9.

13. $\vec{a} = (3x - y - z, 3y, 2z),$ $S: \{z = x^2 + y^2, z = 2y\}.$ **Отв.:** $4p$.

14. $\vec{a} = (x, -2z^2, y),$ $\Gamma: \{x = 6\cos t, y = 4\sin t, z = 6\cos t - 4\sin t + 1\}.$ **Отв.:** $-120p$.

15. $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z).$ **Отв.:** $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + c.$

Вариант 15

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx.$ **Отв.:** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{e^x} f(x,y)dy.$

2. $D = \left\{x = \sqrt{72 - y^2}, 6x = y^2, y = 0, (y \ge 0)\right\}$ **Отв.:** $9p + 6.$

3. $D = \left\{x^2/4 + y^2/25 \le 1\right\}, m = x^4.$ **Отв.:** $20p$.

4. $V = \left\{z = xy/a, x^2 + y^2 = ax, z = 0\right\}.$ **Отв.:** $a^3/24.$

5. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1 + x/6 + y/4 + z/16)^5};$ $V = \{x/6 + y/4 + z/16 = 1, x = y = z = 0\}.$

Отв.: 5.

6. **а*)** $V = \left\{x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z(x+y) = ax + by\right\},$ $\{z = 0, x > 0, y > 0,\}$ $\{a > 0, b > 0\}.$ **Отв.:** $3p(a+b)/8.$

б) $V = \left\{(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x, a > 0\right\}.$ **Отв.:** $pa^3/3.$

7. $V = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \le 4\right\};$ $m = |z|.$ **Отв.:** $56p$.

8. $\int\limits_{\Gamma} |y| ds,$ где Γ – лемниската $r^2 = a^2 \cos 2j$. **Отв.:** $2a^2(2 - \sqrt{2}).$

9. $\int\limits_{\Gamma} yzdx + xzdy + xydz,$ Γ – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 9.$ **Отв.:** 0.

10*. $\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{xy^2dx - x^2ydy}{x^2 + y^2}$, Γ – правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. **Отв.:** 0.

11. $\vec{a} = (5x, 10y)$. **Отв.:** $y = cx^2$.

12. $\vec{a} = (8x, 11y, 17z)$; $P: x + 2y + 3z = 1$. **Отв.:** 1.

13. $\vec{a} = (x + y, y + z, z + x)$, $S: \{y = 2x, y = 4x, x = 1, z = y^2, z = 0\}$. **Отв.:** 14.

14. $\vec{a} = (-x^2y^3, 4, x)$, $\Gamma: \{x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 4\}$. **Отв.:** 8π.

15. $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x, y, z)$. **Отв.:** $u = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + c$.

Литература

1. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов. В 3-х ч. Ч. 2./ В. А. Болгов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – Изд. 2-е – М. : Наука, 1986.
2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2 : учеб. пособие для студентов втузов. / П. Е. Данко [и др.] – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1980.
3. Жевняк, Р. М. Высшая математика: Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных / Р. М. Жевняк // Векторный анализ. – Минск, Выш. шк., 1993.
4. Краснов, М. Л. Векторный анализ : сб. задач / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1978.
5. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике (Типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов. / Л. А. Кузнецов – М. : Высш. шк., 1994.
6. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных : учеб. пособие для втузов / Л. Д. Кудрявцев; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – СПб. : ИЧП «Кристалл», 1994.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 3. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2004.

Содержание

Учебное издание

Карпук Андрей Андреевич
Цегельник Владимир Владимирович
Баркова Елена Александровна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

Часть 7

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Редактор *Т. П. Андрейченко*
Корректор *М. В. Тезина*
Компьютерная верстка *Е. Н. Мирошниченко*

Подписано в печать 14.08.2007. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 7,09. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 500 экз. Заказ 1.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП № 02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6