

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

С. В. Батюков, Н. А. Иваницкая, Л. Ю. Шилин

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В 2-х частях

Часть 1

Линейные электрические цепи

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования по специальностям,
закрепленными за УМО*

Минск БГУИР 2012

УДК 621.3.011.7(076.5)
ББК 31.211я73
Б28

Рецензенты:

доцент кафедры электротехники и электроники
учреждения образования «Белорусский национальный
технический университет»,
кандидат технических наук В. И. Можар;

доцент кафедры автоматизации
производственных процессов и электротехники
учреждения образования «Белорусский государственный
технологический университет»,
кандидат физико-математических наук В. И. Горошко

Батюков, С. В.

Теория электрических цепей : учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч.1:
Б28 Линейные электрические цепи / С. В. Батюков, Н. А. Иваницкая,
Л. Ю. Шилин. – Минск : БГУИР, 2012. – 116 с. : ил.
ISBN 978-985-488-640-4 (ч. 1).

Пособие содержит основные теоретические положения по расчету линейных электрических цепей, а также примеры расчета цепей данного типа. Кроме того, предложены задачи для самостоятельного решения и проверки полученных результатов.

Для студентов специальностей информатики и радиоэлектроники.

УДК 621.3.011.7(076.5)
ББК 31.211я73

ISBN 978-985-488-640-4 (ч. 1)
ISBN 978-985-488-641-1

© Батюков С. В., Иваницкая Н. А.,
Шилин Л. Ю., 2012
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2012

Содержание

Введение	5
1. Закон Ома, законы Кирхгофа	6
1.1. Основные теоретические положения.....	6
1.2. Примеры расчета линейных электрических цепей по законам Ома и Кирхгофа.....	9
2. Метод наложения	12
2.1. Основные теоретические положения.....	12
2.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом наложения.....	13
3. Метод контурных токов	15
3.1. Основные теоретические положения.....	15
3.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом контурных токов.....	16
4. Метод узловых напряжений	18
4.1. Основные теоретические положения.....	18
4.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом узловых напряжений.....	19
5. Метод эквивалентного генератора	28
5.1. Основные теоретические положения.....	28
5.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом эквивалентного генератора.....	30
6. Электрические цепи однофазного синусоидального тока. Комплексный метод расчета электрических цепей. Баланс мощностей в цепях однофазного синусоидального тока	34
6.1. Основные теоретические положения.....	34
6.2. Синусоидальный ток в однородных идеальных элементах. Временные и векторные диаграммы.....	35
6.3. Баланс мощностей в цепях переменного тока.....	37
6.4. Примеры расчета цепей однофазного синусоидального тока.....	38
7. Режимы резонанса в электрических цепях	47
7.1. Основные теоретические положения.....	47
7.2. Примеры расчета электрических цепей в режиме резонанса.....	52
8. Цепи с индуктивно связанными элементами	60
8.1. Основные теоретические положения.....	60
8.2. Примеры расчета схем с индуктивно связанными элементами.....	68
9. Цепи с периодическими несинусоидальными источниками	73

9.1. Основные теоретические положения.....	73
9.2. Разложение периодических функций в ряд Фурье.....	74
9.3. Пример разложения периодической несинусоидальной функции в ряд Фурье.....	75
9.4. Порядок расчета линейной электрической цепи, находящейся под действием несинусоидального напряжения.....	77
9.5. Действующее значение несинусоидального тока. Активная, реактивная, полная мощности несинусоидального тока. Мощность искажения.....	78
9.6. Резонансные явления при несинусоидальных токах.....	79
9.7. Примеры расчета цепей при воздействии периодических несинусоидальных источников.....	79
10. Расчет цепей трехфазного тока.....	88
10.1. Основные теоретические положения.....	88
10.2. Примеры расчета цепей трехфазного тока.....	93
11. Задачи для самостоятельного решения.....	101
Литература.....	116

Введение

Данное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов при такой методике, когда совмещаются занятия в аудитории с самостоятельной работой.

Учебно-методическое пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются законы электрических цепей и основные методы решения задач применительно к теории постоянного тока: метод контурных токов, метод узловых напряжений, метод эквивалентного генератора напряжения. Для цепей переменного тока рассматривается метод комплексных амплитуд, графоаналитический метод расчёта. Произведён обзор режима резонансов токов и напряжений; явления самоиндукции; работы цепей под воздействием несинусоидальных источников напряжений; рассмотрены принципы расчёта трёхфазных цепей.

Во второй части кратко рассмотрены: теория четырехполюсников, фильтров; установившиеся процессы в цепях с распределенными параметрами; расчет переходных процессов классическим, операторным методами, а также методом интеграла Дюамеля.

В теоретической части пособия приводятся краткие сведения, основные определения и понятия, алгоритмы решения задач. В практической части приведены примеры расчета линейных электрических цепей в различных режимах с подробными пояснениями, рассмотрены нюансы расчётов, характерные для исследуемых схем.

После теоретической и практической частей следуют задачи для самостоятельного решения с ответами. В раздел «Задачи для самостоятельного решения» включены задачи, которые используются преподавателями кафедры ТОЭ БГУИР при проведении практических занятий, а также материалы литературных источников.

1. Закон Ома, законы Кирхгофа

1.1. Основные теоретические положения.

Закон Ома

Участок ветви, содержащий один или несколько источников энергии, является активным. Рассмотрим участок электрической цепи (рис. 1.1).

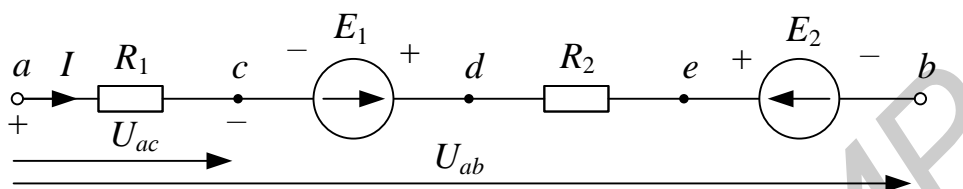


Рис. 1.1

При решении задач по теории электрических цепей выбирают положительное направление тока, которое указывается стрелкой.

Направление тока характеризуется знаком тока. Понятия *положительный* или *отрицательный ток* имеют смысл, если сравнивать направление тока в проводнике с некоторым заранее выбранным направлением – так называемым положительным направлением тока.

Следует запомнить!

1. Ток в сопротивлении всегда направлен от более высокого потенциала к более низкому, т. е. потенциал падает по направлению тока (на рис. 1.1 условно точке «а» присвоим знак «+», а точке «с» – знак «-»).
2. ЭДС, направленная от точки «с» к точке «d», повышает потенциал последней на величину E (на рис. 1.1 условно зажиму ЭДС, подключенному к точке «с», присвоим знак «-», а зажиму, подключенному к точке «d», – знак «+»).
3. Напряжение U_{ac} положительно, когда потенциал точки «а» выше, чем потенциал точки «с».

При обозначении напряжения (разности потенциалов) на схемах посредством стрелки оно направляется от точки высшего потенциала к точке низшего потенциала.

На рис. 1.1 ток протекает от точки «а» к точке «с», значит, потенциал φ_c будет меньше φ_a на величину падения напряжения на сопротивлении R_1 , которое по закону Ома равно IR_1 : $\varphi_c = \varphi_a - IR_1$.

На участке «с – d» ЭДС E_1 действует в сторону повышения потенциала, следовательно, $\varphi_d = \varphi_c + E_1 = \varphi_a - IR_1 + E_1$.

Потенциал точки «b» равен

$$\varphi_b = \varphi_a - IR_1 + E_1 - IR_2 - E_2 .$$

Знак « \leftarrow » перед ЭДС, совпадающей по направлению с током, объясняется следующим образом: напряжение на участке с ЭДС направлено противоположно самой ЭДС и определяемому напряжению.

Напряжение U_{ab} найдем как разность потенциалов:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I(R_1 + R_2) - E_1 + E_2. \quad (1.1)$$

Ток на участке « $a - b$ » определяют по выражению

$$I = \frac{U_{ab} + E_1 - E_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) выражает обобщенный закон Ома, или закон Ома для активного участка цепи.

Из формулы видно, что если ток, напряжение и ЭДС совпадают по направлению, то в выражение закона Ома они входят с одинаковыми знаками. Если ЭДС действует в сторону, противоположную положительному направлению тока, в выражении ставится знак « \leftarrow ».

Закон Ома применяется как для участка ветви, так и для одноконтурной замкнутой схемы.

Законы Кирхгофа

Для расчета разветвленных электрических цепей применяют 1-й и 2-й законы Кирхгофа. Распределение токов по ветвям электрической цепи подчиняется первому закону Кирхгофа, а распределение напряжений по участкам цепи подчиняется второму закону Кирхгофа.

Законы Кирхгофа наряду с законами Ома являются основными в теории электрических цепей.

Первый закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum I_i = 0, \quad (1.3)$$

где i – число ветвей, сходящихся в данном узле, т. е. суммирование распространяется на токи в ветвях, которые сходятся в рассматриваемом узле.

Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, определяется формулой

$$N_{\text{ур}} = N_{\text{у}} - 1,$$

где $N_{\text{у}}$ – число узлов в рассматриваемой цепи.

Знаки токов в уравнении берутся с учетом выбранного положительного направления. Знаки токов одинаковы, если токи одинаково ориентированы относительно данного узла.

Уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа, называются *узловыми*.

Второй закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма ЭДС в любом замкнутом контуре цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура:

$$\sum I_i R_i = \sum E_i, \quad (1.4)$$

где i – номер элемента (сопротивления или источника напряжения) в рассматриваемом контуре.

Число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, определяется формулой

$$N_{\text{ур}} = N_{\text{в}} - N_{\text{у}} + 1 - N_{\text{ист.т}},$$

где $N_{\text{в}}$ – число ветвей электрической цепи;

$N_{\text{у}}$ – число узлов;

$N_{\text{ист.т}}$ – число источников тока.

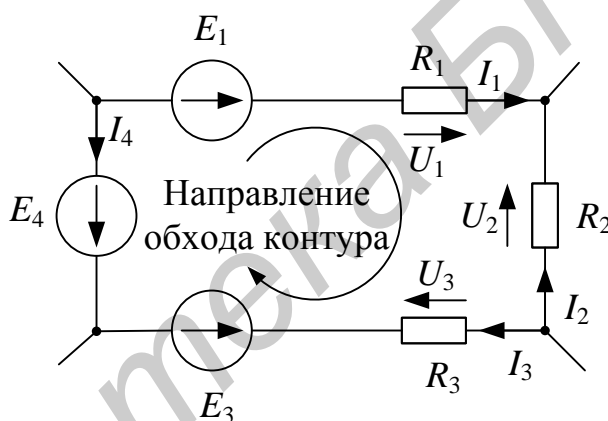


Рис. 1.2

Для того чтобы правильно записать второй закон Кирхгофа для заданного контура, следует выполнить следующие действия:

- 1) произвольно выбрать направление обхода контура, например, по часовой стрелке;
- 2) ЭДС и падения напряжения, которые совпадают по направлению с выбранным направлением обхода, записываются в выражении со знаком «+»; если ЭДС и падения напряжения не совпадают с направлением обхода контура, то перед ними ставится знак «-».

С учетом вышперечисленного второй закон Кирхгофа для схемы (рис. 1.2) запишется следующим образом:

$$U_1 - U_2 + U_3 = E_1 - E_3 - E_4,$$

или

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_1 - E_3 - E_4.$$

Уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, называются *контурными*.

Следует запомнить! Если цепь содержит источники тока, то при составлении уравнения по второму закону Кирхгофа выбираем контур, в который не входят источники тока.

1.2. Примеры расчета линейных электрических цепей по законам Ома и Кирхгофа

Пример 1.1

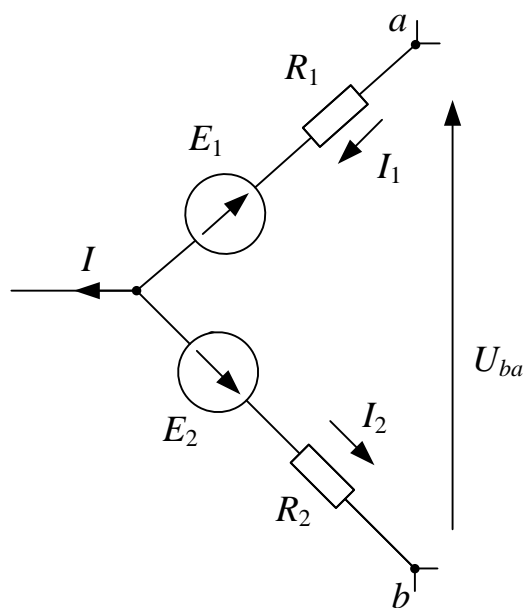


Рис. 1.3

Для схемы рис. 1.3 определим напряжение U_{ba} , если $E_1 = 70 \text{ В}$; $E_2 = 20 \text{ В}$; $R_1 = 8 \text{ Ом}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $I_1 = 3 \text{ А}$; $I_2 = 2,4 \text{ А}$.

Решение

Запишем формулу для расчета напряжения между узлом «b» и узлом «a»:

$$U_{ba} = -I_2 R_2 + E_2 - E_1 - I_1 R_1.$$

Подставим численные значения, получим:

$$U_{ba} = -12 + 20 - 70 - 24 = -86 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{ba} = -86 \text{ В}$.

Пример 1.2

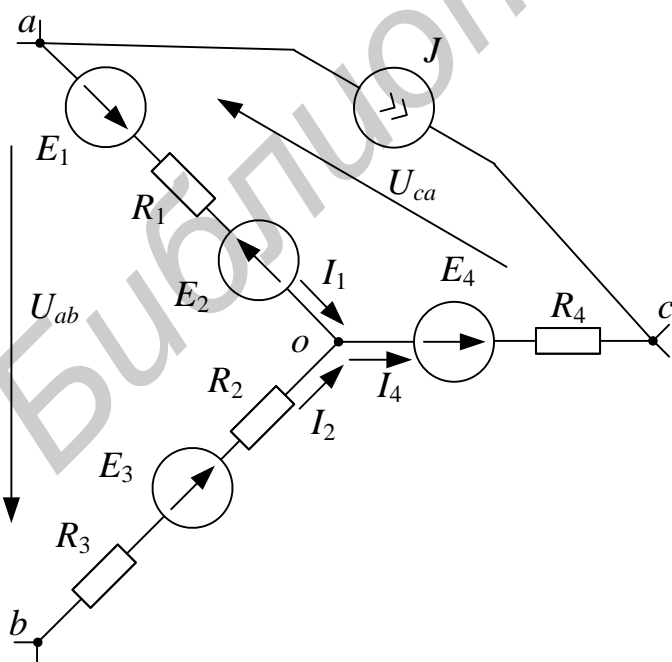


Рис. 1.4

Для схемы на рис. 1.4 определим напряжения U_{ab} и U_{ca} , если $E_1 = 20 \text{ В}$; $E_2 = 50 \text{ В}$; $E_3 = 10 \text{ В}$; $E_4 = 60 \text{ В}$; $J = 3 \text{ А}$; $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом}$; $R_4 = 4 \text{ Ом}$; $I_1 = 4 \text{ А}$; $I_2 = 7 \text{ А}$; $I_4 = 11 \text{ А}$.

Решение

Используя обобщенный закон Ома для участка цепи, запишем формулы для определения напряжений U_{ab} и U_{ca} :

$$U_{ab} = I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_2 R_3 - E_1 + E_2 + E_3;$$

$$U_{ca} = -I_4 R_4 - I_1 R_1 + E_4 + E_1 - E_2.$$

Подставим численные значения, получим:

$$U_{ab} = 20 - 7 - 7 - 20 + 50 + 10 = 46 \text{ В};$$

$$U_{ca} = -44 - 20 + 60 + 20 - 50 = -34 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{ab} = 46 \text{ В}$, $U_{ca} = -34 \text{ В}$.

Пример 1.3

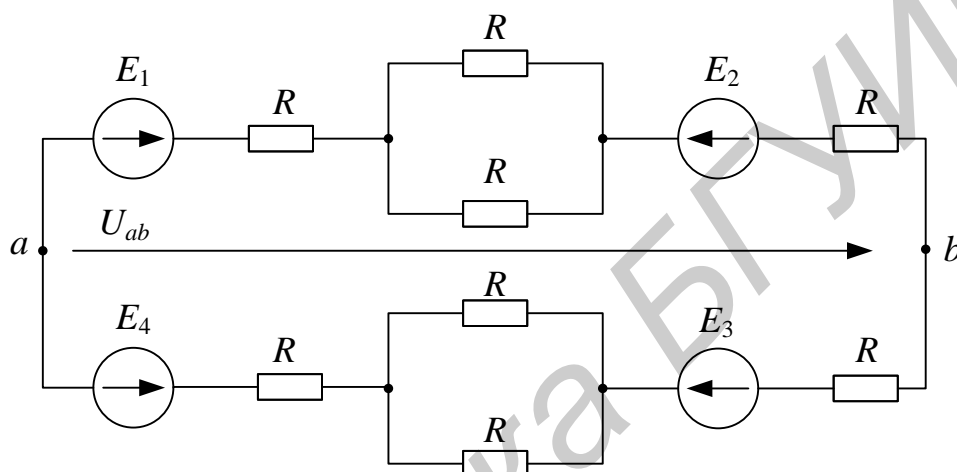


Рис. 1.5

Для схемы (рис. 1.5) определить U_{ab} , если известно, что $E_1 = 100 \text{ В}$; $E_2 = 30 \text{ В}$; $E_3 = 60 \text{ В}$; $E_4 = 10 \text{ В}$; $R = 10 \text{ Ом}$.

Решение

Заменим параллельные участки эквивалентными сопротивлениями $R/2$ и зададимся положительным направлением тока (рис. 1.6). Напряжение U можно определить, рассматривая верхнюю или нижнюю половины контура между точками «а» и «b». В обоих случаях результат должен быть одинаковым.

Определим ток I по закону Ома:

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}{4R + 2\frac{R}{2}} = \frac{100 - 30 + 60 - 10}{5 \cdot 10} = 2,4 \text{ А}.$$

Если рассматривать верхнюю половину контура, то

$$U_{ab} = I \left(2R + \frac{R}{2} \right) - E_1 + E_2 = 2,4 \cdot 25 - 100 + 30 = -10 \text{ В}.$$

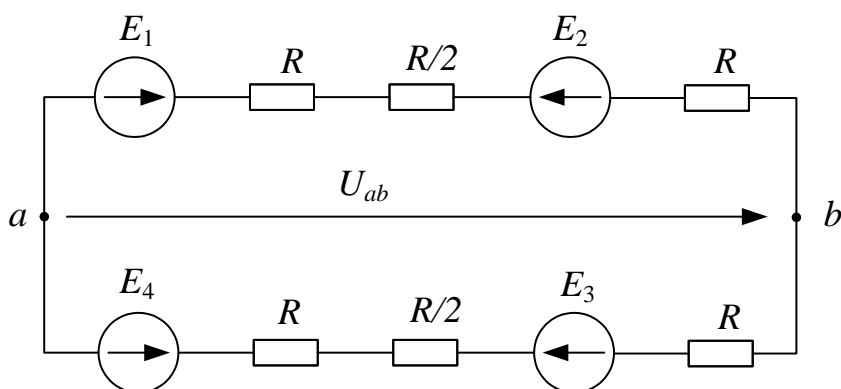


Рис. 1.6

Знак « \leftarrow » говорит о том, что напряжение на данном участке направлено от точки « b » к « a », т. е. потенциал точки « b » больше потенциала точки « a ».

Ответ: $U_{ab} = -10$ В.

Пример 1.4

В цепи (рис. 1.7) заданы токи I_1 и I_3 , сопротивления и ЭДС. Определить токи I_4, I_5, I_6 ; напряжение между точками « a » и « b », если $I_1 = 10$ мА; $I_3 = -20$ мА; $R_4 = 5$ кОм; $E_5 = 20$ В; $R_5 = 3$ кОм; $E_6 = 40$ В; $R_6 = 2$ кОм.

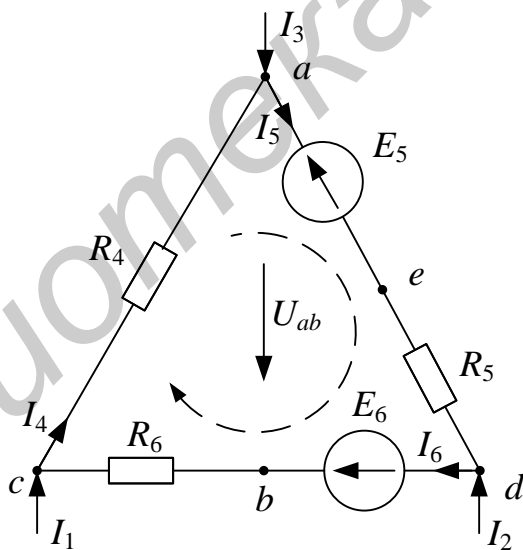


Рис. 1.7

Решение

1. Для заданного контура составим два уравнения по первому закону Кирхгофа и одно – по второму. Направление обхода контура указано стрелкой.

$$1. \begin{cases} I_3 + I_4 - I_5 = 0 - \text{для узла «a»}, \\ I_1 + I_6 - I_4 = 0 - \text{для узла «c»}, \\ I_4 R_4 + I_5 R_5 + I_6 R_6 = -E_5 + E_6. \end{cases}$$

В результате решения получаем: $I_6 = 0$, $I_4 = 10$ мА, $I_5 = -10$ мА.

2. Зададим направление напряжения между точками «а» и «б» от точки «а» к точке «б» – U_{ab} . Это напряжение найдем из уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$I_4 R_4 + U_{ab} + I_6 R_6 = 0;$$
$$U_{ab} = -50 \text{ В.}$$

Ответ: $U_{ab} = -50$ В.

2. Метод наложения

2.1. Основные теоретические положения

Метод наложения основан на применении принципа наложения, который формулируется следующим образом.

Ток в любой ветви электрической цепи от действия нескольких источников равен алгебраической сумме токов, обусловленных действием каждого источника в отдельности, при отсутствии других источников.

Рассматриваемый принцип называют **принципом независимого действия**. При действии только одного из источников напряжения предполагается, что ЭДС всех остальных источников равны нулю, так же как равны нулю и токи всех источников тока. Отсутствие напряжения на зажимах источников напряжения равносильно короткому замыканию их зажимов. Отсутствие тока в ветви с источником тока равносильно разрыву этой ветви.

Если источник ЭДС содержит внутреннее сопротивление, то, полагая ЭДС равной нулю, следует оставлять в ветви его внутреннее сопротивление. Аналогично в случае источника тока с параллельной внутренней проводимостью следует, разрывая ветвь источника (т. е. полагая $J = 0$), оставлять включенной параллельную ветвь с внутренним сопротивлением.

Пусть в цепи действуют источники с параметрами E и J , тогда I'_n и I''_n – токи n -й ветви, создаваемые каждым из этих источников в отдельности.

Согласно принципу наложения искомый ток

$$I_n = I'_n + I''_n.$$

Принцип суперпозиции применим к напряжениям, т. к. между током и напряжением рассматривается линейная зависимость (закон Ома); но не применим к мощности: $P_n \neq P'_n + P''_n$,

т. к. мощность – это квадратичная функция тока.

2.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом наложения

Пример 2.1

Дано: $E = 60 \text{ В}$; $J = 2 \text{ А}$; $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 10 \text{ Ом}$; $R_4 = 15 \text{ Ом}$.

Определить все токи методом наложения в схеме на рис. 2.1.

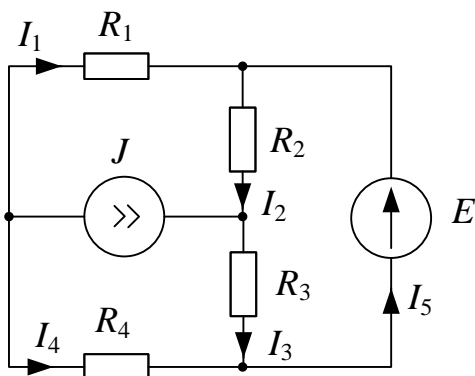


Рис. 2.1

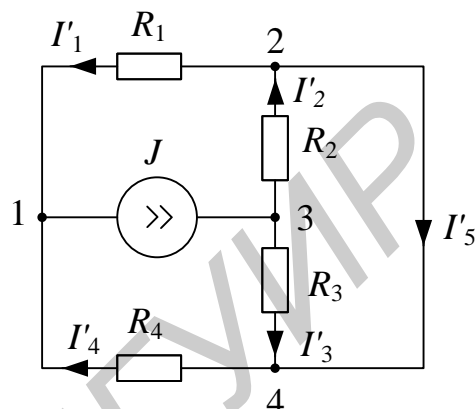


Рис. 2.2

Решение

1. Заменяем источник ЭДС E короткозамкнутым участком (т. к. его $r_{\text{ВН}} = 0$) (схема на рис. 2.2).

Так как конфигурация цепи изменилась, то в цепи (см. рис. 2.2) протекают токи, отличные от токов цепи, показанной на рис. 2.1. Их называют первыми частичными токами и обозначают одним штрихом. Схему цепи на рис. 2.2 представим более наглядно (рис. 2.3). Токи рассчитаем, применяя правило плеч и первый закон Кирхгофа:

$$I'_4 = J \frac{R_1}{R_1 + R_4} = 2 \cdot \frac{5}{5 + 15} = 0,5 \text{ А};$$

$$I'_1 = J - I'_4 = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ А};$$

$$I'_2 = J \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \cdot \frac{10}{20 + 10} = 0,66 \text{ А};$$

$$I'_3 = J - I'_2 = 2 - 0,66 = 1,34 \text{ А};$$

$$I'_5 = I'_2 - I'_1 = 0,66 - 1,5 = -0,84 \text{ А}.$$

Ток I'_5 протекает по короткозамкнутому участку (его сопротивление равно нулю).

Следует запомнить! Ток в ветви, сопротивление которой равно нулю, определяют по первому закону Кирхгофа.

2. Разорвем ветвь с источником тока J . Токи, протекающие в цепи (рис. 2.4), называют вторыми частичными токами и обозначают двумя штрихами.

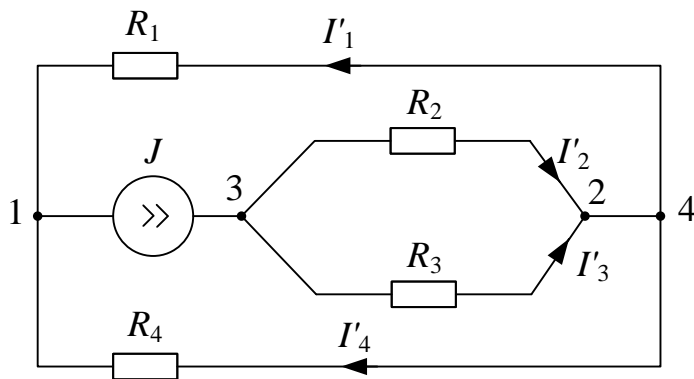


Рис. 2.3

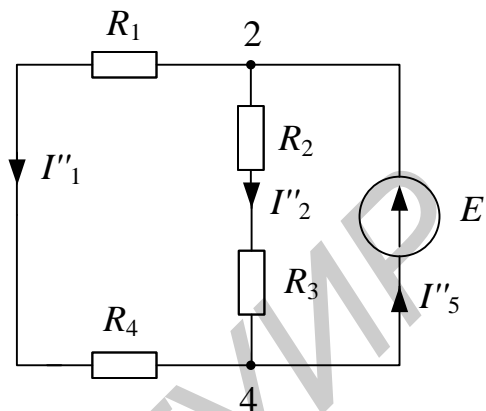


Рис. 2.4

Напряжение, создаваемое ЭДС E , приложено к двум параллельным ветвям. Токи I_1'' и I_2'' определим по закону Ома:

$$I_2'' = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{60}{20 + 10} = 2 \text{ A};$$

$$I_4'' = I_1'' = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{60}{5 + 15} = 3 \text{ A};$$

$$I_5'' = I_1'' + I_2'' = 3 + 2 = 5 \text{ A}.$$

3. Искомые токи найдем как алгебраическую (т. е. с учетом направлений) сумму частичных токов:

$$I_1 = -I_1' - I_1'' = -1,5 - 3 = -4,5 \text{ A};$$

$$I_2 = -I_2' + I_2'' = -0,66 + 2 = 1,34 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3' + I_2'' = 1,34 + 2 = 3,33 \text{ A};$$

$$I_4 = -I_4' + I_1'' = -0,5 + 3 = 2,5 \text{ A};$$

$$I_5 = I_4 + I_3 = 2,5 + 3,33 = 5,83 \text{ A}.$$

Ответ: $I_1 = -4,5 \text{ A}$, $I_2 = 1,34 \text{ A}$, $I_3 = 3,33 \text{ A}$, $I_4 = 2,5 \text{ A}$, $I_5 = 5,83 \text{ A}$.

3.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом контурных токов

Пример 3.1

Составить уравнение по методу контурных токов и определить токи во всех ветвях схемы (рис. 3.1), если $J_1 = 1 \text{ мА}$; $J_2 = 2 \text{ мА}$; $J_3 = 3 \text{ мА}$; $R_4 = 4 \text{ кОм}$; $R_5 = 5 \text{ кОм}$; $R_6 = 6 \text{ кОм}$; $R_7 = 7 \text{ кОм}$; $E_4 = 27 \text{ В}$.

На данном примере покажем, как пользоваться методом контурных токов, если схема содержит источники тока.

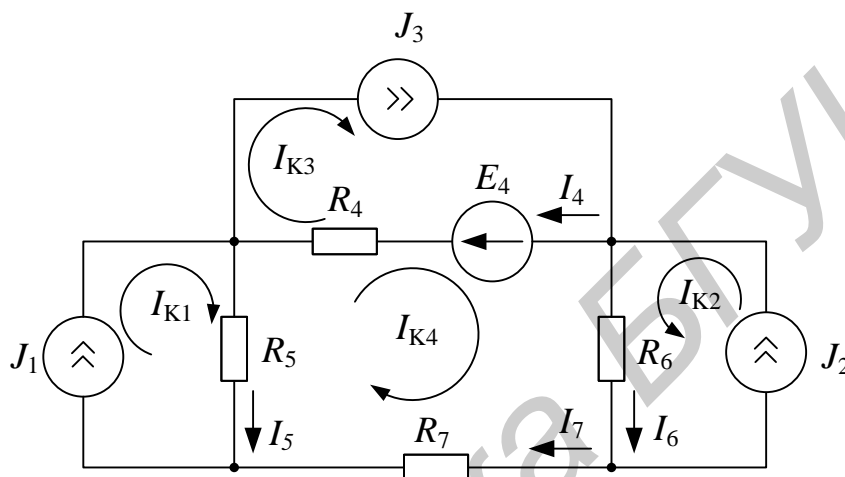


Рис. 3.1

Решение

В цепи четыре независимых контура, следовательно, обозначим четыре контурных тока: I_{K1} , I_{K2} , I_{K3} , I_{K4} и их положительные направления.

Токи I_{K1} , I_{K2} , I_{K3} протекают через источники тока J_1 , J_2 , J_3 соответственно. Следовательно: $I_{K1} = J_1 = 1 \text{ мА}$; $I_{K2} = J_2 = 2 \text{ мА}$; $I_{K3} = J_3 = 3 \text{ мА}$.

В данном примере необходимо определить один контурный ток I_{K4} , следовательно, составим только одно уравнение:

$$-I_{K1}R_5 + I_{K2}R_6 - I_{K3}R_4 + I_{K4}(R_4 + R_5 + R_6 + R_7) = -E_4,$$

откуда $I_{K4} = -1 \text{ мА}$.

Токи ветвей определим как алгебраическую сумму контурных токов:

$$I_4 = I_{K3} - I_{K4} = 3 - (-1) = 4 \text{ мА};$$

$$I_5 = I_{K1} - I_{K4} = 1 - (-1) = 2 \text{ мА};$$

$$I_6 = I_{K2} + I_{K4} = 2 - 1 = 1 \text{ мА};$$

$$I_7 = I_{K4} = -1 \text{ мА}.$$

Правильность решения задачи проверим, составив уравнение по второму закону Кирхгофа для контура 4 (контур обходим по часовой стрелке):

$$I_4 R_4 + I_6 R_6 + I_7 R_7 - I_5 R_5 = -E_4;$$

$$-4 \cdot 4 + 1 \cdot 6 - 1 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = -27;$$

$$-27 = -27.$$

Второй закон Кирхгофа выполняется.

Ответ: $I_4 = 4$ мА, $I_5 = 2$ мА, $I_6 = 1$ мА, $I_7 = -1$ мА.

Пример 3.2

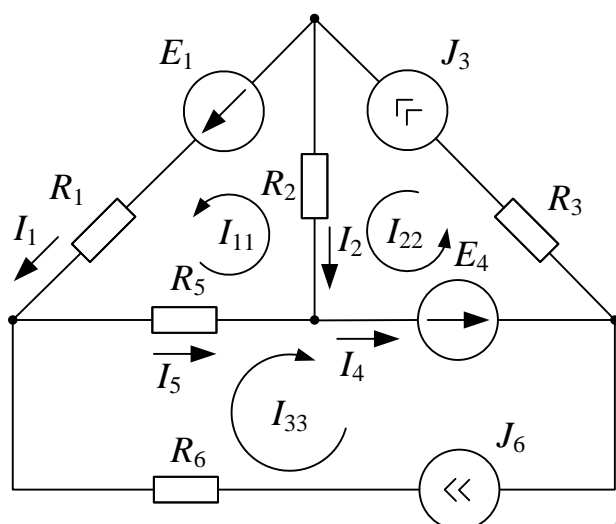


Рис. 3.2

Дано:

$R_1 = 5$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 5$ Ом;
 $R_4 = 4$ Ом; $R_5 = 10$ Ом; $R_6 = 20$ Ом; $E_1 = 10$ В;
 $E_4 = 40$ В; $J_3 = 1$ А; $J_6 = 2$ А.

Определить токи в схеме (рис. 3.2) методом контурных токов.

Решение

Выбираем направления контурных токов. Контурные токи I_{22} и I_{33} совпадают по направлению с токами источников J_3 и J_6 и равны им

соответственно: $I_{22} = I_3$; $I_{33} = I_6$. Для решения задачи необходимо составить одно уравнение для неизвестного контурного тока I_{11} :

$$I_{11}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{22}R_2 + I_{33}R_5 = E_1.$$

Решив его, получаем

$$I_{11} = \frac{E_1 + I_3 R_2 - I_6 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = \frac{10 + 1 \cdot 10 - 2 \cdot 10}{5 + 10 + 10} = \frac{0}{25} = 0 \text{ А}.$$

Токи в ветвях схемы определяем как алгебраическую сумму контурных токов, проходящих через каждую ветвь:

$$I_1 = I_{11} = 0 \text{ А};$$

$$I_5 = I_{11} + I_{33} = 0 + 2 = 2 \text{ А};$$

$$I_4 = I_{22} + I_{33} = 1 + 2 = 3 \text{ А};$$

$$I_2 = I_{22} - I_{11} = 1 - 0 = 1 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 = 0$ А, $I_2 = 1$ А, $I_3 = 1$ А, $I_4 = 3$ А, $I_5 = 2$ А, $I_6 = 2$ А.

Алгоритм расчета электрических цепей по методу узловых напряжений таков:

1) выбираем базисный узел. Желательно при этом нулевой потенциал присвоить тому узлу, где сходится большее количество ветвей.

Запомнить! Если в составе цепи имеется одна или несколько ветвей, содержащих идеальные ЭДС (сопротивление таких ветвей равно нулю), то за базисный принимают один из узлов, между которыми находится ветвь с идеальной ЭДС;

2) составляется система уравнений для неизвестных узловых напряжений в соответствии с общей структурой этих уравнений (4.2);

3) решая данную систему, находят напряжения узлов относительно базиса;

4) токи ветвей определяют по обобщенному закону Ома:

$$I_K = \frac{U_{n0} - U_{m0} + E_K}{R_K}.$$

Частным случаем метода узловых напряжений является **метод двух узлов**. Если схема содержит только два узла, то в соответствии с методом узловых напряжений (в отсутствие идеальных ЭДС) составляется только одно уравнение:

$$U_{n0}g_m = \sum E_n g_n + \sum J_n.$$

4.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом узловых напряжений

Пример 4.1

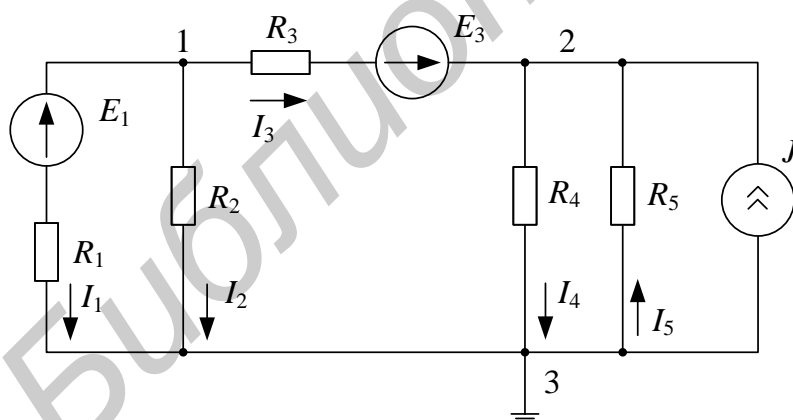


Рис. 4.1

Дано:

$$E_1 = 24 \text{ В}; \quad E_3 = 12 \text{ В};$$

$$J = 20 \text{ А}; \quad R_1 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 6 \text{ Ом}; \quad R_3 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 12 \text{ Ом}; \quad R_5 = 4 \text{ Ом}.$$

Определить все токи в схеме (рис. 4.1) методом узловых напряжений.

Решение

Цепь содержит три узла, ветви с идеальными ЭДС отсутствуют. Число необходимых уравнений, определяемое по формуле (4.1), равно двум. В качестве базисного выбираем третий узел.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} U_{13}g_{11} - U_{23}g_{12} = I_{y1}, \\ -U_{13}g_{21} + U_{23}g_{22} = I_{y2}, \end{cases}$$

где

$$g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$g_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3};$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3};$$

$$I_{y1} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3} = \frac{24}{6} - \frac{12}{3} = 0;$$

$$I_{y2} = \frac{E_3}{R_3} + J = \frac{12}{3} + 20 = 24 \text{ A}.$$

В результате решения определяем

$$U_{13} = 24 \text{ В};$$

$$U_{23} = 48 \text{ В}.$$

Токи ветвей определяем по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{U_{13} - E_1}{R_1} = \frac{24 - 24}{6} = 0 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{13}}{R_2} = \frac{24}{6} = 4 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{12} + E_3}{R_3} = \frac{U_{13} - U_{23} + E_3}{R_3} = \frac{24 - 48 + 12}{3} = -4 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{U_{23}}{R_4} = \frac{48}{12} = 4 \text{ А};$$

$$I_5 = -\frac{U_{23}}{R_5} = -\frac{48}{4} = -12 \text{ А}.$$

Правильность решения целесообразно проверить составлением и расчетом баланса мощностей.

В нашем случае уравнение баланса мощностей:

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = -E_1 I_1 + E_3 I_3 + J U_{23};$$

$$4^2 \cdot 6 + 4^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 12 + 12^2 \cdot 4 = 12 \cdot (-4) + 20 \cdot 48;$$

$$912 = 912.$$

Мощность приемников равна мощности потребителей, т. е. баланс мощностей выполняется.

Проверим выполнение второго закона Кирхгофа для внешнего контура. Второй закон Кирхгофа:

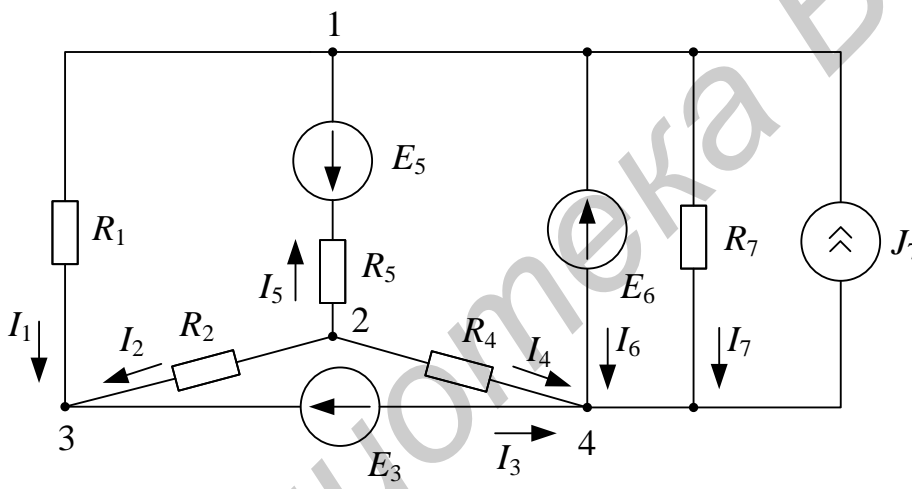
$$-I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_5 R_5 = E_1 + E_3;$$

$$0 - 4 \cdot 3 - (-12) \cdot 4 = 24 + 12;$$

$$36 = 36.$$

Ответ: $I_1 = 0$ А, $I_2 = 4$ А, $I_3 = -4$ А, $I_4 = 4$ А, $I_5 = -12$ А.

Пример 4.2



Дано:

$$R_1 = 5 \text{ кОм};$$

$$R_2 = 4 \text{ кОм};$$

$$R_4 = 2,5 \text{ кОм};$$

$$R_5 = 2 \text{ кОм};$$

$$R_7 = 12 \text{ кОм};$$

$$E_3 = 40 \text{ В};$$

$$E_5 = 50 \text{ В};$$

$$E_6 = 60 \text{ В};$$

$$J_7 = 15 \text{ мА}.$$

Рис. 4.2

Определить токи в схеме (рис. 4.2) методом узловых напряжений.

Решение

В схеме 4 узла. В ветвях 3 и 6 включены идеальные источники ЭДС, эти ветви соединяются в узле 4. По формуле (4.1) определяем число уравнений: $N_{\text{ур}} = 4 - 1 - 2 = 1$.

Действительно, если за базисный узел принять узел 4 (но также можно принять узел 1 или 3), то сразу определяем $U_{34} = E_3 = 40$ В и $U_{14} = E_6 = 60$ В. Неизвестным является узловое напряжение U_{24} .

Уравнение по методу узловых напряжений имеет вид

$$-U_{14} g_{21} + U_{24} g_{22} - U_{34} g_{23} = I_{y1},$$

где

$$g_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2,5} = 1,15;$$

$$g_{12} = \frac{1}{R_5} = 0,5;$$

$$g_{23} = \frac{1}{R_2} = 0,25;$$

$$I_{y1} = \frac{E_5}{R_5} = 25;$$

$$-60 \cdot 0,5 + U_{24} \cdot 1,15 - 40 \cdot 0,25 = 25;$$

$$U_{24} = 56,52 \text{ В}; U_{21} = U_{24} - U_{14} = -3,38 \text{ В}.$$

Определяем токи I_1, I_2, I_4, I_5, I_7 по закону Ома:

$$I_1 = \frac{U_{13}}{R_1} = \frac{U_{14} - U_{34}}{R_1} = 4 \text{ мА}; I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{U_{24} - U_{34}}{R_2} = 4,13 \text{ мА};$$

$$I_4 = \frac{U_{24}}{R_4} = 22,6 \text{ мА}; I_5 = \frac{U_{21} - E_5}{R_5} = -26,69 \text{ мА}; I_7 = \frac{U_{14}}{R_7} = 5 \text{ мА}.$$

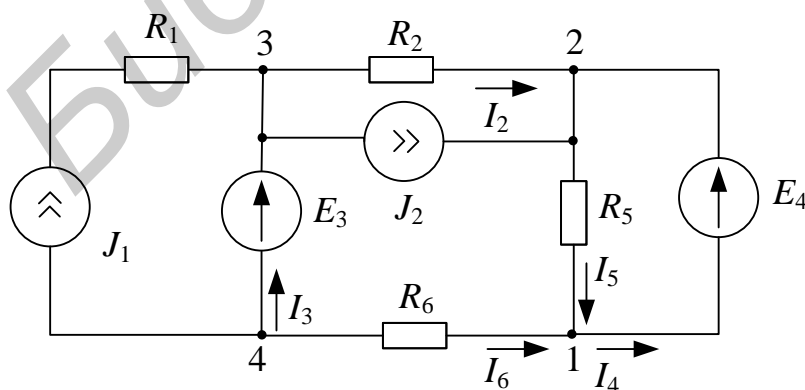
Токи I_3 и I_6 определяем по первому закону Кирхгофа:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 4 + 4,13 = 8,13 \text{ мА};$$

$$I_6 = J_7 - I_4 - I_3 - I_7 = 15 - 22,6 - 8,13 - 5 = -20,73 \text{ мА}.$$

Ответ: $I_1 = 4 \text{ мА}, I_2 = 4,13 \text{ мА}, I_3 = 8,13 \text{ мА}, I_4 = 22,6 \text{ мА}, I_5 = -26,69 \text{ мА}, I_7 = 5 \text{ мА}.$

Пример 4.3



Дано:

$$E_3 = 80 \text{ В};$$

$$E_4 = 120 \text{ В};$$

$$J_2 = 4 \text{ А};$$

$$J_1 = 8 \text{ А};$$

$$R_2 = R_6 = 20 \text{ Ом};$$

$$R_1 = R_5 = 30 \text{ Ом}.$$

Рис. 4.3

Решение

Особенностью схемы является наличие двух ветвей с идеальными источниками ЭДС, которые расположены в ветвях, не имеющих общего узла. В этом случае цепь подвергается следующему преобразованию. В одной из ветвей, содержащих идеальный источник ЭДС (например ветвь с E_4), включают компенсирующую ЭДС E'_4 , равную E_4 по величине и противоположную по направлению. Точно такая же ЭДС E'_4 включается во все соседние ветви, сходящиеся в одном из узлов данной ветви. Направления включаемых ЭДС E'_4 по отношению к этому узлу сохраняется (рис. 4.4). Токораспределение в цепи не изменяется.

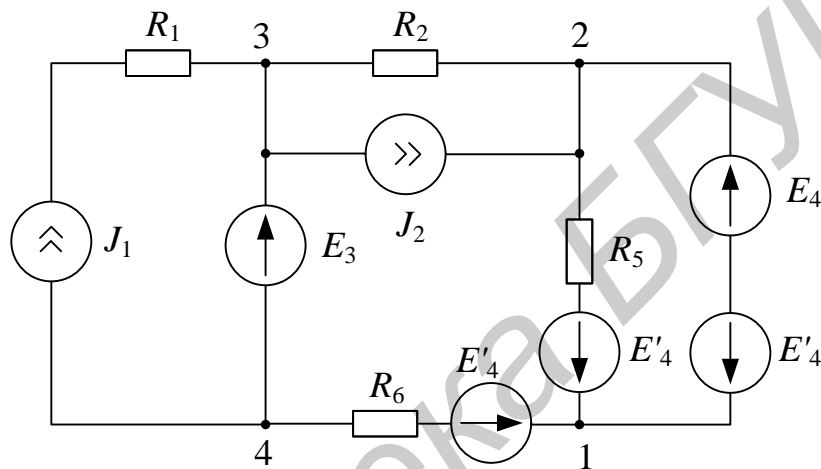


Рис. 4.4

Рисунки 4.5, а, б, в демонстрируют это преобразование.

Теперь схема (рис. 4.5, в) содержит только одну ветвь с идеальным источником ЭДС. E_3 . Потенциалы узлов 1 и 2 равны, т. к. их соединяет короткозамкнутый участок (рис. 4.5, а). Следовательно, ветвь с R_5 можно удалить из схемы. Примем узел 4 за базисный, тогда

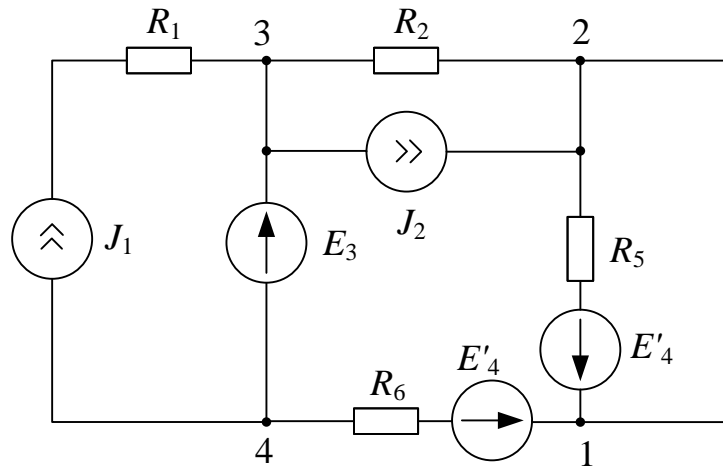
$$U_{34} = E_3 = 80 \text{ В.}$$

Уравнение по методу узловых напряжений имеет вид

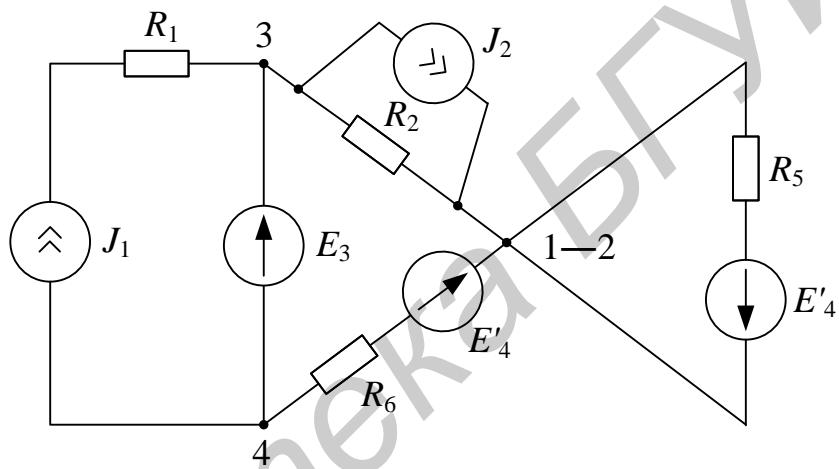
$$U_{24}g_{22} - U_{34}g_{23} = I_{y2},$$

где $g_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{10} \text{ Ом}^{-1}$; $g_{23} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} \text{ Ом}^{-1}$; $I_{y2} = \frac{E'_4}{R_6} + J_2 = 10 \text{ А}$;

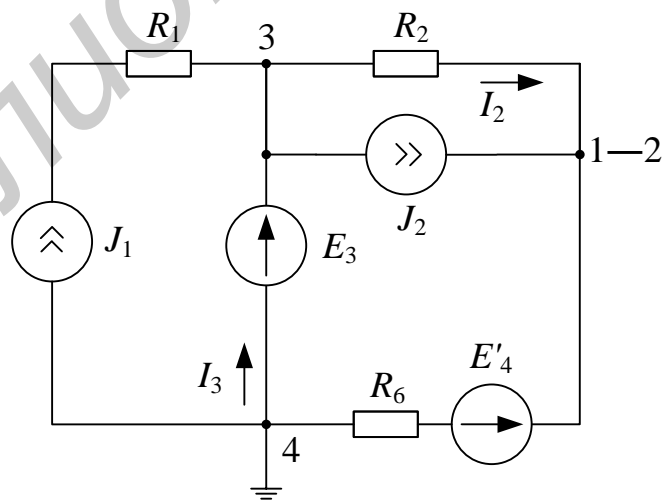
$$U_{24} \cdot \frac{1}{10} - 80 \cdot \frac{1}{20} = 10; U_{24} = 140 \text{ В}; I_2 = \frac{U_{34} - U_{24}}{R_2} = -3 \text{ А.}$$



a



б



в

Рис. 4.5

Переходим к исходной схеме (см. рис. 4.3). Запишем уравнение по 1-му закону Кирхгофа для узла 3:

$$J_1 - J_2 - I_2 + I_3 = 0,$$

откуда

$$I_3 = -7 \text{ А}.$$

Запишем уравнение по 1-му закону Кирхгофа для узла 4:

$$-J_1 - I_3 - I_6 = 0,$$

откуда

$$I_6 = -1 \text{ А}.$$

Ток в ветви 5 определим по закону Ома:

$$I_5 = \frac{E_4}{R_5} = 4 \text{ А}.$$

Ток в ветви с идеальной ЭДС E_4 определим по 1-му закону Кирхгофа:

$$I_4 = I_5 + I_6 = 3 \text{ А}.$$

Ответ: $I_2 = -3 \text{ А}$, $I_3 = -7 \text{ А}$, $I_4 = 3 \text{ А}$, $I_5 = 4 \text{ А}$, $I_6 = -1 \text{ А}$.

Пример 4.4

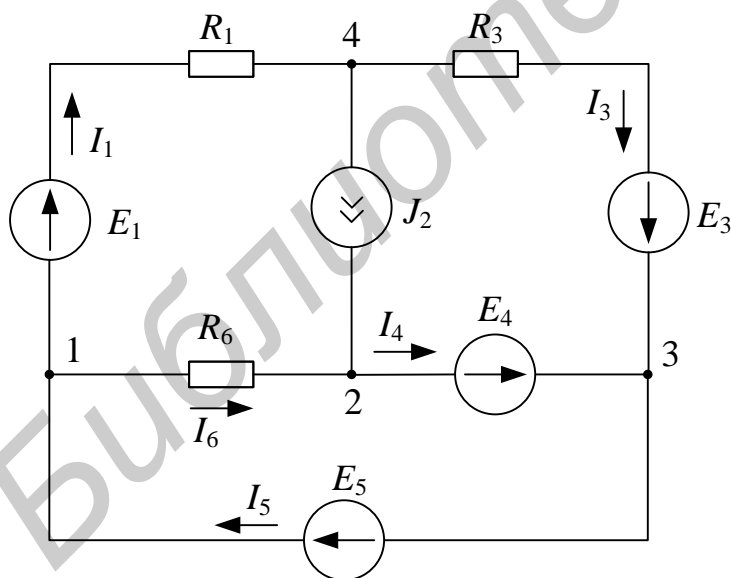


Рис. 4.6

Дано:

$$E_1 = 20 \text{ В}; E_4 = 50 \text{ В};$$

$$E_3 = 40 \text{ В}; E_5 = 10 \text{ В};$$

$$J_2 = 1 \text{ А}; R_1 = R_2 = R_3 = R_4 =$$

$$= R_5 = R_6 = 10 \text{ Ом}.$$

Определить токи в схеме (рис. 4.6) методом узловых напряжений.

Решение

За базисный узел в данной схеме можно принимать 1-й, 2-й или 3-й узлы. Рассмотрим решение задачи в случае, если за базисный принят потенциал 3-го узла. Тогда

$$\varphi_3 = 0.$$

Поскольку узлы 1 и 2 связаны с 3-м узлом ветвями, содержащими только идеальные источники ЭДС, то

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = E_5;$$

$$U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_2 = -E_4.$$

Остаётся определить потенциал 4-го относительно 3-го базисного. Составляем уравнение

$$-\varphi_1 g_{14} - \varphi_2 g_{24} + \varphi_4 g_{44} = I_{y4},$$

где $I_{y4} = \frac{-E_3}{R_3} + \frac{E_1}{R_1} - J_2 = -3$ – узловой ток 4-го узла;

$$g_{14} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10}$$
 – взаимная проводимость между 1-м и 4-м узлами;

$$g_{24} = \frac{1}{R_{\text{вн}I_2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$
 – взаимная проводимость между 2-м и 4-м узлами;

$$g_{44} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{\text{вн}I_2}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} + 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$
 – собственная проводимость 4-го узла.

Решаем уравнение

$$-10 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0 + \varphi_4 \cdot 0,2 = -3,$$

откуда

$$\varphi_4 = \frac{-3 + 1}{0,2} = -10 \text{ В}.$$

На основании обобщённого закона Ома для участка цепи определяем токи

$$U_{14} = \varphi_1 - \varphi_4 = -E_1 + I_1 R_1,$$

откуда

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4 + E_1}{R_1} = \frac{10 + 10 + 20}{10} = 4 \text{ А};$$

$$U_{43} = \varphi_4 - \varphi_3 = I_3 R_3 - E_3;$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{-10 - 0 + 40}{10} = 3 \text{ А};$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = I_6 R_6;$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_6} = \frac{10 + 50}{10} = 6 \text{ A}.$$

Токи в четвертой и пятой ветвях определим по 1-му закону Кирхгофа

$$I_4 = I_6 + J_2 = 6 + 1 = 7 \text{ A};$$

$$I_5 = I_1 + I_6 = 4 + 6 = 10 \text{ A}.$$

Ответ: $I_1 = 4 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $I_4 = 7 \text{ A}$, $I_5 = 10 \text{ A}$, $I_6 = 6 \text{ A}$.

Пример 4.5

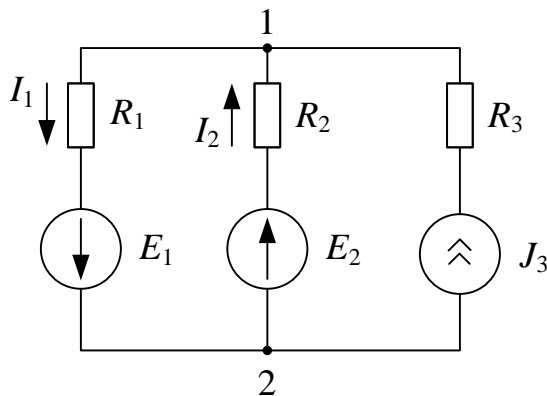


Рис. 4.7

Дано:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ B};$$

$$E_1 = 60 \text{ B}; E_2 = 20 \text{ B};$$

$$J_3 = 2 \text{ A}.$$

Определить токи в схеме (рис. 4.7) методом двух узлов.

Решение

За базисный принимаем второй узел: $\varphi_2 = 0$. Записываем формулу по методу двух узлов:

$$U_{12} = \frac{I_{11}}{g_{11}},$$

где I_{11} – узловый ток первого узла;

g_{11} – собственная проводимость первого узла.

Тогда

$$I_{11} = \frac{-E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + J_3 = \frac{-60}{10} + \frac{20}{10} + 2 = -2;$$

$$g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,2.$$

Внимание! В собственной проводимости первого узла g_{11} отсутствует слагаемое $\frac{1}{R_3}$, т. к. ветвь, содержащая идеальный источник тока, имеет бес-

конечно большое сопротивление, а значит, её проводимость будет стремиться к нулю.

Определим напряжение U_{12} :

$$U_{12} = \frac{I_{11}}{g_{11}} = \frac{-2}{0,2} = -10 \text{ В.}$$

Используя обобщенный закон Ома для участка цепи, запишем

$$U_{12} = I_1 R_1 - E_1;$$

$$U_{12} = -I_2 R_2 + E_2.$$

Следовательно, токи в цепи определяются по следующим формулам:

$$I_1 = \frac{U_{12} + E_1}{R_1} = \frac{-10 + 60}{10} = 5 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{12}}{R_2} = \frac{20 + 10}{10} = 3 \text{ А.}$$

Ответ: $I_1 = 5 \text{ А}; I_2 = 3 \text{ А.}$

5. Метод эквивалентного генератора

5.1. Основные теоретические положения

Методы решения задач, основанные на теоремах об эквивалентном источнике напряжения и эквивалентном источнике тока, называются соответственно *методом эквивалентного генератора напряжения* и *методом эквивалентного источника тока*.

Эти методы используются в тех случаях, когда по условию задачи требуется определить ток только одной ветви.

Теорема об эквивалентном генераторе напряжения

По отношению к зажимам произвольно выбранной ветви оставшаяся активная часть цепи (активный двухполюсник) может быть заменена эквивалентным генератором (рис. 5.1). Параметры генератора: его ЭДС $E_{\text{ЭКВ}}$ равна напряжению на зажимах выделенной ветви при условии, что эта ветвь разомкнута, т. е. $E_{\text{ЭКВ}} = U_{\text{Х.Х}}$; его внутреннее сопротивление r_0 равно эквивалентному сопротивлению пассивной электрической цепи со стороны зажимов выделенной ветви.

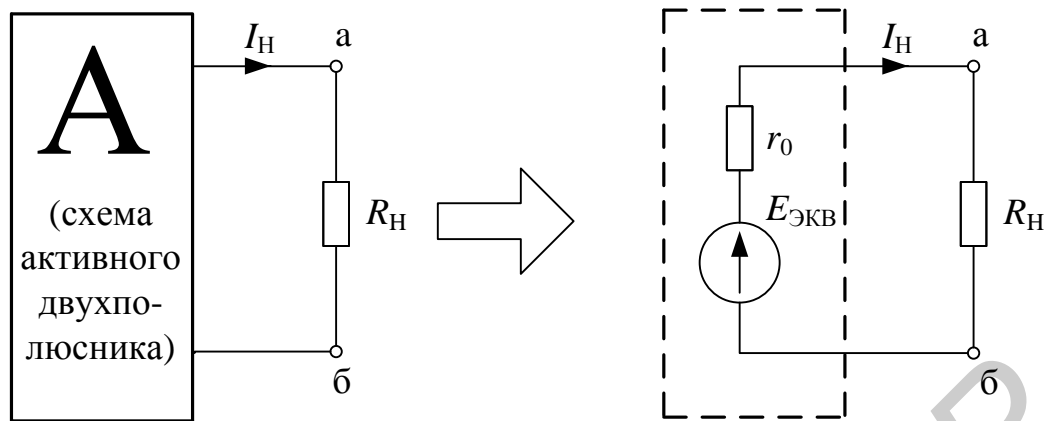


Рис. 5.1

Ток в ветви нагрузки по методу эквивалентного генератора определяется по следующей формуле:

$$I_H = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_H + r_0},$$

где r_0 – эквивалентное сопротивление всей пассивной цепи относительно ветви нагрузки.

Теорема об эквивалентном генераторе тока

Ток в любой ветви «а – б» линейной электрической цепи не изменится, если электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником тока (рис. 5.2). Ток этого источника должен быть равен току между зажимами «а – б» замкнутыми накоротко, а внутренняя проводимость источника тока должна равняться входной проводимости пассивной электрической цепи со стороны зажимов «а» и «б» при разомкнутой ветви «а – б».

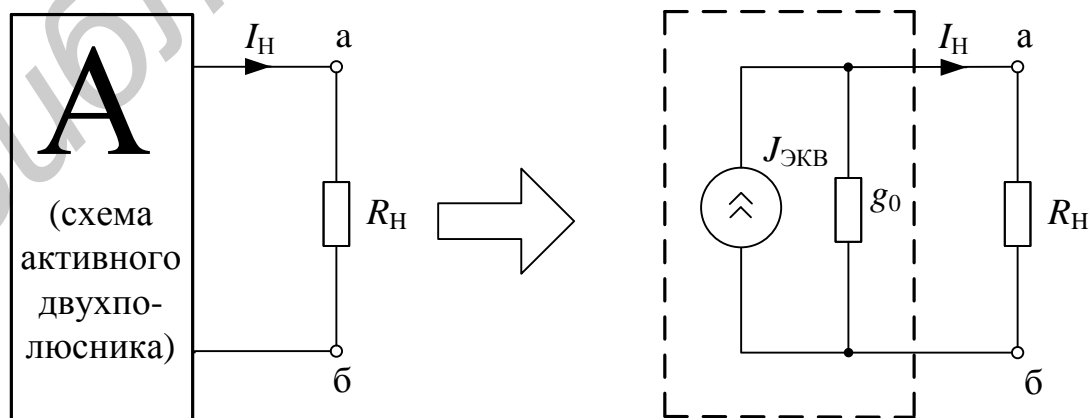


Рис. 5.2

Искомый ток ветви «а – б» равен

$$I_H = J_{\text{ЭКВ}} \frac{r_0}{R_H + r_0},$$

где $r_0 = \frac{1}{g_0}$.

Порядок расчета задачи методом эквивалентного генератора напряжения:

- 1) разрывают ветвь схемы с определяемым током (ветвь нагрузки). Рассчитывают оставшуюся часть схемы одним из методов; определяют $U_{X.X}$ на зажимах разомкнутой ветви по второму закону Кирхгофа;
- 2) определяют r_0 (внутреннее сопротивление эквивалентного источника) методом эквивалентных преобразований.

При этом обязательно изображается пассивная схема, где источники ЭДС заменяются их внутренними сопротивлениями (если источник ЭДС – идеальный, то его заменяют на короткозамкнутый участок), источники тока заменяются их внутренними проводимостями (ветви с идеальными источниками тока разрываются). Внутреннее сопротивление источника r_0 рассчитывают как эквивалентное сопротивление данной пассивной цепи относительно точек разрыва;

- 3) определяют ток в ветви нагрузки по закону Ома:

$$I_H = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_H + r_0}.$$

Параметры эквивалентного генератора для реальной цепи могут быть получены на основе опытов холостого хода и короткого замыкания. Из опыта холостого хода определяют $U_{X.X}$, а из опыта короткого замыкания – $I_{K.З}$.

Внутреннее сопротивление источника: $r_0 = \frac{U_{X.X}}{I_{K.З}}$.

5.2. Примеры расчета линейных электрических цепей методом эквивалентного генератора

Пример 5.1

Дано: $E_1 = 20 \text{ В}$; $J_6 = 1 \text{ А}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = 5 \text{ Ом}$; $R_4 = 15 \text{ Ом}$; $R_5 = 5 \text{ Ом}$; $R_6 = 5 \text{ Ом}$. Определить ток I_3 в схеме (рис. 5.3) методом эквивалентного генератора напряжения.

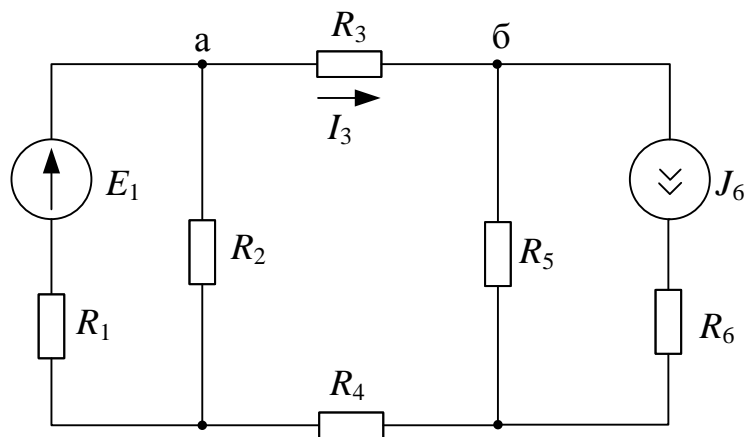


Рис. 5.3

Решение

Согласно методу об эквивалентном генераторе напряжения ток I_3 определим по следующей формуле:

$$I_3 = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{r_0 + R_3},$$

где $E_{\text{ЭКВ}}$ – величина, равная напряжению Х.Х, возникающему между точками разрыва искомой ветви;

r_0 – внутреннее сопротивление ЭДС, равное эквивалентному сопротивлению пассивной цепи относительно точек разрыва.

В соответствии с алгоритмом расчета МЭГ:

1) размыкаем ветвь, ток которой мы определяем (рис. 5.4). Искомая цепь после разрыва ветви 3 изменила свою конфигурацию и состоит из двух независимых контуров, в каждом из которых протекает соответствующий ток.

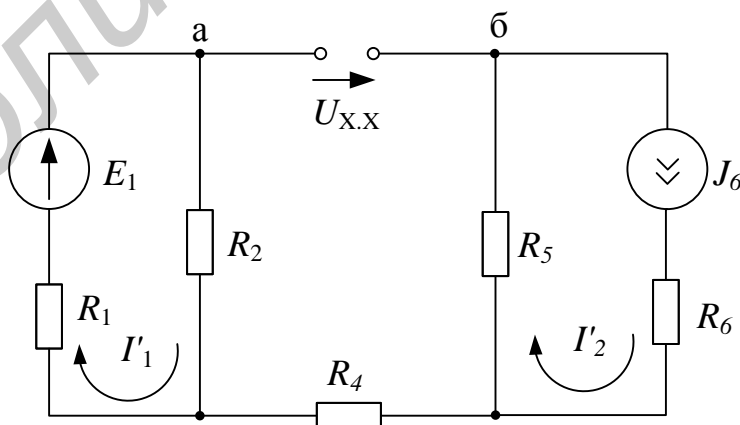


Рис. 5.4

Ток I'_1 определяем по закону Ома:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = 1 \text{ А.}$$

Ток I_2 равен току источника J_6 : $I'_2 = J_6 = 1 \text{ А.}$

Напряжение $U_{X.X}$ определяем по второму закону Кирхгофа:

$$U_{X.X} - I'_2 R_5 - I'_1 R_2 = 0;$$

$$U_{X.X} = 15 \text{ В;}$$

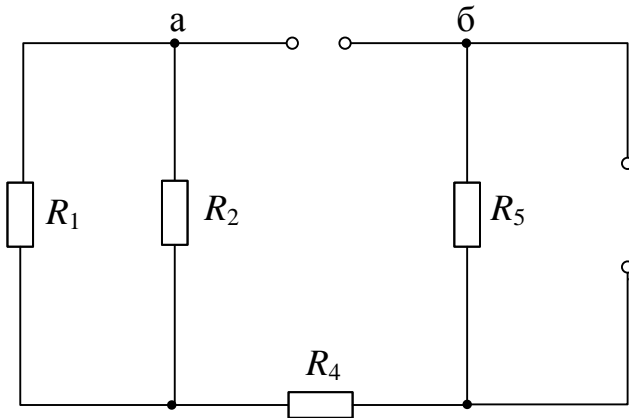


Рис. 5.5

2) определяем $R_{\text{ЭКВ}}$ пассивной цепи относительно точек «а» и «б» (рис. 5.5). При этом целесообразно изобразить пассивную схему согласно вышеизложенному правилу:

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4 + R_5 = 25 \text{ Ом;}$$

3) с учетом рассчитанных $U_{X.X}$ и $R_{\text{ЭКВ}}$: $I_3 = \frac{15}{5 + 25} = 0,5 \text{ А.}$

Ответ: $I_3 = 0,5 \text{ А.}$

Пример 5.2

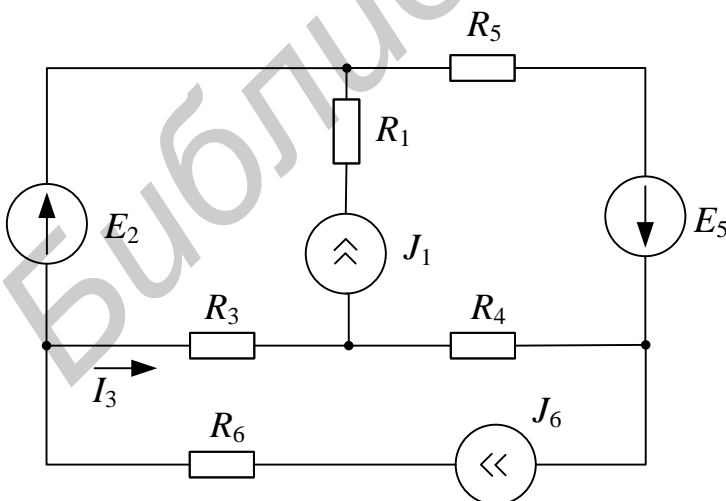


Рис. 5.6

Дано:

$$E_5 = 20 \text{ В; } E_2 = 40 \text{ В;}$$

$$I_1 = 5 \text{ А; } I_6 = 2 \text{ А; } R_1 = R_2$$

$$= R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10 \text{ Ом.}$$

Определить ток I_3 методом эквивалентного генератора напряжения в схеме (рис. 5.6).

Решение

Определим ток в сопротивлении R_3 методом эквивалентного генератора напряжения:

$$I_3 = \frac{U_{\text{х.х}}}{R_3 + r_0}.$$

1. Определим напряжение холостого хода по схеме (рис. 5.7):

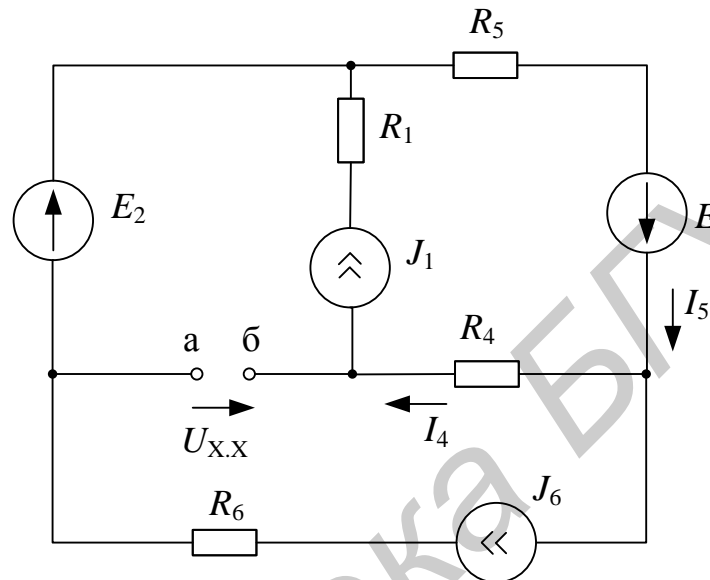


Рис. 5.7

$$U_{\text{х.х}} = U_{\text{аб}} = -E_2 + I_5 R_5 - E_5 + I_4 R_4,$$

где $I_4 = I_1$.

Ток I_5 определим по первому закону Кирхгофа:

$$I_5 = I_1 + I_6 = 5 + 2 = 7 \text{ А.}$$

Тогда

$$U_{\text{х.х}} = -E_2 + I_5 R_5 - E_5 + I_4 R_4 = -40 + 7 \cdot 10 - 20 + 5 \cdot 10 = 60 \text{ В.}$$

2. Определим внутреннее сопротивление (r_0) по схеме (рис. 5.8). Ветви, содержащие источники тока при определении r_0 , из расчета исключаются.

Итак,

$$r_0 = R_5 + R_4 = 20 \text{ Ом.}$$

Определяем ток I_3 :

$$I_3 = \frac{U_{\text{х.х}}}{R_3 + r_0} = \frac{60}{10 + 20} = 2 \text{ А.}$$

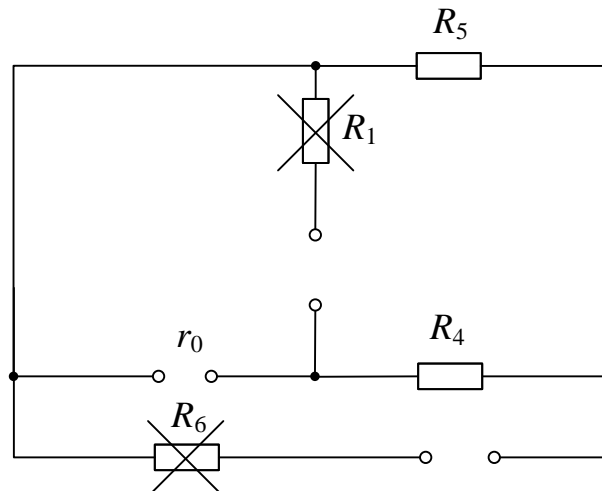


Рис. 5.8

Ответ: $I_3 = 2 \text{ A}$.

**6. Электрические цепи однофазного синусоидального тока.
Комплексный метод расчёта электрических цепей.
Баланс мощностей в цепях однофазного синусоидального тока**

6.1. Основные теоретические положения

Электрический ток и напряжение, изменяющиеся во времени по какому-либо закону, называют *переменными*.

Если форма кривой переменного тока и напряжения повторяется через равные промежутки времени, то их называют *периодическими*.

Наименьшее время, через которое повторяется форма переменного тока и напряжения, называют *периодом*, обозначают T и измеряют в секундах.

Число периодов T в 1 секунду называют *частотой f переменного тока и напряжения*, размерность частоты в единицах СИ: 1 герц [Гц].

$$f = \frac{1}{T} \text{ Гц}.$$

Простейшими периодическими переменными током и напряжением являются вырабатываемые генераторами всех видов электростанций напряжение и ток синусоидальной формы:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_U) \text{ В},$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_I) \text{ А},$$

где $i(t)$, $u(t)$ – мгновенные значения тока и напряжения;

I_m , U_m – амплитудные значения тока и напряжения;

Ψ_I , Ψ_U – начальные фазы тока и напряжения;

$\omega = 2\pi \cdot f$ – угловая частота, (единица измерения c^{-1}).

Разница начальных фаз напряжения и тока обозначена $\varphi = \Psi_U - \Psi_I$ и названа *углом сдвига фаз*.

Для расчёта цепей синусоидального тока применяется метод комплексных амплитуд (символический метод расчёта), основанный на использовании теории комплексных чисел.

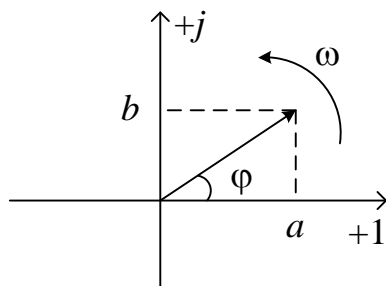


Рис. 6.1

Из курса «Высшая математика» вам уже известно, что комплексное число можно представить в виде вектора на комплексной плоскости, а действительная и мнимая части комплексного числа есть проекции вектора на вещественную и мнимую оси (рис. 6.1).

В теории электрических цепей буква i обозначает ток, поэтому за признак мнимости принята буква j ($j = \sqrt{-1}$), а само комплексное число обозначается или точкой поверх буквы или подчёркиванием буквы снизу: \dot{A} , \underline{A} :

$$\dot{A} = a + jb = A \cdot \cos \varphi + jA \cdot \sin \varphi = A \cdot e^{j\varphi}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

где A – модуль;

φ – аргумент или фаза комплексного числа.

Синусоидальная функция условно представляется в виде вектора, длина которого определяется максимальным или действующим его значением, а направление – её начальной фазой. Положительная начальная фаза откладывается от горизонтальной оси в сторону вращения векторов (против часовой стрелки).

Если $i(t) = 5 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$ А, то комплекс амплитудного и действующего значений запишется соответственно: $\dot{I}_m = 5 \cdot e^{j30^\circ}$ А, $\dot{I} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30^\circ}$ А.

Если задан комплекс действующего значения напряжения $\dot{U} = 100 \cdot e^{-j20^\circ}$ В, то его мгновенное значение имеет вид $u(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 20^\circ)$ В.

6.2. Синусоидальный ток в однородных идеальных элементах. Временные и векторные диаграммы

Рассмотрим временные и векторные диаграммы синусоидальных токов и напряжений в резисторе, индуктивности и ёмкости:

а) синусоидальный ток в активном сопротивлении (рис. 6.2);

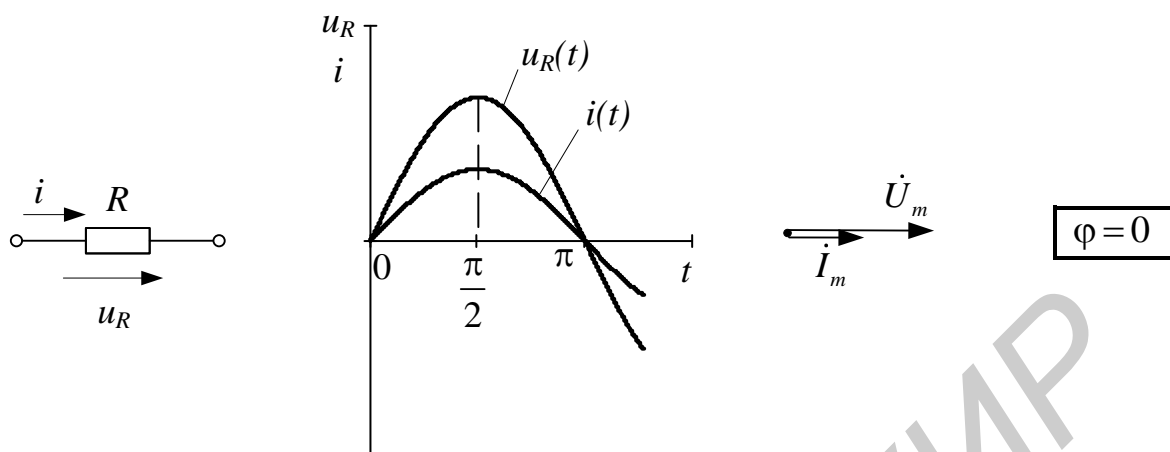


Рис. 6.2

б) синусоидальный ток в индуктивности (рис. 6.3);

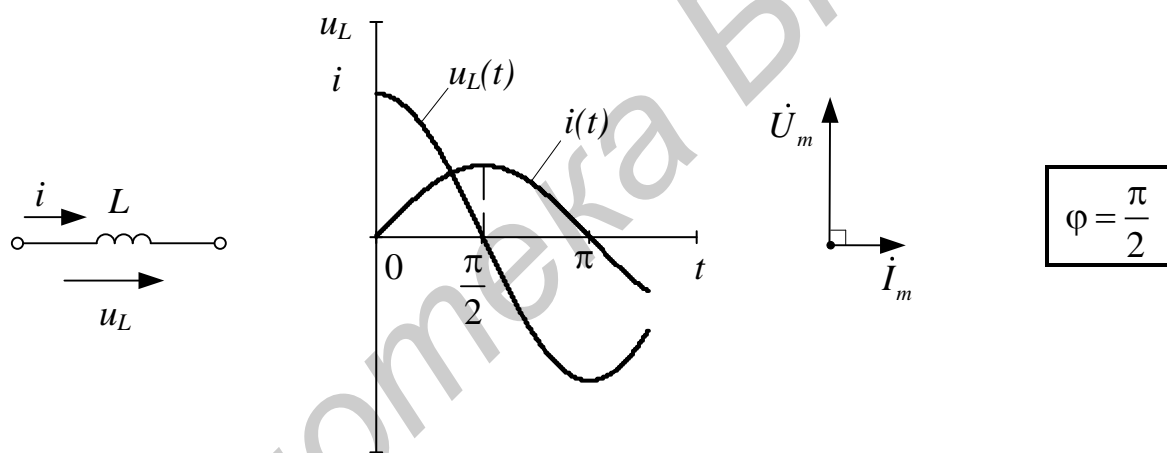


Рис. 6.3

в) синусоидальный ток в ёмкости (рис. 6.4).

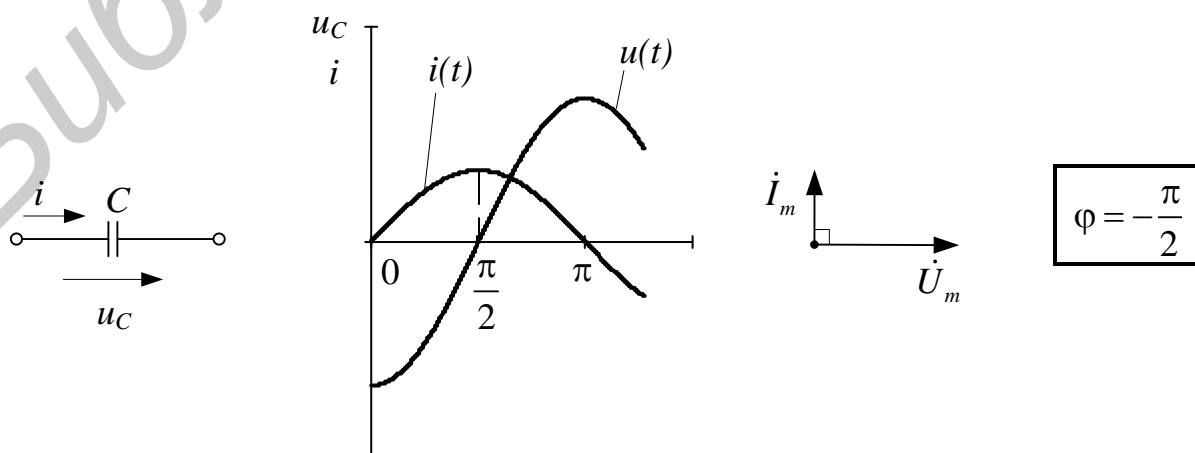


Рис. 6.4

6.3. Баланс мощностей в цепях переменного тока

Комплексной мощностью \dot{S} называется произведение комплекса действующего значения напряжения \dot{U} и сопряжённого комплекса действующего значения тока \dot{I} .

Знак мнимой части сопряжённого комплекса изменён на обратный (+ ↔ -) знак заданного комплексного числа, например, $5 + j5 \rightarrow 5 - j5$, $5 \cdot e^{j45^\circ} \rightarrow 5 \cdot e^{-j45^\circ}$.

Пусть на участке электрической цепи известно напряжение $\dot{U} = U e^{j\Psi_u}$, ток $\dot{I} = I e^{j\Psi_i}$. Сопряжённый ток равен $\dot{I}^* = I e^{-j\Psi_i}$.

Тогда полная комплексная мощность \dot{S} данного участка равна

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U \cdot I e^{j(\Psi_u - \Psi_i)} = S e^{j\varphi} = P \pm jQ,$$

где $\varphi = \Psi_u - \Psi_i$ – сдвиг фаз между напряжением и током;

$P = UI \cos \varphi$, Вт – активная мощность участка;

$Q = UI \sin \varphi$, ВАр – реактивная мощность участка.

Знак «+» перед Q соответствует индуктивному характеру сопротивления \dot{Z} , знак «-» соответствует ёмкостному характеру \dot{Z} .

При выполнении условия баланса мощностей активная и реактивная мощности источников питания должны равняться потребляемым активной и реактивной мощностям.

Мощности источника ЭДС определяем по формуле

$$\dot{S}_{\text{ист.ЭДС}} = \dot{E}_{\text{ист}}^* \dot{I} = P_{\text{ист}} \pm jQ_{\text{ист}},$$

где \dot{I} – сопряжённый комплекс тока в ветви с источником ЭДС.

Мощность источника тока:

$$\dot{S}_{\text{ист.т}} = \dot{U}_{\text{ист}} \dot{J}_{\text{ист}}^* = P_{\text{ист}} \pm jQ_{\text{ист}},$$

где $\dot{U}_{\text{ист}}$ – напряжение на зажимах источника тока;

$\dot{J}_{\text{ист}}^*$ – сопряжённый ток источника тока.

Мощность источника ЭДС входит в выражение баланса со знаком «+», если направление ЭДС источника и тока в этой ветви совпадают; если направ-

ления ЭДС источника и тока не совпадают, то мощность источника ЭДС отрицательная.

Мощность источника тока входит в выражение баланса со знаком «+», если ток источника и напряжения на его зажимах направлены навстречу друг другу. При совпадении направлений тока источника и напряжения мощность источника отрицательная.

Активная и реактивная мощности потребителей равны соответственно

$$P_{\text{ПОТР}} = \sum_{i=1}^n I_i^2 R_i, \text{ Вт},$$

где I_i – модуль действующего значения тока i -й ветви.

$$Q_{\text{ПОТР}} = \sum_{i=1}^n I_i^2 (X_{L_i} - X_{C_i}), \text{ ВАр},$$

где $X_{L_i} - X_{C_i}$ – эквивалентное реактивное сопротивление i -й ветви.

При выполнении условия баланса мощностей

$$P_{\text{ИСТ}} = P_{\text{ПОТР}};$$

$$Q_{\text{ИСТ}} = Q_{\text{ПОТР}}.$$

6.4. Примеры расчёта цепей однофазного синусоидального тока

Пример 6.1

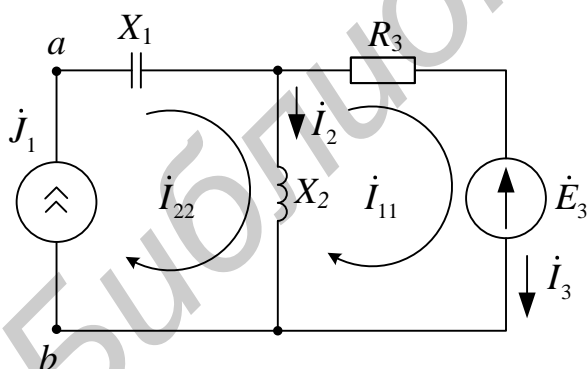


Рис. 6.5

Дано: $\dot{E}_3 = 10e^{j90^\circ}$, $R_3 = X_2 = 10 \text{ Ом}$,
 $X_1 = 5 \text{ Ом}$, $\dot{J}_1 = 1e^{j90^\circ}$.

Определить токи в ветвях, составить и рассчитать баланс мощностей для схемы на рис. 6.5.

Решение

Для расчёта будем использовать метод контурных токов.

Значение контурного тока \dot{I}_{22} принимаем равным величине источника тока \dot{J}_1 . Уравнение составляем для контурного тока \dot{I}_{11} :

$$\dot{I}_{11}(R_3 + jX_2) - \dot{I}_{22}jX_2 = -\dot{E}_3.$$

Выражаем ток \dot{I}_{11} из предыдущего уравнения:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\dot{I}_{22}jX_2 - \dot{E}_3}{R_3 + jX_2} = \frac{j1 \cdot j10 - j10}{10 + j10} = \frac{-10 - j10}{10 + j10} = -1 \text{ А.}$$

Ток в третьей ветви равен контурному току \dot{I}_{11} , ($\dot{I}_3 = \dot{I}_{11}$). Запишем этот ток в показательной форме комплексного числа:

$$\dot{I}_3 = -1 \text{ А} = 1e^{j180^\circ} \text{ А.}$$

Ток во второй ветви определим как алгебраическую сумму контурных токов, проходящих через данную ветвь:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11} = j1 + 1 = 1 + j1 = 1\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Полная мощность приёмников определяется по формуле

$$\dot{S}_{\text{ПР}} = P_{\text{ПР}} + jQ_{\text{ПР}}.$$

Активную мощность приёмников в данной схеме определим по следующей формуле

$$P_{\text{ПР}} = |\dot{I}_3|^2 R_3 = 1 \cdot 10 = 10 \text{ Вт.}$$

Реактивную мощность приёмников определяем по формуле

$$Q_{\text{ПР}} = |\dot{I}_2|^2 X_2 + |j1|^2 (-X_1) = 2 \cdot 10 - 5 = 15 \text{ ВАр.}$$

Полная мощность, выделяемая в систему источниками, определяется по формуле

$$\tilde{S}_{\text{ИСТ}} = J_1 \dot{U}_{ab} - \dot{E}_3 \dot{I}_3^* = -j1(-5 + j10) - j10(-1) = j5 + 10 + j10 = 10 + j15,$$

где

$$\dot{U}_{ab} = -j1jX_1 + \dot{I}_2jX_2 = -j1 \cdot j5 + (1 + j1)j10 = 5 + j10 - 10 = -5 + j10 \text{ (В).}$$

Вывод:

$$P_{\text{ИСТ}} = P_{\text{ПР}} = 10 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{ИСТ}} = Q_{\text{ПР}} = 15 \text{ ВАр.}$$

Выполнение баланса мощностей подтверждает правильность решения задачи.

Ответ: $\dot{I}_2 = 1\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А}; \dot{I}_3 = 1e^{j180^\circ} \text{ А.}$

Пример 6.2

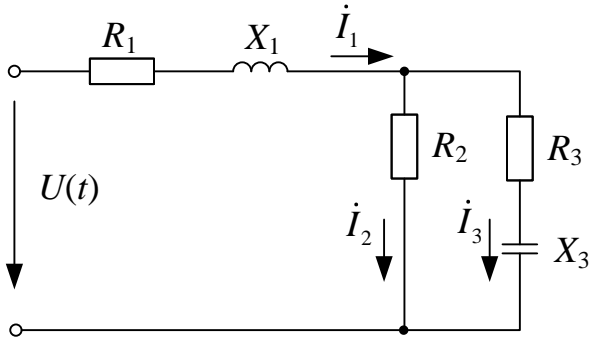


Рис. 6.6

Дано:

$$U(t) = 10\sin(\omega t + 90^\circ),$$

$$R_1 = 2 \text{ Ом}, \quad X_1 = 2 \text{ Ом}, \quad R_2 = 2 \text{ Ом}, \\ R_3 = 2 \text{ Ом}, \quad X_3 = 4 \text{ Ом}.$$

Для схемы на рис. 6.6 рассчитать ток \dot{I}_1 в неразветвлённой части схемы. Записать $i_1(t)$.

Решение

Записываем функцию времени $U(t) = 10\sin(\omega t + 90^\circ)$ в виде показательной формы комплексного числа:

$$\dot{U}_m = 10e^{j90^\circ}.$$

Определяем входное сопротивление схемы относительно зажимов источника напряжения:

$$\dot{Z}_{\text{общ}} = R_1 + jX_1 + \frac{R_2(R_3 - jX_3)}{R_2 + R_3 - jX_3} = 2 + j2 + \frac{4 - j8}{4 - j4} = 3,8e^{j23,39^\circ}$$

$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}} = \frac{10e^{j90^\circ}}{3,8e^{j23,39^\circ}} = 2,63e^{j66,61^\circ}.$$

Мгновенное значение тока i_1 имеет вид

$$i_1(t) = 2,63\sin(\omega t + 66,61^\circ) \text{ А}.$$

Ответ: $\dot{I}_{1m} = 2,63e^{j66,61^\circ} \text{ А}$; $i_1(t) = 2,63\sin(\omega t + 66,61^\circ) \text{ А}$.

Пример 6.3

Рассчитать токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 в схеме примера 6.2 графоаналитическим методом, построить топографическую диаграмму напряжений, совмещённую с векторной диаграммой токов.

Решение

Графоаналитический метод расчёта – это совокупность графического метода и метода пропорционального пересчёта. Метод основан на линейной зависимости между токами и напряжениями. Поэтому векторная диаграмма напряжений и токов, рассчитанная и построенная для одного значения питающего цепь напряжения, сохранит свой вид при изменении величины этого напряжения. На диаграмме изменятся лишь масштабы напряжений и токов.

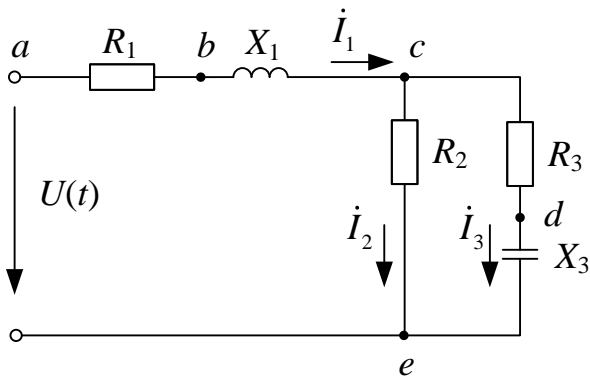


Рис. 6.7

Обозначим точками отдельные участки на схеме. Выберем масштабы: масштаб для тока $m_I = 0,5 \frac{\text{А}}{\text{см}}$; масштаб для напряжения $m_U = 1 \frac{\text{В}}{\text{см}}$.

Построение начинаем из точки, соответствующей отрицательной полярности входных зажимов, это точка «e» (рис. 6.7).

Принимаем действующее значение тока $I'_3 = 1 \text{ А}$. Откладываем вектор I'_3 в горизонтальном направлении (рис. 6.8).

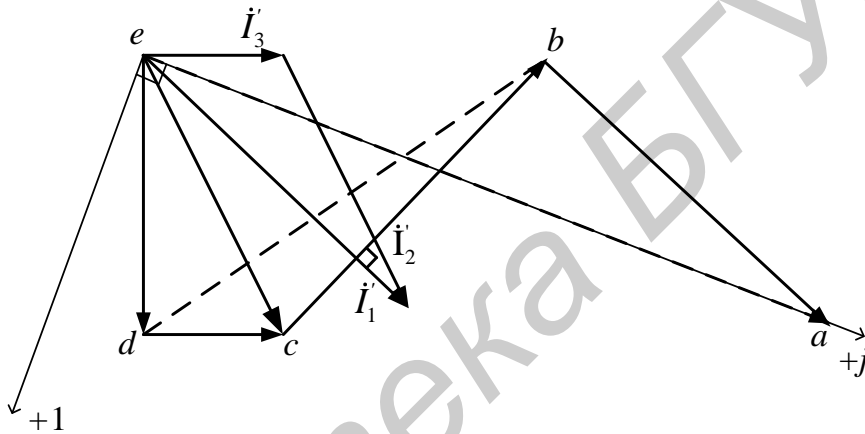


Рис. 6.8

Токи и напряжения, определённые с помощью диаграммы, будем обозначать одним штрихом.

Определяем по закону Ома для действующих значений напряжения на участках «d – e» и «c – d» цепи.

$$U'_{de} = I'_3 \cdot X'_3 = 4 \text{ В};$$

$$U'_{cd} = I'_3 \cdot R_3 = 2 \text{ В}.$$

Строим векторы данных напряжений. Участок «d – e» содержит ёмкость, напряжение на нём отстаёт от тока на 90° , участок «c – d» – резистивный – его напряжение совпадает с током I_3 по фазе. Концы векторов напряжений обозначаем соответствующими буквами.

Сумма векторов \dot{U}'_{cd} и \dot{U}'_{de} определяет вектор напряжения на участке «c – e». Из диаграммы по масштабу m_U определяем величину напряжения $U'_{ce} = 4,47 \text{ В}$. Далее по закону Ома для участка с резистором R_2 определяем ток

$I_2' = \frac{U_{ce}'}{R_2} = \frac{4,47}{2} = 2,235 \text{ А}$. Вектор тока I_2'' строим с учётом масштаба m_I из конца вектора I_3'' , учитывая, что I_2'' совпадает по фазе с напряжением U_{ce}' . Сумма векторов I_2'' и I_3'' даёт вектор тока I_1'' в общей ветви цепи: $I_1'' = I_2'' + I_3''$. По диаграмме определяем действующее значение $I_1' = 2,75 \text{ А}$. Теперь определяем действующие значения напряжений $U_{bc}' = I_1' \cdot X_1 = 5,5 \text{ В}$ и $U_{ab}' = I_1' \cdot R_1 = 5,5 \text{ В}$. Строим вектор U_{bc}' из точки С. Напряжение U_{bc}' опережает ток I_1'' на 90° , т. к. участок « $b-c$ » – индуктивный, напряжение U_{ab}' совпадает по фазе с током I_1'' , т. к. участок « $a-b$ » содержит активное сопротивление.

Теперь соединим начало координат (точку « e ») с точкой « a », получим вектор приложенного к цепи напряжения U_{ae}' , равный с учётом m_U : $U_{ae}' = 10,5 \text{ В}$. Входное напряжение имеет начальную фазу $+90^\circ$. С учётом этого строим координатные оси. Ось вещественных чисел является осью отсчёта углов начальных фаз всех токов и напряжений.

По условию примера 6.2 действующее значение входного напряжения равно 10 В . Для определения истинных значений токов и напряжений вводим коэффициент пересчёта $k = \frac{U}{U_{ae}'} = \frac{10}{10,5} = 0,952$.

$$k = \frac{U}{U_{ae}'} = \frac{10}{10,5} = 0,952.$$

Определим исходные токи:

$$I_1' = I_1'' \cdot k = 2,75e^{j68^\circ} \cdot 0,952 = 2,618e^{j68^\circ} \text{ А};$$

$$I_2' = I_2'' \cdot k = 2,15e^{j48^\circ} \cdot 0,952 = 2,047e^{j48^\circ} \text{ А};$$

$$I_3' = I_3'' \cdot k = 1e^{j112^\circ} \cdot 0,952 = 0,952e^{j112^\circ} \text{ А}.$$

Мгновенные значения этих токов равны соответственно:

$$i_1(t) = 2,618\sqrt{2} \sin(\omega t + 68^\circ) \text{ А};$$

$$i_2(t) = 2,047\sqrt{2} \sin(\omega t + 48^\circ) \text{ А};$$

$$i_3(t) = 0,952\sqrt{2} \sin(\omega t + 112^\circ) \text{ А}.$$

Аналогично определяем напряжения на участках цепи.

Построенная в такой последовательности векторная диаграмма напряжений носит название *топографической*.

Следует запомнить!

1. Построение топографической диаграммы начинается из точки, наиболее удалённой от входных зажимов и соответствующей отрицательной полярности

источника. Эта точка является базисной, её потенциал условно равен нулю, её помещают в начало координат.

2. Построение векторов напряжений производят навстречу токам. Длина вектора равна его действующему значению, угол между вектором и осью абсцисс равен начальной фазе напряжения.

3. Построение векторов напряжений производят строго в соответствии с расположением элементов в цепи.

4. Каждой точке схемы соответствует определённая точка на топографической диаграмме. Топографические диаграммы представляют диаграммы комплексных потенциалов.

5. Конец вектора напряжения на топографической диаграмме указывает точку высшего потенциала.

6. Топографическая диаграмма позволяет измерить величину и начальную фазу напряжения любого участка цепи, не участвующего в расчёте.

Например, действующее значение между точками «b» и «d» схемы составит

$$U_{bd} = U'_{bd} \cdot k = 7,1 \cdot 0,952 = 6,759 \text{ В}; \text{ начальная фаза } \varphi = 145^\circ.$$

$$\text{Следовательно, } U_{bd}(t) = 6,759\sqrt{2} \sin(\omega t + 145^\circ).$$

Пример 6.4

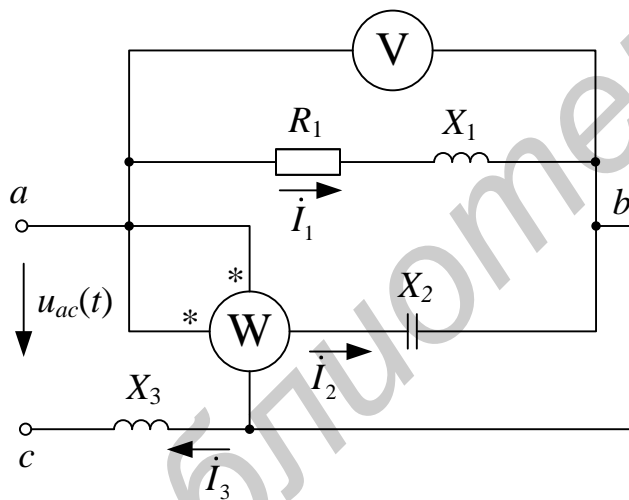


Рис. 6.9

Дано:

$$u_{ac}(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В},$$

$$R_1 = X_1 = 10 \text{ Ом}, X_2 = X_3 = 20 \text{ Ом}.$$

Определить токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 в схеме рис. 6.9; записать их мгновенные значения; определить показания ваттметра; построить векторную диаграмму токов и напряжений. По векторной диаграмме определить показания вольтметра. Проверить выполнение баланса мощностей.

Решение

Применим метод комплексных амплитуд. Изобразим расчетную схему без подключенных приборов (рис. 6.10).

$$Z_{\text{ЭКВ}} = \frac{(R_1 + jX_1)(-jX_2)}{R_1 + jX_1 - jX_2} + jX_3 = \frac{(10 + j10)(-j20)}{10 + j10 - j20} + j20 = 20 + j20 = 28,28e^{j45^\circ};$$

$$\dot{U}_{ac} = 100e^{j45^\circ}; \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ac}}{Z_{\text{ЭКВ}}} = \frac{100e^{j45^\circ}}{28,28e^{j45^\circ}} = 3,536 \text{ А}.$$

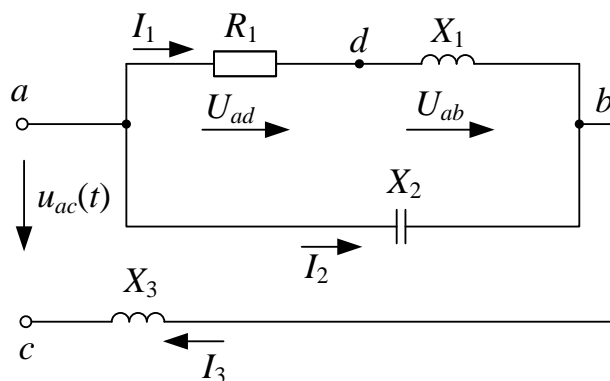


Рис. 6.10

Для определения токов I_1 и I_2 рассчитаем напряжение \dot{U}_{ab} .

Так как $\dot{U}_{ac} = \dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc}$, то

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ac} - \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{ac} - \dot{I}_3 jX_3 = 100e^{j45^\circ} - 3,536 \cdot 20e^{j90^\circ} = 70,7e^{j0^\circ} \text{ В.}$$

Токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 соответственно равны:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_1} = \frac{\dot{U}_{ab}}{R_1 + jX_1} = \frac{70,7e^{j0^\circ}}{10 + j10} = \frac{70,7e^{j0^\circ}}{14,14e^{j45^\circ}} = 5e^{-j45^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{\dot{U}_{ab}}{-jX_2} = \frac{70,7e^{j0^\circ}}{-j20} = 3,536e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

Определим показания ваттметра:

$$P_W = U_{ab} I_2 \cos \varphi = 70,7 \cdot 3,536 \cos(0 - 90^\circ) = 0 \text{ Вт.}$$

Расчет подтверждает, что активная мощность в ветви с конденсатором отсутствует.

Замечание! При расчете показаний ваттметра положительные направления тока I , протекающего через последовательную обмотку ваттметра и напряжения U , приложенного к параллельной обмотке ваттметра должны быть одинаковы относительно одноименных зажимов обмоток прибора, обозначенных точкой. Тогда $\cos \varphi > 0$, и стрелка ваттметра отклоняется по шкале вправо.

Для построения векторной диаграммы выбираем масштабы напряжений и токов: $m_U = 10 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, $m_I = 2 \frac{\text{А}}{\text{см}}$.

Векторную диаграмму токов строим согласно первому закону Кирхгофа в комплексной форме $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$; векторную диаграмму напряжений – согласно второму закону Кирхгофа в комплексной форме $\dot{U}_{ac} = \dot{U}_{ad} + \dot{U}_{db} + \dot{U}_{bc}$. Построение начинаем с вектора тока \dot{I}_1 (см. рис. 6.11). Под углом -45° к оси вещественных чисел строим вектор, длина которого равна 5 А в выбранном мас-

штабе. Из конца вектора \dot{I}_1 строим вектор тока $\dot{I}_2 = 3,53e^{j90^\circ}$ А, что соответствует сложению векторов. Результирующий вектор $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$.

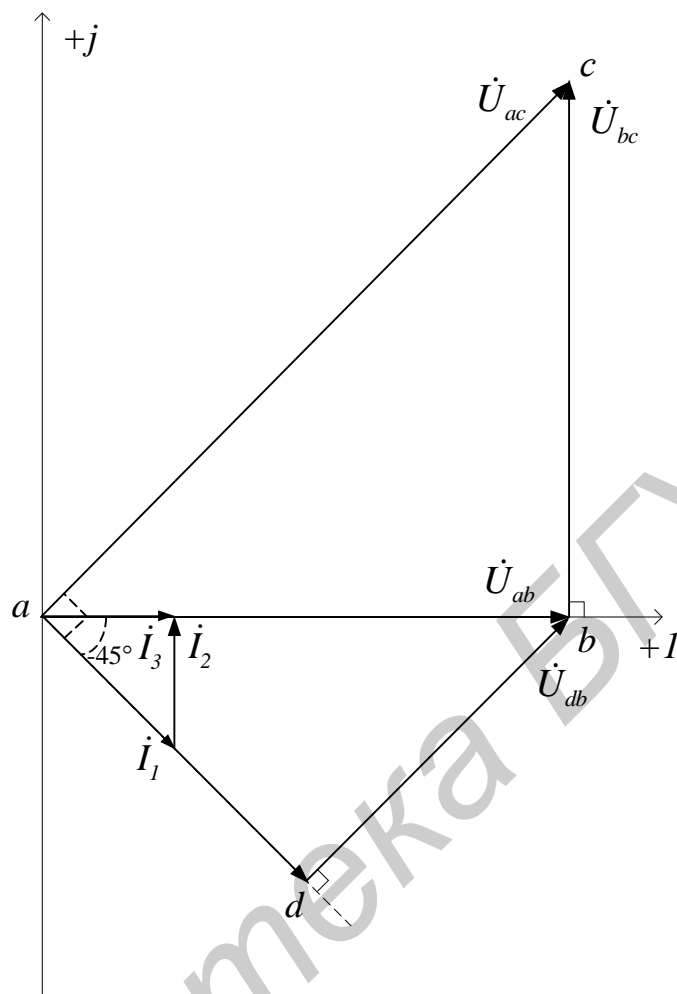


Рис. 6.11

Строим векторы напряжений на всех участках цепи. Построение начинаем из начала координат с вектора напряжения \dot{U}_{ad} . Длина вектора соответствует действующему значению $U_{ad} = I_1 \cdot R_1 = 5 \cdot 10 = 50$ В в выбранном масштабе напряжений. Направление вектора совпадает с направлением вектора тока \dot{I}_1 , так как участок « $a - d$ » – резистивный. Действующее значение напряжения $U_{db} = I_1 \cdot X_1 = 5 \cdot 10 = 50$ В. Вектор \dot{U}_{db} опережает ток \dot{I}_1 , на 90° . Сумма векторов напряжений \dot{U}_{ad} и \dot{U}_{db} равна вектору напряжения \dot{U}_{ab} , что соответствует рассчитанному ранее значению: $U_{ab} = 70,7e^{j0^\circ}$ В. Вольтметр, подключенный параллельно участку « $a - b$ », покажет действующее значение $U_{ab} = 70,7$ В.

Из конца вектора \dot{U}_{ab} строим вектор напряжения \dot{U}_{bc} . Длина вектора равна действующему значению $U_{bc} = I_3 \cdot X_3 = 3,536 \cdot 20 = 70,72$ В в выбранном масштабе напряжений. Вектор \dot{U}_{bc} опережает вектор тока \dot{I}_3 на 90° .

Длина результирующего вектора \dot{U}_{ac} равна его действующему значению 100 В, начальная фаза $\varphi_{U_{ac}} = 45^\circ$, что соответствует исходным данным задачи.

Составим уравнение баланса мощностей в комплексной форме и проверим его выполнение:

$$\dot{S}_{\text{ИСТ}} = \dot{U}_{ac} \cdot I_3^* = 100e^{j45^\circ} \cdot 3,536 = 353,6e^{j45^\circ} = 250 + j250.$$

$$P_{\text{ИСТ}} = 250 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{ИСТ}} = 250 \text{ Вт}.$$

Активная мощность потребителей:

$$P_{\text{ПОТР}} = I_1^2 \cdot R_1 = 5^2 \cdot 10 = 250 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность потребителей:

$$Q_{\text{ПОТР}} = I_1^2 \cdot X_1 - I_2^2 \cdot X_2 + I_3^2 \cdot X_3 = 5^2 \cdot 10 - (3,536)^2 \cdot 20 + (3,536)^2 \cdot 20 = 250 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей выполняется.

Ответ: $\dot{I}_1 = 5e^{-j45^\circ} \text{ А}; \quad \dot{I}_2 = 3,536e^{j90^\circ} \text{ А}; \quad \dot{I}_3 = 3,536 \text{ А};$

$$i_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ А}; \quad i_2(t) = 3,536\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А};$$

$$i_3(t) = 3,536\sqrt{2} \sin \omega t \text{ А}; \quad U_V = 70,7 \text{ В}; \quad P_W = 0.$$

Пример 6.5

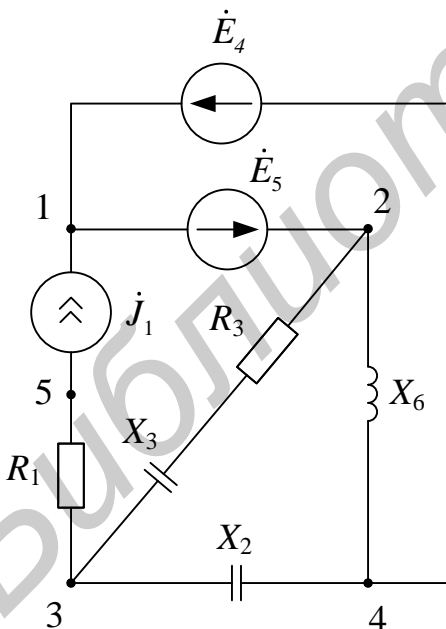


Рис. 6.12

Дано:

$$\dot{E}_5 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}, \quad \dot{E}_4 = 10e^{j90^\circ}, \quad J_1 = 5 \text{ А}, \\ R_3 = 2 \text{ Ом}, \quad X_3 = 2 \text{ Ом}, \quad X_6 = 4 \text{ Ом}, \\ R_1 = 2 \text{ Ом}, \quad X_2 = 5 \text{ Ом}.$$

Для схемы на рис. 6.12 определить напряжение U_{31} и записать его мгновенное значение.

Решение

Принимаем 1-й узел за базисный: $\dot{\phi}_1 = 0$.

Потенциалы 2-го и 4-го узлов будут соответственно равны

$$\dot{\phi}_2 = \dot{E}_5, \quad \dot{\phi}_4 = -\dot{E}_4.$$

Составляем уравнение для 3-го узла:

$$\dot{\phi}_3 \left(\frac{1}{-jX_2} + \frac{1}{R_3 - jX_3} \right) - \dot{\phi}_2 \frac{1}{R_3 - jX_3} - \dot{\phi}_4 \frac{1}{-jX_2} = -\dot{J}_1.$$

Подставим в уравнение численные значения:

$$\dot{\phi}_3 \left(\frac{1}{5e^{-j90^\circ}} + \frac{1}{2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} \right) - \frac{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{2\sqrt{2}e^{j45^\circ}} + \frac{10e^{j90^\circ}}{5e^{-j90^\circ}} = -5;$$

$$\dot{\phi}_3(0,2e^{j90^\circ} + 0,25\sqrt{2}e^{j45^\circ}) - 5e^{j90^\circ} + 2e^{j180^\circ} = -5;$$

$$\dot{\phi}_3(j0,2 + 0,25\sqrt{2}e^{j45^\circ}) - j5 - 2 = -5;$$

$$\dot{\phi}_3(j0,2 + 0,25 + j0,25) = -5 + j5.$$

Решив последнее равенство, получим

$$\dot{\phi}_3 = \frac{-3 + j5}{0,25 + j0,45} = \frac{5,83e^{-j59^\circ}}{0,515e^{j61^\circ}} = 11,32e^{-j120^\circ}, \text{ т. е. } \dot{U}_{31} = 11,32e^{-j120^\circ}.$$

Запишем мгновенное значение напряжения:

$$U_{31}(t) = 11,32\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ В.}$$

Ответ: $\dot{U}_{31} = 11,32e^{-j120^\circ}$ В; $u_{31}(t) = 11,32\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ)$ В.

7. Режимы резонанса в электрических цепях

7.1. Основные теоретические положения

Резонанс – это такой режим работы пассивного двухполюсника, содержащего индуктивности и емкости, при котором угол сдвига фаз между напряжением и током на входе равен нулю ($\varphi = 0$).

Так как $\varphi = \arctg \frac{X_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}$ или $\varphi = \arctg \frac{b_{\Sigma}}{g_{\Sigma}}$, то при резонансе ($\varphi = 0$) должно выполняться условие $X_{\Sigma} = 0$ или $b_{\Sigma} = 0$.

В зависимости от способа соединений реактивных элементов различают режимы резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре и резонанса токов в параллельном колебательном контуре.

Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений

Рассмотрим эквивалентную схему одиночного последовательного колебательного контура (рис. 7.1).

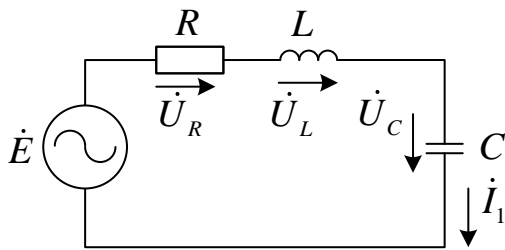


Рис. 7.1

Параметры R, L, C называются *первичными параметрами контура*.

Резонансом в последовательном колебательном контуре называют такой режим, в котором цепь ведет себя как активное сопротивление, и ток при этом достигает своего максимального значения.

Условием возникновения резонанса напряжений является равенство нулю реактивной части входного комплексного сопротивления последовательного колебательного контура.

Следовательно, полное комплексное сопротивление равно резистивному сопротивлению: $\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX_{\Sigma} = R$. Ток при резонансе

$$I_0 = \frac{E}{R} \text{ — максимален.}$$

Условие возникновения резонанса напряжений в контуре (рис. 7.1):

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

$$\text{Резонансная частота } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ или } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Из векторной диаграммы контура в режиме резонанса (рис. 7.2) следует, что входное напряжение равно напряжению на активном сопротивлении.

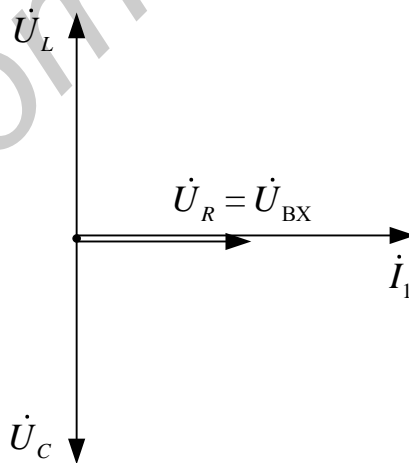


Рис. 7.2

Характеристическое сопротивление, добротность, затухание контура, абсолютная полоса пропускания контура

Резонансная частота (ω_0); характеристическое сопротивление (ρ) и добротность (Q) являются *вторичными параметрами контура*:

а) *характеристическое сопротивление* – это сопротивление индуктивности и ёмкости при резонансе:

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Ом};$$

б) *добротность* – это отношение максимальной энергии электрического и магнитного полей ($W_{L_M} = W_{C_M}$) к потерям в контуре ($P = I^2 R$) или отношение действующих значений напряжений на реактивных элементах к приложенному напряжению в режиме резонанса:

$$Q = \frac{W_{L_M}}{P} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{U_{L_0}}{U} = \frac{U_{C_0}}{U}.$$

Добротность характеризует качество контура и определяет его резонансные свойства. В реальных устройствах к сопротивлению R надо прибавить r_0 источника, что снижает результирующую добротность;

в) *затухание* – величина, обратная добротности:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}.$$

Полоса частот вблизи резонанса, на границах которой ток снижается до $I_0/\sqrt{2}$ от максимального значения I_0 тока при резонансе, определяет абсолютную полосу пропускания контура (рис. 7.3):

$$S_a = \omega_2 - \omega_1,$$

где ω_1 и ω_2 – граничные частоты полосы пропускания.

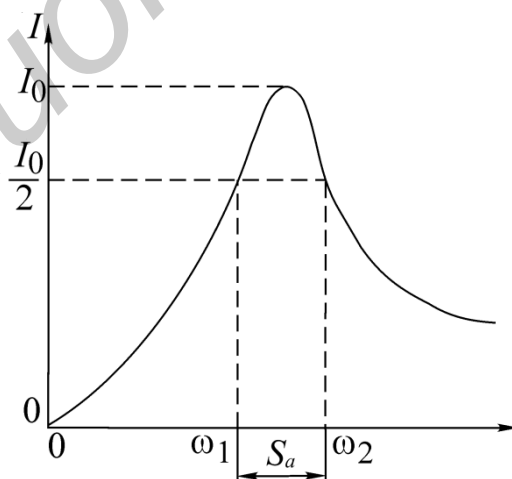


Рис. 7.3

Зная ширину полосы пропускания, можно определить добротность контура:

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{\omega_0}{S_a} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Рассмотрим, как определить резонансную частоту колебательного контура (рис. 7.4).

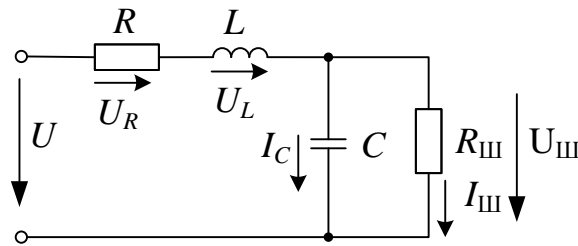


Рис. 7.4

Особенностью цепи является наличие шунта R_{III} , подключенного параллельно к емкости, который изменяет сопротивление цепи.

Резонансную частоту определим из условия равенства нулю эквивалентного реактивного сопротивления контура. Запишем полное комплексное сопротивление цепи, выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} Z &= R + jX_L + \frac{R_{III}(-jX_C)}{R_{III} - jX_C} = R + jX_L + \frac{R_{III}(-jX_C)(R_{III} + jX_C)}{R_{III}^2 + X_C^2} = \\ &= R + \frac{R_{III}X_C^2}{R_{III}^2 + X_C^2} + j\left(X_L - \frac{R_{III}^2X_C}{R_{III}^2 + X_C^2}\right). \end{aligned}$$

В режиме резонанса $Im\{Z\} = 0$ (полное сопротивление носит активный характер), следовательно,

$$X_L - \frac{R_{III}^2X_C}{R_{III}^2 + X_C^2} = 0 \text{ или } \omega_P L - \frac{\frac{R_{III}^2}{\omega_P C}}{R_{III}^2 + \left(\frac{1}{\omega_P C}\right)^2} = 0,$$

откуда $\omega_P = \sqrt{\frac{R_{III}^2 C - L}{R_{III}^2 C^2 L}}.$

Векторная диаграмма колебательного контура (см. рис. 7.4) в режиме резонанса представлена на рис. 7.5.

Напряжение на входе $\dot{U} = \dot{U}_{III} + \dot{U}_L + \dot{U}_R.$

На диаграмме видно, что входное напряжение $\dot{U}_{ВХ}$ совпадает по фазе с током \dot{I} , что соответствует условию режима резонанса.

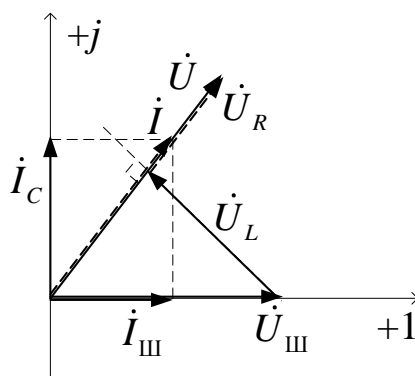


Рис. 7.5

Параллельный колебательный контур. Резонанс токов

Эквивалентные схемы параллельных колебательных контуров представлены на рис. 7.6, а – в.

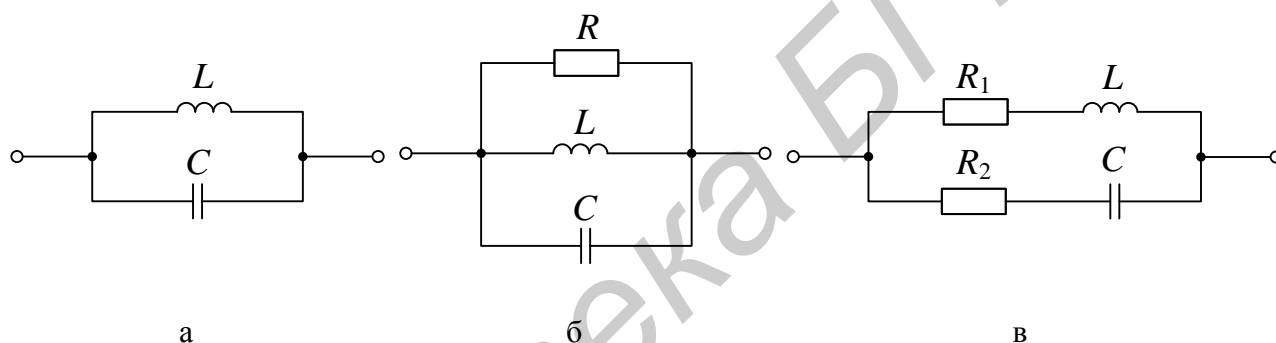


Рис. 7.6

Явление резонанса в схеме, образованной двумя параллельными ветвями с разнохарактерными сопротивлениями, называется резонансом токов. Условием резонанса токов является равенство нулю реактивной части полной комплексной проводимости параллельного колебательного контура.

Проводимости ветвей схемы на рис. 7.6, в равны:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} - j \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = g_1 - jb_1;$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} + j \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = g_2 - jb_2,$$

где $X_1 = \omega L$, $X_2 = \frac{1}{\omega C}$.

$$Y = Y_1 + Y_2 = (g_1 + g_2) + j(-b_1 + b_2) = g_{\Sigma} + jb_{\Sigma}.$$

Так как при резонансе $\varphi = 0$, то полная проводимость должна носить активный характер, что возможно при $b_1 = b_2$, т. е.

$$\frac{\omega_P L}{R_1^2 + (\omega_P L)^2} = \frac{1}{\omega_P C} \cdot \frac{1}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_P C}\right)^2}.$$

Решив это равенство относительно резонансной частоты ω_P , получим

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

В частном случае идеального контура (рис. 7.6, а) $\omega_P = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Полная проводимость идеального контура $Y = 0$, следовательно, $Z = \infty$. Таким образом, идеальный контур при резонансе токов эквивалентен разрыву цепи.

7.2. Примеры расчета электрических цепей в режиме резонанса

Пример 7.1

Рассчитать параметры L , C последовательного колебательного контура по заданной резонансной частоте f_0 , полосе пропускания $2\Delta f$ и сопротивлению контура R . Определить напряжение на входе и напряжение на всех элементах контура, если известны: ток в контуре $I_0 = 5$ мА, частота $f_0 = 1,6$ МГц, ширина полосы пропускания $2\Delta f = 20$ кГц, активное сопротивление $R = 40$ Ом.

Решение

Добротность контура связана с абсолютным значением полосы пропускания по формуле

$$Q = \frac{f_0}{2\Delta f} = \frac{1,6 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3} = 80.$$

Характеристическое сопротивление контура:

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \cdot R = 80 \cdot 40 = 3200 \text{ Ом},$$

откуда

$$L = \frac{\rho}{\omega_0} = \frac{3200}{2\pi f_0} = \frac{3200}{6,28 \cdot 1,6 \cdot 10^6} = 0,318 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 0,318 \text{ мГн};$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 \rho} = \frac{1}{6,28 \cdot 1,6 \cdot 10^6 \cdot 3200} = 0,031 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 31 \text{ пФ}.$$

Напряжение на входе контура:

$$U = I_0 R = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 = 0,2 \text{ В}.$$

Напряжения на активном сопротивлении, индуктивности и ёмкости соответственно равны:

$$U_R = U = I_0 R = 0,2 \text{ В};$$

$$U_L = I_0 \omega_0 L = I_0 \rho = I_0 R Q = Q U = 16 \text{ В}; U_C = \frac{I_0}{\omega_0 C} = Q U = 16 \text{ В}.$$

Ответ: $L = 0,318 \text{ мГн}$; $C = 31 \text{ пФ}$; $U = 0,2 \text{ В}$; $U_R = 0,2 \text{ В}$; $U_L = 16 \text{ В}$; $U_C = 16 \text{ В}$.

Пример 7.2

Последовательный контур настроен в резонанс. Сопротивление конденсатора $X_C = 100 \text{ Ом}$. Добротность катушки $Q_L = 200$. Определить: а) напряжение на конденсаторе в схеме рис. 7.7 без подключенного вольтметра, если приложенное к контуру напряжение $U = 1,2 \text{ В}$; б) показание вольтметра с сопротивлением $R_V = 2000 \text{ Ом}$ в схеме (рис. 7.7).

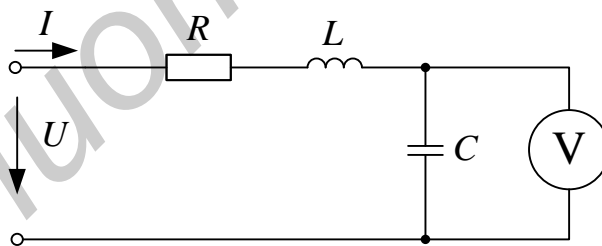


Рис. 7.7

Решение

а) при резонансе добротность катушки будет равна добротности контура:

$$Q = Q_L = \frac{X_L}{R}, X_L = X_C = 100 \text{ Ом},$$

отсюда

$$R = \frac{X_L}{Q} = \frac{100}{200} = 0,5 \text{ Ом}.$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U_{CO} = UQ = 1,2 \cdot 200 = 240 \text{ В};$$

б) при подключении вольтметра параллельно к ёмкости в контур внесутся дополнительные потери. На рис. 7.8 показана схема замещения, на которой параллельный участок, «конденсатор – вольтметр» заменен эквивалентным последовательным соединением $R' - X'_C$, где

$$R' = \frac{\frac{1}{R_V}}{\left(\frac{1}{R_V}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} = \frac{0,0005}{0,0005^2 + 0,01^2} \approx 5 \text{ Ом};$$

$$X'_C = \frac{\frac{1}{X_C}}{\left(\frac{1}{R_V}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} = \frac{0,01}{0,0005^2 + 0,01^2} \approx 100 \text{ Ом}.$$

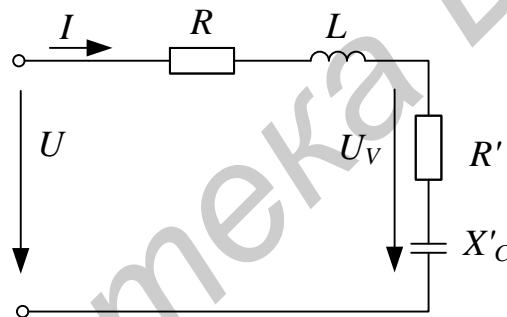


Рис. 7.8

Так как ёмкостное сопротивление контура практически не изменилось: $X_C = X'_C$, то не изменится и резонансная частота контура.

Определим ток в контуре:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{1,2}{\sqrt{(R + R')^2 + (X_L - X'_C)^2}} = \frac{1,2}{5,5} = 0,218 \text{ А}.$$

Показания вольтметра определим по следующей формуле:

$$U_V = \sqrt{U_{R'}^2 + U_{C1}^2} = \sqrt{(0,218 \cdot 5)^2 + (0,218 \cdot 100)^2} \approx 21,82 \text{ В}.$$

Ответ: а) $U_{CO} = 240 \text{ В}$; б) $U_V = 21,82 \text{ В}$.

Пример 7.3

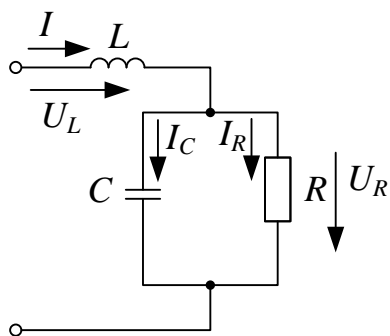


Рис. 7.9

Дано:

Цепь (рис. 7.9) находится в режиме резонанса. Мощность, потребляемая цепью $P = 200$ Вт, напряжения: $U = 40$ В, $U_L = 30$ В, $U_R = 50$ В.

Определить: R , X_L , X_C .

Решение

Построим векторную диаграмму напряжений, совмещённую с векторной диаграммой токов. При построении следует учитывать существующий в цепи режим резонанса напряжений, т. е. **вектор входного тока \dot{I} должен совпасть по фазе с вектором входного напряжения \dot{U}** . Треугольники токов и напряжений подобны. Одинаковые углы α показаны на диаграмме (рис. 7.10). Этот факт используется при решении задачи.

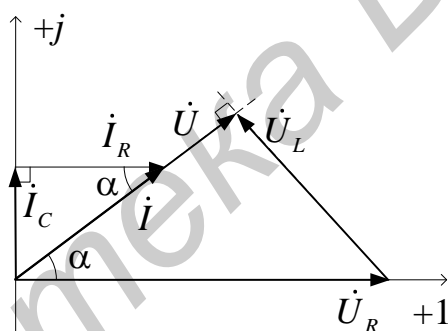


Рис. 7.10

Зная значение активной мощности, определяем значение сопротивления R :

$$P = \frac{U_R^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{2500}{200} = 12,5 \text{ Ом.}$$

По закону Ома определяем ток $I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{50}{12,5} = 4$ А. Из треугольника напряжений определяем угол $\alpha = \arccos \frac{U}{U_R} = \arccos \frac{40}{50} = 36,87^\circ$.

Из треугольника токов определяем $I_C = R \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4 \cdot 0,75 = 3$ А.

Сопротивление ёмкости определяем по закону Ома:

$$X_C = \frac{U_R}{I_C} = \frac{50}{3} = 16,66 \text{ Ом.}$$

Ток I определим как геометрическую сумму I_R и I_C :

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ А}.$$

$$X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{30}{5} = 6 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 12,5 \text{ Ом}$; $X_C = 16,66 \text{ Ом}$; $X_L = 6 \text{ Ом}$.

Пример 7.4

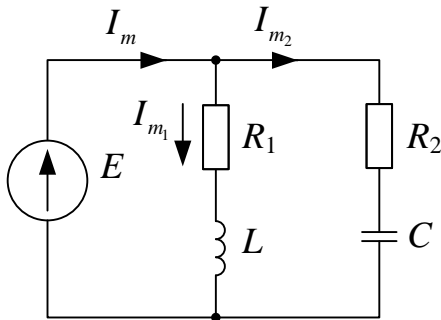


Рис. 7.11

Определить токи в ветвях и в неразветвленной части схемы (рис. 7.11), а также добротность контура, если $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $R_2 = 1 \text{ Ом}$; $\rho = 100 \text{ Ом}$; $E_m = 200 \text{ В}$.

Решение

Волновое сопротивление контура:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = 100 \text{ Ом}.$$

Сопротивление ветвей параллельного контура:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega_0 L)^2} \approx 100 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2} \approx 100 \text{ Ом}.$$

Определим максимальные значения токов в ветвях по закону Ома:

$$I_{m1} = \frac{E_m}{Z_1} = \frac{200}{100} = 2 \text{ А};$$

$$I_{m2} = \frac{E_m}{Z_2} = \frac{200}{100} = 2 \text{ А}.$$

Полное сопротивление контура Z является резистивным и равно

$$Z = R = \frac{\rho^2}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R_1 + R_2} \approx 3333 \text{ Ом.}$$

Ток в неразветвлённой части цепи равен

$$I_m = \frac{E_m}{R} = \frac{200}{3333} \approx 0,06 \text{ А.}$$

Добротность контура:

$$Q = \frac{\rho}{R_1 + R_2} = \frac{100}{3} = 33,3.$$

Ответ: $I_{m_1} = 2 \text{ А}$; $I_{m_2} = 2 \text{ А}$; $I_m = 0,06 \text{ А}$; $Q = 33,3$.

Пример 7.5

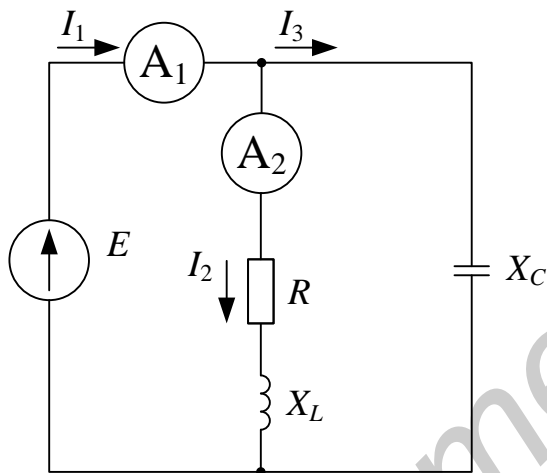


Рис. 7.12

В цепи, изображённой на рис. 7.12, имеет место резонанс токов. Мощность, потребляемая цепью, $P = 80 \text{ Вт}$. Показания амперметров соответственно равны: $I_1 = 4 \text{ А}$, $I_2 = 5 \text{ А}$. Определить: параметры контура R , X_L , X_C .

Решение

В параллельном колебательном контуре в режиме резонанса токов равны реактивные составляющие токов параллельных ветвей в силу равенства реактивных проводимостей этих ветвей ($b_L = b_C$). Следовательно, для данной цепи справедливо соотношение

$$I_{p2} = I_{p3} = I_3.$$

Реактивные токи замыкаются в параллельном контуре, и во входной цепи протекает только активный ток:

$$I_1 = I_{A_2} = 4 \text{ А.}$$

На векторной диаграмме (рис. 7.13) ток \dot{I}_2 представлен геометрической суммой активной I_{A_2} и реактивной I_{p2} составляющих. Из диаграммы следует, что $I_3 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2} = 3 \text{ А}$.

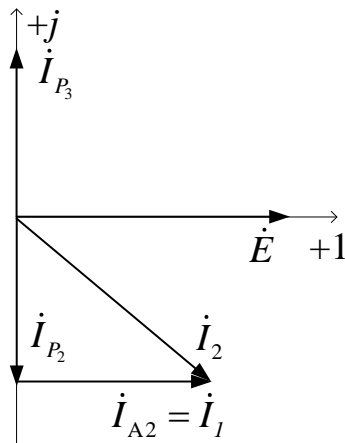


Рис. 7.13

Мощность, потребляемая цепью, выделяется на сопротивлении R , т. е.

$$P = I_2^2 R .$$

Тогда

$$R = \frac{P}{I_2^2} = 3,2 \text{ Ом} .$$

Так как $\varphi = 0$, то

$$P = UI \cos \varphi = UI_1 .$$

Напряжение на параллельном колебательном контуре:

$$U = \frac{P}{I_1} = 20 \text{ В} .$$

Сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{U}{I_3} = 6,66 \text{ Ом} .$$

Из условия резонанса для параллельного контура имеем

$$\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{1}{X_C} ,$$

откуда

$$X_L^2 - X_L X_C + R^2 = 0 .$$

Подставляем в последнее выражение численные значения и определяем величину модулей реактивного сопротивления катушки:

$$X_L = \frac{6,66}{2} \pm \sqrt{11,1 - 10,23} = 3,33 \pm 0,93 ;$$

$$X_{L1} = 4,26 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = 2,4 \text{ Ом}.$$

Из решения следует, что резонанс токов может наступить при двух значениях индуктивного сопротивления.

Ответ: $R = 3,2 \text{ Ом}; X_C = 6,66 \text{ Ом}, X_{L1} = 4,26 \text{ Ом}, X_{L2} = 2,4 \text{ Ом}.$

Пример 7.6

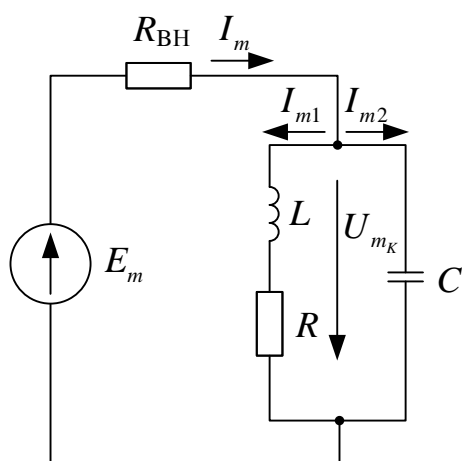


Рис. 7.14

Дано:

Контур с $C = 200 \text{ пФ}$, $R = 70 \text{ Ом}$ питается генератором, амплитуда ЭДС которого составляет 300 В и внутреннее сопротивление $R_{ВН} = 4 \text{ кОм}$ (рис. 7.14). При резонансе амплитуда напряжения на контуре равна $U_{mК} = 120 \text{ В}$.

Определить индуктивность и добротность контура, токи генератора и контура.

Решение

Определим амплитуду напряжения генератора:

$$E_m = I_m R_{ВН} + U_{mК}.$$

Выражаем и рассчитываем значение тока в ветви с генератором напряжения:

$$I_m = \frac{E - U_{mК}}{R_{ВН}} = \frac{300 - 120}{4 \cdot 10^3} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Определим входное сопротивление параллельного контура:

$$Z_K = R_K = \frac{U_{mК}}{I_m} = \frac{120}{4,5 \cdot 10^{-3}} = 2,67 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

Для контура с малыми потерями:

$$Z_K = \frac{p^2}{R_1 + R_2} = \frac{p^2}{R} = \frac{L}{RC},$$

откуда

$$L = Z_K RC = 2,67 \times 10^3 \cdot 70 \cdot 200 \times 10^{-12} = 37 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}.$$

Определим характеристическое сопротивление контура:

$$p = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{37,4 \cdot 10^{-6}}{200 \cdot 10^{-12}}} = 432 \text{ Ом.}$$

Определяем добротность контура:

$$Q = \frac{p}{R} = \frac{432}{70} \approx 6,17.$$

Амплитуду тока в контуре определяем исходя из следующих соотношений:

$$I_{m_1} = I_{m_2} = I_m Q = 4,5 \cdot 6,17 = 277,65 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Ответ: $L = 37,4 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}; \quad Q = 6,17; \quad I_m = 45 \cdot 10^{-3} \text{ А};$
 $I_{m_1} = I_{m_2} = 277,65 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$

8. Цепи с индуктивно связанными элементами

8.1. Основные теоретические положения

Индуктивная связь. ЭДС взаимной индукции. Взаимная индуктивность. Коэффициент связи

Электрические цепи называются связанными, если процессы в них влияют друг на друга. Это влияние может осуществляться посредством общего электрического или магнитного поля. В последнем случае цепи называются индуктивно связанными.

Взаимная индуктивность M – размерная величина и по ней трудно судить о степени взаимного влияния катушек друг на друга. Для оценки степени связи катушек пользуются относительной величиной – коэффициентом связи k , который определяется как среднее геометрическое из отношения потокоцепления взаимной индукции к потокоцеплениям самоиндукции:

$$k = \sqrt{\frac{\Psi_{12} \cdot \Psi_{21}}{\Psi_{11} \cdot \Psi_{22}}} = \sqrt{\frac{M \cdot i_1 \cdot M \cdot i_2}{L_1 \cdot i_1 \cdot L_2 \cdot i_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}.$$

Коэффициент k может принимать значения в пределах от 0 до 1. При $k = 0$ между катушками не существует индуктивной связи, при $k = 1$ поток одной катушки полностью охватывает витки второй катушки $\Phi_{12} = \Phi_{11}$, $\Phi_{21} = \Phi_{22}$.

Величина k зависит от:

– расстояния между катушками;

- взаимной ориентации катушек в пространстве;
- магнитных свойств среды, в которой расположены катушки.

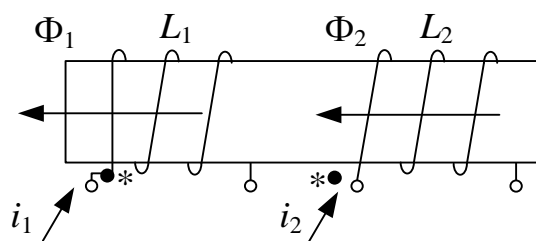


Рис. 8.1

Направление тока и вызванного им магнитного потока связаны по правилу правого винта. Следовательно, ток i_1 будет вызывать поток Φ_1 , направленный влево. Ток i_2 будет вызывать магнитный поток Φ_2 , также направленный влево.

Зажимы индуктивно связанных катушек, одинаковое направление токов относительно которых вызывает одинаковое направление потоков, называются одноименными. На электрических схемах цепей одноименные зажимы катушек принято обозначать жирными точками или звездочками (рис. 8.1).

Последовательное соединение индуктивно связанных катушек при согласном включении

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки, соединённые последовательно (рис. 8.2). Каждая из катушек обладает индуктивностью L_1 и L_2 и активным сопротивлением проводника, из которого катушка изготовлена, R_1 и R_2 . Индуктивная связь на электрической схеме указана двусторонней стрелкой и взаимной индуктивностью M .

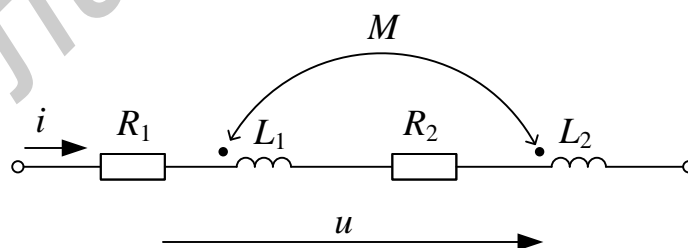


Рис. 8.2

Одноименные зажимы катушек обозначены жирными точками и расположены так, что протекающий под воздействием напряжения u ток i вызывает в катушках одинаковое направление потоков. Поэтому такое включение называется *согласным*.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме для последовательного согласного включения катушек имеет вид

$$R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} = \dot{U} .$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$[R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] \dot{I} = \dot{U} .$$

Выражение в квадратных скобках является полным комплексным сопротивлением двух последовательно соединенных индуктивно связанных катушек при согласном включении:

$$Z_{\text{СОГЛ}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) .$$

Выражение в круглых скобках называется полной индуктивностью двух последовательно соединенных индуктивно связанных катушек при согласном включении:

$$L_{\text{СОГЛ}} = L_1 + L_2 + 2M .$$

Очевидно, что $Z_{\text{СОГЛ}} > Z$, где Z – полное сопротивление двух последовательно соединенных катушек без индуктивной связи:

$$Z = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2) .$$

Последовательное соединение индуктивно связанных катушек при встречном включении

Рассмотрим две последовательно включенные индуктивно связанные катушки (рис. 8.3). Каждая из катушек обладает индуктивностью L_1 и L_2 и активным сопротивлением проводника, из которого катушка изготовлена, R_1 и R_2 . Индуктивная связь на электрической схеме указана двусторонней стрелкой и взаимной индуктивностью M .

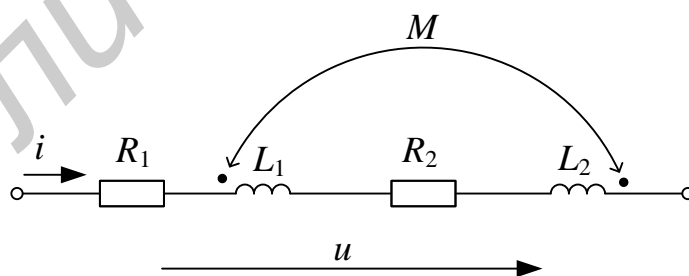


Рис. 8.3

Одноименные зажимы катушек обозначены жирными точками. Ток направлен к одноименному зажиму первой катушки и от одноименного зажима второй катушки. Следовательно, магнитные потоки катушек будут направлены навстречу друг другу. Поэтому такое включение называется *встречным*.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме при последовательном встречном включении двух катушек имеет вид

$$R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{U} .$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$[R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] \dot{I} = \dot{U} .$$

Выражение в квадратных скобках является полным комплексным сопротивлением двух последовательно соединенных индуктивно связанных катушек при встречном включении.

Выражение в круглых скобках называется полной индуктивностью двух последовательно соединенных индуктивно связанных катушек при встречном включении:

$$L_{\text{ВСТР}} = L_1 + L_2 - 2M .$$

Очевидно, что $Z_{\text{ВСТР}} < Z$, где Z – полное сопротивление двух последовательно соединенных катушек без индуктивной связи.

Параллельное соединение индуктивно связанных катушек

Рассмотрим параллельное соединение индуктивно связанных катушек (рис. 8.4).

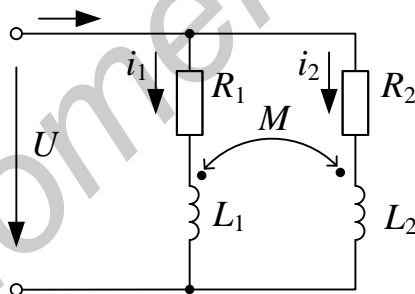


Рис. 8.4

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа в комплексной форме для каждой из ветвей цепи:

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U} , \\ R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U} . \end{cases}$$

Знак «+» перед слагаемым $j\omega M$ соответствует согласному включению, знак «-» соответствует встречному включению.

Введем обозначения

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2, \quad Z_M = j\omega M ,$$

и перепишем последнюю систему уравнений в виде

$$\begin{cases} Z_1 \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2 = \dot{U}, \\ \pm Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = \dot{U}. \end{cases}$$

Определим из этих уравнений токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U} (Z_2 \pm Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U} (Z_1 \pm Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}.$$

Тогда ток в неразветвленной части схемы определится по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U} (Z_1 + Z_2 \pm 2Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}.$$

Из последнего соотношения определим входное сопротивление параллельного соединения индуктивно связанных катушек:

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 \pm 2Z_M}.$$

При отсутствии индуктивной связи, т. е. при $Z_M = 0$ входное сопротивление преобразуется к известному выражению $Z_{\text{ВХ}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

Расчет разветвленных ветвей при наличии взаимной индуктивности можно вести по уравнениям, составленным по первому и второму законам Кирхгофа или методом контурных токов. Метод узловых потенциалов непосредственно не применим. Объясняется это тем, что ток в ветви зависит не только от разности потенциалов на зажимах ветви и от ЭДС, находящихся в ветви, но и от токов других ветвей, с которыми рассматриваемая ветвь индуктивно связана.

Ограниченное применение находит метод эквивалентного генератора. Его можно применить в том случае, если ветвь, в которой требуется определить ток, индуктивно не связана с другими ветвями.

В противном случае исключение этой ветви привело бы к потере индуктивной связи.

Развязка индуктивных связей

Ранее уже говорилось, что не все методы пригодны для расчета индуктивно связанных цепей. Анализ и расчет цепи упрощается, если часть цепи, содержащую индуктивные связи, заменить эквивалентной схемой без индуктивных связей. Эта замена называется *развязкой индуктивных связей*.

Рассмотрим часть цепи с индуктивной связью (рис. 8.5).

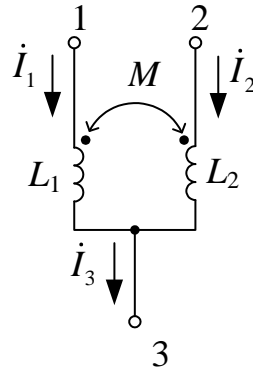


Рис. 8.5

Запишем для нее уравнения в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3, \\ \dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1. \end{cases}$$

Здесь знак «+» перед $j\omega M$ соответствует согласному включению индуктивностей, а знак «-» встречному. Выразив из первого уравнения ток $\dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1$ и подставив в выражение для \dot{U}_{13} , получим

$$\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M (\dot{I}_3 - \dot{I}_1) = j\omega (L_1 \mp M) \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_3,$$

а выразив $\dot{I}_1 = \dot{I}_3 - \dot{I}_2$ и подставив в \dot{U}_{23} , получим

$$\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = j\omega (L_2 \mp M) \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_3.$$

Полученным уравнениям для \dot{U}_{13} и \dot{U}_{23} соответствует электрическая цепь, изображенная на рис. 8.6. В цепи на рис. 8.6 отсутствует индуктивная связь. При этом в схеме замещения изменились величины индуктивностей катушек, и появился дополнительный элемент. Верхний знак перед M соответствует согласному включению, а нижний знак – встречному включению индуктивностей. Для расчёта цепи, преобразованной таким образом, можно использовать любые методы расчёта цепей без ограничения.

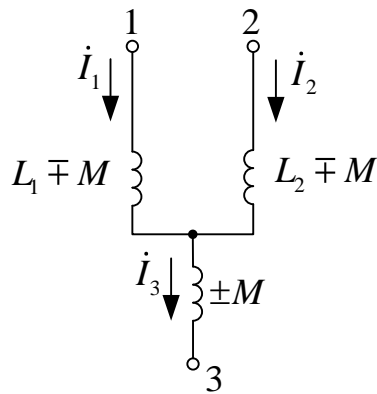


Рис. 8.6

Воздушный трансформатор

Трансформатор – слово латинского происхождения, оно переводится как «преобразователь». Этим определяется его назначение. Трансформатор служит для преобразования переменного напряжения, когда требуется изменить величину напряжения или осуществить передачу электрической энергии между контурами, лишенными гальванической связи.

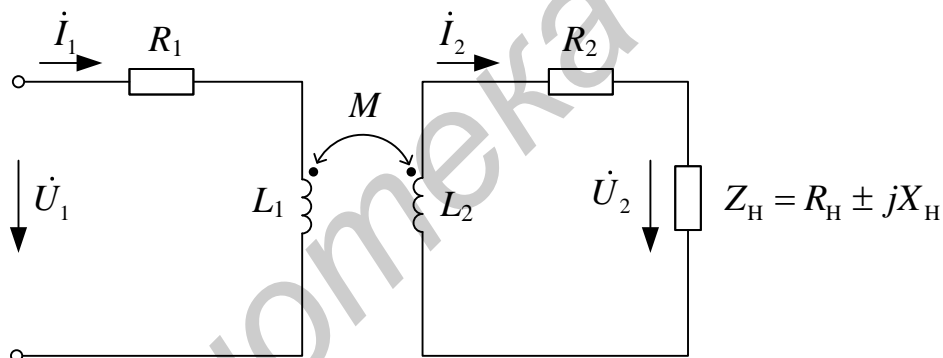


Рис. 8.7

Конструктивно трансформатор представляет собой две или несколько индуктивно связанных катушек, называемых обмотками трансформатора. Обмотки трансформатора могут быть помещены на общий ферромагнитный сердечник. Однако сердечник может отсутствовать. Тогда трансформатор называется воздушным трансформатором, или трансформатором без сердечника.

Рассмотрим простейший воздушный трансформатор, состоящий из двух обмоток. Такие трансформаторы находят широкое применение в устройствах, работающих на высоких частотах, например в радиоприемных устройствах. Схема трансформатора представлена на рис. 8.7.

Обмотка трансформатора, подключаемая к источнику переменного напряжения, называется первичной. На рис. 8.7 она представлена индуктивностью L_1 и активным сопротивлением проводника R_1 , из которой она изготовлена. Вторичная обмотка, к которой подключается нагрузка Z_H , представлена

индуктивностью L_2 и активным сопротивлением R_2 . Между обмотками трансформатора имеется индуктивная связь, характеризуемая взаимной индуктивностью M .

Уравнения по второму закону Кирхгофа для первичной и вторичной цепи трансформатора запишутся в виде

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = U_1, \\ R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + R_H \dot{I}_2 \pm jX_H \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = 0. \end{cases}$$

Входное сопротивление трансформатора определяется по следующей формуле:

$$Z_{\text{ВХ}} = R_1 + \frac{(\omega M)^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + jX_1 - j \frac{(\omega M)^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}.$$

Входное сопротивление трансформатора представлено в виде последовательного соединения двух активных и двух реактивных сопротивлений. Входное сопротивление трансформатора может быть изображено в виде двухполюсника (рис. 8.8),

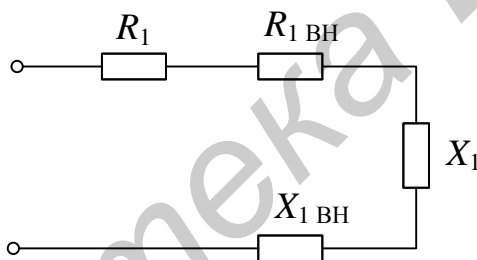


Рис. 8.8

где $R_{1ВН} = \frac{(\omega M)^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$ – активное сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную цепь,

$X_{1ВН} = \frac{(\omega M)^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$ – реактивное сопротивление, вносимое в первичную цепь из вторичной.

Следует заметить, что вносимое реактивное сопротивление имеет знак, противоположный знаку собственного реактивного сопротивления вторичного контура X_{22} .

8.2. Примеры расчета схем с индуктивно связанными элементами

Пример 8.1

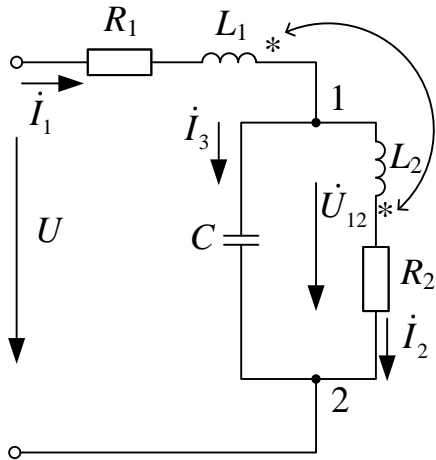


Рис. 8.9

Для цепи (рис. 8.9) определить токи во всех ветвях и напряжение \dot{U}_{12} . Параметры цепи: $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $X_{L_1} = 10$ Ом; $X_{L_2} = 20$ Ом; $X_C = 40$ Ом; $X_M = 15$ Ом.

Напряжение, приложенное к цепи, $U = 100$ В.

Решение

Составим уравнение по законам Кирхгофа в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{U} = (R_1 + jX_{L_1})\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 - jX_C\dot{I}_3, \\ \dot{U} = (R_1 + jX_{L_1})\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 + (R_2 + jX_{L_2})\dot{I}_2 + jX_M\dot{I}_1, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3; \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0, \\ (R_1 + jX_{L_1})\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 - jX_C\dot{I}_3 = \dot{U}, \\ (R_1 + jX_{L_1} + jX_M)\dot{I}_1 + (R_2 + jX_{L_2} + jX_M)\dot{I}_2 = \dot{U}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Подставив заданные величины в (8.1), получим

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0, \\ (20 + 10j)\dot{I}_1 + j15\dot{I}_2 - j40\dot{I}_3 = 100, \\ (20 + 10j + j15)\dot{I}_1 + (10 + j20 + j15)\dot{I}_2 = 100. \end{cases} \quad (8.2)$$

Решив систему 8.2, получим

$$\dot{I}_1 = 0,545 - j0,616 = 0,822e^{-j48,50^\circ};$$

$$\dot{I}_2 = 0,522 - j1,956 = 2,024e^{-j75,058^\circ};$$

$$\dot{I}_3 = 0,024 + j1,34 = 1,34e^{-j88,974^\circ};$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{U} - (R_1 + jX_{L_1})\dot{I}_1 - jX_M\dot{I}_2;$$

$$U_{12} = 100 - (20 + j10)0,823e^{-j48,504^\circ} - j15 \cdot 2,024e^{-j75,069^\circ} = 53,609e^{-j1,026} \text{ В.}$$

Ответ: $\dot{I}_1 = 0,822e^{-j48,50^\circ} \text{ А}$, $\dot{I}_2 = 2,024e^{-j75,058^\circ} \text{ А}$, $\dot{I}_3 = 1,34e^{-j88,974^\circ} \text{ А}$,
 $\dot{U}_{12} = 53,609e^{-j1,026} \text{ В}$.

Пример 8.2

Для цепи (рис. 8.10) определить приложенное к цепи напряжение и построить топографическую диаграмму, если известно, что $P_{\text{НАГР}} = 800 \text{ Вт}$; $\cos \varphi = 0,8 (\varphi > 0)$; $U_{\text{НАГР}} = 220 \text{ В}$; $R = X = 3 \text{ Ом}$; $X_1 = 10 \text{ Ом}$; $X_2 = 5 \text{ Ом}$; $K_{\text{СВ}} = 0,8$.

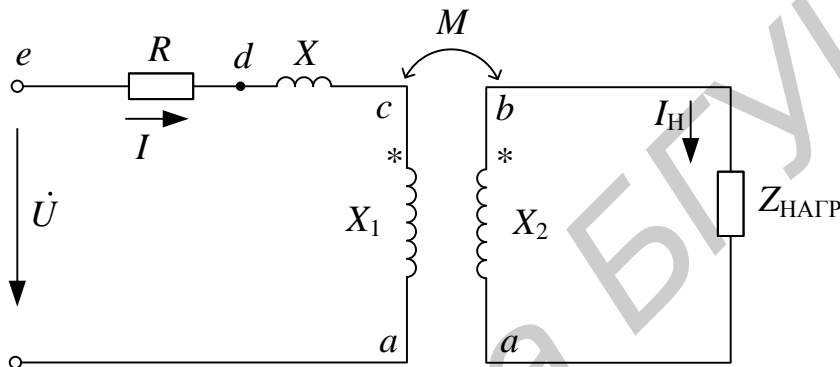


Рис. 8.10

Решение

Уравнение, описывающее цепь, запишем в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{U} = (R + jX) \dot{I} + jX_1 \dot{I} - jX_M \dot{I}_H, \\ 0 = jX_2 \dot{I}_H - jX_M \dot{I} + (R_H + jX_H) \dot{I}_H. \end{cases} \quad (8.3)$$

Чтобы определить приложенное к цепи напряжение, необходимо прежде всего определить токи первичной цепи и вторичной \dot{I} и \dot{I}_H . Рассматривая второе уравнение и условие задачи, определим сначала \dot{I}_H , а затем \dot{I} .

Определяем действующее значение тока нагрузки \dot{I}_H :

$$I_H = \frac{P_{\text{НАГР}}}{U_{\text{НАГР}} \cos \varphi} = \frac{800}{220 \cdot 0,6} = 4,55 \text{ А.}$$

Определяем параметры нагрузки R_H и X_H :

$$R_H = \frac{P_H}{I_H^2} = \frac{800}{4,55^2} = 38,65 \text{ Ом};$$

$$X_H = \frac{Q_H}{I_H^2} = \frac{U_M I_H \sin \varphi_H}{I_H^2} = 28,9 \text{ Ом}.$$

Сопротивление индуктивной связи:

$$X_M = K_{CB} \sqrt{X_1 X_2} = 0,8 \sqrt{10 \cdot 5} = 5,8 \text{ Ом}.$$

Приняв начальную фазу тока нагрузки равной 0, получим из 2-го уравнения ток первичной цепи:

$$\dot{i} = \frac{I_H jX_2 + I_H (R_H + jX_H)}{jX_M} = 27,55 - j31,4 = 40,33e^{-j85}.$$

Подставляя значение \dot{I} в первое уравнение системы (8.3), определяем входное напряжение $\dot{U} = 525,7e^{-j10,5} \text{ В}$.

Строим топографическую диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов. Для каждого контура трансформатора строится своя диаграмма, но между ними существует связь, отображающая наличие явления взаимоиндукции. Напряжения взаимоиндукции должны быть перпендикулярны токам, которые их создают.

Выберем масштаб напряжений $m_U = 40 \frac{\text{В}}{\text{см}}$.

Рассчитаем действующие значения отдельных участков первичного и вторичного контуров:

$U_{ba} = I_H Z_H = 220 \text{ В}$ по условию задачи, это же напряжение с учетом взаимоиндукции рассчитать следующим образом:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_H jX_2 - \dot{I} jX_M = 4,55e^{-j36,86} \cdot 5e^{j90} - 40,33e^{-j85} \cdot 5,8e^{j90} = 220 \text{ В};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ca} &= \dot{I} jX_1 - \dot{I}_H jX_M = 40,33e^{-j85} \cdot 10e^{j90} - 4,55e^{-j36,86} \cdot 5,8e^{j90} = \\ &= 386,25e^{j2,07}; \end{aligned}$$

$$U_{dc} = IX = 41,77 \cdot 3 = 125,3 \text{ В};$$

$$U_{ed} = IR = 41,77 \cdot 3 = 125,3 \text{ В}.$$

Построение начинаем с векторов токов (рис. 8.11). Затем откладываем вектор напряжения \dot{U}_{ba} . И по условию задачи, и по расчету он имеет нулевую начальную фазу.

Строим вектора напряжений первичного контура по рассчитанным значениям. Построение начинаем из точки «а». При построении векторов \dot{U}_{ca} и \dot{U}_{dc} учитываем то, что напряжение на индуктивности опережает ток на 90° ; а напряжение на резисторе U_{ed} совпадает по фазе с током \dot{I} . Соединив точку «а» с точкой «е», получаем вектор входного напряжения \dot{U} .

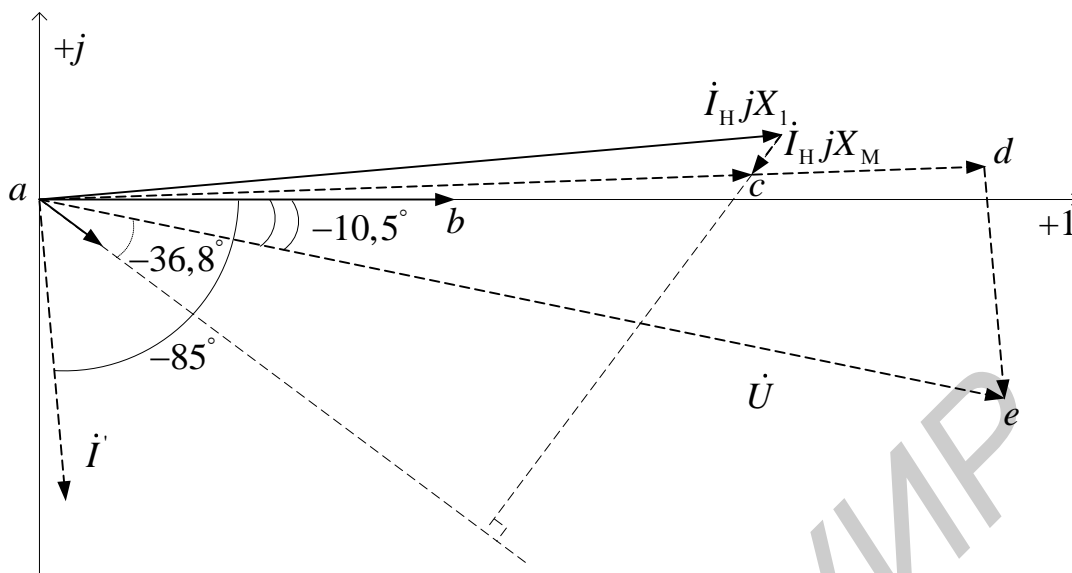


Рис. 8.11

Пример 8.3

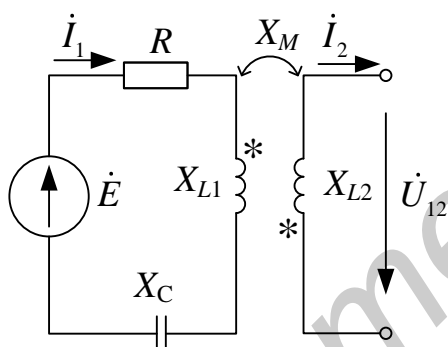


Рис. 8.12

Дано:

- $\dot{E} = 10e^{j90^\circ}$;
- $R = 10 \text{ Ом}$; $X_{L1} = 20 \text{ Ом}$;
- $X_C = 10 \text{ Ом}$; $X_{L2} = 40 \text{ Ом}$;
- $X_M = 5 \text{ Ом}$.

Определить напряжение \dot{U}_{12} и записать его мгновенное значение.

Решение

Поскольку на выходе трансформатора (рис. 8.12) отсутствует нагрузка ($Z_H = \infty$), ток во вторичной обмотке равен нулю: $\dot{I}_2 = 0$. Такой режим работы трансформатора (без нагрузки) называется режимом холостого хода.

В катушке индуктивности L_1 будет наводиться только ЭДС самоиндукции.

Определим ток \dot{I}_1 в первичной обмотке:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{R + jX_{L1} - jX_C} = \frac{10e^{j90^\circ}}{10 + j10} = \frac{10e^{j90^\circ}}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Так как ток $\dot{I}_2 = 0$, определять тип включения индуктивно связанных элементов будем по падению напряжений на этих элементах (рис. 8.13).

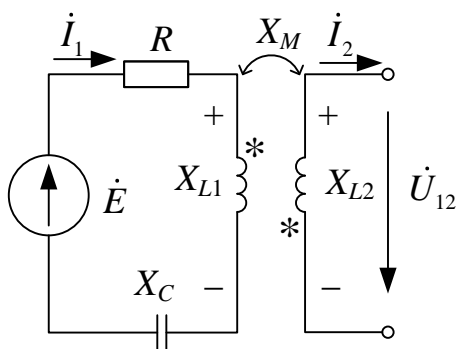


Рис. 8.13

Ответ: $\dot{U}_{12} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \text{ В}$, $U_{12}(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ В}$.

Пример 8.4

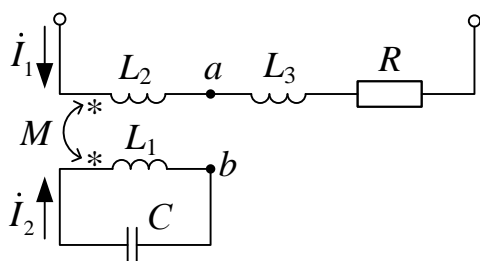


Рис. 8.14

Дано: $\omega L_1 = \omega L_2 = 20 \text{ Ом}$;
 $\omega L_3 = 30 \text{ Ом}$; $\omega M = 10 \text{ Ом}$; $R = 10 \text{ Ом}$;
 $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$.

Определить ёмкость C , при которой вся цепь (рис. 8.14) настроена в резонанс.

Решение

Произведём развязку индуктивной связи (рис. 8.15).

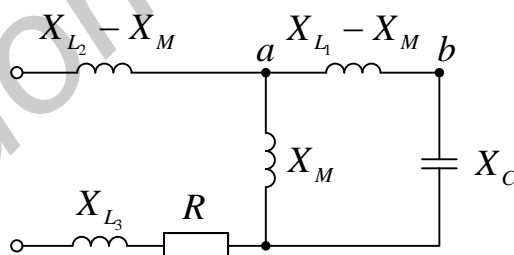


Рис. 8.15

Условием возникновения резонанса является равенство нулю мнимой части эквивалентного комплексного сопротивления цепи:

$$\text{Im}\{Z_{\text{экр}}\} = jX_{L3} + j(X_{L2} - X_M) + \frac{jX_M \cdot j(X_{L1} - X_M - X_C)}{jX_M + j(X_{L1} - X_M - X_C)} = 0.$$

Подставив в последнее выражение численные значения, получаем:

$$X_C = 18 \text{ Ом}; C = 110 \text{ мкФ}.$$

Ответ: $X_C = 18 \text{ Ом}$; $C = 110 \text{ мкФ}$.

9. Цепи с периодическими несинусоидальными источниками

9.1. Основные теоретические положения

Несинусоидальные токи могут возникать по следующим причинам:

а) источник электрической энергии даёт синусоидальное напряжение, но один или несколько элементов являются нелинейными.

Примером нелинейного сопротивления, искажающего форму кривой тока (рис. 9.1, а), является катушка со стальным сердечником, подключённая к источнику синусоидального напряжения (рис. 9.1, б);

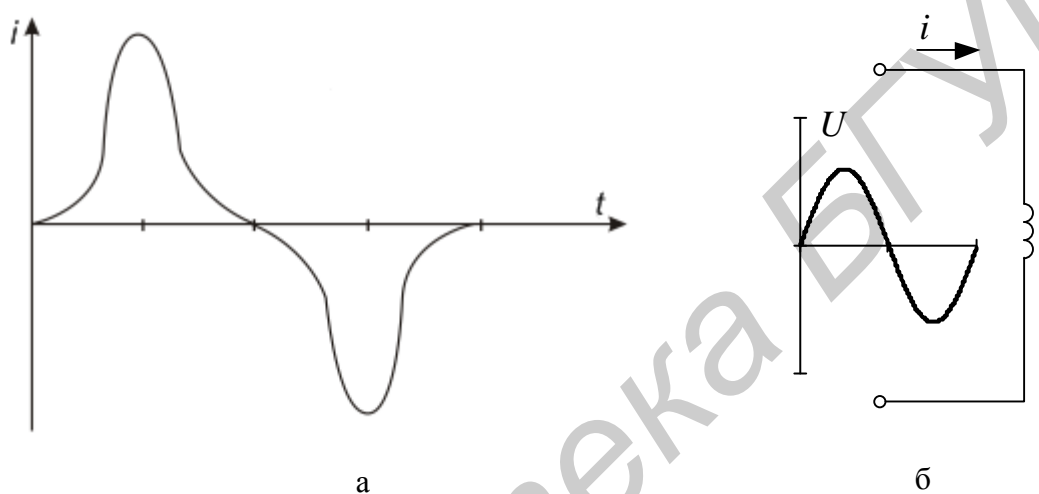


Рис. 9.1

б) источник электрической энергии даёт несинусоидальное напряжение и все элементы цепи линейны;

К источникам, дающим несинусоидальное напряжение, можно отнести выпрямители и феррорезонансные стабилизаторы напряжения.

Напряжение выпрямителя, работающего по однополупериодной схеме выпрямления, показано на рис. 9.2, работающего по двухполупериодной схеме выпрямителя – на рис. 9.3;

в) источник электрической энергии даёт несинусоидальное напряжение и электрическая цепь содержит одно или несколько нелинейных сопротивлений.

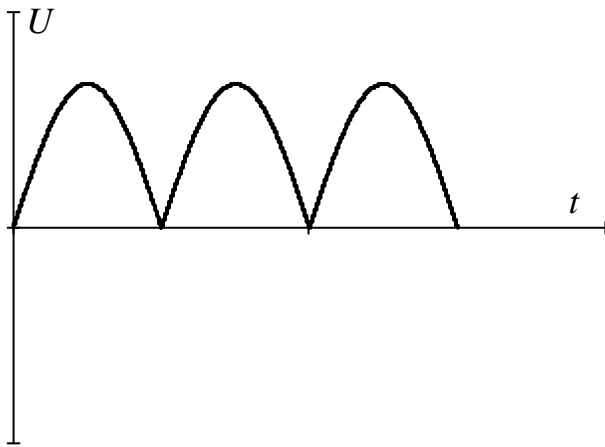


Рис. 9.2

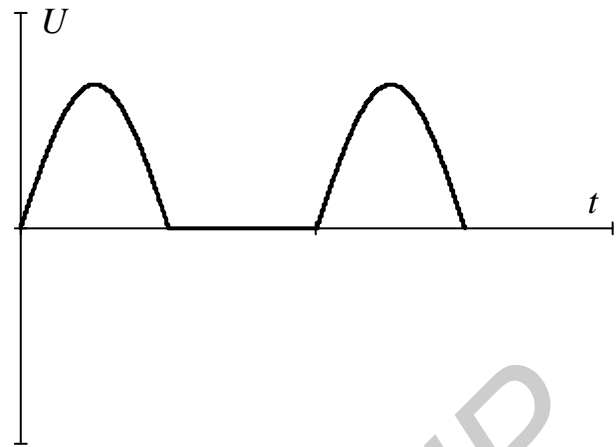


Рис. 9.3

9.2. Разложение периодических функций в ряд Фурье

При расчёте цепей синусоидального тока напряжения токи отображались векторами на комплексной плоскости и записывались в форме комплексных чисел. Только при синусоидальных токах и напряжениях возможно использование понятий индуктивных $j\omega L$, ёмкостных $\frac{1}{j\omega C}$ и полных Z сопротивлений элементов электрических цепей. Поэтому весь аппарат расчёта линейных электрических цепей не приемлем при попытке непосредственного его приложения к цепям с несинусоидальными токами.

Рассмотрим метод анализа и расчёта линейных электрических цепей, питаемых несинусоидальными, но периодическими напряжениями и токами.

Сущность метода заключается в том, что несинусоидальная периодическая кривая напряжения или тока заменяется рядом гармонических функций таких частот, амплитуд и начальных фаз, что алгебраическая сумма ординат этих гармонических функций в любой момент времени равна ординате заданной несинусоидальной периодической кривой.

Возможность такой замены основывается на том, что всякая периодическая функция $F(\omega t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов на конечном отрезке функции, может быть представлена гармоническим рядом Фурье:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A_0 + A_{(1)_m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{(2)_m} \sin(2\omega t + \psi_2) + A_{(3)_m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots = \\
 &= A_0 + \sum_{K=1}^n A_{(K)_m} \sin(K \omega t + \psi_K), \quad (9.1)
 \end{aligned}$$

где A_0 – постоянная составляющая,

$A_{(1)m}$; $A_{(2)m}$; ... – амплитуды первой, второй и следующих гармоник,
 ψ_1 ; ψ_2 ; ... – начальные фазы первой, второй и следующих гармоник.

Ряд Фурье может быть записан в другой форме:

$$f(t) = A_0 + \sum_{K=1}^n B_{(K)m} \sin K \omega t + \sum_{K=1}^n C_{(K)m} \cos K \omega t, \quad (9.2)$$

где $B_{(K)m} = A_{(K)m} \cos \psi_K$ и $C_{(K)m} = A_{(K)m} \sin \psi_K$.

Коэффициенты ряда вычисляются следующим образом:

$$B_{(K)m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(t) \sin K \omega t dt ;$$

$$C_{(K)m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(t) \cos K \omega t dt ;$$

$$A_{(K)m} = \sqrt{B_{(K)m}^2 + C_{(K)m}^2} ; \psi_K = \arctg \frac{C_{(K)m}}{B_{(K)m}}.$$

Постоянная составляющая ряда является **средним значением функции за период**:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(t) dt .$$

Следует отметить, что во всех приведённых интегралах пределы интегрирования можно было бы взять от 0 до 2π .

9.3. Пример разложения периодической несинусоидальной функции в ряд Фурье

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, представленную на рис. 9.4, если $t_u = \frac{T}{2}$.

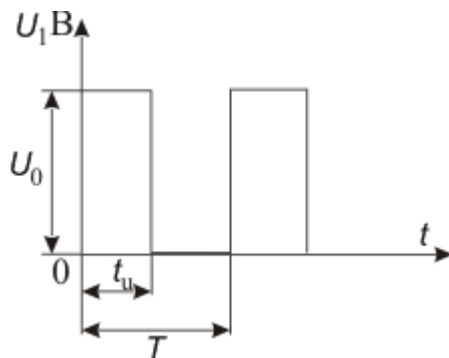


Рис. 9.4

Решение

Для заданной функции запишем:

$$F(t) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 < t < t_u, \\ 0 & \text{при } t_u < t < T. \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_u} U(t) dt + \int_{t_u}^T U(t) dt \right] = \frac{U_0}{T} t \Big|_0^{t_u} = \frac{U_0}{T} \cdot t_u.$$

При условии $t_u = \frac{T}{2}$ постоянная составляющая $A_0 = \frac{U_0}{2}$.

$$\begin{aligned} B_{(K)_m} &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin K \omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_u} U(t) \sin K \omega t dt + \int_{t_u}^T U(t) \sin K \omega t dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{t_u} U_0 \sin K \omega t dt = \frac{2}{T} \left[-\frac{U_0}{K \omega} \cos K \omega t \right] \Big|_0^{t_u} = -\frac{2U_0}{TK \omega} (\cos K \omega t_u - 1). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получаем

$$B_{(K)_m} = \frac{U_0}{K\pi} (1 - \cos K \omega t_u);$$

$$\begin{aligned} C_{(K)_m} &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos K \omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_u} U(t) \cos K \omega t dt + \int_{t_u}^T U(t) \cos K \omega t dt \right] = \\ &= \frac{U_0}{K\pi} \sin K \omega t_u. \end{aligned}$$

Результат разложения, согласно (9.2), запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &= A_0 + \sum_{K=1}^n B_{(K)_m} \sin K \omega t + \sum_{K=1}^n C_{(K)_m} \cos K \omega t = \\ &= \frac{U_0}{2} + \sum_{K=1}^n \frac{U_0}{K\pi} (1 - \cos K \omega t_u) \sin K \omega t + \sum_{K=1}^n \frac{U_0}{K\pi} \sin K \omega t_u \cos K \omega t. \end{aligned} \quad (9.3)$$

С учётом того, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $t_u = \frac{T}{2}$, $\cos K \omega t_u = \cos K \pi$, при чётном K выражение $(1 - \cos K \omega t_u)$ обращается в ноль, следовательно, во втором слагаемом выражения (9.3) будут присутствовать только нечётные гармоники; $\sin K \omega t_u = \sin K \pi$, при любом K $\sin K \pi = 0$.

Следовательно,

$$u(t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{K=1}^n \frac{U_0}{K\pi} (1 - \cos K\pi) \sin K\omega t = \frac{U_0}{2} + \sum_{K=1}^n \frac{2U_0}{K\pi} \sin^2 \frac{K\pi}{2} \sin(K\omega t + K\pi),$$

$$(K=1,3,5,\dots).$$

Ответ: $u(t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{K=1}^n \frac{2U_0}{K\pi} \sin^2 \frac{K\pi}{2} \sin(K\omega t + K\pi), (K = 1, 3, 5, \dots).$

9.4. Порядок расчета линейной электрической цепи, находящейся под действием несинусоидального напряжения

Расчёт электрической цепи при несинусоидальном питании делится на три части.

Первая часть представляет собой **гармонический анализ** (задачу разложения кривой в тригонометрический ряд). В результате решения этой задачи определяются коэффициенты $A_{(K)}$ – все значения $\psi_{(K)}$ разложения данной кривой (см. формулу (9.1)).

Вторая часть задачи – расчёт цепи для каждого из слагаемых ряда. Производится расчёт токов в цепи от действия каждой гармоники напряжения в отдельности (принцип наложения).

Запомнить! При расчёте токов от постоянной составляющей напряжения принимаем во внимание, что для **постоянного тока конденсатор представляет бесконечно большое сопротивление, а индуктивная катушка обладает сопротивлением, равным нулю**. Далее, с ростом номера гармоники K сопротивление конденсатора уменьшается $X_{(K)C} = \frac{1}{K\omega C}$, а сопротивление катушки возрастает $X_{(K)L} = K\omega L$.

Этот расчёт при решении задачи приходится повторять столько раз, сколько членов ряда присутствует в разложении.

Третья часть является задачей гармонического синтеза в том случае, когда должна быть выяснена форма кривой тока или напряжения на приёмнике. К этой части задачи относится определение действующих значений токов и напряжений в ветвях цепи и мощностей, расходуемых в этих ветвях. Искомый ток записывается в виде суммы постоянной составляющей и синусоидальных составляющих:

$$i = I_0 + I_{(1)m} \sin(\omega t + \psi_{(1)} + \varphi_{(1)}) + I_{(2)m} \sin(2\omega t + \psi_{(2)} + \varphi_{(2)}) + \dots +$$

$$+ I_{(K)m} \sin(K\omega t + \psi_{(K)} + \varphi_{(K)}). \quad (9.4)$$

9.5. Действующее значение несинусоидального тока.

Активная, реактивная, полная мощности несинусоидального тока.

Мощность искажения

Активная мощность несинусоидального тока может быть найдена как мощность постоянной составляющей $P_0 = U_0 I_0$ плюс сумма активных мощностей всех гармоник:

$$P = P_0 + P_{(1)} + P_{(2)} + \dots + P_{(K)} \text{ Вт,}$$

или

$$P = I_0^2 r + I_1^{(2)} r + \dots + I_{(K)}^2 r \text{ Вт.} \quad (9.5)$$

Заменим данный несинусоидальный ток некоторым эквивалентным синусоидальным током, который выделяет такую же мощность, т. е.

$$P = I^2 R \text{ Вт.} \quad (9.6)$$

Сопоставляя (9.5) и (9.6), находим, что

$$I^2 = I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \dots + I_{(K)}^2,$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \dots + I_{(K)}^2}, \quad (9.7)$$

где I – действующее значение несинусоидального тока.

Аналогично действующее значение несинусоидального напряжения определяется по следующей формуле:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2 + \dots + U_{(K)}^2}. \quad (9.8)$$

В общем случае действующее значение периодической функции $f(t)$ определяется как

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}. \quad (9.9)$$

Действующие значения периодических величин (ЭДС, токов, напряжений) **не зависят от начальных фаз гармоник.**

Активная мощность P , реактивная мощность Q , полная мощность S несинусоидального тока и напряжения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots ; \\ Q &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots ; \end{aligned}$$

$$P_{(K)} = U_{(K)} I_{(K)} \cos \varphi_{(K)} = r I_{(K)}^2 = q U_{(K)}^2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_{(K)} I_{(K)}^*]; \quad (9.10)$$

$$Q_K = U_K I_K \sin \varphi_K = X_K I_K^2 = b_K U_K^2 = \operatorname{Im}[\dot{U}_K I_K^*];$$

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}.$$

Мощность искажения определяется так:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \text{ ВА.}$$

Она характеризует отличие форм кривых тока и напряжения в цепях с индуктивностями и емкостями. Если цепь состоит только из активных сопротивлений, то кривая тока повторяет по форме кривую напряжения, и мощность искажения равна нулю.

9.6. Резонансные явления при несинусоидальных токах

Как известно, **резонансным** режимом работы электрической цепи, содержащей индуктивности и ёмкости, называют такой режим её работы, при котором ток на входе этой цепи совпадает по фазе с действующим на входе напряжением (или ЭДС).

При действии на входе несинусоидального напряжения в электрической цепи могут возникать режимы резонанса токов или напряжений на различных гармониках.

Под резонансом на К-й гармонике понимают такой режим работы, при котором ток К-й гармоники на входе цепи совпадает по фазе с К-й гармоникой действующей на входе ЭДС (токи остальных гармоник не совпадают по фазе с вызвавшими их ЭДС).

При резонансе токов входное сопротивление равно бесконечности, при резонансе напряжений входное сопротивление равно нулю.

9.7. Примеры расчета цепей при воздействии периодических несинусоидальных источников

Пример 9.1

Дано: $u(t) = 30 + 220 \sin \omega t + 60 \sin 5\omega t$, $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$;

$r_1 = 10 \text{ Ом}$; $r_2 = 5 \text{ Ом}$; $L_1 = 0,0318 \text{ Гн}$; $C = 159 \text{ мкФ}$; $L_2 = 0,0318 \text{ Гн}$.

Определить показания амперметров, включённых в цепь схемы (рис. 9.5) и измеряющих действующие значения токов, а также активную, реактивную и полную мощности.

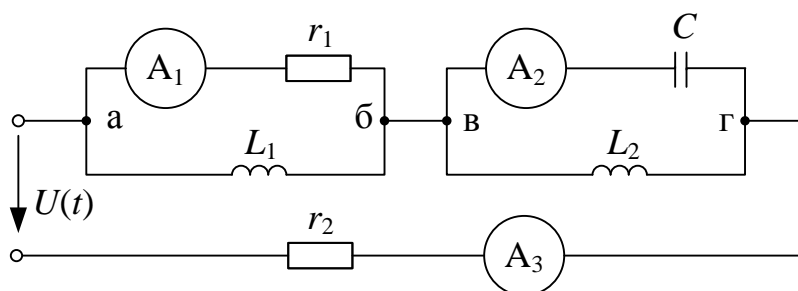


Рис. 9.5

Решение

Напряжение, приложенное к цепи, представляет сумму постоянной составляющей, первой и пятой гармоник. Действие этого напряжения аналогично действию трёх последовательно соединённых источников напряжения $U_{(0)} = 30\text{ В}$; $U_{(1)}(t) = 220\sin \omega t$ и $U_{(5)}(t) = 60\sin 5\omega t$. Рассчитаем токи цепи при действии каждого из этих источников в отдельности (принцип наложения):

1) расчёт постоянной составляющей.

Определим, в каких ветвях цепи протекает постоянный ток. Ветвь, содержащая ёмкость, для постоянного тока равносильна разрыву цепи, следовательно, по ней он протекать не будет. Постоянный ток не будет также протекать по сопротивлению r_1 , которое замыкается индуктивностью накоротко $X_{L_0} = 0$. Следовательно, постоянный ток протекает по пути $L_1 - L_2 - r_2$. Расчётная схема для определения постоянной составляющей представлена на рис. 9.6.

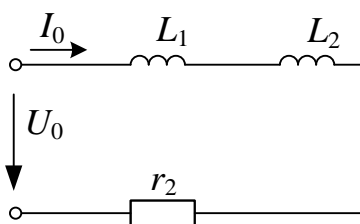


Рис. 9.6

$$I_0 = \frac{U_0}{r_2} = \frac{30}{5} = 6\text{ А};$$

2) расчёт первой гармоники.

Полное сопротивление первой гармоники:

$$Z_{(1)} = Z_{a\bar{b}(1)} + Z_{b\bar{r}(1)} + r_2;$$

$$Z_{a\bar{b}(1)} = \frac{r_1 \cdot jX_{L1(1)}}{r_1 + jX_{L1(1)}};$$

$$X_{L1(1)} = \omega L_1 = 314 \cdot 0,0318 = 10 \text{ Ом};$$

$$Z_{a\bar{b}(1)} = \frac{10 \cdot j10}{10 + j10} = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 5 + j5 \text{ Ом};$$

$$Z_{b\bar{r}(1)} = \frac{jX_{L2(1)}(-jX_{C(1)})}{jX_{L2(1)} - jX_{C(1)}};$$

$$X_{L2(1)} = \omega L_2 = 314 \cdot 0,0318 = 10 \text{ Ом};$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 159 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом};$$

$$Z_{b\bar{r}(1)} = \frac{j10(-j20)}{j10 - j20} = \frac{200}{10e^{-j90^\circ}} = 20e^{j90^\circ} = j20 \text{ Ом};$$

$$Z_{(1)} = 5 + j5 + j20 + 5 = 10 + j25 = 26,93e^{j68,2^\circ} \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{220}{\sqrt{2} \cdot 26,93e^{j68,2^\circ}} = 5,83e^{-j68,2^\circ} \text{ А};$$

$$I_{(1)} = 5,83 \text{ А}.$$

Комплексные значения первой гармоники тока в сопротивлении r_1 и ёмкости C определим по правилу плеч:

$$\dot{I}_{r1(1)} = \dot{I}_{(1)} \frac{jX_{L1(1)}}{r_1 + jX_{L1(1)}} = 5,83e^{-j68,2^\circ} \cdot \frac{10e^{j90^\circ}}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 4,13e^{-j23,2^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{C(1)} = \dot{I}_{(1)} \frac{jX_{L2(1)}}{jX_{L2(1)} - jX_{C(1)}} = 5,83e^{-j68,2^\circ} \cdot \frac{10e^{j90^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 5,83e^{j111,8^\circ} \text{ А}.$$

Действующие значения этих токов:

$$I_{r(1)} = 4,13 \text{ A}; I_{C(1)} = 5,83 \text{ A};$$

3) расчёт пятой гармоники:

$$X_{L1(5)} = X_{L1(2)} = 5\omega L = 50 \text{ Ом};$$

$$X_{C(5)} = \frac{1}{5\omega C} = 4 \text{ Ом};$$

$$Z_{аб(5)} = \frac{r_1 \cdot jX_{L1(5)}}{r_1 + jX_{L1(5)}} = \frac{10 \cdot j50}{10 + j50} = \frac{500e^{j90^\circ}}{50,99e^{j78,6^\circ}} = 9,8e^{j11,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{вг(5)} = \frac{jX_{L2(5)} (-jX_{C(5)})}{jX_{L2(5)} - jX_{C(5)}} = \frac{j50(-j4)}{j50 - j4} = \frac{200}{j46} = -j4,35 \text{ Ом};$$

$$Z_{(5)} = Z_{аб(5)} + Z_{вг(5)} + r_2 = 9,8e^{j11,4^\circ} - j4,35 + 5 = 14,6 - j2,42 = 14,8e^{-j9,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{(5)} = \frac{\dot{U}_{(5)}}{Z_{(5)}} = \frac{60e^{j0^\circ}}{\sqrt{2} \cdot 14,8e^{-j9,4^\circ}} = 2,87e^{j9,4^\circ} \text{ A};$$

$$I_{(5)} = 2,87 \text{ (A)};$$

$$\dot{I}_{r(5)} = \dot{I}_{(5)} \cdot \frac{jX_{L1(5)}}{r_1 + jX_{L1(5)}} = 2,87e^{j9,4^\circ} \cdot \frac{50e^{j90^\circ}}{50,99e^{j78,6^\circ}} = 2,81e^{j105,4^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{C(5)} = \dot{I}_{(5)} \frac{jX_{L2(5)}}{jX_{L2(5)} - jX_{C(5)}} = 2,87e^{j9,4^\circ} \cdot \frac{50e^{j90^\circ}}{46e^{j90^\circ}} = 3,12e^{j9,4^\circ} \text{ A};$$

$$I_{r(5)} = 2,81 \text{ A}; I_{C(5)} = 3,12 \text{ A}.$$

Таким образом, мы определили действующие значения первой и пятой гармоник тока в ветвях, где включены амперметры. Теперь определим их показания. Амперметры в ветвях с сопротивлением и емкостью C показывают действующее значение несинусоидального тока:

$$I_{r_1} = \sqrt{I_{r_{1(1)}}^2 + I_{r_{1(5)}}^2} = \sqrt{(4,13)^2 + (2,81)^2} = 4,99 \text{ A};$$

$$I_C = \sqrt{I_{C(1)}^2 + I_{C(5)}^2} = \sqrt{(5,83)^2 + (3,12)^2} = 6,61 \text{ A}.$$

Показание амперметра, измеряющего ток в общей ветви:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(5)}^2} = \sqrt{6 + (5,83)^2 + (2,87)^2} = 8,84 \text{ A}.$$

Активные и реактивные мощности цепи:

$$P_0 = U_0 I_0 = 30 \cdot 6 = 180 \text{ Вт};$$

$$\dot{S}_{(1)} = \dot{U}_{(1)} I_{(1)}^* = \frac{220}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \cdot 5,83 e^{j68,2^\circ} = 909,65 e^{j68,2^\circ} = 337,8 + j844,6 \text{ ВА}.$$

Здесь $P_{(1)} = 337,8 \text{ Вт}$; $Q_{(1)} = 844,6 \text{ ВАр}$.

$$\dot{S}_{(5)} = \dot{U}_{(5)} I_{(5)}^* = \frac{60}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \cdot 2,87 e^{-j9,4^\circ} = 122,12 e^{-j9,4^\circ} = 120 - j19,9 \text{ ВА}.$$

Здесь $P_{(5)} = 120 \text{ Вт}$; $Q_{(5)} = -19,9 \text{ ВАр}$.

$$P = P_0 + P_{(1)} + P_{(5)} = 180 + 337,8 + 120 = 637,8 \text{ Вт};$$

$$Q = Q_{(1)} + Q_{(5)} = 844,6 - 19,9 = 824,7 \text{ ВАр}.$$

Модуль полной мощности цепи:

$$S = UI = 164 \cdot 8,84 = 1449,86 \text{ ВА},$$

где $U = \sqrt{30^2 + \left(\frac{220}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2} = 164 \text{ В}$ – действующее значение несинусои-

дального напряжения, приложенного к цепи;

I – действующее значение несинусоидального тока ($I = 8,84 \text{ A}$).

Ответ: $I_{r_1} = 4,99 \text{ A}$, $I_C = 6,61 \text{ A}$, $I = 8,84 \text{ A}$, $P = 637,8 \text{ Вт}$,
 $Q = 824,7 \text{ ВАр}$, $S = 1449,86 \text{ ВА}$.

Пример 9.2

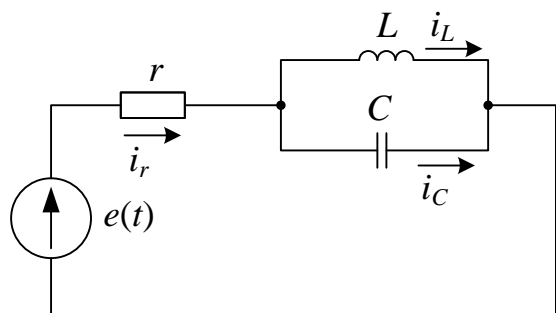


Рис. 9.7

Дано:

$$r = 20 \text{ Ом}; \quad X_L = X_C = 50 \text{ Ом};$$

$$e(t) = 100 + 50\sqrt{2} \sin \omega t .$$

Определить действующие значения всех токов и записать законы их изменения для схемы (рис. 9.7).

Решение

1) расчёт постоянной составляющей.

Схема (рис. 9.7) для протекания постоянного тока имеет вид (рис. 9.8):

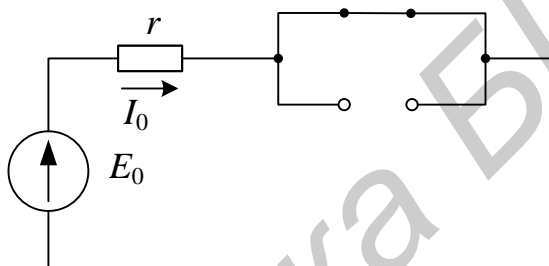


Рис. 9.8

$$I_0 = \frac{E_0}{r} = 5;$$

$$I_{C_0} = 0;$$

2) расчёт для первой гармонической.

Так как сопротивления параллельных ветвей X_L и X_C равны, то цепь находится в режиме резонанса токов. Эквивалентное сопротивление параллельного контура равно бесконечности.

Схема (см. рис. 9.7) для первых гармоник токов представлена на рис. 9.9.

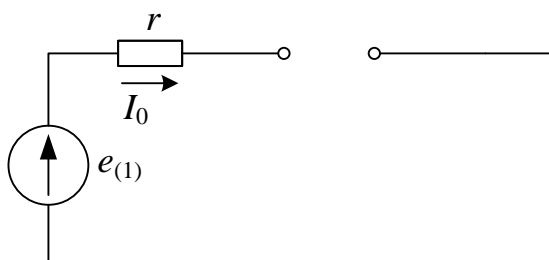


Рис. 9.9

Ток первой гармоники в общей ветви равен нулю, следовательно равно нулю и падение напряжения на резисторе r . Параллельный участок $L - C$ оказывается под воздействием первой гармоники ЭДС, в ней замыкается ток первой гармоники (рис. 9.10).

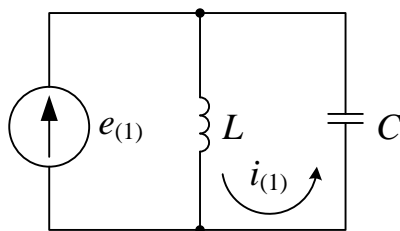


Рис. 9.10

$$\dot{I}_{L(1)} = \frac{\dot{E}_{(1)}}{Z_L} = \frac{50e^{j0^\circ}}{50e^{j90^\circ}} = 1e^{-j90^\circ};$$

$$i_{L(1)}(t) = 1\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ);$$

$$\dot{I}_{C(1)} = \frac{\dot{E}_{(1)}}{Z_C} = \frac{50e^{j0^\circ}}{50e^{-j90^\circ}} = 1e^{j90^\circ};$$

$$i_{C(1)}(t) = 1\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Законы изменения токов:

$$i_r(t) = 5;$$

$$i_L(t) = 5 + 1\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ);$$

$$i_C(t) = 0 + 1\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Действующие значения токов:

$$I_L = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} = 5,099 \text{ A};$$

$$I_C = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \text{ A}.$$

Ответ: $i_r(t) = 5$, $i_L(t) = 5 + 1\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$,

$$i_C(t) = 0 + 1\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ),$$

$$I_L = 5,099 \text{ A}, I_C = 1 \text{ A}.$$

Пример 9.3

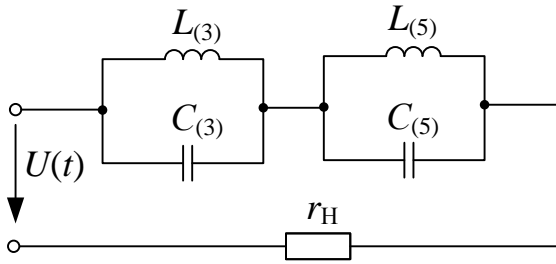


Рис. 9.11

Дано:

Напряжение

$$u(t) = 120 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t$$

действует на входе цепи, представленной на рис. 9.11. Для устранения третьей и пятой гармоник тока последовательно к нагрузке r_H подключён фильтр.

Определить: значения емкостей $C_{(3)}$ и $C_{(5)}$ и ток в нагрузке, если значения индуктивностей $L_{(3)} = L_{(5)} = 12,72 \text{ мГн}$; $r_H = 20 \text{ Ом}$.

Решение

Без фильтра мгновенное значение тока в нагрузке равно:

$$i_H = \frac{U}{r_H} = \frac{120}{20} \sin \omega t + \frac{60}{20} \sin 3\omega t + \frac{20}{20} \sin 5\omega t = 6 \sin \omega t + 3 \sin 3\omega t + 1 \sin 5\omega t$$

Процентное содержание высших гармоник тока относительно основной гармоники:

$$\left(\frac{I_{(3)m}}{I_{(1)m}} \right) \cdot 100 \% = \frac{3}{6} \cdot 100 \% = 50 \% ;$$

$$\left(\frac{I_{(5)m}}{I_{(1)m}} \right) \cdot 100 \% = \frac{1}{6} \cdot 100 \% = 16,7 \% .$$

Чтобы свести к нулю токи высших гармоник, нужно первый контур ($L_{(3)} - C_{(3)}$) настроить в резонанс с третьей гармоникой, а второй ($L_{(5)} - C_{(5)}$) – в резонанс с пятой гармоникой.

Условием резонанса контуров является равенство реактивных проводимостей параллельных ветвей.

Пусть первый контур настроен в резонанс с третьей гармоникой тока.

Тогда $b_{L(3)} = b_{C(3)}$, $\frac{1}{\omega_{(3)} L_{(3)}} = \omega_{(3)} C_{(3)}$, отсюда

$$C_{(3)} = \frac{1}{\omega_{(3)}^2 L_{(3)}} = \frac{1}{(3 \cdot 314)^2 \cdot 12,72 \cdot 10^{-3}} = 88,6 \text{ мкФ}.$$

Сопротивление этого контура для третьей гармоники:

$$Z_{(3)} = \frac{jX_{L(3)} \cdot (-jX_{C(3)})}{jX_{L(3)} - jX_{C(3)}} = \infty,$$

где $X_{L(3)} = 3\omega L_{(3)} = 3 \cdot 314 \cdot 12,72 \cdot 10^{-3} \approx 11,982 \text{ В}$,

$$X_{C(3)} = \frac{1}{3\omega C_{(3)}} = \frac{1}{3 \cdot 314 \cdot 88,6 \cdot 10^{-6}} \approx 11,982 \text{ В}.$$

Так как $Z_{(3)} = \infty$, значение тока в нагрузке на третьей гармонике равно нулю.

Пусть второй контур настроен в резонанс с пятой гармоникой.

Тогда из условия резонанса токов:

$$b_{L(5)} = b_{C(5)};$$

$$\frac{1}{\omega_{(5)} L_{(5)}} = \omega_{(5)} C_{(5)}.$$

Откуда

$$C_{(5)} = \frac{1}{\omega_{(5)}^2 L_{(5)}} = \frac{1}{(5 \cdot 314)^2 \cdot 12,72 \cdot 10^{-3}} = 31,89 \text{ мкФ}.$$

Сопротивление этого контура для пятой гармоники:

$$Z_{(5)} = \frac{jX_{L(5)} \cdot (-jX_{C(5)})}{jX_{L(5)} - jX_{C(5)}} = \infty,$$

где $X_{L(5)} = 5\omega L_{(5)} = 5 \cdot 314 \cdot 12,72 \cdot 10^{-3} = 19,97 \text{ Ом}$,

$$X_{C(5)} = \frac{1}{5\omega C_{(5)}} = \frac{1}{5 \cdot 314 \cdot 31,8 \cdot 10^{-6}} = 19,97 \text{ Ом},$$

так как $Z_{(5)} = \infty$, значение тока на пятой гармонике тока равно нулю.

Теперь находим основную гармонику тока. Сопротивление цепи для неё:

$$Z = r_H + \frac{j\omega L_{(3)} \cdot \left(-j \frac{1}{\omega C_{(3)}}\right)}{j\omega L_{(3)} - j \frac{1}{\omega C_{(3)}}} + \frac{j\omega L_{(5)} \cdot \left(-j \frac{1}{\omega C_{(5)}}\right)}{j\omega L_{(5)} - j \frac{1}{\omega C_{(5)}}} = 20 + j8,654 \text{ Ом},$$

где

$$\omega L_{(3)} = 314 \cdot 12,72 \cdot 10^{-3} = 3,994 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{\omega C_{(3)}} = \frac{1}{314 \cdot 88,6 \cdot 10^{-6}} = 35,947 \text{ Ом};$$

$$\omega L_{(5)} = 314 \cdot 12,72 \cdot 10^{-3} = 3,994 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{\omega C_{(5)}} = \frac{1}{314 \cdot 31,8 \cdot 10^{-6}} = 99,852 \text{ Ом}.$$

Действующее и мгновенное значение основной гармоники тока будут соответственно равны:

$$I_{(1)} = \frac{U_{(1)m}}{\sqrt{2}|Z|} = \frac{120}{\sqrt{2}\sqrt{20^2 + (8,654)^2}} = 3,894 \text{ А};$$

$$i_{(1)}(t) = \sqrt{2} \cdot 3,894 \sin(\omega t - \psi_{(1)}),$$

где

$$\psi_{(1)} = \arctg \frac{8,654}{20} = \arctg 0,433 = 23,398^\circ.$$

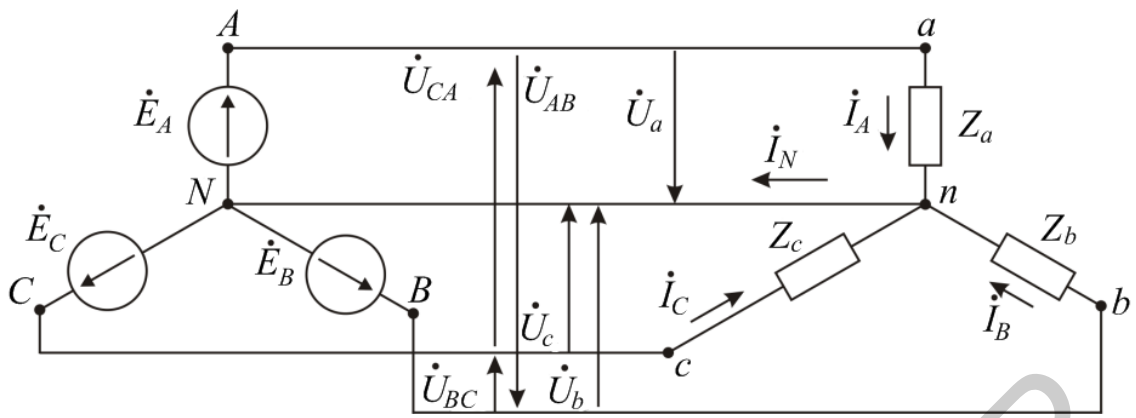
Ответ: $C_{(3)} = 88,6 \text{ мкФ}$, $C_{(5)} = 31,89 \text{ мкФ}$, $I_{(1)} = 3,894 \text{ А}$,

$$i_{(1)}(t) = \sqrt{2} \cdot 3,894 \sin(\omega t - 23,398^\circ).$$

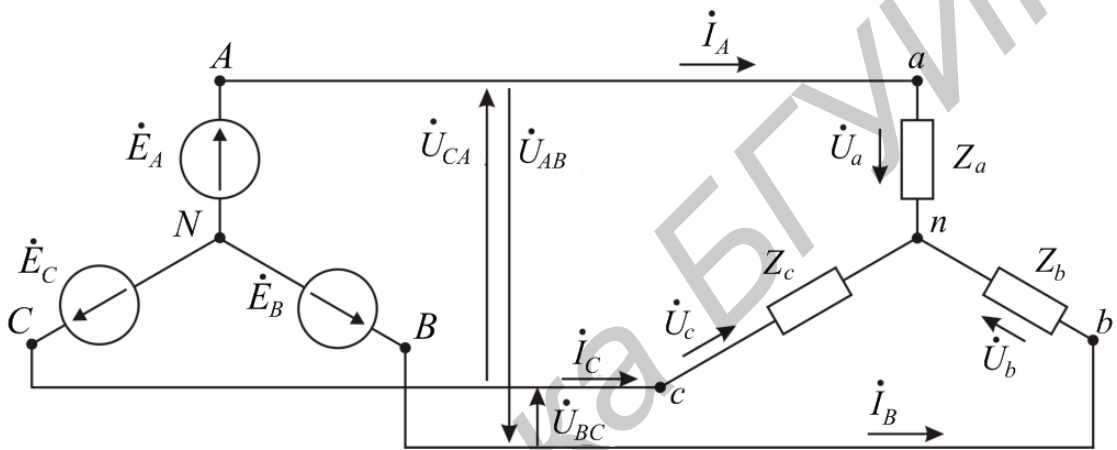
10. Расчет цепей трехфазного тока

10.1. Основные теоретические положения

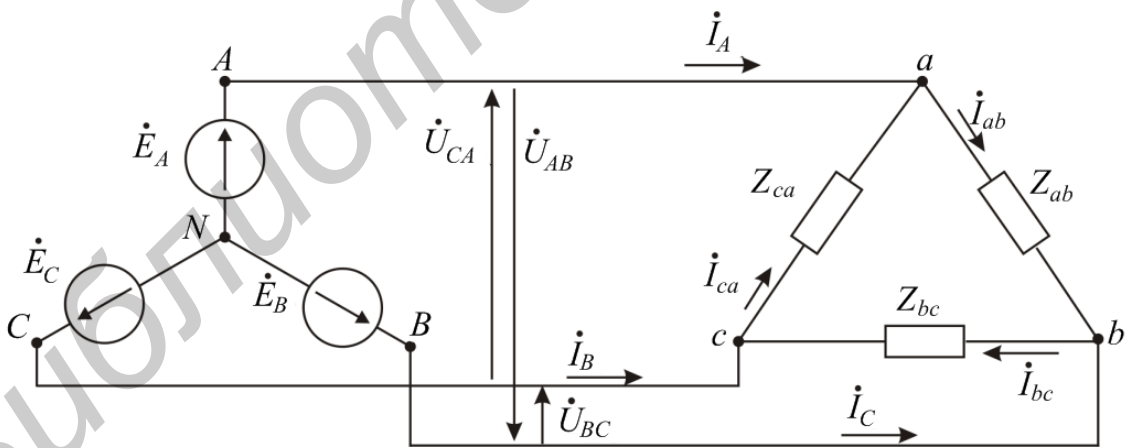
Трёхфазными цепями называют цепи, в которых действуют три источника гармонических колебаний одинаковой амплитуды и частоты с фиксированным сдвигом фаз между ними, равным $2\pi/3$. На рис. 10.1, а – б показаны возможные варианты соединения фаз генератора и фаз нагрузки.



а



б



в

Рис. 10.1

Фазы генератора и нагрузки могут соединяться по схеме «звезда» или «треугольник». Из рис. 10.1 видно, что при всех способах соединения, кроме первого (рис. 10.1, а), требуются только три провода. Их называют фазами линии передачи или линейными проводами. При первом способе соединения ис-

пользуется также четвёртый провод, соединяющий нейтральные точки N (генератора) и n (нагрузки). Его называют *нулевым, или нейтральным проводом*. Напряжения на фазах источника называют *фазными напряжениями генератора или фазными ЭДС, или фазными задающими напряжениями*.

Напряжения и токи фаз нагрузки называют *фазными напряжениями и токами*. Напряжения между линейными проводами и токи в них называют *линейными напряжениями и токами*.

Из рис. 10.1, а видно, что при соединении «звезда – звезда» с нейтральным проводом фазные напряжения равны фазным ЭДС:

$$\dot{U}_a = \dot{E}_A, \dot{U}_b = \dot{E}_B, \dot{U}_c = \dot{E}_C.$$

Линейные напряжения (рис. 10.1, а, б, в) равны

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B, \dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C, \dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A.$$

Из рис. 10.1 и законов Кирхгофа можно установить связь между фазными и линейными напряжениями и токами:

а) при соединении нагрузки по схеме «звезда»:

$$\dot{I}_\phi = \dot{I}_л, \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A;$$

б) при соединении нагрузки по схеме «треугольник»:

$$\dot{U}_\phi = \dot{U}_л, \dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Симметричные трёхфазные цепи

Симметричными называются трёхфазные цепи с одинаковыми по величине и характеру сопротивлений в фазах нагрузки: $\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}$ или $\dot{Z}_{ab} = \dot{Z}_{bc} = \dot{Z}_{ca} = \dot{Z}$.

В силу такой симметрии фазные напряжения и токи получаются равными по амплитуде во всех фазах нагрузки. По фазе же эти напряжения и токи сдвинуты на угол 120° , как и фазные ЭДС. Поэтому в симметричной цепи суммы фазных токов нагрузки равны нулю:

$$\text{– в схеме «звезда» } \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0, \quad (10.1)$$

$$\text{– в схеме «треугольник» } \dot{I}_{AB} + \dot{I}_{BC} + \dot{I}_{CA} = 0. \quad (10.2)$$

Из равенства (10.1) следует, что в симметричной цепи с нейтральным проводом (рис. 10.1, а) ток $\dot{I}_0 = 0$. Таким образом, в симметричной трёхфазной

цепи при соединении «звезда – звезда» нейтральный провод не нужен, и эта схема соединения без нарушения режима работы цепи может быть заменена аналогичной схемой без нейтрального провода (рис. 10.1, б).

Векторная диаграмма фазных напряжений и токов в симметричных трёхфазных цепях получается также симметричной (рис. 10.2).

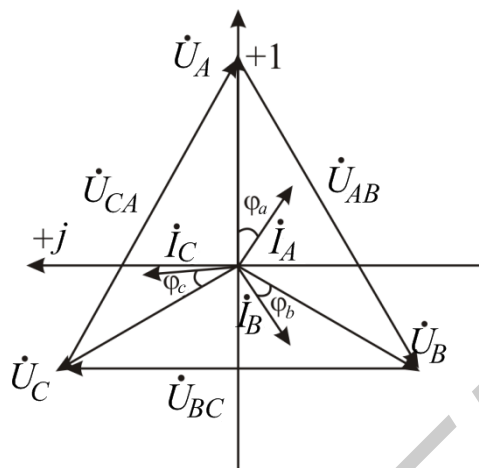


Рис. 10.2

Из векторной диаграммы устанавливают соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами. Из графического построения на рис. 10.2 видно, что $\frac{U_{AB}}{2} = U_A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} U_A$, т. е. в симметричной трёхфазной системе при соединении нагрузки по схеме «звезда»

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}}, \quad (10.3)$$

а при соединении фаз нагрузки по схеме «треугольник»

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}}. \quad (10.4)$$

Из соотношений (10.3) и (10.4) следует, что в симметричных цепях при любом типе соединения фаз нагрузки

$$U_{\text{л}} I_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}} I_{\text{ф}}. \quad (10.5)$$

При соединении фаз нагрузки «звездой» согласно соотношению (10.3) на практике применяются следующие системы напряжений: $U_{\text{л}} = 220 \text{ В}$, если $U_{\text{ф}} = 127 \text{ В}$, и $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$, если $U_{\text{ф}} = 220 \text{ В}$.

Вывод: при расчёте симметричных трёхфазных цепей достаточно рассчитать по закону Ома в комплексной форме ток одной фазы, например «а»,

токи двух остальных фаз будут иметь такое же амплитудное (и действующее) значение, но будут сдвинуты на угол 120° (фаза «с») и 240° (фаза «b»).

Несимметричные трёхфазные цепи

В несимметричных трёхфазных цепях $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$. При этом соединение фаз нагрузки звездой без нейтрального провода (рис. 10.1, б) приводит к неодинаковым по амплитуде фазным напряжениям, что является **недостатком** таких соединений. При наличии нейтрального провода (рис. 10.1, а), сопротивлением которого можно пренебречь, асимметрия нагрузочных сопротивлений не нарушает амплитуд фазных напряжений. При соединении фаз нагрузки треугольником (рис. 10.1, в) амплитуды фазных напряжений несимметричной цепи также получаются одинаковыми.

При отсутствии нейтрального провода или при наличии в нейтральном проводе сопротивления, величиной которого пренебречь нельзя, между точками N и n возникает *напряжение смещения нейтрали*:

$$U_{nN} = \frac{Y_a \dot{E}_A + Y_b \dot{E}_B + Y_c \dot{E}_C}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N}, \quad (10.6)$$

где $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ – фазные ЭДС генератора;

$Y_a; Y_b; Y_c; Y_N$ – комплексные проводимости соответствующих ветвей.

Фазные напряжения приёмника равны:

$$\dot{U}_a = \dot{E}_A - \dot{U}_{nN};$$

$$\dot{U}_b = \dot{E}_B - \dot{U}_{nN};$$

$$\dot{U}_c = \dot{E}_C - \dot{U}_{nN}.$$

Токи приёмника определяют по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{Z_a}, \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{Z_b}, \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_c}{Z_c}.$$

Несимметрия в трёхфазной цепи возникает по следующим причинам:

- неодинаковое сопротивление фаз (несимметричная нагрузка);
- несимметричное короткое замыкание (например, между двумя фазами или фазой и нейтралью);
- размыкание фазы;

– неравенство величин ЭДС и т. п.

10.2. Примеры расчета цепей трехфазного тока

Пример 10.1

Дано: в трехфазной трехпроводной системе нагрузка включена треугольником. Линейное напряжение равно: $U_{\text{л}} = 173 \text{ В}$. Сопротивление каждой фазы нагрузки состоит из последовательно включенных активного сопротивления и емкости, модули сопротивлений которых равны: $R = X_C = 20 \text{ Ом}$. Определить: линейные, фазные токи и напряжения, \tilde{S}, P, Q – мощности в нагрузке.

Решение

Нагрузка включена по типу «треугольник». Линейные напряжения, приложенные к фазам нагрузки, определяются по следующим формулам:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = \dot{U}_{\text{л}} e^{j30^\circ} = 173 e^{j30^\circ} = 149,822 + 86,5j;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{U}_{\text{л}} e^{-j90^\circ} = 173 e^{-j90^\circ} = -173j;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = \dot{U}_{\text{л}} e^{j150^\circ} = 173 e^{j150^\circ} = -149,822 + 86,5j.$$

Определяем токи в фазах приёмника:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_{AB}} = \frac{173 e^{j30^\circ}}{20 - j20} = \frac{173 e^{j30^\circ}}{20\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = 1,58 + 5,91j = 6,12 e^{j75^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{BC}} = \frac{173 e^{-j90^\circ}}{20\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = \frac{173 e^{j30^\circ}}{20\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = 4,33 - 4,33j = 6,12 e^{-j45^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_{CA}} = \frac{173 e^{j150^\circ}}{20\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = -5,91 - 1,58j = 6,12 e^{-j165^\circ} \text{ А}.$$

Определим линейные токи по 1 закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 7,49 - 7,49j = 10,59 e^{j45^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 2,74 - 10,23j = 10,59 e^{-j75^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = -10,23 + 2,74j = 10,59 e^{j165^\circ} \text{ А}.$$

Определим полную \tilde{S} , активную P и реактивную Q мощности в приёмнике:

$$P_{\text{пр}} = P_{AB} + P_{CA} + P_{BC} = |I_{AB}|^2 \cdot R + |I_{CA}|^2 \cdot R + |I_{BC}|^2 \cdot R = 10,59^2 \cdot 20 + 10,59^2 \cdot 20 + 10,59^2 \cdot 20 = 2245 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{пр}} = Q_{AB} + Q_{CA} + Q_{BC} = |I_{AB}|^2 \cdot (-X_C) + |I_{CA}|^2 \cdot (-X_C) + |I_{BC}|^2 \cdot (-X_C) = 10,59^2 \cdot (-20) + 10,59^2 \cdot (-20) + 10,59^2 \cdot (-20) = 2245 \text{ ВАр};$$

$$\tilde{S} = P_{\text{пр}} + jQ_{\text{пр}} = 2245 - j2245 \text{ ВА}.$$

Ответ: $\dot{U}_{AB} = 149,822 + 86,5j$, $\dot{U}_{BC} = -173j$, $\dot{U}_{CA} = -149,822 + 86,5j$,
 $\dot{I}_{AB} = 1,58 + 5,91j \text{ А}$, $\dot{I}_{BC} = 4,33 - 4,33j \text{ А}$,
 $\dot{I}_{CA} = -5,91 - 1,58j \text{ А}$, $\dot{I}_A = 7,49 - 7,49j \text{ А}$,
 $\dot{I}_B = 2,74 - 10,23j \text{ А}$, $\dot{I}_C = -10,23 + 2,74j \text{ А}$, $P_{\text{пр}} = 2245 \text{ Вт}$,
 $Q_{\text{пр}} = 2245 \text{ ВАр}$, $\tilde{S} = 2245 - j2245 \text{ ВА}$.

Пример 10.2

Дано: к трехпроводной сети подключен приёмник, соединённый «звездой», активная мощность которого 2900 Вт, линейное напряжение $U_{\text{Л}} = 220 \text{ В}$ и $\cos \varphi_{\text{H}} = 0,6$. Каждый провод линии, соединяющий генератор и приёмник, имеет активное сопротивление $r_{\text{л}} = 0,6 \text{ Ом}$ и индуктивное сопротивление $x_{\text{л}} = 1 \text{ Ом}$.

Найти напряжение на зажимах генератора (генератор соединён «звездой»), а также его активную и реактивную мощности. Определить падение и потерю напряжения в линии. Построить векторную топографическую диаграмму.

Решение

При симметричной нагрузке напряжение между нейтралью генератора и приёмника равно нулю, поэтому каждую фазу схемы можно рассматривать независимо от других фаз и весь расчёт производить только для одной фазы – например, для фазы А.

Фазный ток приёмника равен линейному току:

$$I_{\text{H}} = \frac{P_{\text{H}}}{\sqrt{3} U_{\text{Л}} \cos \varphi_{\text{H}}} = \frac{2900}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,6} = 12,7 \text{ А}.$$

Фазное напряжение нагрузки:

$$U_{\phi_H} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В.}$$

Сопротивление фаз нагрузки:

$$z_H = \frac{U_{\phi_H}}{I_H} = \frac{12,7}{12,7} = 10 \text{ Ом};$$

$$r_H = z_H \cos \varphi_H = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ Ом};$$

$$x_{L_H} = z_H \sin \varphi_H = 10 \cdot 0,8 = 8 \text{ Ом.}$$

Сопротивление фазы (с учётом сопротивления линии):

$$z_{\phi} = \sqrt{(r_{\text{л}} + r_H)^2 + (x_{\text{л}} + x_{L_H})^2} = \sqrt{(0,6 + 6)^2 + (1 + 8)^2} = 11,16 \text{ Ом.}$$

Фазное напряжение генератора:

$$U_A = Z_{\phi} I_H = 11,15 \cdot 12,7 = 141,73 \text{ В.}$$

Линейное напряжение генератора:

$$U = \sqrt{3} U_A = 245,48 \text{ В.}$$

Падение напряжения в проводе линии:

$$U_{\text{пр}} = Z_{\text{л}} I = \sqrt{r_{\text{л}}^2 + x_{\text{л}}^2} I = \sqrt{0,6^2 + 1^2} \cdot 12,7 = 14,811 \text{ В,}$$

т. е. оно составляет $\frac{14,8}{141,5} \cdot 100\% = 10,5\%$ от фазного напряжения генератора.

Потеря напряжения в линии равна арифметической разности линейных напряжений в начале и конце линии:

$$\Delta U_{\text{л}} = (141,73 - 127)\sqrt{3} = 25,513 \text{ В,}$$

т. е. оно составляет $\frac{25,513}{245,48} \cdot 100\% = 10,4\%$ от линейного напряжения генератора.

Сравнительно высокие значения потерь напряжения обусловлены преднамеренно завышенными величинами I_2 и $x_{\text{л}}$, взятыми для удобства построения векторной диаграммы напряжений.

Активная мощность генератора:

$$P_{\Gamma} = 3(r_{\text{H}} + r_{\text{Л}})I_{\text{H}}^2 = 3,19 \text{ кВт.}$$

Полная мощность генератора:

$$S_{\Gamma} = \sqrt{3}UI = \sqrt{3} \cdot 245,48 \cdot 12,7 = 5393 \text{ ВА} = 5,393 \text{ кВА.}$$

Реактивная мощность генератора:

$$Q_{\Gamma} = \sqrt{S_{\Gamma}^2 - P_{\Gamma}^2} = \sqrt{(5,393)^2 - (3,19)^2} = 4,349 \text{ кВАр.}$$

Построение векторной диаграммы начинаем с изображения фазных напряжений приёмника, которые образуют симметричную звезду.

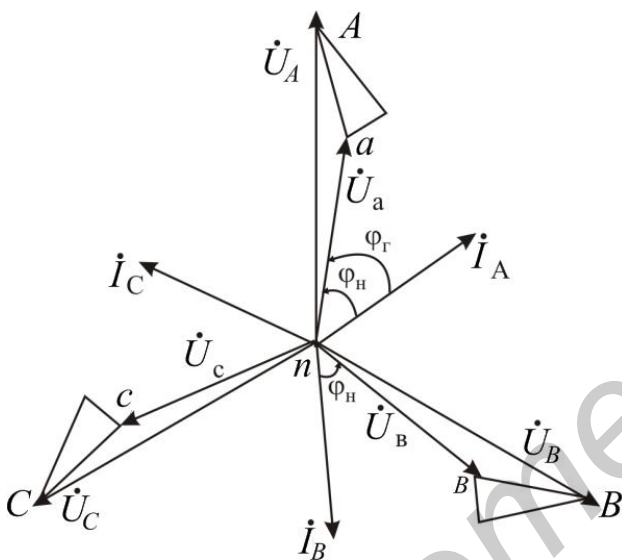


Рис. 10.3

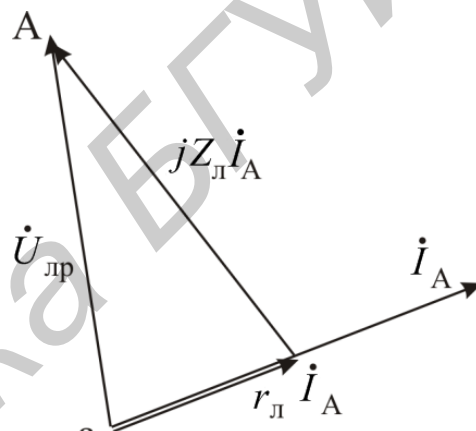


Рис. 10.4

Вектор фазного напряжения нагрузки \dot{U}_a (рис. 10.3) и вектор тока \dot{I}_A сдвинуты относительно друг друга на угол $\varphi_{\text{H}} = 53^\circ$.

Прибавляя к вектору \dot{U}_a вектор падения напряжения в активном сопротивлении провода линии и вектор индуктивного падения напряжения, модули которых соответственно равны $r_{\text{Л}}I_A = 0,6 \cdot 12,7 = 7,62 \text{ В}$ и $x_{\text{Л}}I_A = 1 \cdot 12,7 = 12,7 \text{ В}$, получим вектор фазного напряжения генератора U_A .

Вектор $\dot{U}_{\text{лр}}$, равный сумме векторов $r_{\text{Л}}\dot{I}_A$ и $jx_{\text{Л}}\dot{I}_A$, изображает вектор падения напряжения в проводе линии (рис. 10.4). Аналогично стоятся векторы напряжений двух других фаз.

Ответ: напряжение на зажимах генератора $U = 245,48$ (линейное),
 $U_{\text{пр}} = 14,811$ В, $\Delta U_{\text{Л}} = 25,513$ В, $P_{\text{Г}} = 3,19$ кВт, $Q_{\text{Г}} = 4,349$ кВАр, $S_{\text{Г}} = 5,399$ кВАр.

Пример 10.3

Дано: для определения последовательности фаз трёхфазной системы с линейным напряжением 220 В воспользовались фазоуказателем (рис. 10.5), состоящим из двух одинаковых ламп и конденсатора. Сопротивления лампы и конденсатора подобраны равными.

Определить напряжение на зажимах ламп. Построить топографическую диаграмму.

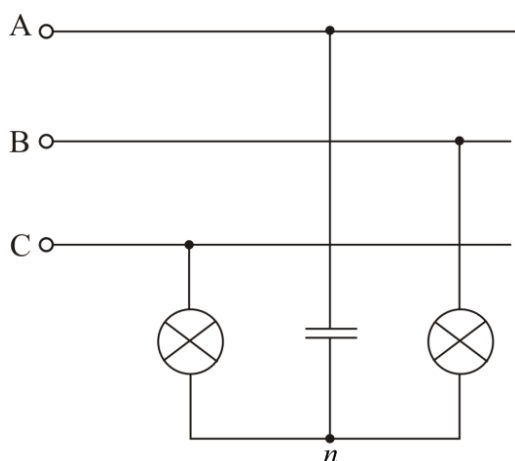


Рис. 10.5

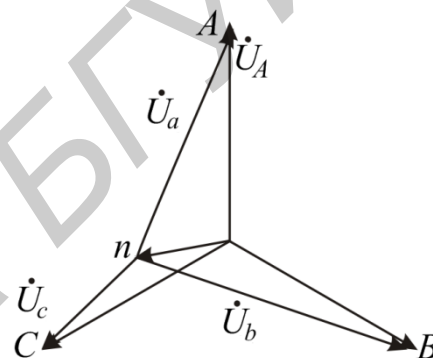


Рис. 10.6

Решение

Фазоуказатель представляет собой несимметричный трёхфазный приёмник, соединённый «звездой».

Определим смещение нейтрали фазоуказателя:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \dot{Y}_a + \dot{U}_B \dot{Y}_b + \dot{U}_C \dot{Y}_c}{\dot{Y}_a + \dot{Y}_b + \dot{Y}_c}.$$

Напряжение фазы А генератора составит

$$\dot{U}_A = \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} e^{j0} = \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В.}$$

Тогда напряжения других фаз генератора будут равны:

$$\dot{U}_B = U e^{-j120^\circ} = 127 e^{-j120^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_C = U e^{j120^\circ} = 127 e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Комплексные проводимости фаз:

$$\dot{Y}_a = \frac{1}{-jX_c}; \dot{Y}_b = \dot{Y}_c = \frac{1}{r}.$$

Тогда

$$\dot{U}_{nN} = U \frac{j-1}{j+2} = U(-0,2 + j0,6) = 0,632Ue^{j108^\circ}.$$

На рис. 10.6 построена топографическая диаграмма фазоуказателя. Её построение начинаем с векторов фазных ЭДС генератора, которые образуют симметричную звезду. Затем откладываем вектор \dot{U}_{nN} . Согласно векторной диаграмме фазные напряжения приёмника равны:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN} = (1,2 - j0,6)U = 1,345Ue^{-j26^\circ};$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN} = (-0,3 - j1,465)U = 1,495Ue^{-j101^\circ};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN} = (-0,3 + j0,265)U = 0,4Ue^{-j138^\circ}.$$

Напряжения на зажимах ламп:

$$U_b = 1,495U = 1,5 \cdot 127 = 190 \text{ В};$$

$$U_c = 0,4U = 0,4 \cdot 127 \approx 51 \text{ В}.$$

Следовательно, лампа фазы «b» будет гореть ярче лампы фазы «c», на чём и основано использование фазоуказателя.

Ответ: $U_b = 190 \text{ В}$, $U_c = 51 \text{ В}$.

Пример 10.4

Дано: линейное напряжение источника питания $U = 220 \text{ В}$, $r_1 = 4 \text{ Ом}$; $x_1 = 3 \text{ Ом}$; $r_2 = 5 \text{ Ом}$; $r_3 = 3 \text{ Ом}$; $x_3 = 4 \text{ Ом}$. Найти фазные и линейные токи схемы (рис. 10.7). Определить показания ваттметров и построить векторную диаграмму.

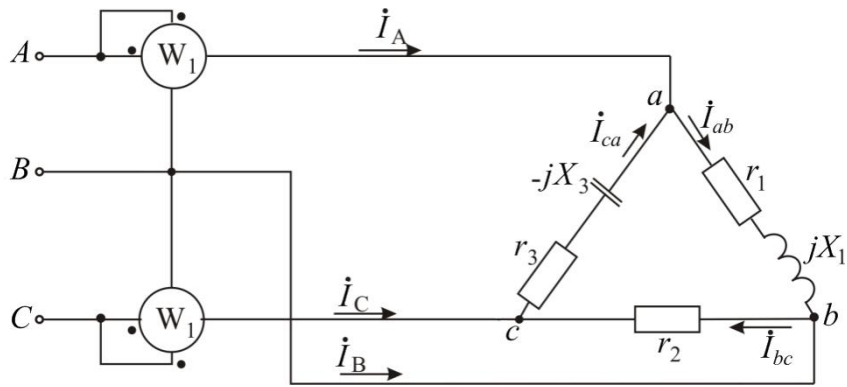


Рис. 10.7

Решение

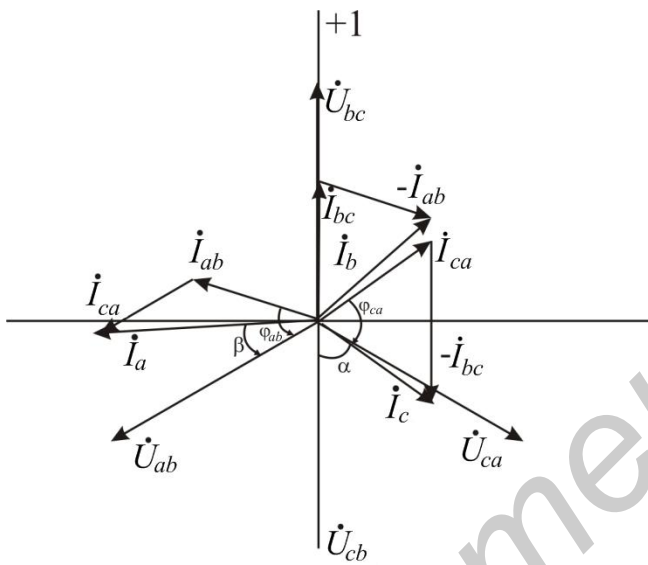


Рис. 10.8

Изобразим векторы линейных напряжений \dot{U}_{ab} , \dot{U}_{bc} , \dot{U}_{ca} в виде звезды (рис. 10.8). Вектор \dot{U}_{bc} направим по оси действительных чисел. Тогда комплексы векторов линейных напряжений будут равны:

$$\dot{U}_{bc} = 220e^{j0^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ab} = 220e^{j120^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ca} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}.$$

Комплексные сопротивления фаз приёмника:

$$Z_{ab} = r_1 + jx_1 = 4 + j3 = 5e^{j36^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{bc} = r_2 = 5 \text{ Ом};$$

$$Z_{ca} = r_3 - jx_3 = 3 - j4 = 5e^{-j53^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексные фазные и линейные токи:

$$\dot{i}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{5e^{j36^\circ}} = 44e^{j84^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{220}{5} = 44 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{5e^{-j53^\circ}} = 44e^{-j67^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = 44e^{j84^\circ} - 44e^{-j67^\circ} = 85,197e^{j98^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = 44 - 44e^{j84^\circ} = 58,883e^{-j48^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = 44e^{-j67^\circ} - 44 = 48,57e^{-j123^\circ} \text{ A}.$$

Модули токов:

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 44 \text{ A}; I_A = 85,197 \text{ A}; I_B = 58,883 \text{ A}; I_C = 48,57 \text{ A}.$$

Правильность решения можно проверить путём подстановки комплексных токов \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C в уравнение $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Показания ваттметров:

$$P_2 = U_{ab} I_A \cos \beta = 220 \cdot 85,197 \cos 22^\circ = 17380 \text{ Вт} = 17,38 \text{ кВт},$$

где β – угол между векторами напряжения \dot{U}_{ab} и тока \dot{I}_A ;

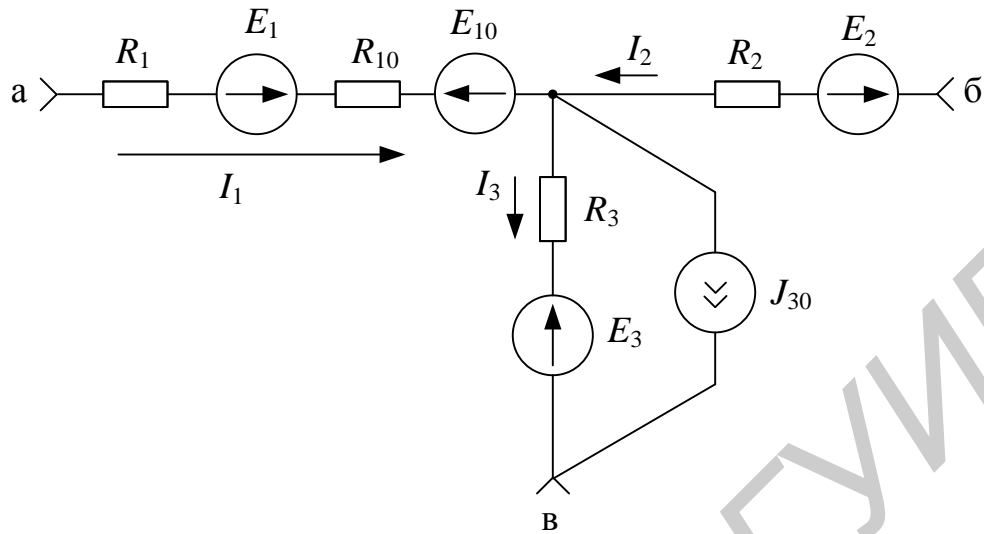
$$P_1 = U_{cb} I_C \cos \alpha = 220 \cdot 48,57 \cos 57^\circ = 5820 \text{ Вт} = 5,82 \text{ кВт},$$

где α – угол между векторами напряжения \dot{U}_{cb} и тока \dot{I}_C .

Ответ: $\dot{I}_{ab} = 44e^{j84^\circ} \text{ A}$, $\dot{I}_{bc} = 44 \text{ A}$, $\dot{I}_{ca} = 44e^{-j67^\circ} \text{ A}$, $\dot{I}_A = 85,197e^{j98^\circ}$,
 $\dot{I}_B = 58,883e^{-j48^\circ} \text{ A}$, $\dot{I}_C = 48,57e^{-j123^\circ} \text{ A}$, $P_1 = 5,82 \text{ кВт}$, $P_2 = 17,38 \text{ кВт}$.

11. Задачи для самостоятельного решения

Задача №1



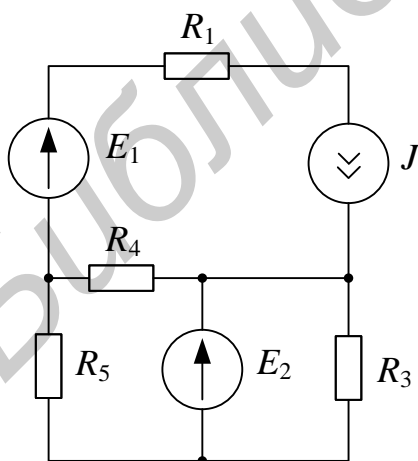
Дано:

$$I_1 = 1 \text{ A}; I_3 = 3 \text{ A}; I_2 = 3 \text{ A}; E_1 = 20 \text{ В}; R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}; E_{10} = 40 \text{ В}; \\ R_3 = 20 \text{ Ом}; E_2 = 20 \text{ В}; R_{10} = 40 \text{ Ом}; E_3 = 60 \text{ В}; I_{30} = 1 \text{ A}.$$

Определить напряжение между узлами $U_{аб}$, $U_{ва}$, $U_{бс}$, $U_{вб}$.

Ответ: $U_{аб} = 20 \text{ В}; U_{ва} = -190 \text{ В}; U_{бс} = 50 \text{ В}; U_{вб} = -170 \text{ В}.$

Задача №2



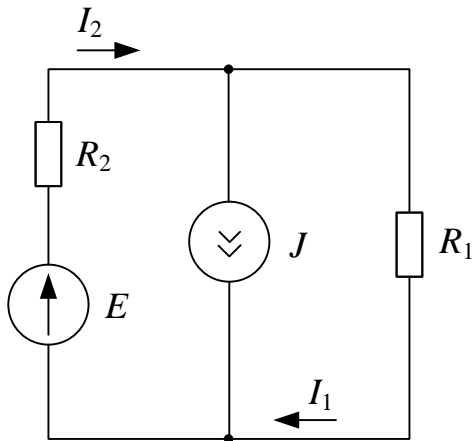
Дано:

$$E_1 = 60 \text{ В}; E_2 = 50 \text{ В}; J = 10 \text{ A}; \\ R_1 = 5 \text{ Ом}; R_3 = 10 \text{ Ом}; R_4 = 2 \text{ Ом}; \\ R_5 = 13 \text{ Ом}.$$

Определить токи, используя метод наложения.

Ответ: $I_1 = 10 \text{ A}; I_2 = 5 \text{ A}; I_3 = 5 \text{ A}; \\ I_4 = 12 \text{ A}; I_5 = 2 \text{ A}; I = 5 \text{ A}.$

Задача №3



Дано:

$$E = 20 \text{ В}; J = 30 \text{ А}; R_1 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 2 \text{ Ом}.$$

Определить токи методом двух узлов.

Ответ: $-8 \text{ А}; 22 \text{ А}$.

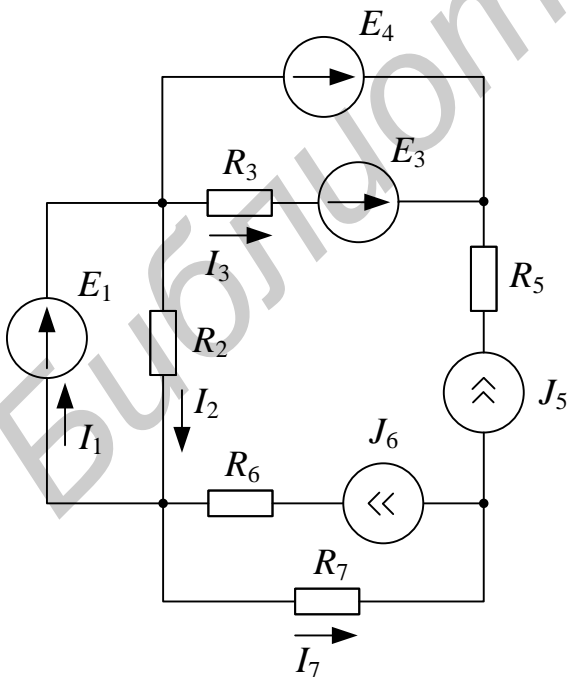
Задача №4

Найти токи I_1, I_2 в цепи (см. задачу №3):

- 1) предварительно преобразовав ЭДС в источник тока;
- 2) предварительно преобразовав источник тока в источник ЭДС.

Показать, что в п. 1 и 2 мощности, отдаваемые источниками E и J , нельзя определить как мощности источников после преобразования цепи.

Задача №5



Дано:

$$E_1 = 20 \text{ В}; E_3 = 40 \text{ В}; E_4 = 30 \text{ В};$$

$$I_6 = 2 \text{ А}; I_5 = 1 \text{ А}; R_2 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 10 \text{ Ом}; R_5 = 5 \text{ Ом}; R_7 = 20 \text{ Ом};$$

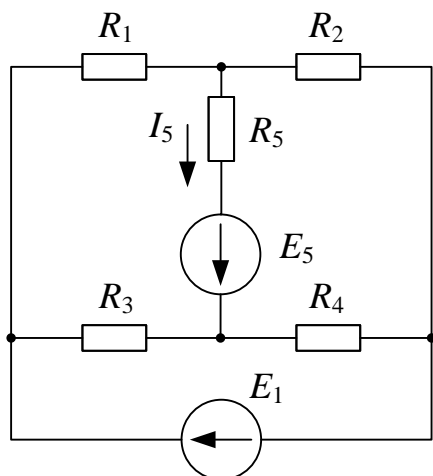
$$R_6 = 5 \text{ Ом}.$$

Определить токи в схеме. Составить и рассчитать баланс мощностей.

Ответ: $I_1 = 3 \text{ А}; I_2 = 4 \text{ А}; I_3 = 1 \text{ А};$

$I_4 = 2 \text{ А}; I_7 = 3 \text{ А}; P = 395 \text{ Вт}.$

Задача № 6



Дано:

$$E_1 = 120 \text{ В}; E_5 = 16 \text{ В}; R_1 = 4 \text{ Ом};$$

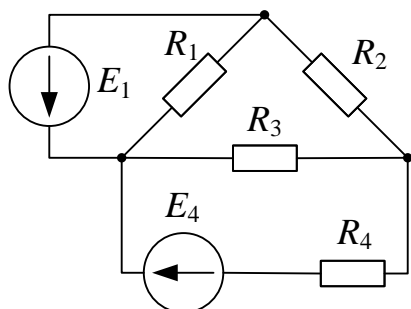
$$R_2 = 6 \text{ Ом}; R_3 = 12 \text{ Ом}; R_4 = 8 \text{ Ом};$$

$$R_5 = 0,8 \text{ Ом}.$$

Определить ток I_5 по методу эквивалентного генератора напряжения.

Ответ: $I_5 = 5 \text{ А}.$

Задача №7



Дано:

$$E_1 = 3,5 \text{ В}; E_4 = 10,5 \text{ В}; R_1 = 2 \text{ Ом};$$

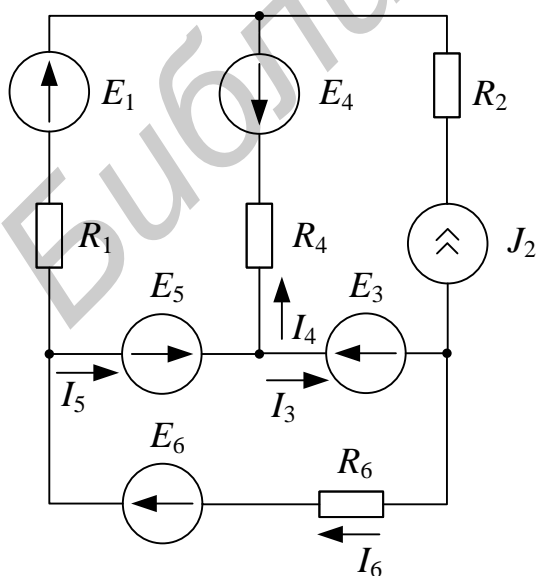
$$R_2 = 3 \text{ Ом}; R_3 = 2 \text{ Ом}; R_4 = 1,5 \text{ Ом};$$

$$r_{01} = 0,1 \text{ Ом}; r_{04} = 0.$$

Определить ток I_4 по методу эквивалентного генератора.

Ответ: $I_4 = 2,5 \text{ А}.$

Задача №8



Дано:

$$E_1 = E_4 = E_6 = 20 \text{ В};$$

$$E_5 = E_3 = 40 \text{ В};$$

$$R_1 = R_4 = R_2 = 20 \text{ Ом};$$

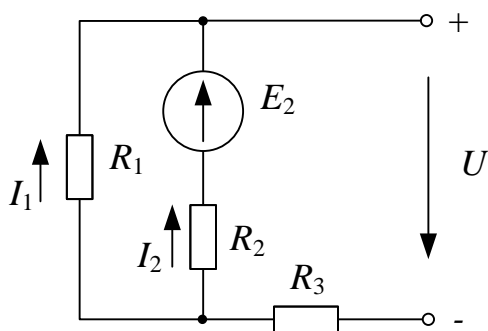
$$R_6 = 40 \text{ Ом};$$

$$I_2 = 2 \text{ А}.$$

Определить ток I_1 методом эквивалентного генератора напряжения.

Ответ: $U_{\text{ХХ}} = 40 \text{ В}; R_{\text{ГЕН}} = 20 \text{ Ом};$
 $I_1 = 1 \text{ А}.$

Задача №9



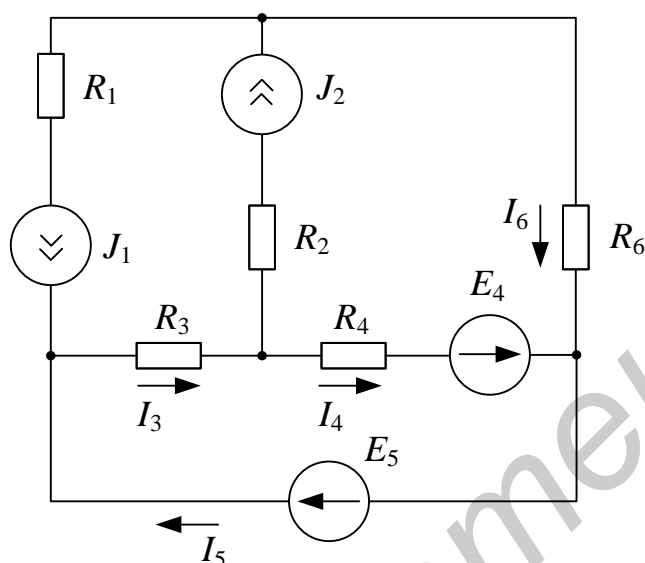
Дано:

$$U = 20 \text{ В}; E_2 = 100 \text{ В}; R_1 = 10 \text{ Ом}; \\ R_2 = 20 \text{ Ом}.$$

Определить все токи, используя законы Кирхгофа.

Ответ: $I_1 = -2,8 \text{ А}; I_2 = 3,6 \text{ А}; I_3 = 0,8 \text{ А}.$

Задача №10



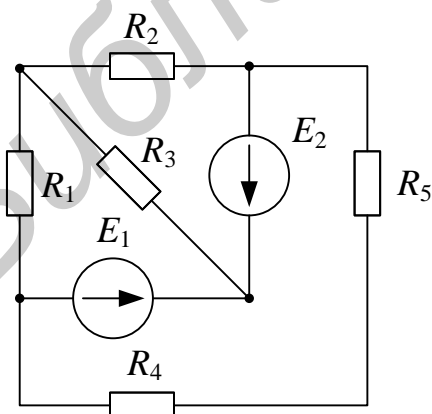
Дано:

$$I_1 = 1 \text{ А}; I_2 = 2 \text{ А}; E_4 = 10 \text{ В}; \\ E_5 = 20 \text{ В}; \\ R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}; R_3 = R_6 = 5 \text{ Ом}; \\ R_4 = 10 \text{ Ом}.$$

Определить токи в схеме. Составить и рассчитать баланс мощностей.

Ответ: $I_3 = 3,333 \text{ А}; I_4 = 1,333 \text{ А}; I_5 = 2,333 \text{ А}; I_6 = 1 \text{ А}; P = 128,32 \text{ Вт}.$

Задача №11



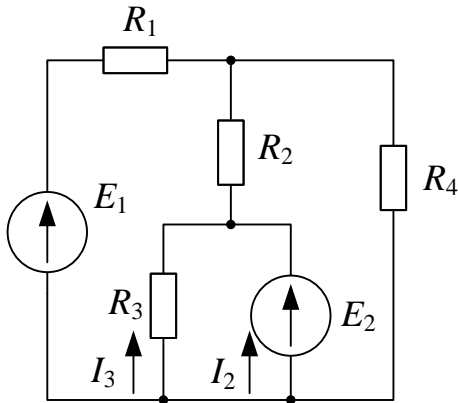
Дано:

$$E_1 = 22 \text{ В}; E_2 = 10 \text{ В}; R_1 = 6 \text{ Ом}; \\ R_2 = 3 \text{ Ом}; R_3 = 5 \text{ Ом}; \\ R_4 = 3,5 \text{ Ом}; R_5 = 2,5 \text{ Ом}.$$

Определить ток I_3 по методу эквивалентного генератора напряжения.

Ответ: $I_3 = 2 \text{ А}.$

Задача №12



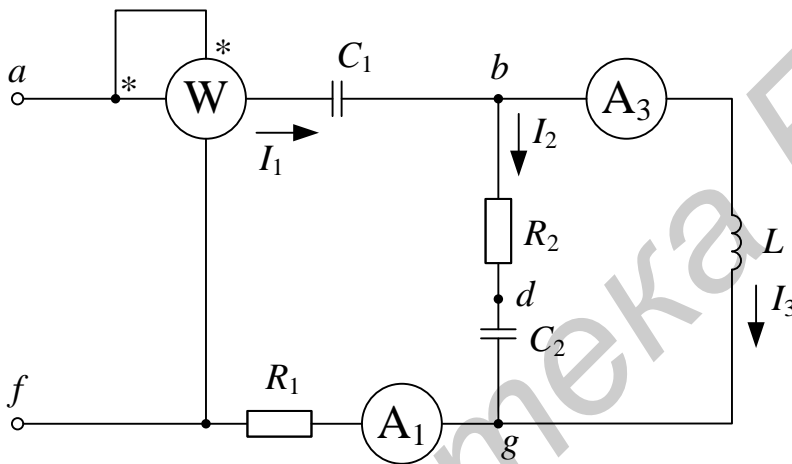
Дано:

$$E_1 = 125 \text{ В}; \quad E_2 = 120 \text{ В}; \quad R_1 = 40 \text{ Ом}; \\ R_2 = 36 \text{ Ом}; \quad R_3 = 60 \text{ Ом}; \quad R_4 = 60 \text{ Ом}.$$

Определить ток I_2 по методу наложения.

Ответ: $I_2 = 2,75 \text{ А}$.

Задача №13



Дано:

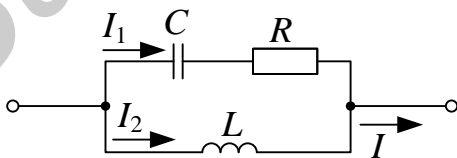
$$I_2 = 5 \text{ А}; \quad R_1 = 22 \text{ Ом}; \\ R_2 = 10 \text{ Ом}; \quad \frac{1}{\omega C_2} = 10 \text{ Ом}; \\ \omega L = 10 \text{ Ом}.$$

Определить напряжение на входе и показания приборов:

- 1) построив топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов без аналитического расчета цепи комплексным методом;
- 2) расчетным методом.

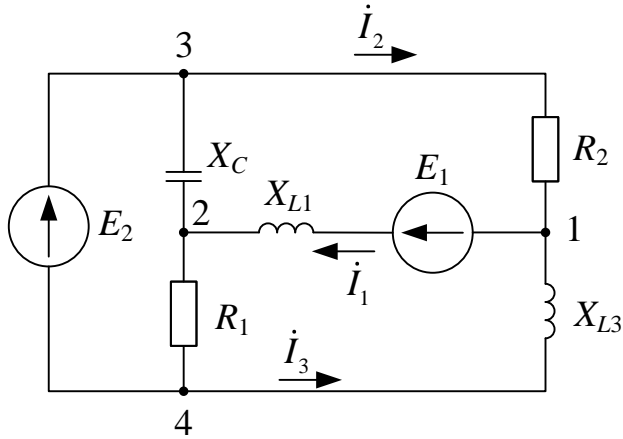
Ответ: $U = 200 \text{ В}; \quad I_3 = 7,07 \text{ А}; \quad I_1 = 5 \text{ А}; \quad P_\omega = 800 \text{ Вт}$.

Задача №14



Цепь находится в режиме резонанса; при этом токи $I_1 = 7 \text{ А}; \quad I = 3,6 \text{ А}$. Определить ток I_2 . Построить векторную диаграмму.

Ответ: $I_2 = 6 \text{ А}$.

Задача №15

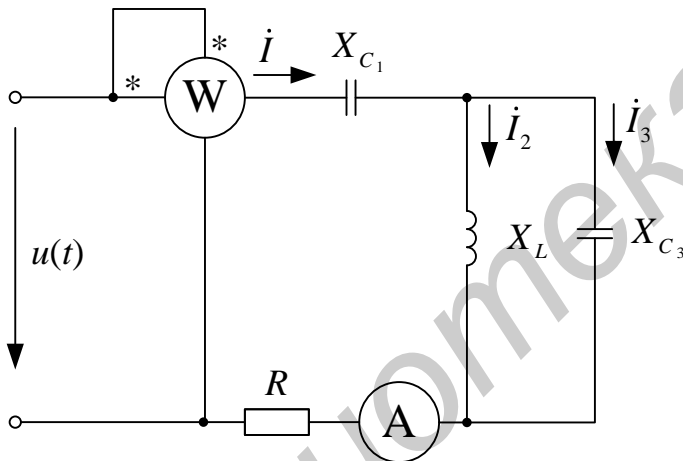
Дано:

$E_1 = E_2 = 50 \text{ В}$; ЭДС E_2 отстает по фазе от ЭДС $E_1 = E_1$ на 90° .

Определить:

- 1) комплекс тока I_1 по теореме об эквивалентном генераторе напряжения.
- 2) зная ток I_1 , найти I_2 и I_3 .
- 3) построить топографическую диаграмму для режима, когда ветвь с ЭДС E_1 отключена и найти по диаграмме U_{12} .

Ответ: $5\sqrt{2}e^{-j45} \text{ А}$; $5e^{-j90} \text{ А}$; 5 А ; 0 В .

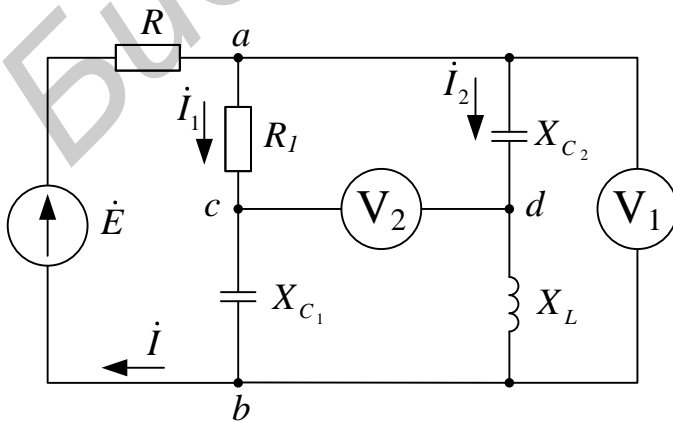
Задача №16

Дано:

$u(t) = 35\sqrt{2} \sin \omega t_1 \text{ В}$;
 $f = 50 \text{ Гц}$; $X_{C1} = 2,25 \text{ Ом}$;
 $X_{C3} = 18 \text{ Ом}$; $X_L = 2 \text{ Ом}$;
 $R = 4,375 \text{ Ом}$.

Определить показания приборов; токи I_1 , I_2 ; напряжения на емкостях. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Ответ: $P_W = 220 \text{ Вт}$; $I = 8 \text{ А}$; $I_1 = 1 \text{ А}$; $I_2 = 9 \text{ А}$; $U_C = 18 \text{ В}$.

Задача №17

Дано:

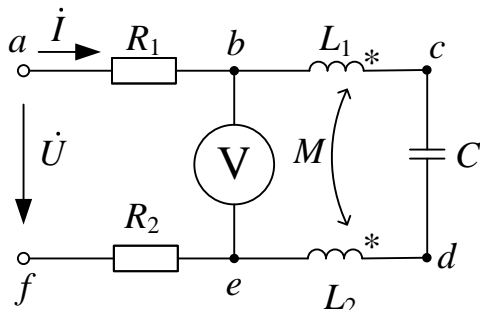
$I_1 = j2,5 \text{ А}$; $R = 10 \text{ Ом}$;
 $R_1 = 6 \text{ Ом}$; $X_{C1} = 8 \text{ Ом}$;
 $X_{C2} = 20,5 \text{ Ом}$; $X_L = 8 \text{ Ом}$.

1. Построить топографическую диаграмму и найти по ней показания вольтметров.

2. Применяя свойства линейности, найти показания вольтметра при ЭДС $e = 64 \sin(\omega t + 90^\circ)$ В.

Ответ: 1) 25 В; 34,2 В; 2) 20 В; 27,4 В.

Задача №18



Дано:

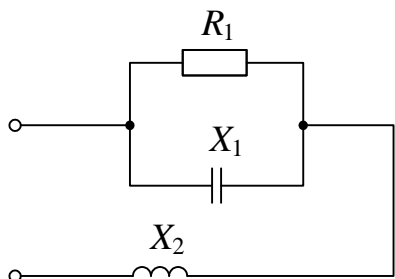
$U = 120$ В; $f = 0,5$ кГц; $R_1 = 6$ Ом;

$R_2 = 8$ Ом; $L_1 = L_2 = 15$ мГн; $M = 5$ мГн.

Определить, при какой емкости C в цепи будет резонанс. Для режима резонанса построить топографическую диаграмму и найти показания вольтметра.

Ответ: $C = 5$ мкФ; $U = 0$.

Задача №19



Дано:

$R_1 = 10$ Ом, $X_1 = 10$ Ом.

Определить, при каком значении сопротивления X_2 в цепи наступит резонанс напряжений.

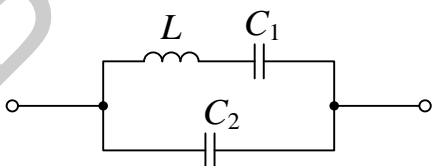
Ответ: $X_2 = 5$ Ом.

Задача №20

Определить сопротивление потерь последовательного колебательного контура, если известно, что $f_0 = 200$ кГц, $C = 1000$ пФ, абсолютная полоса пропускания $S_A = 10$ кГц.

Ответ: $R = 40$ Ом.

Задача №21



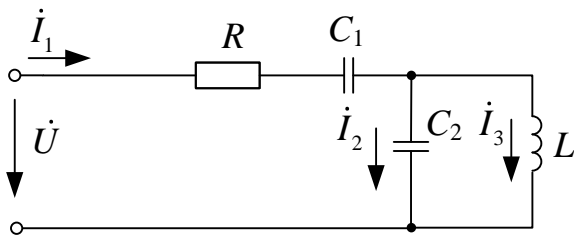
Дано:

Контур находится в режиме резонанса токов. Определить резонансную частоту контура, если $L = 10$ мкГн,

$C_1 = C_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ мкФ.

Ответ: $\omega = 10^7$ с⁻¹.

Задача №22



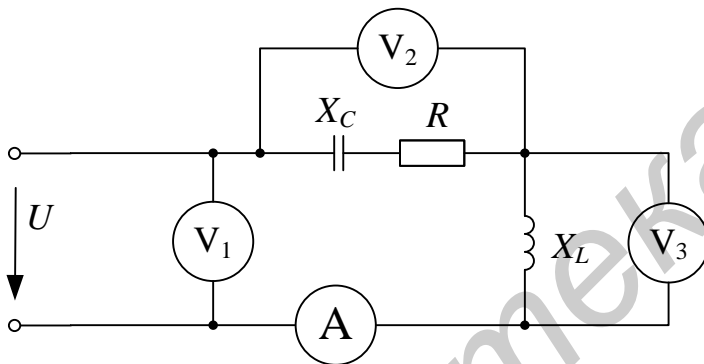
Дано: $R = 20 \text{ Ом}$, $C_1 = C_2 = 0,2 \text{ мкФ}$,
 $L = 0,5 \text{ мГн}$, $\dot{U} = 10 \text{ В}$.

Определить:

- 1) частоту ω_1 , при которой наступает резонанс напряжений, частоту ω_2 , при которой наступает резонанс токов;
- 2) токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 при резонансе напряжений.

Ответ: $\omega_1 = 10^5 \text{ с}^{-1}$.

Задача №23



Дано:

В цепи резонанс напряжений.

Приборы показали:

$$V_1 \rightarrow U_1 = 100 \text{ В};$$

$$V_3 \rightarrow U_3 = 80 \text{ В};$$

$$A \rightarrow I = 10 \text{ А}.$$

Определить показания вольтметра V_2 , а также параметры цепи R , X_L , X_C .

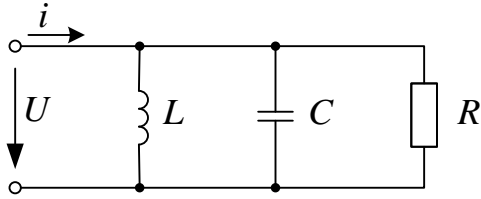
Ответ: $R = 10 \text{ Ом}$; $X_L = X_C = 8 \text{ Ом}$; $U_2 = \frac{128}{\sqrt{2}} \text{ В}$.

Задача №24

Определить: 1) ток I_{m_0} (в мА); 2) амплитуду ЭДС (в В) последовательного колебательного контура, настроенного в резонанс, если мощность, отдаваемая источником ЭДС в настроенный контур, $P = 50 \text{ мВт}$; $U_{mC_0} = 60 \text{ В}$; $L = 180 \text{ мкГн}$; $C = 500 \text{ пФ}$.

Ответ: $I_{m_0} = 100 \text{ мА}$; $E_m = 1 \text{ В}$.

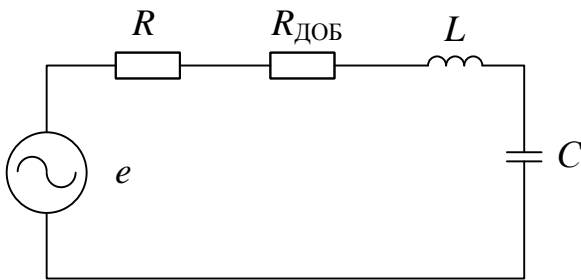
Задача №25



Определить мгновенное значение тока i в неразветвленной части схемы замещения параллельного колебательного контура, если $U(t) = 141\sin(\omega t + 15^\circ)$, $R = X_L = X_C = 10 \text{ Ом}$.

Ответ: $i(t) = 14,1\sin(\omega t + 15^\circ) \text{ А}$.

Задача №26



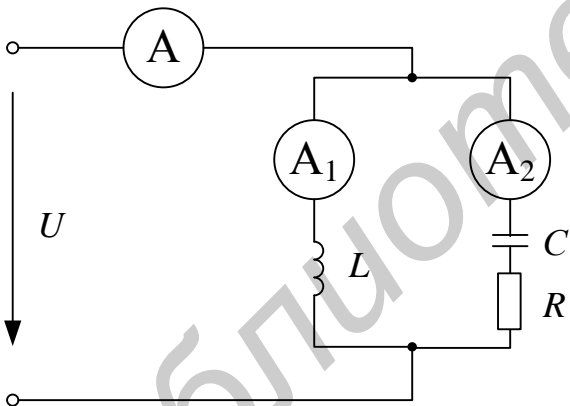
Дано:

$L = 0,1 \text{ мГн}$; $R = 2,5 \text{ Ом}$;
 $C = 2500 \text{ пФ}$; $R_{\text{доб}} = 0$.

Определить: 1) характеристическое сопротивление (в Ом); 2) добавочное сопротивление $R_{\text{доб}}$ (в Ом), при котором полоса пропускания увеличится в 3 раза ($S_{A_2} = 3S_{A_1}$).

Ответ: $\rho = 200 \text{ Ом}$; $r_{\text{доб}} = 5 \text{ Ом}$.

Задача №27

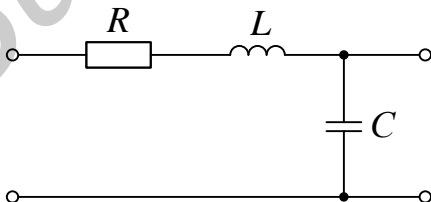


Дано:

В цепи наблюдается резонанс токов. Амперметр A_1 показывает ток $I_1 = 6 \text{ А}$, амперметр A показывает ток $I = 3,6 \text{ А}$. Определить показание амперметра A_2

Ответ: $I_2 = 7 \text{ А}$.

Задача №28

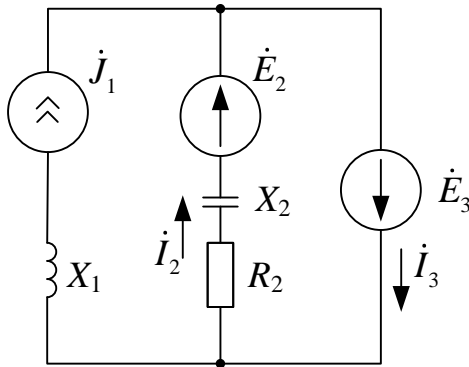


Дано:

При резонансе ток в цепи равен $0,1 \text{ А}$, при напряжении на входе 12 В . Добротность контура $Q = 3$. Определить напряжение на всех элементах и ток в цепи при $\omega = 2\omega_0$ и том же напряжении на входе цепи.

Ответ: $I = 0,022 \text{ А}$; $U_L = 15,84 \text{ В}$; $U_C = 3,96 \text{ В}$.

Задача №29



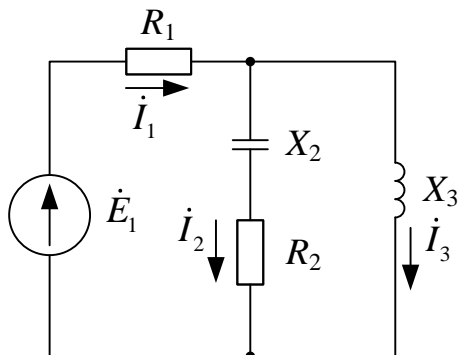
Дано:

$$\dot{J}_1 = 5e^{j90^\circ} \text{ А}; \dot{E}_2 = 10 \text{ В}; \dot{E}_3 = j10 \text{ В}; \\ X_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}; X_2 = 4 \text{ Ом}.$$

Определить токи в схеме. Составить и рассчитать баланс мощностей.

Ответ: $\dot{I}_2 = j2,5 \text{ А}; \dot{I}_3 = j7,5 \text{ А};$
 $P = 25 \text{ Вт}; Q = 75 \text{ ВАр}.$

Задача №30



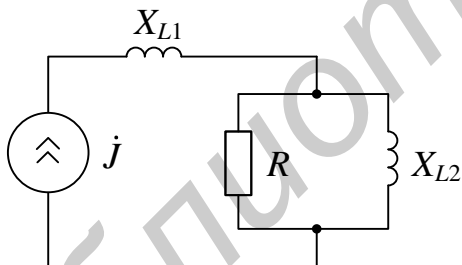
Дано:

$$R_1 = 2 \text{ Ом}; R_2 = X_2 = 4 \text{ Ом}; X_3 = 4 \text{ Ом}; \\ \dot{I}_3 = 1,961e^{-j78,96^\circ} \text{ А}.$$

Определить величину источника ЭДС \dot{E}_1 .

Ответ: $\dot{E}_1 = 8,905e^{j4,96^\circ} \text{ В}.$

Задача №31



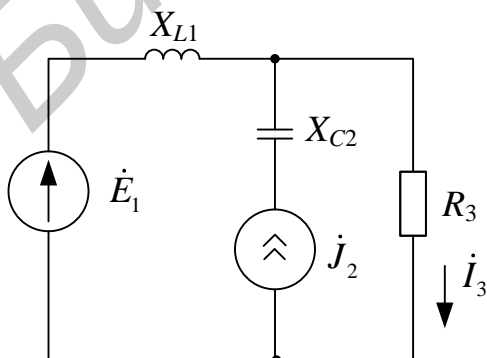
Дано:

$$\dot{J} = 1e^{j90^\circ} \text{ А}; X_{L1} = 20 \text{ Ом}; \\ X_{L2} = R = 10 \text{ Ом}.$$

Составить и рассчитать баланс мощностей.

Ответ: $P = 5 \text{ Вт}; Q = 25 \text{ ВАр}.$

Задача №32



Дано: $\dot{E}_1 = 10e^{j90^\circ} \text{ В}; \dot{I}_2 = 0,5 \text{ А};$

$$X_{L1} = 20 \text{ Ом}; X_{C2} = 10 \text{ Ом}; R_3 = 20 \text{ Ом}$$

Определить ток \dot{I}_3 методом эквивалентного генератора и записать его мгновенное значение.

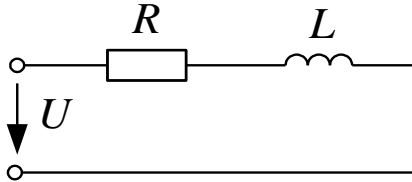
Ответ: $\dot{I}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ} \text{ А};$

$$i_3(t) = 1\sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А}.$$

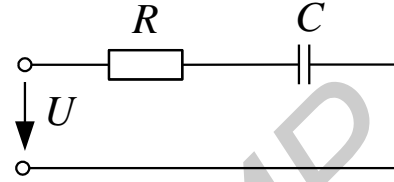
Задача №33

Напряжение на входе каждой из схем $u = 50 + 100\sin \omega t + 40\sin 3\omega t$ В.

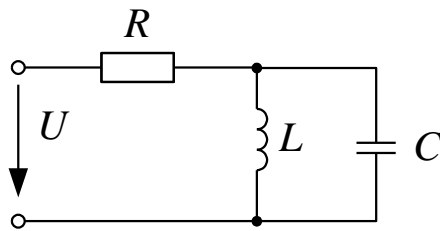
Сопротивления для основной гармоники $\omega L = R = 10$ Ом; $\frac{1}{\omega C} = 90$ Ом.



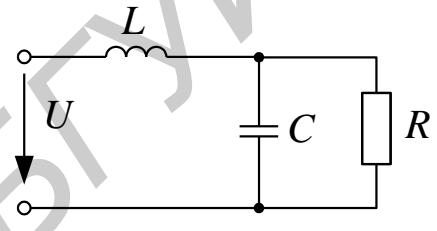
а



б



в



г

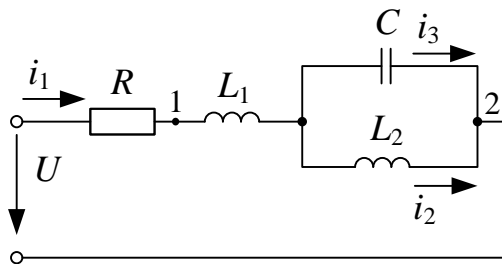
Определить действующие значения тока источника и реактивную мощность цепи (а – г).

Ответ: а) 7,13 А; 274 ВАр; б) 1,19 А; -79 ВАр; в) 6,85А; 247 ВАр; г) 7,35 А; 278 ВАр.

Задача №34

К зажимам цепи подведено напряжение: $u(t) = 300\sin \omega t + 200\sin 3\omega t$, В.

Параметры цепи: $r = \omega L_1 = 10$ Ом, $\omega L_2 = \frac{1}{\omega C} = 80$ Ом. Определить действующие значения всех токов и мгновенное значение напряжение между точками 1 и 2.



Ответ: $I_1 = 14,1$ А, $I_2 = 3,18$ А, $I_3 = 16$ А, $u_{12}(t) = 300\sin \omega t$ В.

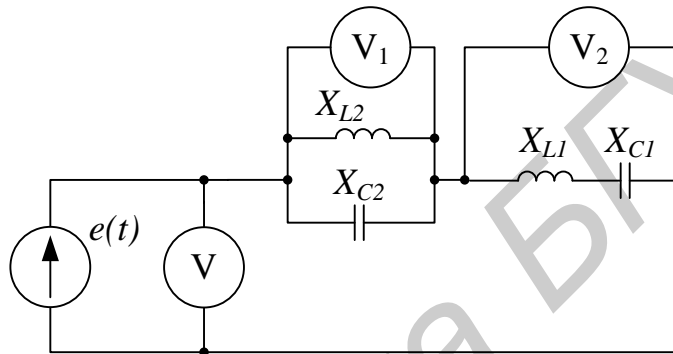
Задача №35

В неразветвлённой цепи переменного тока протекает периодический несинусоидальный ток $i(t) = 141\sin\omega t + 84,6\sin 3\omega t + 56,4\sin 5\omega t$ А. Определить действующее значение несинусоидального тока.

Ответ: $I = 123,29$ А.

Задача №36

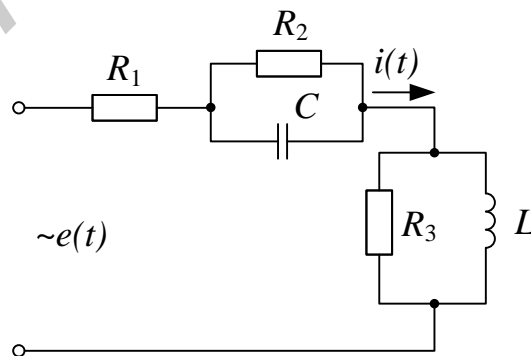
В данной ниже схеме определить показания приборов, если $X_{L1} = X_{C1} = 10$ Ом, $X_{L2} = 10$ Ом, $X_{C2} = 40$ Ом, $e(t) = 10 + 20\sin\omega t + 30\cos 2\omega t$ В.



Ответ: $U = 27,39$ В, $U_1 = 103,19$ В, $U_2 = 10$ В.

Задача №37

Дано: $e(t) = 150 + 20\sin 2\omega t + 100\sin 4\omega t$ В, $\omega = 315\text{с}^{-1}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 30$ Ом, $C = 0,2$ мкФ, $L = 0,5$ Гн. В представленной ниже схеме определить: $i(t)$, P , Q .



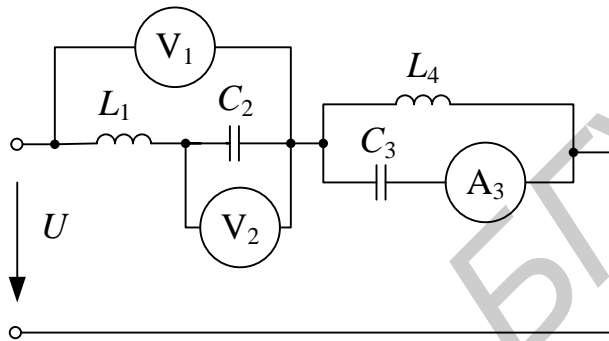
Задача №38

Дано: $\omega L_1 = 10 \text{ Ом}$, $\frac{1}{\omega C_2} = 10 \text{ Ом}$, $\frac{1}{\omega C_3} = 90 \text{ Ом}$, $\omega L_4 = 10 \text{ Ом}$

$$u(t) = 100 + 150 \sin \omega t + 120 \sin 3\omega t \text{ В.}$$

В представленной ниже схеме определить показания приборов электродинамической системы.

Ответ: $U_1 = 100 \text{ В}$, $U_2 = 137,6 \text{ В}$, $I_3 = 3 \text{ А}$.

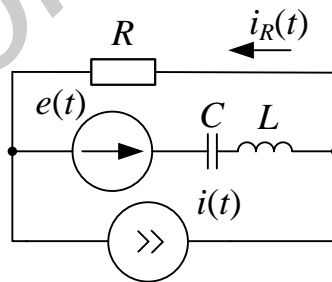


Задача №39

Для схемы, приведенной ниже, определить $i_R(t)$, если:

$$e(t) = 100 + 20 \sin 2 \cdot 10^4 t \text{ В}, \quad i(t) = 20 \cos(10^4 t - 60^\circ) \text{ А}, \quad R = 1 \text{ Ом},$$

$$L = 0,1 \text{ мГн}, \quad C = 100 \text{ мкФ}.$$



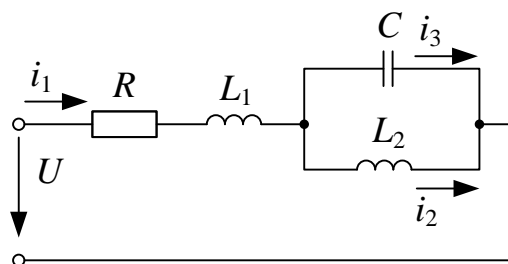
Ответ: $i_R(t) = 11,11 \sin(2 \cdot 10^4 t - 56,3) \text{ А}$.

Задача №40

Дано: $R = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 5 \text{ Ом}$, $X_{L1} = 10 \text{ Ом}$, $X_{L2} = 10 \text{ Ом}$,

$u(t) = 20 + 20\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}$, $\omega = 314 \text{ (рад/с)}$. Схема представлена ниже. Определить $i_1(t)$, I_1 .

Ответ: $i_1 = 2 + 2\sqrt{2} \sin \omega t \text{ А}$, $I_1 = 2\sqrt{2} \text{ А}$.



Задача №41

Определить токи в трёхфазной цепи, если линейные напряжения на входе в цепь симметричны $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 208 \text{ В}$, а комплексные сопротивления фаз $z_a = 8 + j6 \text{ Ом}$, $z_b = 8 - j6 \text{ Ом}$, $z_c = 25 \text{ Ом}$. Построить векторную диаграмму.

Ответ: $I_A = 10,72e^{j7,4^\circ}$; $I_B = 10,7e^{-j127,3^\circ}$; $I_C = 8,25e^{j120^\circ}$.

Задача №42

К трёхфазной линии, линейные напряжения которой симметричны $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 220 \text{ В}$, присоединены три приёмника энергии по схеме треугольник. Комплексные сопротивления этих приёмников $z_{ab} = 22 \text{ Ом}$; $z_{bc} = 19 - j11 \text{ Ом}$; $z_{ca} = 19 + j11 \text{ Ом}$. Определить линейные и фазные токи цепи и построить векторную диаграмму.

Ответ: $I_{ab} = 10 \text{ А}$, $I_{bc} = 10e^{-j90^\circ} \text{ А}$, $I_{ca} = 10e^{j90^\circ} \text{ А}$, $I_A = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ А}$,
 $I_B = 10\sqrt{2}e^{-j135^\circ} \text{ А}$, $I_C = 20e^{j90^\circ} \text{ А}$.

Задача №43

К зажимам четырехпроводной сети с фазным напряжением 127 В подключён несимметричный приёмник, сопротивление фаз которого $r_a = x_b = x_c = 25,4 \text{ Ом}$. Определить фазные токи приёмника и ток в нейтральном проводе. Построить векторную диаграмму.

Ответ: $I_\phi = 5 \text{ А}$; $I_N = 3,65 \text{ А}$.

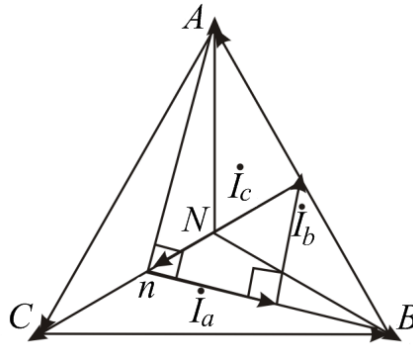
Задача №44

Несимметричный трёхфазный приёмник, включенный по схеме «звезда» с нейтральным проводом, сопротивление фаз которого $r_a = x_b = x_c = 25,4 \text{ Ом}$ (фазное напряжение генератора 127 В), в номинальном режиме работы имеет фазные токи $I_a = I_b = I_c = 5 \text{ А}$. Определить фазные токи и напряжения приёмника при обрыве нейтрального провода. Построить векторную диаграмму.

Ответ: $U_{nN} = -93 \text{ В}$; $U_a = 220 \text{ В}$; $U_b = U_c = 114 \text{ В}$; $I_a = 8,65 \text{ А}$;
 $I_b = I_c = 4,49 \text{ А}$.

Задача №45

Трёхфазный приёмник соединён «звездой» без нейтрального провода и присоединён к генератору, соединённому «звездой», с симметричными фазными напряжениями $U_{\phi} = 127\text{В}$; $I_a = I_b = 5\text{А}$. Качественная векторная диаграмма нагрузки представлена на приведенном ниже рисунке.

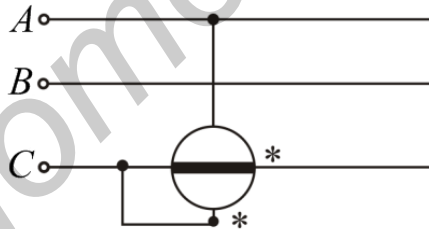


Вычислить смещение нейтрали и найти сопротивления каждой фазы нагрузки.

Ответ: $U_{nN} = 49,7\text{В}$; $z_a = j32\text{Ом}$; $z_b = -j32\text{Ом}$; $z_c = 11,4\text{Ом}$.

Задача №46

В цепи (см. задачу №46) найти показание ваттметра, включённого, как показано на следующем рисунке.



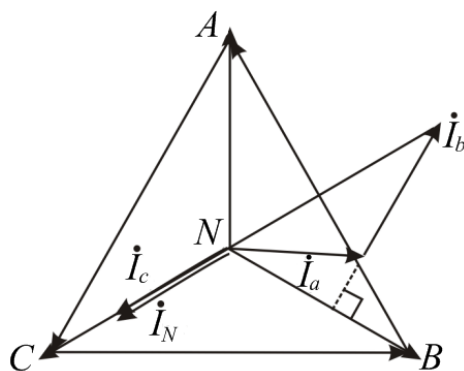
Ответ: $P_W = -1350\text{Вт}$.

Задача №47

Для цепи (см. задачу №46) начертить векторную диаграмму токов после присоединения нейтрального провода ($z_0 = 0$). Найти показание ваттметра, включённого по схеме, изображенной в задаче №46.

Ответ: $I_a = 3,97e^{-j90^\circ}\text{А}$, $I_b = 3,97e^{-j30^\circ}\text{А}$, $I_c = 11,14e^{j120^\circ}\text{А}$,
 $I_0 = 4,26e^{j120^\circ}\text{А}$, $P_W = -2122\text{Вт}$.

Векторная диаграмма имеет вид



Литература

1. Атабеков, Г. М. Теоретические основы электротехники / Г. М. Атабеков. – СПб. : Лань, 2009.
2. Белецкий, А. Ф. Теория линейных электрических цепей / А. Ф. Белецкий. – СПб. : Лань, 2009.
3. Шебес, М. П. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. П. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высш. шк., 1990.

Учебное издание

Батюков Сергей Валентинович
Иваницкая Наталия Александровна
Шилин Леонид Юрьевич

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

В 2-х частях

Часть 1

Линейные электрические цепи

Редактор *Г. С. Корбут*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная верстка *А. В. Бас*

Подписано в печать 29.06.2012.

Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная.

Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе.

Усл. печ. л. 6,98.

Уч.-изд. л. 6,5.

Тираж 400 экз.

Заказ 430.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6