Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА.
ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHEMATICA

В двух частях

Часть 1

О. А. Вагнер, Л. А. Фомичёва

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия
для специальностей I ступени высшего образования,
закрепленных за УМО

Минск БГУИР 2019

УДК 517:004.42(076)
ББК 22.1я73+32.973.3я73
М34

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра теории функций Белорусского государственного университета
(протокол №2 от 28.09.2018);

профессор кафедры информационных систем и
автоматизации производства учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет»
доктор физико-математических наук, профессор А. А. Корниенко

М34 **Математика**. Применение пакета Mathematica. В 2-х ч. Ч. 1 : Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ : пособие / О. А. Вагнер, Л. А. Фомичёва. – Минск : БГУИР, 2019. – с. : ил.
ISBN 978-985-543-469-7 (ч. 1).

Материал сопровождается подробно разобранными примерами. В нем рассматриваются основные принципы работы в пакете Mathematica и вопросы оформления расчетов с использованием стилей пакета. В пособие включены задания для самостоятельной работы с целью обучения студентов методам решения задач на базе пакета Mathematica.

Предназначено для студентов первого курса всех специальностей и форм обучения БГУИР при изучении дисциплины «Математика», а также всех желающих научиться использовать пакет Mathematica при решении математических задач. Пособие также может использоваться для проведения практических занятий по дисциплине «Математика».

В первую часть пособия вошли следующие разделы: «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Квадратичные формы», «Введение в математический анализ» и «Комплексные числа».

УДК 517:004.42(076)
ББК 22.1я73+32.973.3я73

ISBN 978-985-543-469-7 (ч. 1)
ISBN 978-985-543-468-0

Св. план 2019, поз. 27

Учебное издание

МАТЕМАТИКА.
ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHEMATICA

В двух частях

Часть 1

Вагнер Ольга Александровна
Фомичёва Людмила Александровна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 12,3. Тираж 100 экз. Заказ 395.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
220013, Минск, П. Бровки, 6

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Развитие фундаментальных и прикладных наук не обходится без применения современных достижений компьютерных технологий. В настоящее время существует достаточно много различных программных средств, предназначенных для изучения разделов высшей математики: справочники и компьютерные курсы; электронные учебники, оснащенные стереоконструкторами, позволяющими строить пространственные геометрические конструкции и рассматривать их в движении; пакеты символьных вычислений (**MatLab**, **Maple**, **MathCad**, **Mathematica** и др.).

Данное пособие по математике составлено для студентов всех специальностей и форм обучения. Последовательно, в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математика», предлагается на практике освоить необходимые теоретические понятия дисциплины, научиться решать задачи и обеспечивать проверку выполнения практических заданий с использованием современного прикладного пакета **Mathematica**.

Цель предлагаемого пособия – помочь студентам самостоятельно овладеть основными навыками работы в прикладном пакете **Mathematica**, научиться решать задачи по разделам «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Квадратичные формы», «Введение в математический анализ», «Комплексные числа» с использованием пакета **Mathematica**.

Пособие построено так, чтобы оно было понятно студентам первого курса дневной, заочной и дистанционной форм получения образования и чтобы они могли усвоить основы работы в пакете **Mathematica**, не прибегая к другим учебникам. Вначале рассматривается решение примеров «вручную», а затем с помощью системы символьной математики **Mathematica**. Это помогает и освоить излагаемый метод, и понять, как избежать трудоемкой работы при решении конкретной задачи. Для закрепления изученного материала приведены задачи для самостоятельной работы. Основные операции и функции прикладного пакета **Mathematica** содержатся в приложении пособия. Особенностью пособия является то, что предлагаемые задания ориентированы на использование возможностей прикладного пакета **Mathematica 9.0**. В более ранних версиях пакета часть приведенных примеров может не работать.

Применение математического пакета систематизирует математические знания студентов, повышает наглядность математических закономерностей и производительность при выполнении сложных математических преобразований.

Система **Mathematica** обеспечивает не только возможности выполнения сложных численных расчетов с выводом их результатов в графическом виде, но и проведение особо трудоемких вычислений. Она позволяет быстро и эффективно проводить вычисления, решать многие задачи линейной алгебры, математического анализа, задачи теории чисел и статистики, дискретной математики. Использование пакета **Mathematica** позволит сделать обучение студентов геометрическим разделам дисциплины более наглядным, а также ознакомит студентов с основами геометрического компьютерного моделирования. **Mathematica** эффективно выполняет как числовые, так и символьные вычисления, имеет развитую двухмерную и трехмерную графику, а также встроенный язык программирования высокого уровня. Наличие языка программирования в прикладном пакете **Mathematica** позволяет составлять программы для широкого класса задач, в которых можно свободно варьировать исходные данные, экспериментировать с ними, подтверждая или опровергая выдвинутые гипотезы.

1. ОСНОВЫ ПАКЕТА MATHEMATICA

Для запуска программы **Mathematica** необходимо щелкнуть иконку **Mathematica** в меню «Программы» или ярлык программы в месте его расположения.

При запуске программы на экране появляется главное окно (рис. 1.1).

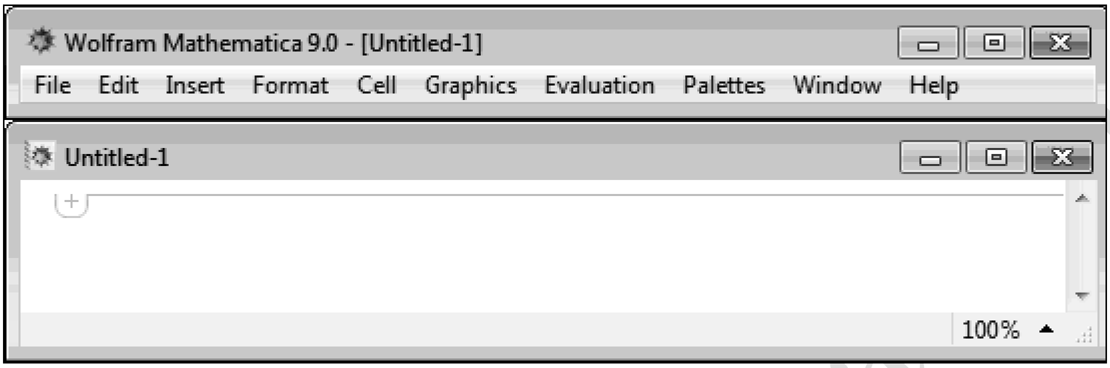


Рис. 1.1

Главное окно системы содержит строку заголовка, главное меню (File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window, Help) и большой экран редактирования (окно ввода).

Краткое описание пунктов главного меню системы

- **File** – действия с файлами программы:
  - ***New*** – создание нового файла;
  - ***Open*** – открытие из каталога уже созданного файла;
  - ***Close*** – закрытие файла без сохранения;
  - ***Save*** – сохранение файла с прежним именем;
  - ***Save As*** – сохранение файла с новым именем;
  - ***Printing Settings*** – управление параметрами представления данных на экране;
  - ***Print*** – печать документа;
  - ***Exit*** – завершение работы всей программы.
- **Edit** – операции редактирования:
  - ***Undo*** – отмена операции;
  - ***Cut*** – удаление выделенного фрагмента документа и помещение его в буфер обмена;
  - ***Copy*** – копирование;
  - ***Paste*** – вставка фрагментов из буфера обмена в заданную область документа;
  - ***Clear*** – удаление фрагментов документа без его сохранения в буфере;
  - ***Copy As*** – копирование в заданном формате;
  - ***Select All*** – выделение всего документа;

- ***Check Spelling*** – проверка орфографии;
- ***Find*** – задание шаблона для поиска;
- ***Find Next*** – переход к следующему фрагменту, совпадающему с шаблоном;
- ***Find Previous*** – переход к предыдущему фрагменту, совпадающему с шаблоном;
- ***Preferences*** – вызов окна настроек системы.

- **Insert** – введение данных в окно редактирования. Например, в подпункте ***Typesetting***:
  - ***Superscript*** – верхний индекс;
  - ***Subscript*** – нижний индекс;
  - ***Matching*** [ ] – текст в скобках [ ];
  - ***Matching*** ( ) – текст в скобках ( );
  - ***Matching*** { } – текст в скобках { } и т. д.

Можно вставлять в текст графику, формулы и т. д.

- **Format** – изменение формата текста на экране и при печати, установка стилей, управление окном редактирования, стиль ячеек, их содержание, размер, управление шрифтами и т. д.:
  - ***Style*** – установка параметров текста (шрифт, размер символов и т.д.);
  - ***Screen Environment*** – изменение формата текста на экране; имеет следующие установки:
    - ***Working*** – стиль типичный;
    - ***Presentation*** – презентационный стиль с увеличением размера символов;
    - ***Condensed*** – сжатый размер символов;
    - ***Printout*** – оптимальный стиль для печати.
- **Cell** – работа с ячейками:
  - ***Convert To*** – преобразование формата содержимого ячеек:
    - ***InputForm*** – формат ввода;
    - ***OutputForm*** – формат вывода;
    - ***StandartForm*** – стандартный формат;
    - ***TradicionalForm*** – традиционный формат;
    - ***Bitmap*** – растровый формат изображений.

При работе с большим числом математических знаков целесообразно использовать стандартный формат.

  - ***Cell Properties*** – установление формата ячеек:
    - ***Open*** – устанавливает ячейку открытой или закрытой;
    - ***Editable*** – устанавливает ячейку редактируемой или нередактируемой;
    - ***Evaluatable*** – устанавливает ячейку оцениваемой или неоцениваемой;

    - ***Initialization Cell*** – делает ячейку инициализационной или неинициализационной.
  - ***Grouping*** – группировка ячеек:
    - ***Automatic Grouping*** – объединение ячеек в соответствии с их стилем;
    - ***Manual Grouping*** – объединение и разъединение ячеек.

    По умолчанию выбран режим ***Automatic Grouping*** .
  - ***Divide Cell*** – разделение сгруппированных ячеек;
  - ***Merge Cells*** – объединение выделенных ячеек.
- **Graphics** – работа с графическими данными:
  - ***New Graphics*** – вывод окна для построения графика;
  - ***Drawing Tools*** – вывод окна графического редактора;
  - ***Rendering*** – вывод подменю операций рендеринга:
    - ***Animate Selected Graphics*** – анимация с графиком выделенной ячейки;
    - ***Align Selected Graphics*** – выравнивание графиков;
    - ***Make Standart Size*** – установка стандартного размера ячейки;
    - ***Rerended Graphics*** – построение графиков заново.
- **Evaluation** – управление процессом вычислений:
  - ***Evaluate Cells*** – вычисление выделенных ячеек;
  - ***Evaluate in Place*** – вычисление выделенных выражений в строке ввода;
  - ***Evaluate Initialization Cells*** – вычисление инициализированных ячеек без их выделения;
  - ***Evaluate Notebook*** – вычисление всех ячеек документа;
  - ***Interrupt Evaluation*** – прерывание текущего вычисления;
  - ***Abort Evaluation*** – сбрасывание текущего вычисления;
  - ***Remove from Evaluation Queue*** – отмена вычисления ячеек, стоящих на «очереди».

Следующие опции связаны с возможностью использования ядра (***Kernel***) другого компьютера:

  - ***Default Kernel*** – выбор ядра, используемого по умолчанию;
  - ***Notebook's Kernel*** – выбор ядра для вычислений в текущем документе;
  - ***Start Kernel*** – запуск выбранного ядра;
  - ***Quit Kernel*** – завершение работы ядра.
- **Palettes** – управление вводом данных.

Mathematica позволяет осуществлять ввод данных в окно ввода двумя способами: вручную с клавиатуры и с использованием так называемых палитр (***Palettes*** – панели с кнопками быстрого управления). Они представляют собой окна, содержащие набор кнопок, за которыми закреплены определенные действия, и выпадающих списков (рис. 1.2). Палитры можно выводить на экран и убирать с экрана, создавать собственные палитры с требуемым набором функций.

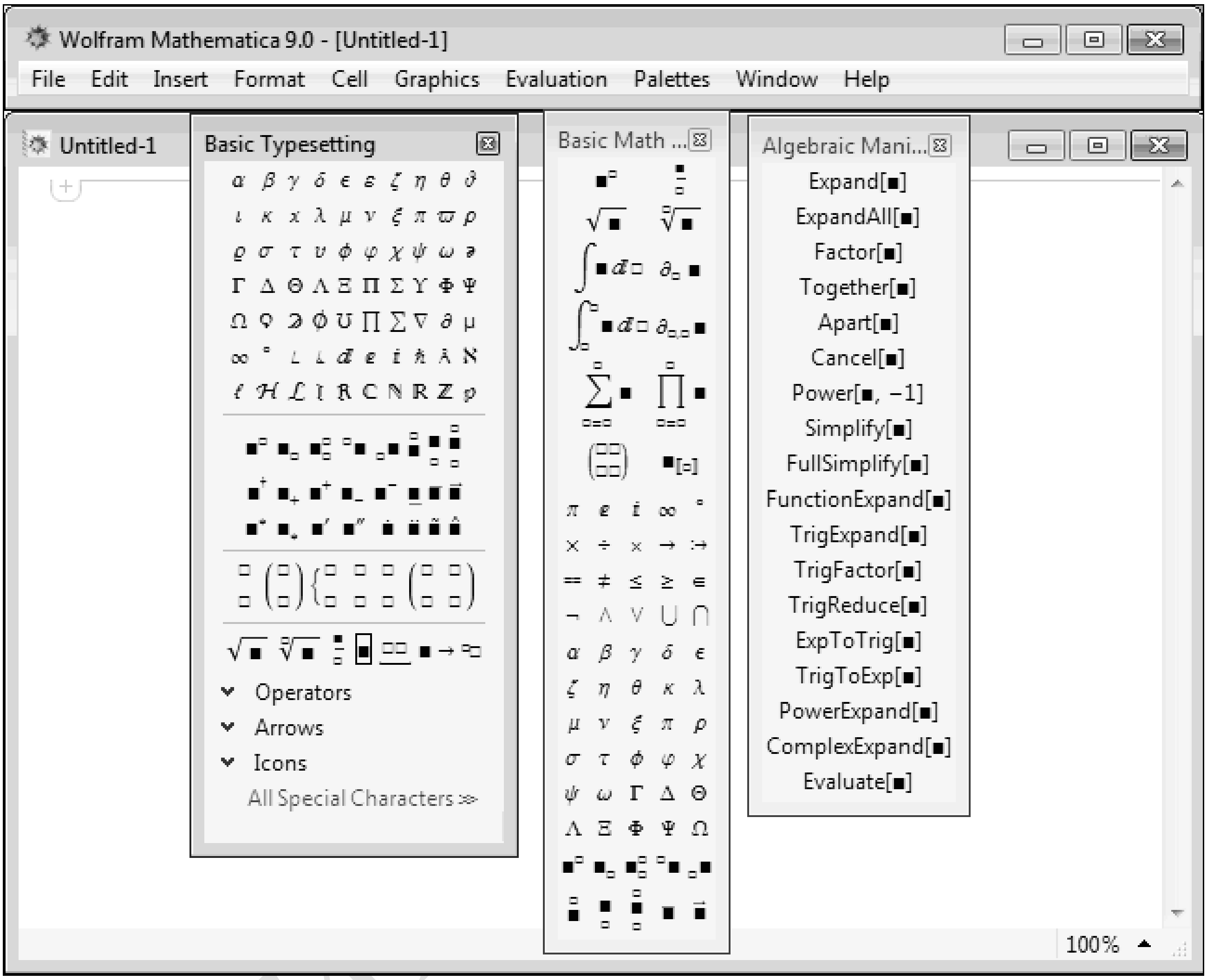


Рис. 1.2

- **Window** – управление внешним видом окон:
  - ***Stack Windows*** – каскадное расположение окон;
  - ***Tile Windows Wide*** – расположить на экране окна открытых документов одно над другим вытянутыми по ширине;
  - ***Tile Windows Tall*** – расположить на экране окна открытых документов одно рядом с другим вытянутыми по длине;
  - ***Messages*** – вывод окна сообщений об ошибках;
- **Help** – управление справочной системой.

В любом из пунктов главного меню некоторые команды могут быть выделены светло-серым шрифтом. Это означает, что команды не могут быть выполнены в данный момент. Например, если выражение не выделено, то его значение вычислить нельзя.

Окно ввода (экран редактирования)

На экране появляется активное окно документа. По умолчанию создаваемый документ носит название **Untitled-1**. При сохранении можно присвоить ему нужное имя. Система автоматически присваивает файлам расширение **.nb**.

В программе **Mathematica** все введенные в окно ввода данные содержатся в отдельных, определенным образом выделенных областях экрана, называемых *ячейками*. Введенные данные автоматически объединяются во входную ячейку, которая обозначается квадратной скобкой – **]** в правой части окна ввода. Например, наберем $\mathbf{3+7}$ (рис. 1.3).

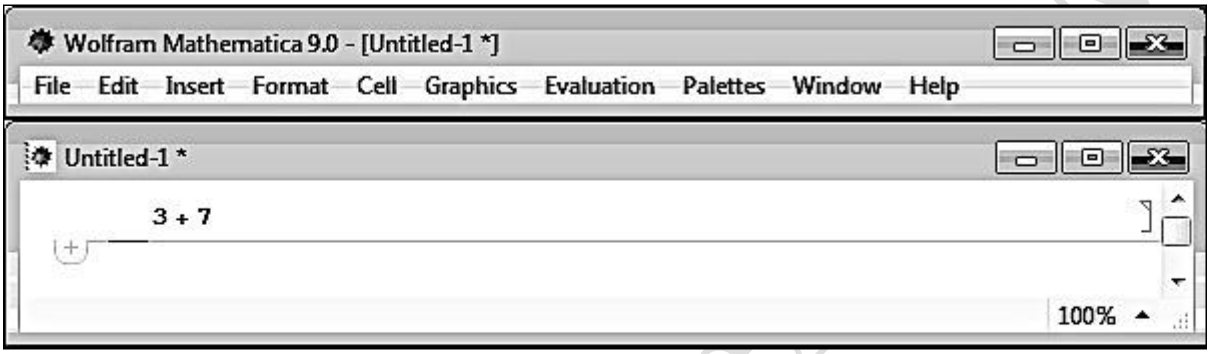


Рис. 1.3

Для получения результата поместим курсор в любой части ячейки и нажмем $\mathbf{Shift+Enter}$ (удерживая **Shift**, нажать **Enter**). Нажатие одной клавиши **Enter** приводит к созданию новой строки в той же ячейке.

Если введенные данные являются логически завершенными и не содержат синтаксических ошибок, программа **Mathematica** обрабатывает их и выдает результат. В противном случае указывается тип ошибки.

Результат $\mathbf{3+7}$ на рис. 1.4.

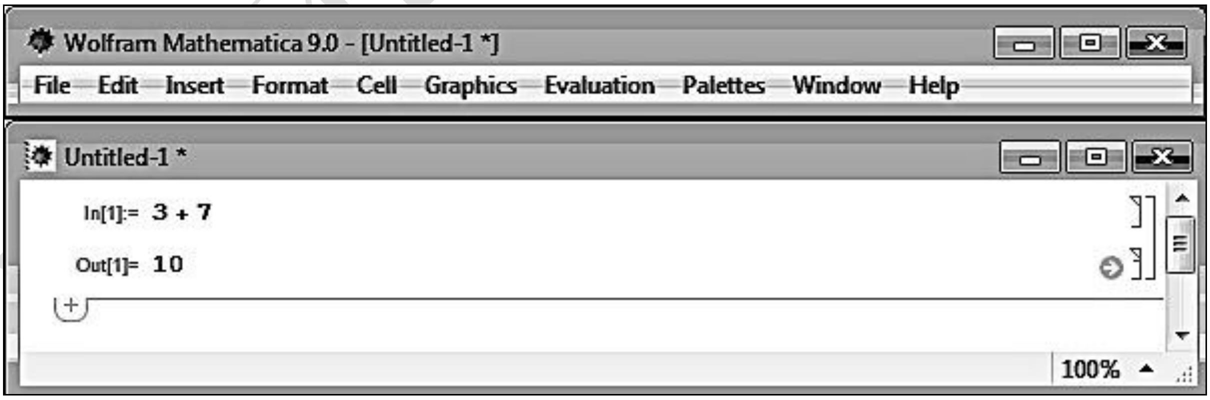


Рис. 1.4

На рис. 1.4 **Mathematica** добавляет к данным на экране метки:

1) **In[n]:=** – вводимые пользователем данные;

2) **Out[n]:=** – результат, выводимый программой **Mathematica**, где **n=1, 2, 3 ...** – номер проводимого вычисления. Номер **n** может быть использован для ссылки на любой предыдущий результат.

Входную и выходную ячейки окаймляют квадратные скобки, а вместе они ограничены общей квадратной скобкой – это значит, что сформирована группа ячеек.

Для окончания работы с пакетом **Mathematica** необходимо выбрать команду ***Exit*** в разделе **File** главного меню. Если требуется сохранить введенные данные, то появляется дополнительное окно, в котором можно определить имя сохраняемого документа. Этот файл можно открыть при следующем сеансе работы с программой **Mathematica**, выбрав в разделе **File** команду ***Open***.

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Матрицы. Операции над матрицами

Пример 2.1.1

Выбрать второй элемент в третьей строке и третью строку матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ в программе **Mathematica**.

Решение (рис. 2.1).

```
In[1]:= {{{-1, 2, 3, 1}, {-2, 6, 0, 1}, {-1, 7, 4, -2}}[[3, 2]],
         {{-1, 2, 3, 1}, {-2, 6, 0, 1}, {-1, 7, 4, -2}}[[3]]}

Out[1]= {7, {-1, 7, 4, -2}}
```

Рис. 2.1

Пример 2.1.2

Найти $-AB+3C^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

Найдем данную сумму матриц по действиям:

1) $\underset{3\times2}{A}\cdot\underset{2\times3}{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot2+1\cdot(-1) & 2\cdot3+1\cdot1 \\ 0\cdot1+2\cdot0 & 0\cdot2+2\cdot(-1) & 0\cdot3+2\cdot1 \\ -1\cdot1+1\cdot0 & -1\cdot2+1\cdot(-1) & -1\cdot3+1\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

2) $-AB=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

3) $C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

4) $3C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & -12 & 0 \\ -3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix};$

$$5)\ -AB+3C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -7\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -12 & 0\\ -3 & 3 & 9\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -15 & -7\\ -3 & 5 & 7\\ 1 & 9 & -1\end{pmatrix}.$$

Вычисления в Mathematica

В пакете **Mathematica** любой набор элементов, заключенный в фигурные скобки, является списком. Список списков заменяет матрицу.

Ввести матрицу в программе **Mathematica** можно несколькими способами:

1. Непосредственно ввести с клавиатуры в виде списка списков $\{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}\}$.

2. На главном меню выбрать **Insert** → **Table/Matrix** → **New...** (рис. 2.2).

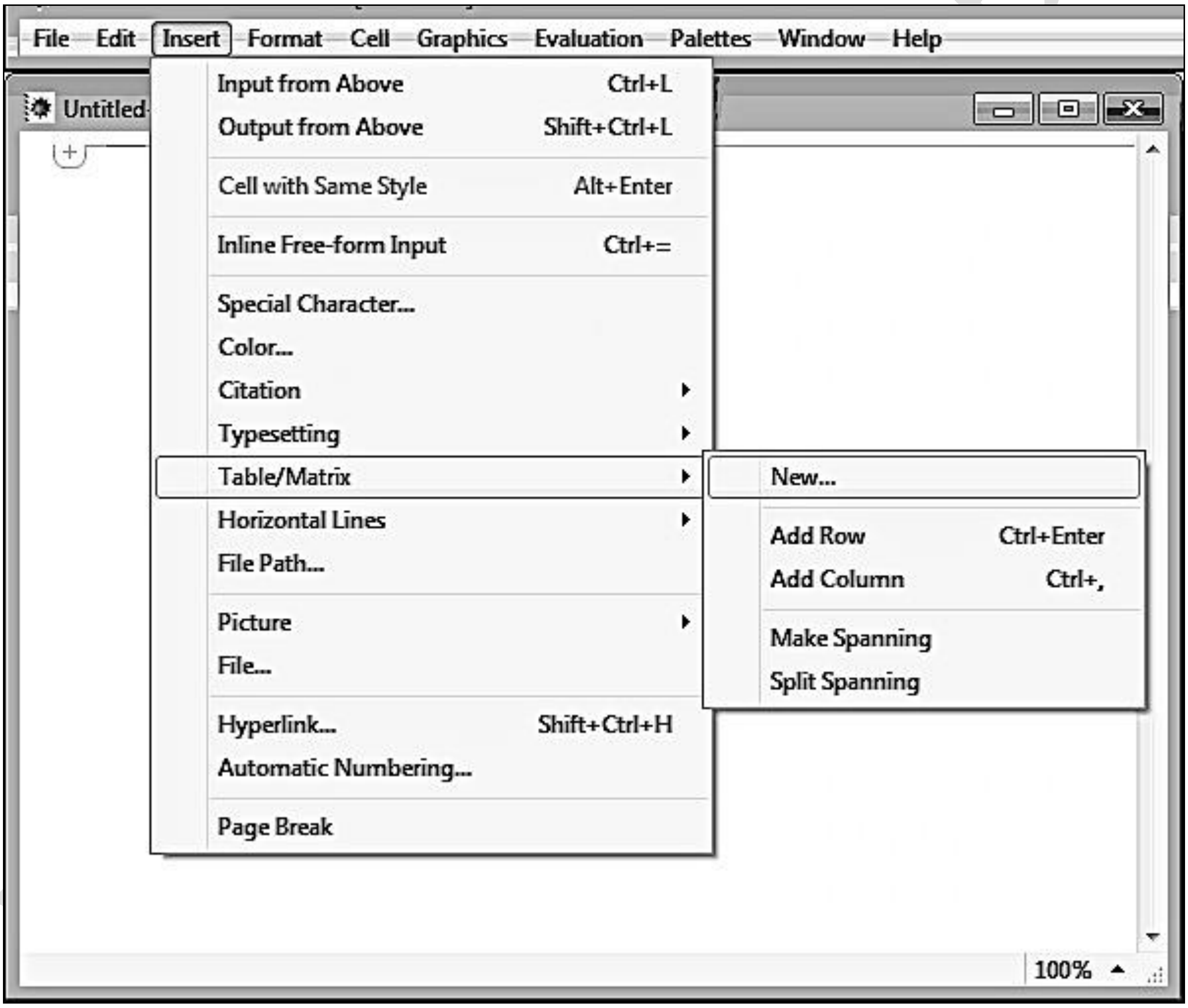


Рис. 2.2

В появившемся окне необходимо выбрать **Matrix** (**List of lists**) и ввести количество строк, столбцов, а затем нажать **OK** (рис. 2.3).

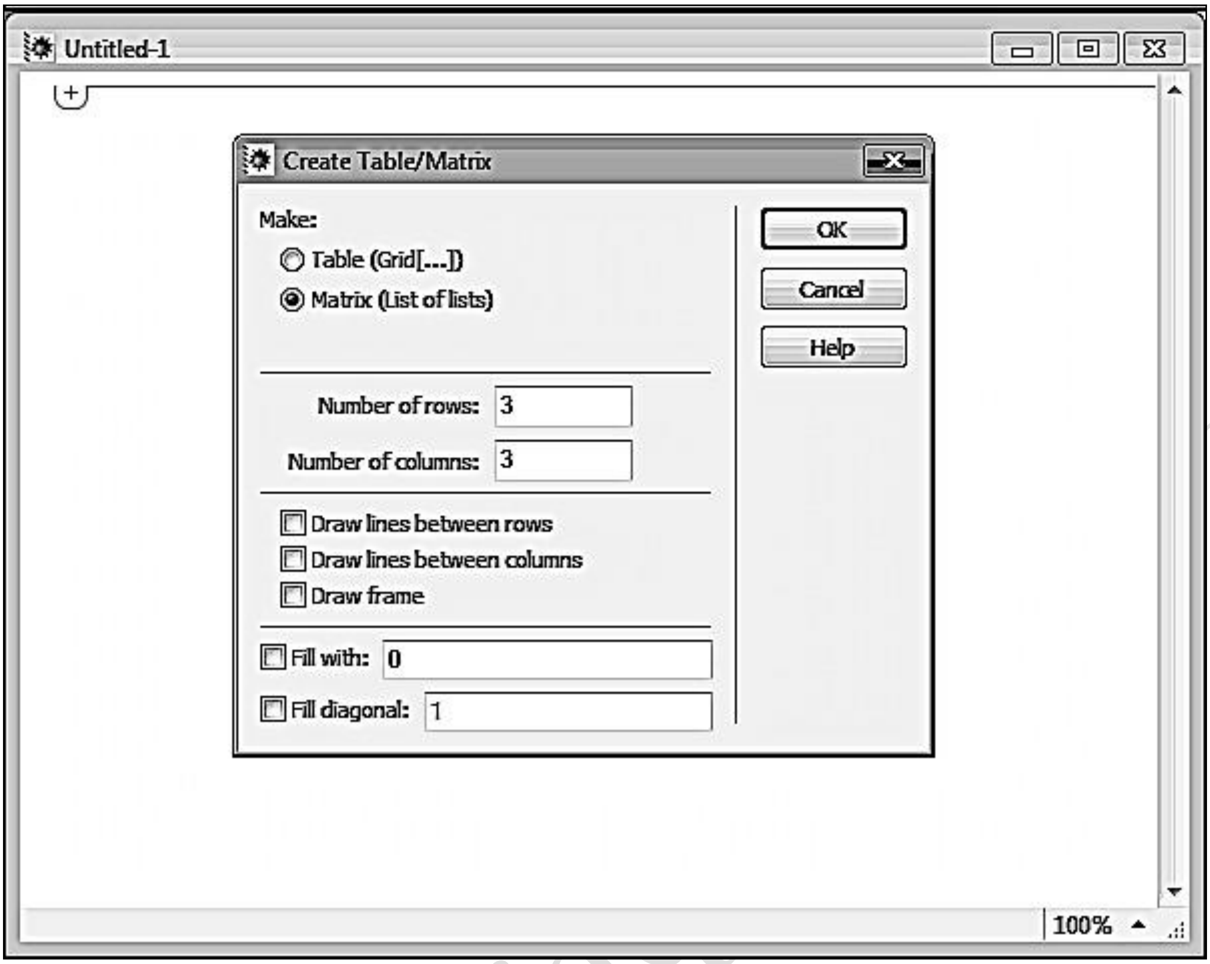


Рис. 2.3

Появится матрица, которую следует заполнить числами (рис. 2.4).

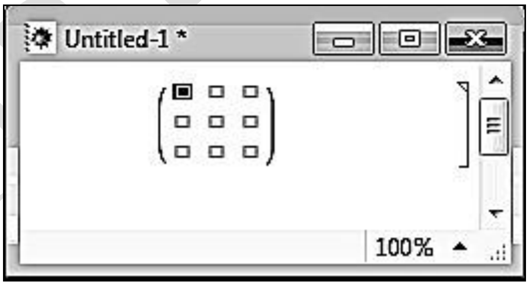


Рис. 2.4

3. Вызвать функцию **MatrixForm**, чтобы увидеть более традиционную запись матрицы:

$$\mathbf{MatrixForm}[\{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}\}] \text{ или } \{\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}\} \ \mathbf{//\,MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

4. При помощи панели инструментов выбрать **Palettes** $\rightarrow$ **Basic Math Assistant** (рис. 2.5).

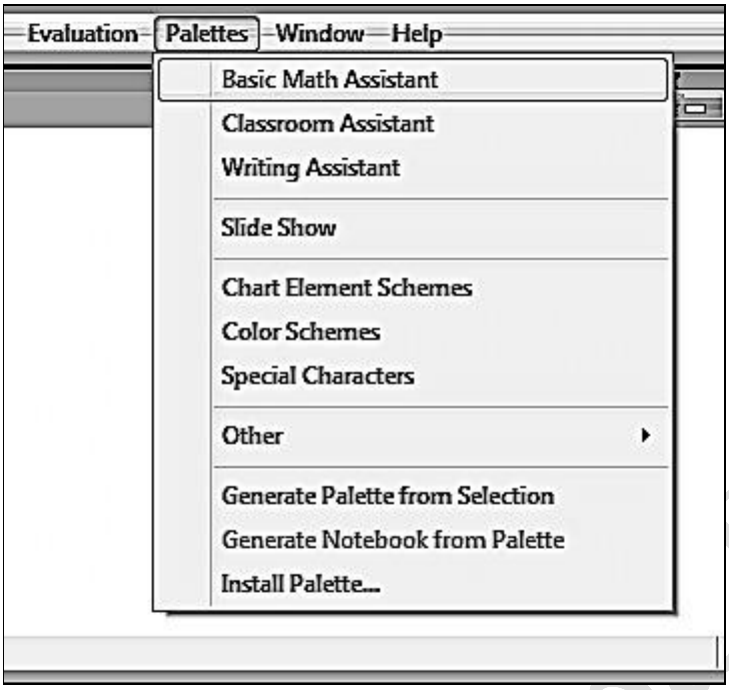


Рис. 2.5

Перейти на закладку **Advanced** и щелкнуть по кнопке **Matrix** для ввода матрицы 2×2 (рис. 2.6).

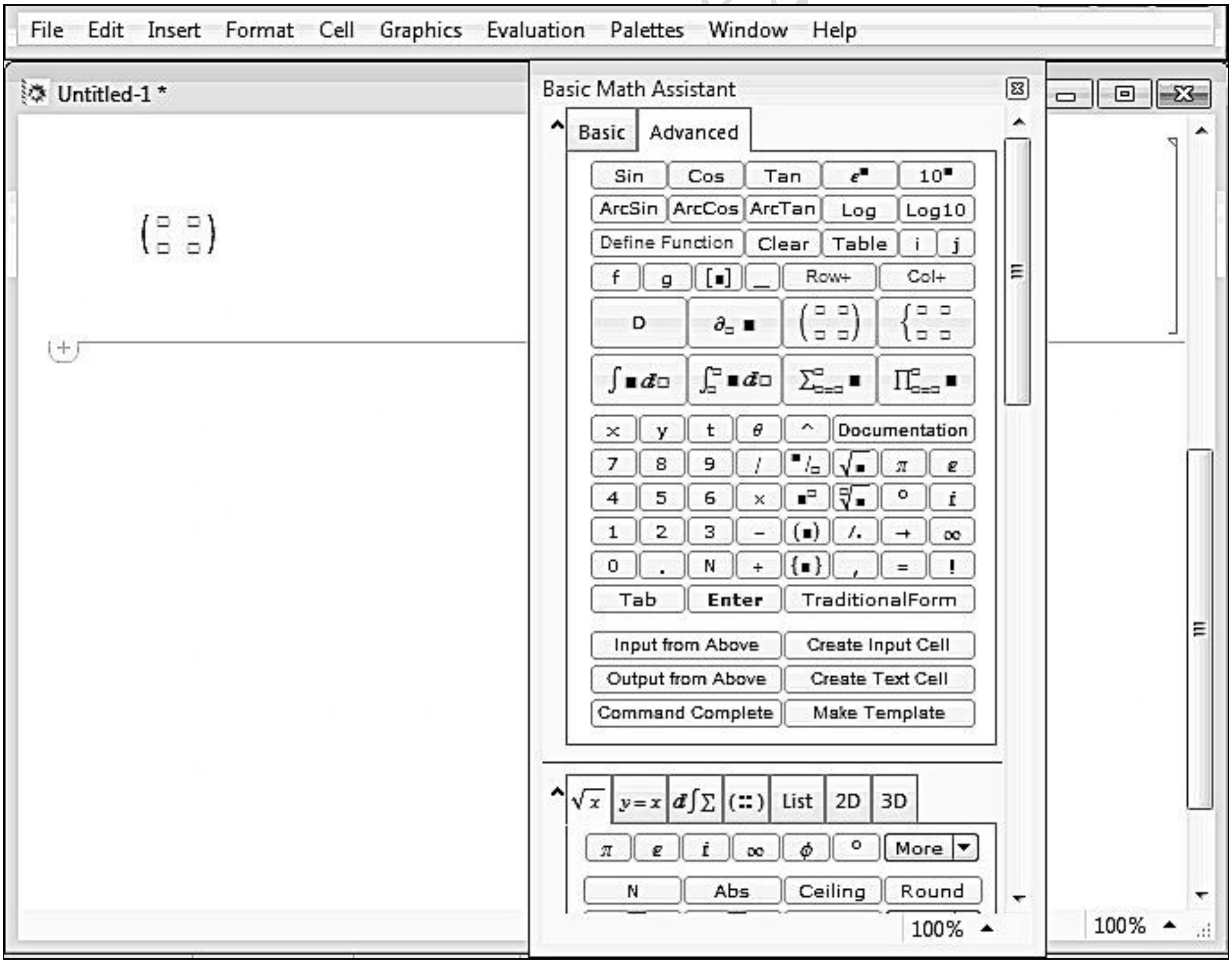


Рис. 2.6

Дополнительная строка добавляется нажатием комбинации клавиш **Ctrl+Enter**, а столбец – **Ctrl+,** (запятая).

Матрицу A введем первым способом, а матрицы B и C – третьим (рис. 2.7).

```
In[1]:= A = {{2, 1}, {0, 2}, {-1, 1}}
Out[1]= {{2, 1}, {0, 2}, {-1, 1}}

In[2]:= B = {{1, 2, 3}, {0, -1, 1}} // MatrixForm
Out[2]//MatrixForm=
  ( 1   2   3 )
  ( 0  -1   1 )

In[3]:= C = MatrixForm[{{1, -1, 0}, {-4, 1, 2}, {0, 3, -1}}]
Out[3]//MatrixForm=
  (  1  -1   0 )
  ( -4   1   2 )
  (  0   3  -1 )
```

Рис. 2.7

Матрицу C транспонируем с помощью функции **Transpose**[**C**] или **MatrixForm**[**Transpose** [{{***a***,***b***}, {***c***,***d***}}]], **Transpose**[**C**]**// MatrixForm** (рис. 2.8).

```
In[1]:= A = {{2, 1}, {0, 2}, {-1, 1}}
Out[1]= {{2, 1}, {0, 2}, {-1, 1}}

In[2]:= B = {{1, 2, 3}, {0, -1, 1}} // MatrixForm
Out[2]//MatrixForm=
  ( 1   2   3 )
  ( 0  -1   1 )

In[3]:= C = MatrixForm[{{1, -1, 0}, {-4, 1, 2}, {0, 3, -1}}]
Out[3]//MatrixForm=
  (  1  -1   0 )
  ( -4   1   2 )
  (  0   3  -1 )

In[4]:= Transpose[{{1, -1, 0}, {-4, 1, 2}, {0, 3, -1}}] // MatrixForm
Out[4]//MatrixForm=
  (  1  -4   0 )
  ( -1   1   3 )
  (  0   2  -1 )
```

Рис. 2.8

Вычислим $-AB$. В **Mathematica** операцию произведения матриц можно задавать с помощью точки. Команда **MatrixForm** выдает результат в матричной форме (рис. 2.9).

```
In[5]:= MatrixForm[-A.B]

In[6]:= -{{2, 1}, {0, 2}, {-1, 1}}.(1  2  3)
                                     (0 -1  1)

In[7]:= {{-2, -3, -7}, {0, 2, -2}, {1, 3, 2}} // MatrixForm
Out[7]//MatrixForm=
        -2  -3  -7
         0   2  -2
         1   3   2
```

Рис. 2.9

Вычислить произведение матриц можно и с помощью функции **Dot**$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$.

Итак, вычислить $-AB+3C^{\mathrm{T}}$ в программе **Mathematica** можно следующим способом (рис. 2.10):

```
In[8]:= MatrixForm[-{{2, 1}, {0, 2}, {-1, 1}}.{{1, 2, 3}, {0, -1, 1}} +
          3 Transpose[{{1, -1, 0}, {-4, 1, 2}, {0, 3, -1}}]]
Out[8]//MatrixForm=
        1  -15  -7
       -3    5   7
        1    9  -1
```

Рис. 2.10

Пример 2.1.3

Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=2x^3-3x^2+x-5$ и $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}$.

Решение

Многочлен $f(A)$ имеет вид $f(A)=2A^3-3A^2+A-5E$.

Вычислим $3A^2$ и $2A^3$:

1) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+0\cdot1+2\cdot2\\ 2\cdot1+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot0+1\cdot1+1\cdot3 & 2\cdot2+1\cdot1+1\cdot2\\ 1\cdot1+3\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+3\cdot1+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&6\\5&4&7\\9&9&9\end{pmatrix},$$

$$3A^2=\begin{pmatrix}9&18&18\\15&12&21\\27&27&27\end{pmatrix};$$

$$2)\ A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot1+6\cdot2+6\cdot1 & 3\cdot0+6\cdot1+6\cdot3 & 3\cdot2+6\cdot1+6\cdot2 \\ 5\cdot1+4\cdot2+7\cdot1 & 5\cdot0+4\cdot1+7\cdot3 & 5\cdot2+4\cdot1+7\cdot2 \\ 9\cdot1+9\cdot2+9\cdot1 & 9\cdot0+9\cdot1+9\cdot3 & 9\cdot2+9\cdot1+9\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 24 \\ 20 & 25 & 28 \\ 36 & 36 & 45 \end{pmatrix},$$

$$2A^3 = \begin{pmatrix} 42 & 48 & 48 \\ 40 & 50 & 56 \\ 72 & 72 & 90 \end{pmatrix}.$$

Итак, $f(A) = 2A^3 - 3A^2 + A - 5E =$

$$= \begin{pmatrix} 42 & 48 & 48 \\ 40 & 50 & 56 \\ 72 & 72 & 90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 15 & 12 & 21 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42-9+1-5 & 48-18+0-0 & 48-18+2-0 \\ 40-15+2+0 & 50-12+1-5 & 56-21+1-0 \\ 72-27+1-0 & 72-27+3-0 & 90-27+2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 30 & 32 \\ 27 & 34 & 36 \\ 46 & 48 & 60 \end{pmatrix}.$$

Вычисления в Mathematica

Возведем матрицу A в степени 2 и 3 с помощью функции **MatrixPower[m, n]** – возведение в n-ю степень квадратной матрицы **m**.

Вычислим $3A^2$ (рис. 2.11) и $2A^3$ (рис. 2.12).

```
In[1]:= A = MatrixForm[{{1, 0, 2}, {2, 1, 1}, {1, 3, 2}}]
Out[1]//MatrixForm=
  (1 0 2)
  (2 1 1)
  (1 3 2)

In[2]:= MatrixPower[A, 2] // MatrixForm

                    (1 0 2)
In[3]:= MatrixPower[(2 1 1), 2]
                    (1 3 2)

In[4]:= {{3, 6, 6}, {5, 4, 7}, {9, 9, 9}} // MatrixForm
Out[4]//MatrixForm=
  (3 6 6)
  (5 4 7)
  (9 9 9)

In[5]:= MatrixForm[3 %]
Out[5]//MatrixForm=
  ( 9 18 18)
  (15 12 21)
  (27 27 27)
```

Рис. 2.11

```
In[6]:= MatrixPower[A, 3] // MatrixForm

In[7]:= MatrixPower[{{1, 0, 2}, {2, 1, 1}, {1, 3, 2}}, 3]

In[8]:= {{21, 24, 24}, {20, 25, 28}, {36, 36, 45}} // MatrixForm
Out[8]//MatrixForm=
 21 24 24
 20 25 28
 36 36 45

In[9]:= MatrixForm[2 %]
Out[9]//MatrixForm=
 42 48 48
 40 50 56
 72 72 90
```

Рис. 2.12

Теперь найдем значение матричного многочлена $f(A)$, используя полученные вычисления (рис. 2.13).

```
In[10]:= MatrixForm[Out[9] - Out[5] + Out[1] - 5 IdentityMatrix[3]]
Out[10]//MatrixForm=
 29 30 32
 27 34 36
 46 48 60
```

Рис. 2.13

Задания для самостоятельной работы

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Вычислить, если это возможно:

1) $AC-3B$; **2)** $5F+B$; **3)** $-CB^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}$; **4)** $2A^2+5$; **5)** $-7-D^{\mathrm{T}}C$; **6)** $F^{\mathrm{T}}\cdot\left(-C^{\mathrm{T}}\right)\cdot A$; **7)** $BF-A^{\mathrm{T}}+3D$; **8)** $D-3$; **9)** $-2A^{\mathrm{T}}+(CF)^{\mathrm{T}}+1$.

2. Найти:

1) сумму элементов первого столбца матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$;

2) произведение диагональных элементов матрицы $C=-3AB$, если $A=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3. Найти матрицы $D=2A^{\mathrm{T}}B-3C$ и $K=\left((C-B)^{\mathrm{T}}A\right)^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\-1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 1\\1 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$.

4. Вычислить след матриц $A=\left(C-C^{\mathrm{T}}\right)^2$ и $B=\left(D+F^{\mathrm{T}}\right)F$, если $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\3 & -1 & 2\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & 5\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

5. Найти B^{T}, если $B=f(A)$, $f(x)=3x^2-5x+2$ и $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x)=kx^3-3x^2+mx-2$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\k-m & m\end{pmatrix}$, $k=3$, $m=1$;

2) $f(x)=3x^2-x+4$ и $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\3 & 5 & -1\\-2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

7. Является ли матрица $K=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 1 & 3\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ корнем уравнения $x^3-6x^2+8x-9=0$?

2.2. Определители и их свойства

Пример 2.2.1

Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\4 & 2 & 5 & 7\\3 & 2 & 8 & 5\\2 & 8 & 7 & 3\end{vmatrix}$.

Решение

Вычислить определитель четвертого порядка можно разложением по любой строке и любому столбцу. Разложение определителя по строке или столбцу позволяет сводить вычисление определителей больших порядков к вычислению определителей меньших порядков, но с каждым понижением порядка количество составляющих определителей возрастает. В связи с этим целесообразно перед разложением определителя преобразовать его так, чтобы среди элементов строки или столбца оказалось как можно больше нулей.

Все элементы данного определителя отличны от нуля. Преобразуем определитель, не меняя его величины, используя свойства определителей.

Вынесем общий множитель 2 из второго столбца за знак определителя:
$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-4) и сложим со второй строкой, при этом изменится вторая строка:
$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей:
$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой:
$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя 2 – общий множитель третьей строки:
$$4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по первому столбцу:
$$\Delta = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot\left(1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41}\right) = 4\cdot A_{11} =$$
$$= 4\cdot(-1)^{1+1}M_{11} = 4\begin{vmatrix} -3 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{разложение}\\ \text{по 2-й строке}}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} 4\cdot\left((-1)\cdot A_{21} + 1\cdot A_{22} + (-2)\cdot A_{23}\right) =$$
$$= 4\cdot\left((-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) =$$
$$= 4\cdot\left(1\cdot(9+15) + (9+10) + 2\cdot(-9+6)\right) = 4\cdot(24+19-6) = 4\cdot 37 = 148.$$

Итак, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 148$.

Вычисления в Mathematica

1 способ

Для вычисления определителя используем функцию **Det[m]** (рис. 2.14).

```
In[1]:= A = MatrixForm[{{1, 2, 2, 3}, {4, 2, 5, 7}, {3, 2, 8, 5}, {2, 8, 7, 3}}]
Out[1]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

```
In[2]:= Det[A]
```

$$\text{In[3]:= Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

```
Out[3]= 148
```

Рис. 2.14

2 способ

Вычислим определитель разложением по любой строке или любому столбцу, воспользовавшись функцией **Minors[m][[i, j]]**, которая вычисляет определитель минора матрицы **m** размера $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$, получающегося вычеркиванием из **m** $(n - i + 1)$-й строки и $(n - j + 1)$-го столбца.

Разложением по третьему столбцу получим следующее (рис. 2.15).

```
In[1]:= 2 Minors[{{1, 2, 2, 3}, {4, 2, 5, 7}, {3, 2, 8, 5}, {2, 8, 7, 3}}][[4, 2]] -
   5 Minors[{{1, 2, 2, 3}, {4, 2, 5, 7}, {3, 2, 8, 5}, {2, 8, 7, 3}}][[3, 2]] +
   8 Minors[{{1, 2, 2, 3}, {4, 2, 5, 7}, {3, 2, 8, 5}, {2, 8, 7, 3}}][[2, 2]] -
   7 Minors[{{1, 2, 2, 3}, {4, 2, 5, 7}, {3, 2, 8, 5}, {2, 8, 7, 3}}][[1, 2]]
Out[1]= 148
```

Рис. 2.15

Пример 2.2.2

Найти корни определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Вычислим определитель матрицы A, используя правило Саррюса (правило треугольников).

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot(-1)\cdot 1+x\cdot 3\cdot(x+10)+2\cdot 1\cdot(-4)-(-4)\cdot(-1)\times$$

$$\times(x+10)-3\cdot 1\cdot 3-2\cdot x\cdot 1=-3+3x^2+30x-8-4x-40-9-2x=3x^2+24x-60.$$

Теперь найдем корни уравнения $3x^2+24x-60=0 \Leftrightarrow x^2+8x-20=0 \Leftrightarrow$ $x_1=2,\ x_2=-10$.

Таким образом, $x_1=2$ и $x_2=-10$ являются корнями определителя матрицы A.

Вычисления в Mathematica

Для символьного решения уравнения используется функция **Solve[expr, vars]**. Первый аргумент – это уравнение, которое необходимо решить. Уравнение в системе **Mathematica** формируется двойным знаком равенства «= =». Второй аргумент – переменная, относительно которой решаем уравнение.

Итак, необходимо решить уравнение, полученное при вычислении определителя (рис. 2.16).

```
In[1]:= Solve[Det[{{3, x, -4}, {2, -1, 3}, {x + 10, 1, 1}}] = 0, x]

Out[1]= {{x → -10}, {x → 2}}
```

Рис. 2.16

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$:

1) по правилу треугольников;

2) разложением по элементам первой строки;

3) разложением по элементам второго столбца.

2. Вычислить определители, используя их свойства:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & k & 0 \end{vmatrix}$.

3. Решить уравнения и неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$; **2)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$; **3)** $\begin{vmatrix} 3x^2-7 & 4 \\ 3x & 2 \end{vmatrix} < 4$;

4) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -5x \\ 7x & 2 & -1 \end{vmatrix} > -24$; **5)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & x-4 & 3 \end{vmatrix} \le 0$.

4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ b & 0 & 0 \\ -b & 0 & b \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} \dfrac{x}{1+x} & \dfrac{2x+1}{1+x} \\ -\dfrac{1}{1+x} & \dfrac{x}{1+x} \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; **7)** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} m+1 & k-n \\ m^2+m & mk-mn \end{vmatrix}$.

5. Доказать равенство $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos 3\alpha$.

6. Решить относительно неизвестного λ уравнение $|A-\lambda E| = 0$, где $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Обратная матрица

Пример 2.3.1

Вычислить след матрицы $A = 2B^{-1} \cdot C - 3EB^{-\mathrm{T}}$, если $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Найдем обратную матрицу B^{-1} для матрицы B. Вычислим определитель данной матрицы:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 2 = 1.$$

Так как матрица B является невырожденной, т. е. $|B| = 1 \neq 0$, то найдем обратную матрицу B^{-1} по формуле $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}$.

Находим алгебраические дополнения.

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Итак, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверка: $B^{-1}\cdot B = B\cdot B^{-1} = E$.

$$B^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 3 & (-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 & (-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-3)\cdot 3 & 4\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-3)\cdot 1 & 4\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-3)\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2. Вычислим:

1) $$2B^{-1}\cdot C = 2\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=2\cdot\begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot 3+2\cdot 0 & (-2)\cdot 0+(-1)\cdot 1+2\cdot 4 & (-2)\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1 \\ 4\cdot(-1)+1\cdot 3+(-3)\cdot 0 & 4\cdot 0+1\cdot 1+(-3)\cdot 4 & 4\cdot 2+1\cdot(-1)+(-3)\cdot 1 \\ 1\cdot(-1)+1\cdot 3+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 4 & 1\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ -1 & -11 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 14 & -2 \\ -2 & -22 & 8 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix};$$

2) $3EB^{-\mathrm{T}}=3E\left(B^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=$

$$=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+0+0 & 1\cdot 4+0+0 & 1\cdot 1+0+0 \\ 0+1\cdot(-1)+0 & 0+1\cdot 1+0 & 0+1\cdot 1+0 \\ 0+0+1\cdot 2 & 0+0+1\cdot(-3) & 0+0+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 12 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix};$$

3) $A=2B^{-1}C-3EB^{-\mathrm{T}}=$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 14 & -2 \\ -2 & -22 & 8 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -6 & 12 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -25 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим след матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -25 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

След матрицы – это сумма элементов главной диагонали матрицы, т. е. $\operatorname{tr} A=4+(-25)+3=-18$.

Вычисления в Mathematica

С целью ознакомления с новыми функциями в программе **Mathematica** распишем подробно решение примера 2.3.1.

1. Функция **Inverse** вычисляет обратную матрицу для невырожденных квадратных матриц.

Убедимся, что матрица B является невырожденной, т. е. определитель отличен от нуля. Для вычисления определителя используем функцию **Det[B]** (рис. 2.17).

```
In[1]:= Det[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}]

Out[1]= 1
```

Рис. 2.17

Теперь найдем обратную матрицу B^{-1} (рис. 2.18).

```
In[2]:= Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}]

In[3]:= {{-2, -1, 2}, {4, 1, -3}, {1, 1, -1}} // MatrixForm
Out[3]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.18

2. Вычислим $2B^{-1}\cdot C$ (рис. 2.19). Пусть $A1 = 2B^{-1}\cdot C$.

```
In[4]:= A1 = MatrixForm[
           2 Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}].
             {{-1, 0, 2}, {3, 1, -1}, {0, 4, 1}}]

Out[4]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 14 & -2 \\ -2 & -22 & 8 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.19

Для вычисления произведения матриц можно использовать также функцию **Dot[A,B]**.

3. Пусть $A2 = 3EB^{-\mathrm{T}}$.

Для вычисления $B^{-\mathrm{T}} = \left(B^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ воспользуемся известной уже функцией транспонирования матрицы **Transpose** (рис. 2.20).

```
In[5]:= Transpose[Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}]] // MatrixForm
Out[5]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.20

Если найти транспонированную матрицу после нахождения обратной матрицы B^{-1}, то можно воспользоваться символом **%**, который означает ссылку на предыдущее вычисленное выражение (рис. 2.21).

```
In[1]:= Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}] // MatrixForm
Out[1]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
In[2]:= Transpose[%] // MatrixForm
Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.21

Функция **IdentityMatrix[n]** создает единичную матрицу указанного размера **[n]** (рис. 2.22).

```
In[1]:= MatrixForm[IdentityMatrix[3]]
Out[1]//MatrixForm=
```
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.22

Итак, $A2$ равно (рис. 2.23).

```
A2 =
 MatrixForm[
  3 IdentityMatrix[3].
   Transpose[Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}]]]
Out[5]//MatrixForm=
```
$$\begin{pmatrix} -6 & 12 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.23

4. Найдем матрицу $A = A1 - A2$ (рис. 2.24).

```
In[7]:= A = MatrixForm[A1 - A2]
```
$$\text{In[8]:=} -\begin{pmatrix} -6 & 12 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 14 & -2 \\ -2 & -22 & 8 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ // MatrixForm}$$
```
Out[8]//MatrixForm=
```
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -25 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.24

5. При вычислении следа матрицы A ее можно ввести с помощью символа **%** , обозначающего последний результат вычислений (рис. 2.25).

```
Out[8]//MatrixForm=
```
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -25 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
```
In[9]:= Tr[%]
Out[9]= -18
```

Рис. 2.25

Пример 2.3.1 в программе **Mathematica** можно решить кратко (рис. 2.26).

```
In[3]:= Tr[
          MatrixForm[
           2 Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}].
             {{-1, 0, 2}, {3, 1, -1}, {0, 4, 1}}] -
          MatrixForm[
           3 IdentityMatrix[3].
             Transpose[Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 0, 2}, {3, 1, 2}}]]]]
```

$$\text{In[4]:= Tr}\left[-\begin{pmatrix} -6 & 12 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 14 & -2 \\ -2 & -22 & 8 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

```
Out[4]= -18
```

Рис. 2.26

Пример 2.3.2

Решить матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Обе части уравнения $AX = B$ умножим слева на матрицу A^{-1}: $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$ (E – единичная матрица), то $EX = A^{-1}B$ и $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot (-1) -$$
$$- 2 \cdot (-1) \cdot 1 - (-3) \cdot (-2) \cdot (-2) = -4 - 12 - 3 + 6 + 2 + 12 = 1 \neq 0 .$$

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$, $\qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(6 - 6) = 0$,
$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$;

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$, $\qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$,
$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 6) = -5$;

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4+2=-2, \qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-(2-3)=1,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=2-6=-4.$$

Итак, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -3 & -5 & -4\end{pmatrix}$.

Теперь находим решение матричного уравнения:

$$X=A^{-1}B=\underset{3\times3}{\begin{pmatrix}-2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -3 & -5 & -4\end{pmatrix}}\underset{3\times2}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-2)\cdot1+(-3)\cdot2+(-2)\cdot(-3) & (-2)\cdot0+(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-3) & 0\cdot0+1\cdot(-2)+1\cdot1\\ (-3)\cdot1+(-5)\cdot2+(-4)\cdot(-3) & (-3)\cdot0+(-5)\cdot(-2)+(-4)\cdot1\end{pmatrix}=\underset{3\times2}{\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\\ -1 & 6\end{pmatrix}}.$$

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** приведены на рис. 2.27.

```
In[8]:= X = MatrixForm[Inverse[{{1, -2, -1}, {-3, 2, 2}, {3, -1, -2}}].
          MatrixForm[{{1, 0}, {2, -2}, {-3, 1}}]]

                                                 ( 1   0 )
In[9]:= {{-2, -3, -2}, {0, 1, 1}, {-3, -5, -4}}. ( 2  -2 ) // MatrixForm
                                                 (-3   1 )

Out[9]//MatrixForm=
        (-2   4)
        (-1  -1)
        (-1   6)
```

Рис. 2.27

Задания для самостоятельной работы

1. Найти обратные матрицы, если это возможно, для заданных матриц:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 7\\ 1 & 7 & 8\end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -5 & 7\end{pmatrix}$; **4)** $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & -9\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ -6 & 0 & -2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$; **6)** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

2. При каких значениях m матрица X не имеет обратной матрицы:

1) $X=\begin{pmatrix} m & -4 & 1 \\ 7 & -m & 2 \\ 2 & -1 & -m \end{pmatrix}$; **2)** $X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведения матриц:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$; **2)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричные уравнения:

1) $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 7 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$;

3) $X\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **4)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+3X=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; **6)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=0$.

5. Вычислить значение $f(x)$ при $x=A$, если $f(x)=x-3x^{-1}+2x^{-2}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. Системы линейных алгебраических уравнений

Пример 2.4.1

Исследовать системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-x_2+x_3=0, \\ -3x_1+2x_2-x_3=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+x_2-2x_3=-5, \\ 2x_1-3x_2+x_3=3. \end{cases}$

Решение

а) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Строки будем обозначать римскими цифрами.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&3&3\\2&-1&1&0\\-3&2&-1&1\end{array}\right)\underset{\substack{\mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II}\\ \mathrm{I}\cdot 3+\mathrm{III}}}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&3&3\\0&-3&-5&-6\\0&5&8&10\end{array}\right)\underset{\mathrm{II}\cdot 5+\mathrm{III}\cdot 3}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&3&3\\0&-3&-5&-6\\0&0&-1&0\end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(\overline{A})=3$, т. е. ранг матрицы системы уравнений равен рангу расширенной матрицы системы, то по теореме Кронекера - Капелли система совместна. Количество неизвестных тоже равно 3 ($n=r(A)=r(\overline{A})=3$), значит, система определена, т. е. имеет единственное решение.

Вычисления в Mathematica

Отметим, что:

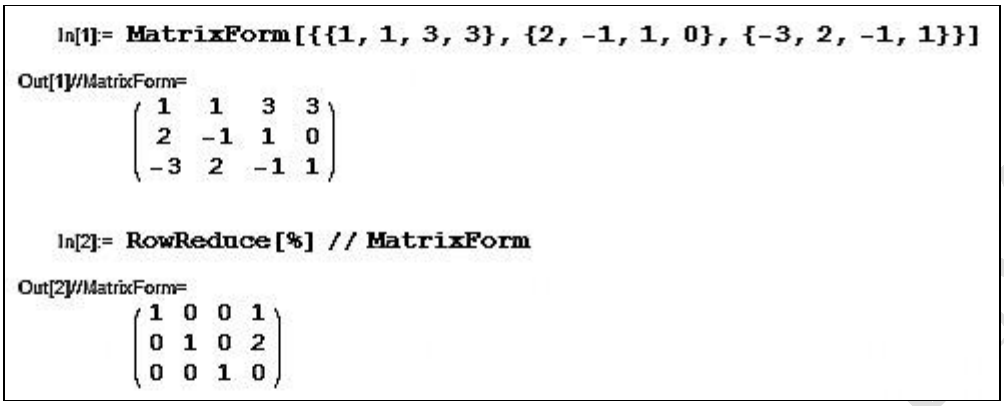
1) в результате приведения квадратной невырожденной матрицы к ступенчатому виду получается диагональная матрица с единицей по главной диагонали, т. е. единичная матрица, например $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

2) для вычисления ранга матрицы в системе **Mathematica** существует функция **MatrixRank** $[\mathbf{m}]$, где **m** – матрица. Например, найдем ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы (рис. 2.28).

```
In[1]:= A = MatrixForm[{{1, 1, 3}, {2, -1, 1}, {-3, 2, -1}}]
Out[1]//MatrixForm=
 ( 1   1   3 )
 ( 2  -1   1 )
 (-3   2  -1 )

In[2]:= MatrixRank[A]

In[3]:= MatrixRank[( 1   1   3 )
                   ( 2  -1   1 )
                   (-3   2  -1 )]

Out[3]= 3

In[4]:= MatrixForm[{{1, 1, 3, 3}, {2, -1, 1, 0}, {-3, 2, -1, 1}}]
Out[4]//MatrixForm=
 ( 1   1   3   3 )
 ( 2  -1   1   0 )
 (-3   2  -1   1 )

In[5]:= MatrixRank[%]

Out[5]= 3
```

Рис. 2.28

Для приведения матрицы к ступенчатому виду «вручную» к строкам матрицы применяются элементарные преобразования. В пакете **Mathematica** для приведения матрицы к ступенчатому виду используют функцию **RowReduce**$[$**m**$]$, где **m** – матрица (рис. 2.29).



```
In[1]:= MatrixForm[{{1, 1, 3, 3}, {2, -1, 1, 0}, {-3, 2, -1, 1}}]
Out[1]//MatrixForm=
 1   1   3   3
 2  -1   1   0
-3   2  -1   1

In[2]:= RowReduce[%] // MatrixForm
Out[2]//MatrixForm=
 1 0 0 1
 0 1 0 2
 0 0 1 0
```

Рис. 2.29

На рис. 2.29 видно, что ранг матрицы системы (матрица системы – три первых столбца) равен 3 и ранг расширенной матрицы системы (все четыре столбца) также равен 3. Следовательно, система совместна. Так как количество неизвестных тоже 3, система определена.

Расширенную матрицу $\overline{A}$ можем привести «вручную» к ступенчатому виду как на рис. 2.29, выполнив элементарные преобразования, в результате чего выделяется диагональная матрица:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot 3+\mathrm{III}}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 5 & 8 & 10 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}\cdot 5+\mathrm{III}\cdot 3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{\mathrm{I}\cdot 3+\mathrm{II} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III}\cdot(-5)}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}+\mathrm{III}\cdot 4}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{3} \\ \mathrm{II}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \mathrm{III}\cdot(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

б) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{III}}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Так как $r(A)=2\neq r(\overline{A})=3$, то система несовместна, т. е. не имеет решений.

Вычисления в Mathematica

Аналогично пункту «а», получаем (рис. 2.30).

```
In[1]:= MatrixForm[{{1, -1, 2, 4}, {-1, 1, -2, -5}, {2, -3, 1, 3}}]
Out[1]//MatrixForm=
 ( 1  -1   2   4 )
 (-1   1  -2  -5 )
 ( 2  -3   1   3 )

In[2]:= RowReduce[%]

In[3]:= {{1, 0, 5, 0}, {0, 1, 3, 0}, {0, 0, 0, 1}} // MatrixForm
Out[3]//MatrixForm=
 (1 0 5 0)
 (0 1 3 0)
 (0 0 0 1)
```

Рис. 2.30

По последней матрице на рис. 2.30 видно, что $r(A)=2$, т. к. она имеет две ненулевые строки, а ранг расширенной матрицы $r(\overline{A})=3$. Исходная система не имеет решений.

Пример 2.4.2.

Решить систему линейных уравнений (СЛУ) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2: \end{cases}$

а) методом Гаусса;
б) по правилу Крамера;
в) методом обратной матрицы (матричный метод).

Решение

Выпишем матрицу системы A, столбец свободных членов B, расширенную матрицу системы $\overline{A}=(A|B)$:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Исследуем систему на совместность.

Ранг матрицы системы и расширенной матрицы будем искать методом Гаусса, выполняя элементарные преобразования над расширенной матрицей таким образом, чтобы полученная матрица стала трапециевидной. Количество ненулевых строк полученной матрицы будет равно ее рангу:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{II}(-2)+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\cdot(-2)+\mathrm{I}\cdot 3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}\cdot 3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right).$$

Матрица системы и расширенная матрица имеют по три ненулевых строки, значит, их ранг одинаковый и равен 3: $r(A)=r(\overline{A})=3 \Rightarrow$ система совместна. Система имеет три неизвестных, следовательно, у этой системы единственное решение.

Решим СЛУ тремя методами:

а) Методом Гаусса.

В этом методе целью преобразований является приведение матрицы к трапециевидной форме, которая была получена на этапе исследования системы на совместность: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$. Полученной матрице соответствует система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_2 + 3x_3 = -3, \\ 10x_3 = -10. \end{cases}$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Выполнив обратный ход метода Гаусса, из последнего уравнения находим $x_3 = -1$, подставив это значение во второе уравнение, получим $x_2 = \dfrac{-3+3}{-3} = 0$ и из первого уравнения $x_1 = \dfrac{1+1-0}{2} = 1$. Получили решение СЛУ: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$.

б) По правилу Крамера.

Вычислим определитель матрицы системы:

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(2-3) - (1+3) + (-3-6) = -2 - 4 - 9 = -15.$$

Так как $\Delta = -15 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 (разными методами), подставляя столбец свободных членов B вместо первого, второго и третьего столбцов определителя Δ соответственно:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-3) + (2+2) + (-6-4) = -1 - 4 - 10 = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 =$$

$= 4 - 3 + 2 - 6 + 4 - 1 = 0;$

$$\Delta_3 = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{matrix} = = 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-3) -$$

$-1\cdot 1\cdot 2 = 8 + 6 - 3 - 6 + 12 - 2 = 15.$

По формулам Крамера находим решение СЛУ:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1,\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-15} = 0,\ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{15}{-15} = -1.$$

в) Методом обратной матрицы.

Систему линейных уравнений можно записать в матричном виде: $A \cdot X = B$, решение находим по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $|A| = -15 \neq 0$, то обратная матрица существует. Найдем ее по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1, \quad A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+3) = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9;$$

$$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+3) = -4, \quad A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-3) = 9;$$

$$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3, \quad A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Итак, обратная матрица к A имеет вид

$$A^{-1}=\frac{1}{-15}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -4 & -3\\ -4 & -1 & 3\\ -9 & 9 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 4 & 1 & -3\\ 9 & -9 & -3\end{pmatrix}.$$

Правильность обратной матрицы A^{-1} проверим позже средствами **Mathematica**.

Матричное решение системы:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 4 & 1 & -3\\ 9 & -9 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 1 & + & 4\cdot 2 & + & 3\cdot 2\\ 4\cdot 1 & + & 1\cdot 2 & + & (-3)\cdot 2\\ 9\cdot 1 & + & (-9)\cdot 2 & + & (-3)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}15\\ 0\\ -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

Итак, решение СЛУ: $(1;\ 0;\ -1)$.

Отметим, что расширенную матрицу $\overline{A}$ при помощи элементарных преобразований можно было привести к такой трапециевидной форме:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 1 & 2\end{array}\right)\underset{\substack{\text{II}(-2)+\text{I}\\ \text{III}\cdot(-2)+\text{I}\cdot 3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 9 & 1 & -1\end{array}\right)\underset{\substack{\text{III}+\text{II}\cdot 3\\ \text{I}\cdot 3+\text{II}}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 10 & -10\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{\substack{\text{I}\cdot(-5)+\text{III}\cdot 3\\ \text{II}\cdot(-10)+\text{III}\cdot 3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-30 & 0 & 0 & -30\\ 0 & 30 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & -10\end{array}\right)\underset{\substack{\text{I}\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)\\ \text{II}\cdot\frac{1}{30}\\ \text{III}\cdot\frac{1}{10}}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right).$$

По последней матрице можно сразу записать решение СЛУ: $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=-1.$

Вычисления в Mathematica

Исследуем СЛУ на совместность, как в примере 2.4.1 (рис. 2.31).

```
In[1]:= MatrixForm[{{2, 1, 1, 1}, {1, 2, -1, 2}, {3, -3, 1, 2}}]
Out[1]//MatrixForm=
  2  1   1  1
  1  2  -1  2
  3 -3   1  2

In[2]:= RowReduce[%]

In[3]:= {{1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, -1}} // MatrixForm
Out[3]//MatrixForm=
  1 0 0  1
  0 1 0  0
  0 0 1 -1
```

Рис. 2.31

Последняя матрица на рис. 2.32 позволяет сделать вывод, что система совместна и является определенной.

Рассмотрим решения СЛУ в пакете **Mathematica** разными методами:

а) Методом Гаусса.

Сущность метода Гаусса состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к трапециевидной форме. Применяется алгоритм полного исключения, в результате чего выделяется диагональная матрица, по которой записывается решение системы.

Трапециевидная форма матрицы была получена на рис. 2.32. Таким образом, последний столбец получившейся матрицы на рис. 2.32 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и является решением системы.

б) По формулам Крамера.

Введем матрицу системы A и столбец свободных членов B (рис. 2.32).

Матрица системы уравнений A:

```
In[1]:= (A = {{2, 1, 1}, {1, 2, -1}, {3, -3, 1}}) // MatrixForm
```

Out[1]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Столбец свободных членов B :

```
In[2]:= (B = {{1}, {2}, {2}}) // MatrixForm
```

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.32

Вычислим определитель матрицы A (рис. 2.33).

Определитель матрицы A :

```
In[3]:= Det[A]
Out[3]= -15
```

Рис. 2.33

Определитель отличен от нуля $(|A| = -15 \neq 0)$, следовательно, система имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_1,\ \Delta_2, \Delta_3$ и по формулам Крамера найдем решение системы уравнений (рис. 2.34).

```
Введем дополнительные матрицы для дальнейших вычислений :

In[4]:= A1 = A; A2 = A; A3 = A;

Выполним замену соответсвующих столбцов :

In[5]:= Part[A1, 1 ;; 3, 1 ;; 1] = Part[B, 1 ;; 3, 1 ;; 1];
        Part[A2, 1 ;; 3, 2 ;; 2] = Part[B, 1 ;; 3, 1 ;; 1];
        Part[A3, 1 ;; 3, 3 ;; 3] = Part[B, 1 ;; 3, 1 ;; 1];

Найдем решение системы :

In[8]:= x1 = Det[A1] / Det[A]
        x2 = Det[A2] / Det[A]
        x3 = Det[A3] / Det[A]

Out[8]= 1

Out[9]= 0

Out[10]= -1
```

Рис. 2.34

в) Методом обратной матрицы.

Решение СЛУ находим по формуле $X = A^{-1}B$. Решение задачи таким методом приводится в примере 2.3.2 (см. подразд. 2.3.)

В данном случае получается следующее (рис. 2.35).

```
In[10]:=
    X = MatrixForm[Inverse[{{2, 1, 1}, {1, 2, -1}, {3, -3, 1}}].
      MatrixForm[{{1}, {2}, {2}}]]
```

In[11]:= $\left\{\left\{\frac{1}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}\right\}, \left\{\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right\}, \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right\}\right\}.\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ `// MatrixForm`

Out[11]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Рис. 2.35

Рассмотрим другой подход при решении системы без указанного метода.

Для решения СЛУ в пакете **Mathematica** можно использовать несколько встроенных функций.

Заданную систему всегда необходимо исследовать на совместность, для этого нам необходимо знать ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы.

Введем матрицу системы A, матрицу-столбец свободных членов B и матрицу-столбец неизвестных X (рис. 2.36).

```
In[1]:= A = {{2, 1, 1}, {1, 2, -1}, {3, -3, 1}} // MatrixForm
```

Out[1]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[2]:= B = {1, 2, 2} // MatrixForm
```

Out[2]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= X = {X1, X2, X3}

In[4]:= {X1, X2, X3} // MatrixForm
```

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.36

Найдем ранг матрицы A (рис. 2.37).

```
In[5]:= MatrixRank[A]
```

In[6]:= MatrixRank $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Out[6]= 3

Рис. 2.37

Составим расширенную матрицу $(A|B)$, воспользовавшись определенным синтаксисом в пакете **Mathematica** (рис. 2.38).

```
In[7]:= Transpose[Join[Transpose[A], {B}]]
```

In[8]:= Transpose $\left[\text{Join}\left[\text{Transpose}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right], \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right]\right]$

```
In[9]:= {{2, 1, 1, 1}, {1, 2, -1, 2}, {3, -3, 1, 2}} // MatrixForm
```

Out[9]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.38

Ранг расширенной матрицы равен 3 (рис. 2.39).

```
In[7]:= Transpose[Join[Transpose[A], {B}]]
```

$$\text{In[8]:= Transpose}\left[\text{Join}\left[\text{Transpose}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right], \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right]\right]$$

```
In[9]:= {{2, 1, 1, 1}, {1, 2, -1, 2}, {3, -3, 1, 2}} // MatrixForm
Out[9]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
In[10]:= MatrixRank[%]
Out[10]= 3
```

Рис. 2.39

Итак, т. к. $r(A)=r(A|B)=3=n$, то система совместна и определена.

С помощью функции **Solve** находим решение СЛУ (рис. 2.40).

```
In[11]:= Solve[A.X = B, X]
```

$$\text{In[12]:= Solve}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\{X1, X2, X3\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \{X1, X2, X3\}\right]$$

```
Out[12]= {{X1 → 1, X2 → 0, X3 → -1}}
```

Рис. 2.40

Получили решение СЛУ: $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=-1$.

Если СЛУ имеет единственное решение, т. е. система определена, то в **Mathematica** предусмотрена функция **LinearSolve**$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ для решения СЛУ $AX=B$ (рис. 2.41).

```
In[13]:= LinearSolve[A, B]
```

$$\text{In[14]:= LinearSolve}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

```
Out[14]= {1, 0, -1}
```

Рис. 2.41

Получили такое же решение СЛУ: $(-1;0;-1)$.

Пример 2.4.3

Исследовать систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ 4x_1+x_3-7x_4=3, \\ 2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$ и решить ее, если она совместна.

Решение

Выполним элементарные преобразования таким образом, чтобы расширенная матрица стала трапециевидной:

$$\overline{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\4&0&1&-7&3\\0&2&-3&1&1\\2&3&-4&-2&3\end{array}\right)\underset{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{I}\cdot 2\\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\0&-2&3&-1&-1\\0&2&-3&1&1\\0&2&-3&1&1\end{array}\right)\underset{\substack{\mathrm{III}+\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}+\mathrm{II}}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\0&-2&3&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\0&-2&3&-1&-1\end{array}\right).$$

Итак, система совместна и не определена (имеет бесконечно много решений), т. к. $r=r(A)=r(\overline{A})=2<4=n$.

Количество свободных переменных: $n-r=4-2=2$. Выберем в последней матрице какой-нибудь минор 2-го порядка, не равный нулю, например $\begin{vmatrix}2&1\\0&-2\end{vmatrix}=-4\neq 0$. При таком выборе главными переменными будут x_1 и x_2, т. к. они соответствуют столбцам выбранного минора, тогда свободные переменные – x_3 и x_4.

Продолжим преобразование последней матрицы, превращая выбранный базисный минор в единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\0&-2&3&-1&-1\end{array}\right)\underset{\mathrm{II}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&-3&2\\0&1&-3/2&1/2&\frac{1}{2}\end{array}\right)\underset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&1/2&-7/2&3/2\\0&1&-3/2&1/2&1/2\end{array}\right)\underset{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{2}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1/4&-7/4&3/4\\0&1&-3/2&1/2&1/2\end{array}\right).$$

Полученная в результате всех преобразований матрица соответствует системе, в которой слева остаются только главные переменные:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}x_3+\dfrac{7}{4}x_4,\\ x_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4.\end{cases}$$

Запишем решения СЛУ:

– общее решение: $\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}x_3+\dfrac{7}{4}x_4;\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4;\ x_3;\ x_4\right)$, $x_3,x_4\in\mathrm{R}$;

– частное решение: $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2};0;0\right)$ при $x_3=x_4=0$.

Выполним проверку. Подставим частное решение в исходную СЛУ:

$$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{3}{4}+1\cdot\dfrac{1}{2}-1\cdot 0-3\cdot 0=2 - \text{верно,} \\ 4\cdot\dfrac{3}{4}+1\cdot 0-7\cdot 0=3 - \text{верно,} \\ 2\cdot\dfrac{1}{2}-3\cdot 0+1\cdot 0=1 - \text{верно,} \\ 2\cdot\dfrac{3}{4}+3\cdot\dfrac{1}{2}-4\cdot 0-2\cdot 0=3 - \text{верно.} \end{cases}$$

Проверка подтверждает правильность нахождения решения СЛУ.

Вычисления в Mathematica

Исследуем СЛУ на совместность. Введем матрицу системы A, матрицу-столбец неизвестных X (рис. 2.42).

```
In[1]:=
      A = {{2, 1, -1, -3}, {4, 0, 1, -7}, {0, 2, -3, 1}, {2, 3, -4, -2}};
      A // MatrixForm

Out[2]//MatrixForm=
      (2 1 -1 -3)
      (4 0  1 -7)
      (0 2 -3  1)
      (2 3 -4 -2)

In[3]:= X = {X1, X2, X3, X4};
      X // MatrixForm

Out[4]//MatrixForm=
      (X1)
      (X2)
      (X3)
      (X4)
```

Рис. 2.42

Запишем матрицу-столбец свободных членов B и расширенную матрицу системы $(A|B)$ (рис. 2.43).

```
In[5]:= B = {2, 3, 1, 3};
      B // MatrixForm

Out[6]//MatrixForm=
      (2)
      (3)
      (1)
      (3)

In[7]:= Transpose[Join[Transpose[A], {B}]] // MatrixForm

Out[7]//MatrixForm=
      (2 1 -1 -3 2)
      (4 0  1 -7 3)
      (0 2 -3  1 1)
      (2 3 -4 -2 3)
```

Рис. 2.43

Приведем расширенную матрицу к матрице трапециевидной формы (рис. 2.44).

```
In[8]:= RowReduce[%] // MatrixForm
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.44

На рис. 2.44 $r(A)=2,\ r(A|B)=2 \Rightarrow$ система совместна. Количество неизвестных по условию $n=4$, а $r(A)=r(A|B)=2$, значит, система имеет бесконечное множество решений.

Если выбрать первый и второй столбцы матрицы на рис. 2.44 и убедиться, что $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, то переменные x_1 и x_2 будут базисными, а x_3 и x_4 – свободными. Тогда по последней матрице на рис. 2.44 можем записать общее решение СЛУ:

$$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \quad x_3, x_4 \in \mathrm{R}.$$

Если система не определена, т. е. имеет бесконечное множество решений, то используют функцию **Reduce**, т. к. **Solve** может не указать все решения (рис. 2.45).

```
In[9]:= Reduce[A.X == B, X]
```

Out[9]= $X3 == -\frac{1}{2} + \frac{X1}{5} + \frac{7\,X2}{10}\ \&\&\ X4 == -\frac{1}{2} + \frac{3\,X1}{5} + \frac{X2}{10}$

Рис. 2.45

На рис. 2.45 базисные переменные – x_3 и x_4, а свободные переменные – x_1 и x_2.

Воспользовавшись функцией **LinearSolve[A,B]**, получаем конкретное решение (рис. 2.46).

```
In[10]:= LinearSolve[A, B]
```

Out[10]= $\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0\right\}$

Рис. 2.46

Данное решение на рис. 2.46 совпадает с частным решением, полученным нами «вручную».

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить ранг матриц:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; **6)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Исследовать системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 4x_1 + 4x_3 + 9x_4 = 17, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11; \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

3. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса, по правилу Крамера и методом обратной матрицы:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 11, \\ 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 4; \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9; \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

4. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и частное решения:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 9, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=2,\\ 7x_1-2x_2+x_4=3,\\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4=7,\\ 3x_1-8x_2+2x_3-x_4=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x_1+4x_2+3x_3+2x_5=0,\\ -2x_1+7x_2+5x_3+x_4+3x_5=-2,\\ -x_1+2x_2+x_3+8x_4=-10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-5x_4=3,\\ x_1-4x_2+x_3+2x_4=1. \end{cases}$

5. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородных систем линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_2+3x_3=0,\\ x_1-5x_3=0,\\ 2x_3+x_4=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+6x_3=0,\\ -x_1+2x_2-3x_3=0,\\ x_1-2x_2+3x_3=0,\\ -3x_1+6x_2-9x_3=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0,\\ -x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

2.5. Векторная алгебра

2.5.1. Скалярное произведение векторов

Пример 2.5.1.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{m}+7\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}-5\vec{n}$, если $|\vec{m}|=6$, $|\vec{n}|=4$, $\left(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\vec{m}+7\vec{n}\right)\left(3\vec{m}-5\vec{n}\right)=\left(2\vec{m},3\vec{m}\right)-\left(2\vec{m},5\vec{n}\right)+\left(7\vec{n},3\vec{m}\right)-\left(7\vec{n},5\vec{n}\right)=$$

$$=2\cdot3\cdot\left(\vec{m},\vec{m}\right)-2\cdot5\cdot\left(\vec{m},\vec{n}\right)+7\cdot3\cdot\left(\vec{n},\vec{m}\right)-7\cdot5\cdot\left(\vec{n},\vec{n}\right)=6\cdot|\vec{m}|^2-10\cdot\left(\vec{m},\vec{n}\right)+21\cdot\left(\vec{m},\vec{n}\right)-$$

$$-35\cdot|\vec{n}|^2=6\cdot6^2+11\cdot\left(\vec{m},\vec{n}\right)-35\cdot4^2=216+11\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\left(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}\right)-560=$$

$$=-344+11\cdot6\cdot4\cdot\frac{1}{2}=-344+132=-212.$$

Вычисления в Mathematica

Решение примера 2.5.1 можно выполнить следующим образом (рис. 2.47).

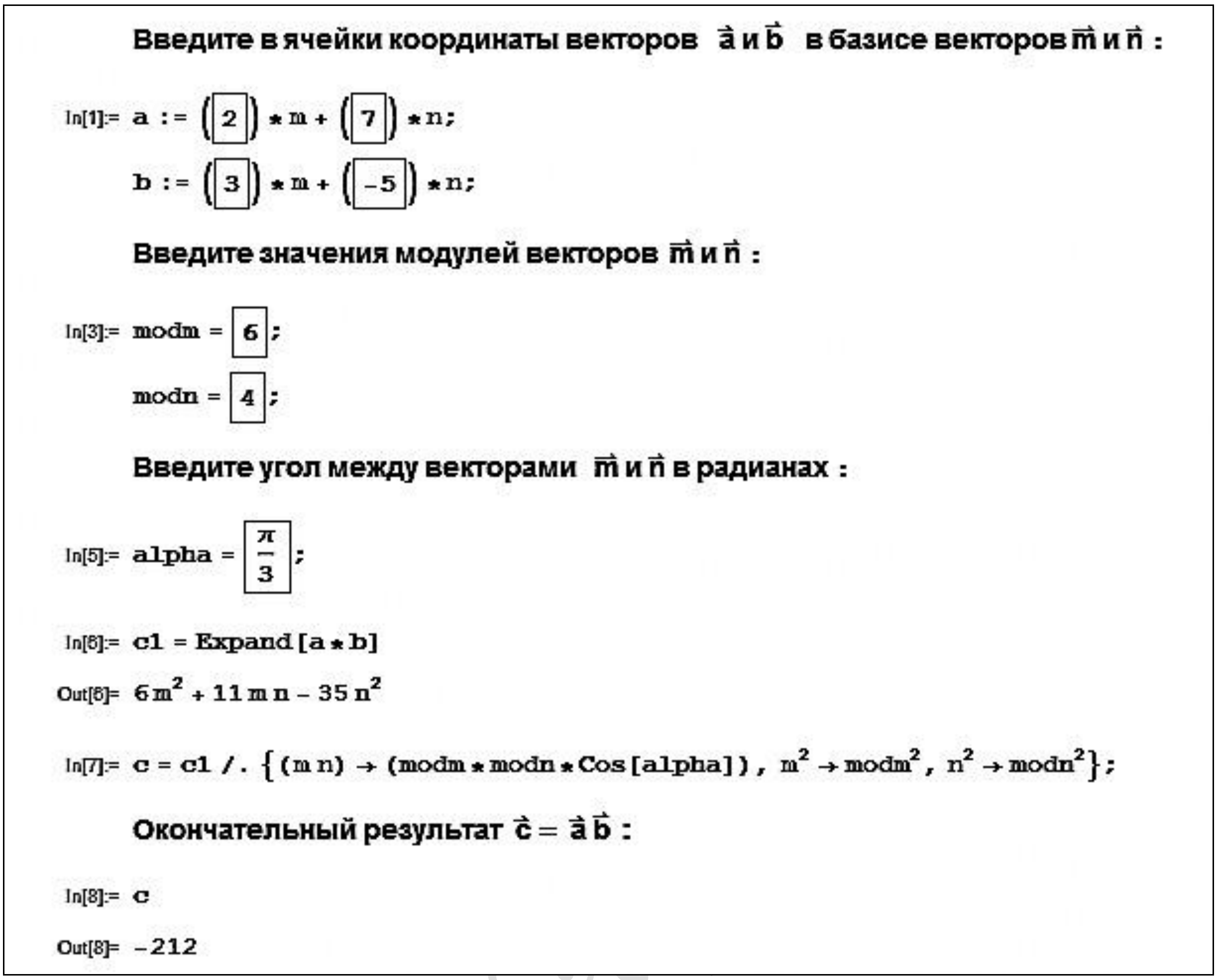


Рис. 2.47

Для решения задач можно использовать пакет **Mathematica** как вспомогательный инструмент при выполнении отдельных этапов решения, но продуктивнее составить небольшие универсальные программы, позволяющие решать задачи автоматически при изменении начальных условий. В общем случае составление подобных программ не требует особых навыков программирования, а просто отражает алгоритм решения той или иной задачи.

Пример 2.5.2.

Определить длину вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=60^\circ$.

Решение

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$. Следовательно, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

Вектор $2\vec{a}-3\vec{b}$ возведем скалярно в квадрат:

$$\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2 = 4\vec{a}^{\,2} - 12\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^{\,2} = 4\left|\vec{a}\right|^2 - 12\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) + 9\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= 4\cdot 9 - 12\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 4 = 36 - 36 + 36 = 36.$$

Тогда $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right| = \sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$.

Вычисления в Mathematica

Пример 2.5.2 можно решить «вручную», основываясь на вышеприведенном алгоритме. Достаточно вычислить скалярное произведение вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$ на себя и затем из полученного результата извлечь корень (рис. 2.48). Обозначим $\vec{c} = 2\vec{a}-3\vec{b}$.

```
Введите в ячейки координаты вектора c⃗ в базисе векторов a⃗ и b⃗ :

In[1]:= c := ([2]) * a + ([-3]) * b;

Введите значения модулей векторов a⃗ и b⃗ :

In[2]:= moda = [3];
        modb = [2];

Введите угол между векторами a⃗ и b⃗ в градусах :

In[4]:= alpha = [60];

In[5]:= c1 = Expand[c * c]
Out[5]= 4 a^2 - 12 a b + 9 b^2

In[6]:= c = c1 /. {(a * b) → (moda * modb * Cos[alpha Degree]), a^2 → moda^2, b^2 → modb^2};

Окончательный результат L = |c⃗| :

In[7]:= L = √c
Out[7]= 6
```

Рис. 2.48

Пример 2.5.3.

Найти угол между векторами $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{d} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Решение

Определим угол между ненулевыми векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ по формуле $\cos\left(\vec{c}\,\hat{,}\,\vec{d}\right) = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|}$.

Найдем скалярное произведение $\vec{c}\cdot\vec{d}$ векторов через координаты: $\vec{c}\cdot\vec{d}=4\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot 1=8+2-1=9$.

Вычислим длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$|\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $|\vec{d}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$.

Итак, $\cos\left(\vec{c}\,\hat{,}\,\vec{d}\right)=\dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\;\Rightarrow\;\left(\vec{c}\,\hat{,}\,\vec{d}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Вычисления в Mathematica

Для вычисления угла между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в пакете **Mathematica** воспользуемся функцией **VectorAngle[c, d]** (рис. 2.49).

```
Вычисление угла между векторами:

In[1]:= α = VectorAngle[{4, -1, -1}, {2, -2, 1}]

Out[1]= π/4

Численное значение угла в радианах:

In[2]:= N[α]

Out[2]= 0.785398

Угол в градусах :

In[3]:= N[α * 180/π]

Out[3]= 45.
```

Рис. 2.49

Пример 2.5.4.

При каком значении α векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\alpha\vec{j}$ и $\vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ перпендикулярны?

Решение

$\vec{a}=(2;\ \alpha;\ 0)$, $\vec{b}=(4;\ -2;\ 1)$.

Векторы являются перпендикулярными тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$\vec{a}\perp\vec{b}\;\Leftrightarrow\;\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

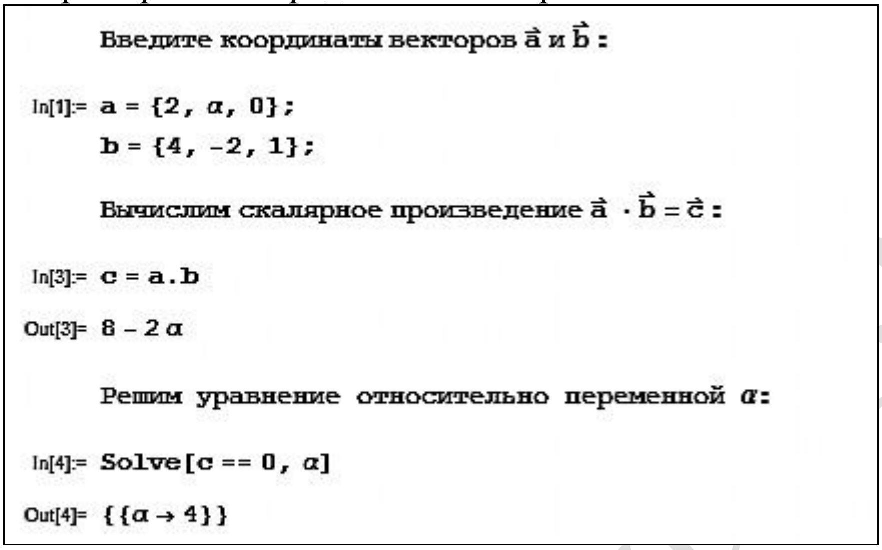
Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}=(2;\ \alpha;\ 0)$ и $\vec{b}=(4;\ -2;\ 1)$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 4+\alpha\cdot(-2)+0\cdot 1=8-2\alpha=0$.

Отсюда, $-2\alpha=-8\;\Rightarrow\;2\alpha=8\;\Rightarrow\;\alpha=4$.

Вычисления в Mathematica

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти функцией **a.b** или **Dot[a, b]**.

Решение примера 2.5.4 представлено на рис. 2.50.



```
Введите координаты векторов a⃗ и b⃗ :

In[1]:= a = {2, α, 0};
        b = {4, -2, 1};

Вычислим скалярное произведение a⃗ · b⃗ = c⃗ :

In[3]:= c = a.b
Out[3]= 8 - 2 α

Решим уравнение относительно переменной α:

In[4]:= Solve[c == 0, α]
Out[4]= {{α → 4}}
```

Рис. 2.50

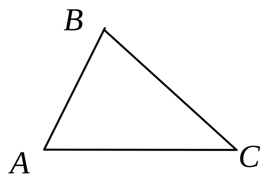
Пример 2.5.5.

Даны вершины треугольника *A*(–4; –2; 0), *B*(–1; –2; 4) и *C*(3; –2; 1). Определить внутренний угол при вершине A.

Решение

Определим внутренний угол при вершине A из следующей формулы:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$



Найдем:

$$\overrightarrow{AB}=(-1-(-4);\ -2-(-2);\ 4-0)=(3;0;4),$$

$$\overrightarrow{AC}=(3-(-4);\ -2-(-2);\ 1-0)=(7;0;1),$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot 1=21+4=25.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5,\ \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{7^2+0^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

Тогда

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)=45^\circ.$$

Вычисления в Mathematica

Отметим, что в пакете **Mathematica** есть зарезервированные символы: *C, D, E, I, N, O*. Поэтому при решение задачи с помощью **Mathematica** вершину *C* переименуем в *K* (рис. 2.51).

```
In[1]:= (*Введите  координаты вершин треугольника:*)
        A = {-4, -2, 0};
        B = {-1, -2, 4};
        K = {3, -2, 1};

In[4]:= (*Координаты  векторов:*)
        AB = B - A
        AK = K - A

Out[4]= {3, 0, 4}

Out[5]= {7, 0, 1}

In[6]:= (*Угол при вершине A треугольника:*)
        α = VectorAngle[AB, AK]

Out[6]= π/4

In[7]:= (*Угол в градусах : *)
        N[α * 180/π]

Out[7]= 45.
```

Рис. 2.51

Пример 2.5.6.

Определить проекцию вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$.

Решение

Скалярное произведение векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно:

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}\right)=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a}+\vec{b},\vec{c}}\right).$$

Скалярное произведение также можно выразить формулой $\left(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}\right)=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot \text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}\,\vec{c}=\left|\vec{c}\right|\cdot \text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Тогда проекция вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ равна:

$$\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}\right)}{\left|\vec{c}\right|}.$$

Так как $\vec{a}+\vec{b}=(1;2;4)+(3;5;6)=(1+3;2+5;4+6)=(4;7;10)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно:

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}\right)=(4;7;10)(-1;-2;7)=4\cdot(-1)+7\cdot(-2)+10\cdot 7=-4-14+70=52.$$

Длина вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 7^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Итак, $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \dfrac{52}{3\sqrt{6}} = \dfrac{52\cdot 3\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}} = \dfrac{52\sqrt{6}}{18} = \dfrac{26\sqrt{6}}{9}$.

Вычисления в Mathematica

Вычисление проекции вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ в **Mathematica** представлено на рис. 2.52.

```
Введите координаты векторов a⃗ , b⃗ и c⃗ :

In[1]:= a = {1, 2, 4};
        b = {3, 5, 6};
        c = {-1, -2, 7};

Проекция вектора a⃗ + b⃗ на вектор c⃗ :

In[4]:= proekc = (a + b).c / Norm[c]
```

Out[4]= $\dfrac{26\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}$

Рис. 2.52

Можно воспользоваться встроенной функцией **Projection** (рис. 2.53).

```
In[1]:= a = {1, 2, 4};
        b = {3, 5, 6};
        c = {-1, -2, 7};

In[4]:= p = Norm[Projection[(a + b), c]]
```

Out[4]= $\dfrac{26\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}$

Рис. 2.53

Ответ совпадает с ответом, полученным «вручную»:

$$\frac{26\sqrt{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{26\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{26\sqrt{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{26\sqrt{6}}{9}.$$

2.5.2. Векторное и смешанное произведение векторов

Пример 2.5.7

Найти координаты векторного произведения $[(3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})]$, если $\vec{a} = (-1; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; -1; 3)$.

Решение

Учитывая свойства векторного произведения векторов, $[(3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})]=3\cdot 2\cdot(\vec{a}\times\vec{a})+3\cdot(\vec{a}\times\vec{b})-2\cdot 2\cdot(\vec{b}\times\vec{a})-2\cdot(\vec{b}\times\vec{b})=$
$=6\cdot 0+3\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+4\cdot(\vec{a}\times\vec{b})-2\cdot 0=7\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$

Вычислим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

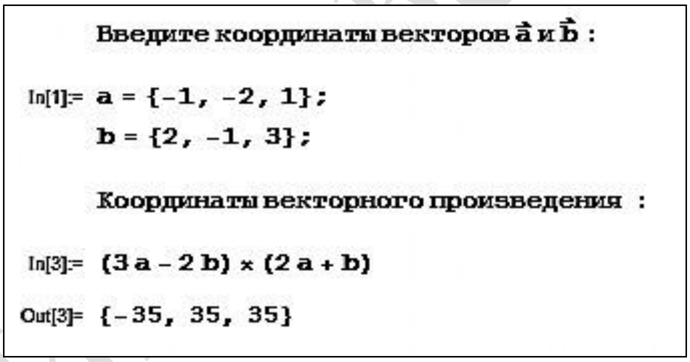
$$=\vec{i}\,((-2)\cdot 3-1\cdot(-1))+\vec{j}\,(1\cdot 2-(-1)\cdot 3)+\vec{k}\,((-1)\cdot(-1)-(-2)\cdot 2)=$$
$$=-5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}=(-5;\,5;\,5).$$

Тогда $7\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=7(-5;\,5;\,5)=(-35;\,35;\,35)$.

Вычисления в Mathematica

Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется с помощью функций **a×b** или **Cross[a,b]**.

Решение нашей задачи представлено на рис. 2.54.



Введите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

```
In[1]:= a = {-1, -2, 1};
        b = {2, -1, 3};
```

Координаты векторного произведения :

```
In[3]:= (3 a - 2 b) × (2 a + b)
Out[3]= {-35, 35, 35}
```

Рис. 2.54

Пример 2.5.8

Даны вершины треугольника *A*(1; 2; 0), *B*(3; 0; –3) и *C*(5; 2; 6). Вычислить длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

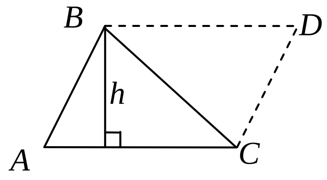
Решение

Векторное произведение векторов имеет следующий геометрический смысл: модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т. е. $S_{\text{парал}}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Из школьного курса геометрии известно, что формула площади параллелограмма через сторону и высоту равна $S=a\cdot h_a$, где a – сторона параллелограмма; h_a – высота на сторону a.

Итак, $h=\dfrac{S_{\text{парал}}}{a}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Достроим до параллелограмма наш треугольник. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:



$\overrightarrow{AB}=(3-1;\ 0-2;\ -3-0)=(2;\ -2;-3)$,

$\overrightarrow{AC}=(5-1;\ 2-2;\ 6-0)=(4;\ 0;\ 6)$.

Тогда векторное произведение этих векторов равно:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=((-2)\cdot 6-(-3)\cdot 0)\vec{i}+((-3)\cdot 4-2\cdot 6)\vec{j}+(2\cdot 0-(-2)\cdot 4)\vec{k}=$$

$$=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=4\left(-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right).$$

Вычислим длины векторов $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=4\cdot\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=4\cdot\sqrt{9+36+4}=4\cdot 7=28,$$

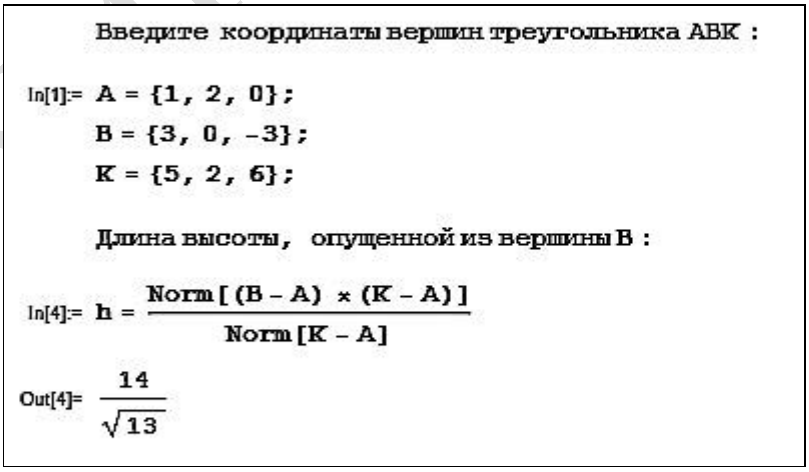
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+0^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}.$$

Вычислим длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC:

$$h=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{28}{2\sqrt{13}}=\frac{14}{\sqrt{13}}=\frac{14\sqrt{13}}{13}.$$

Вычисления в Mathematica

Переименуем вершину C в K, зададим начальные условия (рис. 2.55).



```
Введите координаты вершин треугольника ABK :

In[1]:= A = {1, 2, 0};
        B = {3, 0, -3};
        K = {5, 2, 6};

Длина высоты, опущенной из вершины B :

In[4]:= h = Norm[(B - A) × (K - A)] / Norm[K - A]

Out[4]= 14/√13
```

Рис. 2.55

Пример 2.5.9

Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ будет коллинеарен вектору $[\vec{a},\vec{b}]$, если $\vec{a}=(3;\ –1;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ 2;\ 0)$.

Решение

Определим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$[\vec{a},\vec{b}\,]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(0-2)\vec{i}+(1-0)\vec{j}+(6+1)\vec{k}=-2\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}\,.$$

Векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны. Поэтому $\dfrac{\alpha}{-2}=\dfrac{3}{1}=\dfrac{\beta}{7}$. Тогда $\dfrac{\alpha}{-2}=\dfrac{3}{1}\ \Rightarrow\ \alpha=-6$, $\dfrac{3}{1}=\dfrac{\beta}{7}\ \Rightarrow\ \beta=21$.

Итак, $\alpha=-6$ и $\beta=21$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 2.5.9 приведено на рис. 2.56.

```
Введите начальные данные :

In[1]:= a = {3, -1, 1};
        b = {1, 2, 0};
        d = {α, 3, β};
        c = a×b;

Так как координаты коллинеарных векторов пропорциональны, то

In[5]:= Solve[d[[1]]/c[[1]] - d[[2]]/c[[2]] = 0, d[[1]]]
        Solve[d[[3]]/c[[3]] - d[[2]]/c[[2]] = 0, d[[3]]]

Out[5]= {{α → -6}}

Out[6]= {{β → 21}}
```

Рис. 2.56

Отметим, что в случае равенства нулю одной или нескольких координат вектора $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}\,]$, необходимо корректировать решение задачи, чтобы избежать деления на нуль.

Пример 2.5.10

По координатам вершин пирамиды $A_1(0;\,-1;\,2)$, $A_2(-1;\,-1;\,6)$, $A_3(-2;\,0;\,2)$ и $A_4(0;\,1;\,4)$ найти:

а) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

д) высоту, опущенную на грань $A_1A_2A_3$.

Решение

а) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$\overrightarrow{A_1A_2} = (-1-0; -1-(-1); 6-2) = (-1;\ 0;\ 4)$,

$\overrightarrow{A_1A_3} = (-2-0;\ 0-(-1);\ 2-2) = (-2;\ 1;\ 0)$.

Тогда длины ребер A_1A_2 и A_1A_3 равны: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-1)^2+0^2+4^2} = \sqrt{17}$,

$\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+0^2} = \sqrt{5}$.

б) Скалярное произведение векторов A_1A_2 и A_1A_3 находится по формуле

$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|\cdot\cos\underbrace{\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\hat{,}\,\overrightarrow{A_1A_3}\right)}_{\varphi}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|}.$$

Используя результаты, полученные в пункте «а», получаем

$$\cos\varphi = \frac{(-1;\ 0;\ 4)\cdot(-2;\ 1;\ 0)}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}} = \frac{(-1)\cdot(-2)+0\cdot 1+4\cdot 0}{\sqrt{85}} = \frac{2}{\sqrt{85}} = \frac{2\sqrt{85}}{85}.$$

Искомый угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 равен:

$\varphi = \arccos\dfrac{2\sqrt{85}}{85} \approx 1{,}352$ рад. $\left(77{,}471^\circ\right)$.

в) Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдем по формуле $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$, где $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -4\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k}.$$

Тогда $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(-1)^2} = \sqrt{16+64+1} = \sqrt{81} = 9$.

Следовательно, $S = \dfrac{1}{2}\cdot 9 = \dfrac{9}{2}$ (кв. ед.).

г) Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$: $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$.

Найдем:

– координаты вектора $\overline{A_1A_4}$: $\overrightarrow{A_1A_4}=(0-0;1-(-1);\ 4-2)=(0;\ 2;\ 2)$;

– смешанное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-1&0&4\\-2&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2&1\\0&2\end{vmatrix}=$$

$$=-(2-0)+4(-4-0)=-2-16=-18.$$

Итак, $V=\frac{1}{6}\left|-18\right|=3$ (куб. ед.).

д) Для вычисления высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$, вспомним из школьного курса стереометрии формулу нахождения объема пирамиды: $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$. Отсюда высота $H=\frac{3\cdot V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}$.

Найдем $S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$, используя результаты из пункта «в».

Итак, $S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}\cdot 9=\frac{9}{2}$ (кв. ед.).

Так как $V_{\text{пир}}=3$ (куб. ед.) из пункта «г», то $H=\frac{3\cdot V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}=\frac{3\cdot 3}{\frac{9}{2}}=2$.

Вычисления в Mathematica

Вводим координаты вершин пирамиды (рис. 2.57).

```
Введите координаты вершин пирамиды :

In[1]:= A1 = {0, -1, 2};
        A2 = {-1, -1, 6};
        A3 = {-2, 0, 2};
        A4 = {0, 1, 4};
```

Рис. 2.57

Далее:

а) Используем функцию **Norm**$[\vec{\mathbf{a}}]$ для вычисления длины вектора $\vec{a}$ (рис. 2.58).

```
Длины ребер :

In[5]:= A1A2 = Norm[A2 - A1]

Out[5]= √17

In[6]:= A1A3 = Norm[A3 - A1]

Out[6]= √5
```

Рис. 2.58

б) Находим угол между ребрами (рис. 2.59).

```
Угол между ребрами A1A2 и A1A3 :

In[7]:= α = VectorAngle[A2 - A1, A3 - A1]
```

$$\text{Out[7]= ArcCos}\left[\frac{2}{\sqrt{85}}\right]$$

```
В градусах :
```

$$\text{In[8]:= N}\left[\alpha * \frac{180}{\pi}\right]$$

```
Out[8]= 77.4712
```

Рис. 2.59

в) и г) Находим площадь грани $A_1A_2A_3$ и объем пирамиды (рис. 2.60).

```
Площадь грани A1A2A3 :
```

$$\text{In[9]:= S = }\frac{1}{2}\text{ Norm[(A2 - A1) × (A3 - A1)]}$$

$$\text{Out[9]= }\frac{9}{2}$$

```
Объем пирамиды :
```

$$\text{In[10]:= V = }\frac{1}{6}\text{ Abs[(A2 - A1) × (A3 - A1) . (A4 - A1)]}$$

```
Out[10]= 3
```

Рис. 2.60

Модуль числа обозначают функцией **Abs**.

д) Находим высоту, опущенную на грань $A_1A_2A_3$ (рис. 2.61).

```
Высота, опущенная на грань A1A2A3 из вершины A4 :
```

$$\text{In[11]:= H = 3 }\frac{V}{S}$$

```
Out[11]= 2
```

Рис. 2.61

Пример 2.5.11

Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ компланарны.

Решение

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ $\left(\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0,\ \vec{c} \neq 0\right)$.

Составляем смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-4+6) - 2(1+1) = 4 - 4 = 0.$$

Так как $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то векторы компланарны.

Вычисления в Mathematica

Компланарность векторов проверим, вычислив их смешанное произведение (рис. 2.62).

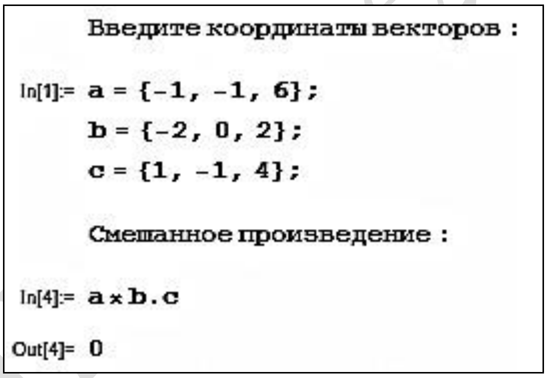


Рис. 2.62

Задания для самостоятельной работы

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2; –3; 1)$ и $\vec{b} = (–4; 2; –5)$.

2. Вычислить $\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 3\vec{b}\vec{c} - 4$, если $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{c} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $m^2 = 6$, $n^2 = 2$ и $\vec{m} \perp \vec{n}$.

3. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

4. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

5. Определить угол между векторами $\vec{a} = (3; 4; 5)$ и $\vec{b} = (4; 5; –3)$.

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами *A*(4; –2; 5), *B*(1; 3; 8) и *C*(–6; 2; 5).

7. В треугольнике, вершины которого лежат в точках $A(3; –1; 2)$, $B(4; 0; 5)$ и $C(–3; –2; 1)$, найти: **1)** внутренние углы; **2)** длины сторон.

8. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

9. Проверить, лежат ли точки $A(6; 8; –1)$, $B(4; 2; 0)$, $C(10; 5; –3)$ и $D(2; 6; 1)$ в одной плоскости.

10. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{c} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$.

11. Показать, что векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{a}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{a}_3 = -\vec{i} + \vec{k}$ линейно независимы, вектор $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ разложить по этим векторам.

2.6. Линейные пространства. Линейные операторы

Пример 2.6.1

Указать векторы, образующие базис системы векторов $\vec{a} = (0; –2; 3)$, $\vec{b} = (1; –1; 0)$, $\vec{c} = (3; 5; 10)$, $\vec{d} = (4; 0; 5)$.

Решение

Любая система n-мерных векторов образует базис n-мерного пространства, если определитель, составленный из координат, не равен нулю.

Рассмотрим векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -1\cdot 0\cdot 10 + 1\cdot 5\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 3 - 0\cdot 5\cdot 0 - 1\cdot(-2)\cdot 10 =$$

$$= 15 + 9 + 20 = 44 \neq 0.$$

Следовательно, система векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образует базис в трехмерном пространстве.

Рассмотрим векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\cdot 5 + 1\cdot 0\cdot 3 + 0\cdot(-2)\cdot 4 - 4\cdot(-1)\cdot 3 - 0 - 1\cdot(-2)\cdot 5 =$$

$= 12 + 10 = 22 \neq 0 \Rightarrow$ система векторов образует базис.

Векторы $\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ не образуют базис, т. к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot A_{13} + 0\cdot A_{23} + 5\cdot A_{33} = 4\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(-10) + 5\cdot 8 = -40 + 40 = 0.$$

Рассмотрим векторы $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{11} - 2\cdot A_{21} + 3\cdot A_{31} = -2\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(15-40) + 3\cdot(0-20) = 2\cdot(-25) + 3\cdot(-20) = -50-60 = -110 \neq 0.$$

Следовательно, система векторов $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}$ образует базис в трехмерном пространстве.

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные (рис. 2.63).

```
In[1]:= (*Введите координаты векторов:*)
     a := {0, -2, 3}
     b := {1, -1, 0}
     c := {3, 5, 10}
     d := {4, 0, 5}
```

Рис. 2.63

Проверяем, какие тройки векторов образуют базис (рис. 2.64 и 2.65).

```
Print["Рассмотрим возможные тройки векторов:"]
Print[""]
Print["a, b, c:"]
A1 := {{a[[1]], b[[1]], c[[1]]},
       {a[[2]], b[[2]], c[[2]]},
       {a[[3]], b[[3]], c[[3]]}}
Print["det", A1 // MatrixForm, "=", Det[A1]]
If[Det[A1] = 0,
 Print[
  "Вывод: данная система векторов не образует базис"],
 Print["Вывод: данная система векторов образует базис"]]
Print[""]
Print["a, b, d:"]
A2 := {{a[[1]], b[[1]], d[[1]]},
       {a[[2]], b[[2]], d[[2]]},
       {a[[3]], b[[3]], d[[3]]}}
Print["det", A2 // MatrixForm, "=", Det[A2]]
If[Det[A2] = 0,
 Print[
  "Вывод: данная система векторов не образует базис"],
 Print["Вывод: данная система векторов образует базис"]]
Print[""]
```

Рис. 2.64

```
Print["b, c, d:"]
A3 := {{b[[1]], c[[1]], d[[1]]},
       {b[[2]], c[[2]], d[[2]]},
       {b[[3]], c[[3]], d[[3]]}}
Print["det", A3 // MatrixForm, "=", Det[A3]]
If[Det[A3] = 0,
 Print[
  "Вывод: данная система векторов не образует базис"],
 Print["Вывод: данная система векторов образует базис"]]
Print[""]
Print["a, c, d:"]
A4 := {{a[[1]], c[[1]], d[[1]]},
       {a[[2]], c[[2]], d[[2]]},
       {a[[3]], c[[3]], d[[3]]}}
Print["det", A4 // MatrixForm, "=", Det[A4]]
If[Det[A4] = 0,
 Print[
  "Вывод: данная система векторов не образует базис"],
 Print["Вывод: данная система векторов образует базис"]]
```

Рис. 2.65

В результате работы программы получаем следующее (рис. 2.66).

Рассмотрим возможные тройки векторов:

a, b, c:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}=44$$

Вывод: данная система векторов образует базис

a, b, d:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}=22$$

Вывод: данная система векторов образует базис

b, c, d:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}=0$$

Вывод: данная система векторов не образует базис

a, c, d:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}=-110$$

Вывод: данная система векторов образует базис

Рис. 2.66

Пример 2.6.2

Разложить вектор $\vec{d} = (4; -1)$ по векторам $\vec{a} = (1;\ 2)$ и $\vec{b} = (1; 0)$.

Решение

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис, т. к. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Представим вектор $\vec{d}$ в виде линейной комбинации базисных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}$, где $\alpha_1,\ \alpha_2$ – числа.

Подставим координаты векторов в это равенство:

$\alpha_1(1;\ 2) + \alpha_2(1;\ 0) = (4; -1)$, $\quad (\alpha_1; 2\alpha_1) + (\alpha_2;\ 0) = (4; -1)$, $(\alpha_1 + \alpha_2;\ 2\alpha_1) = (4; -1)$.

Приравняв соответствующие координаты векторов левой и правой частей равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 4, \\ 2\alpha_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ \alpha_2 = \dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Итак, искомое разложение имеет вид $\vec{d} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{9}{2}\vec{b}$.

Числа α_1 и α_2 – это координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a},\ \vec{b}$, т. е. $\vec{d} = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$.

Вычисления в Mathematica

Проверим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на линейную зависимость (рис. 2.67).

```
In[1]:= (*Введите координаты векторов:*)
 a := {1, 2}
 b := {1, 0}
 d := {4, -1}
(*Проверим, могут ли векторы a и b образовывать базис:"*)
A := {{a[[1]], b[[1]]},
     {a[[2]], b[[2]]}}
Print["det", A // MatrixForm, "=", Det[A]]
If[Det[A] = 0, Print["Вывод: данная система векторов не образует базис"],
 Print["Вывод: данная система векторов образует базис"]]
If[Det[A] = 0, Print["ДАЛЬНЕЙШЕЕ РЕШЕНИЕ НЕ ИМЕЕТ СМЫСЛА"]]

det(1 1
    2 0)=-2

Вывод: данная система векторов образует базис
```

Рис. 2.67

Найдем разложение вектора $\vec{d}$ в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.68).

```
In[8]:=
(*Найдем координаты вектора d в базисе векторов a и b*)
Print["Запишем систему уравнений:"]
Print[a[[1]], "·α1+", b[[1]], "·α2=", d[[1]]]
Print[a[[2]], "·α1+", b[[2]], "·α2=", d[[2]]]
Print["Решение:"]
ur := {α1*a[[1]] + α2*b[[1]] = d[[1]], α1*a[[2]] + α2*b[[2]] = d[[2]]}
resh = Solve[ur, {α1, α2}]
Print["Искомое разложение:"]
Print["d=", α1 /. resh, "a+", α2 /. resh, "b"]

Запишем систему уравнений:
1·α1+1·α2=4
2·α1+0·α2=-1
Решение:
```

Out[13]= $\left\{\left\{\alpha1 \to -\frac{1}{2},\ \alpha2 \to \frac{9}{2}\right\}\right\}$

```
Искомое разложение:
```

d=$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$a+$\left\{\frac{9}{2}\right\}$b

Рис. 2.68

Пример 2.6.3

Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе векторов $\vec{a} = (\ 1;\ 2;\ 3;\ 1)$, $\vec{b} = (\ 2;\ 0;\ 2;\ 0)$, $\vec{c} = (\ 3;\ 2;\ 5;\ 1)$, $\vec{d} = (\ 1;\ 0;\ 1;\ –2)$.

Решение

Матрица данной системы векторов имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Если ранг матрицы системы m векторов линейного пространства равен r, то максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно r.

Найдем ранг матрицы A.

Применяя элементарные преобразования приведем матрицу A к квазитреугольной форме:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{\substack{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II}\cdot\frac{1}{2}}} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\underset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Минор четвертого порядка этой матрицы равен нулю, поскольку содержит нулевую строку. Так как имеется отличный от нуля минор третьего порядка $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -4 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=16-24=-8\neq 0$, то ранг матрицы равен трем $(r=3)$.

Следовательно, максимальное число линейно независимых векторов системы векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ равно трем.

Вычисления в Mathematica

Запишем матрицу заданной системы векторов, определим число линейно независимых векторов системы (рис. 2.69).

```
In[1]:= (*Введите координаты векторов:*)
     a := {1, 2, 3, 1}
     b := {2, 0, 2, 0}
     c := {3, 2, 5, 1}
     d := {1, 0, 1, -2}

     Print["Матрица системы векторов a,b,c,d:"]
     A1 := {{a[[1]], b[[1]], c[[1]], d[[1]]},
            {a[[2]], b[[2]], c[[2]], d[[2]]},
            {a[[3]], b[[3]], c[[3]], d[[3]]},
            {a[[4]], b[[4]], c[[4]], d[[4]]}}
     Print[A1 // MatrixForm]
     Print["Ранг матрицы:"]
     r := MatrixRank[A1]
     Print[r]
     If[r = 0, Print["Все указанные векторы линейно зависимы"],
      Print[
       "Максимальное число линейно независимых векторов системы
         векторов a,b,c,d равно:"]]
     Print[r]
```

Рис. 2.69

В результате работы программы получаем матрицу системы векторов, ранг матрицы и, как следствие, максимальное число линейно независимых векторов системы (рис. 2.70).

```
Матрица системы векторов a,b,c,d:
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
Ранг матрицы:
3
Максимальное число линейно независимых векторов системы векторов a,b,c,d равно:
3
```

Рис. 2.70

Пример 2.6.4

Дана матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$, если $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$.

Решение

Матрица перехода от базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ к базису $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ состоит из записанных в столбцы координат векторов $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$: $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица линейного оператора в базисе $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ вычисляется по формуле $B = T^{-1}AT$.

Найдем $T^{-1} = \dfrac{1}{|T|}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix}$:

$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$, $T_{11} = (-1)^2|5| = 5$, $T_{12} = (-1)^3|2| = -2$, $T_{21} = (-1)^3|2| = -2$, $T_{22} = (-1)^4|1| = 1$.

Итак, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 141 \\ -23 & -54 \end{pmatrix}.$$

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные задачи (рис. 2.71).

```
In[1]:= (*Введите построчно матрицу A линейного оператора в базисе (e1,e2):*)
  A := {{4, 5}, {1, 2}}
  (*Введите координаты векторов k1 и  k2 в базисе (e1,e2):*)
  k1 := {1, 2}
  k2 := {2, 5}
```

Рис. 2.71

Алгоритм решения задачи описан на рис. 2.72.

```
Print["Матрица A  линейного оператора в базисе (e1,e2):"]
Print["A=", A // MatrixForm]
Print["Матрица T перехода от базиса (e1,e2) к базису (k1,k2):"]
T := {{k1[[1]], k2[[1]]},
      {k1[[2]], k2[[2]]}}
Print["T=", T // MatrixForm]
Print["Обратная матрица T^-1:"]
obrT := Inverse[T]
Print["T^-1=", obrT // MatrixForm]
Print["Матрица B линейного оператора в базисе (k1,k2):"]
Print["B=T^-1·A·T"]
B := obrT.A.T
Print["B=", B // MatrixForm]
```

Рис. 2.72

Получаем следующий результат (рис. 2.73).

Матрица A линейного оператора в базисе (e1,e2):

$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Матрица T перехода от базиса (e1,e2) к базису (k1,k2):

$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Обратная матрица T^{-1}:

$T^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Матрица B линейного оператора в базисе (k1,k2):

$B=T^{-1}\cdot A\cdot T$

$B=\begin{pmatrix} 60 & 141 \\ -23 & -54 \end{pmatrix}$

Рис. 2.73

Пример 2.6.5

Для оператора, определенного на действительном линейном пространстве и имеющего в заданном базисе матрицу $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ найти собственные значения и собственные векторы.

Решение

1. Составим характеристический многочлен матрицы A и найдем его корни.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3+1-1-(2-\lambda)-(2-\lambda)+$$

$$+(2-\lambda)=(2-\lambda)^3-2+\lambda-2+\lambda+2-\lambda=(2-\lambda)^3-2+\lambda.$$

$$(2-\lambda)^3-2+\lambda=0,$$

$$(2-\lambda)^3-(2-\lambda)=0,$$

$$(2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right)=0,$$

$2-\lambda=0$, или $(2-\lambda)^2-1=0$,

$\lambda_1=2$, $\quad (2-\lambda)^2=1 \Rightarrow \lambda_2=1,\ \lambda_3=3.$

Получили три собственных значения.

2. Найдем координаты собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_1, λ_2 и λ_3. Для отыскания всех собственных векторов оператора с матрицей A нужно для каждого собственного значения λ найти все ненулевые решения системы $(A-\lambda E)X=0$.

1) $\lambda_1=2$.

$$(A-\lambda E)X=0.$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Решим систему $\begin{cases}-x_2+x_3=0,\\ x_1-x_3=0,\\ x_1-x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_3,\\ x_2=x_3,\end{cases}$ $x_3\in\mathrm{R}$.

Полагая $x_3=c$, получаем решение в виде $x_1=c$, $x_2=c$.

Первый собственный вектор равен $X_1=\begin{pmatrix}c\\ c\\ c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=(c,c,c)^{\mathrm{T}}$, где c – произвольная постоянная.

2) $\lambda_2=1$.

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_2=1$, определяется из системы уравнений вида $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$

1-е уравнение + 2-е уравнение: $\quad 2x_1=0 \Rightarrow x_1=0$.

3-е уравнение : $\quad x_2=x_3+x_1=x_3$.

Полагая $x_3 = c$, запишем решение в виде $x_1 = 0,\ x_2 = c,\ x_3 = c$.

Второй собственный вектор равен $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где c – произвольное постоянное число.

3) $\lambda_3 = 3$.

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 3$, определяется из системы уравнений вида $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

1-е уравнение + 2-е уравнение: $x_2 = 0 \Rightarrow$ из 3-го уравнения $x_1 = x_3$.

Тогда $X_3 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathrm{R}$.

Пусть $c = 1$, тогда $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, матрица A имеет три собственных различных значения $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$ и три собственных вектора, равных $X_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_3 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где c – произвольная постоянная.

Вычисления в Mathematica

Введем матрицу A (рис. 2.74).

```
In[1]:= A = {{2, -1, 1}, {1, 2, -1}, {1, -1, 2}} // MatrixForm
Out[1]//MatrixForm=
 2  -1   1
 1   2  -1
 1  -1   2
```

Рис. 2.74

Собственные значения находят с помощью функции **Eigenvalues** (рис. 2.75).

```
In[2]:= Eigenvalues[A]

In[3]:= Eigenvalues[(2  -1   1
                     1   2  -1
                     1  -1   2)]

Out[3]= {3, 2, 1}
```

Рис. 2.75

Для отыскания собственных векторов исходной матрицы воспользуемся функцией **Eigenvectors** (рис. 2.76).

```
In[4]:= Eigenvectors[A]

In[5]:= Eigenvectors[(2  -1   1
                      1   2  -1
                      1  -1   2)]

Out[5]= {{1, 0, 1}, {1, 1, 1}, {0, 1, 1}}
```

Рис. 2.76

Функция **Eigensystem** позволяет сразу найти собственные значения матрицы и соответствующие для них собственные векторы (рис. 2.77).

```
In[7]:= Eigensystem[(2  -1   1
                     1   2  -1
                     1  -1   2)]

In[8]:= {{3, 2, 1}, {{1, 0, 1}, {1, 1, 1}, {0, 1, 1}}} // MatrixForm

Out[8]//MatrixForm=
        (     3           2           1
          {1, 0, 1}  {1, 1, 1}  {0, 1, 1} )
```

Рис. 2.77

Полученные результаты совпадают с результатами, найденными «вручную».

Задания для самостоятельной работы

1. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов:

1) $\vec{a}=(1;\,2;\,3)$, $\vec{b}=(2;\,5;\,7)$, $\vec{c}=(3;\,7;\,11)$;

2) $\vec{a}_1=(1;\,-1;\,1;\,-1)^T$, $\vec{a}_2=(1;\,0;\,1;\,0)^T$, $\vec{a}_3=(1;\,-3;\,1;\,-3)^T$;

3) $\vec{a}=(1;\,1;\,1;\,1)$, $\vec{c}=(1;\,-1;\,1;\,-1)$, $\vec{d}=(2;\,3;\,1;\,4)$, $\vec{e}=(2;\,1;\,1;\,3)$.

2. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе, если:

1) $\vec{a}=(-3;\,4;\,-5)$, $\vec{b}=(1;\,3;\,6)$, $\vec{c}=(1;\,-7;\,2)$, $\vec{d}=(-2;\,17;\,5)$;

2) $\vec{a}=(8;\,4;\,3)$, $\vec{b}=(7;\,3;\,-1)$, $\vec{c}=(-7;\,4;\,2)$, $\vec{d}=(3;\,6;\,9)$.

3. Найти какую-либо базу системы векторов и через нее выразить остальные векторы системы:

1) $\vec{a}_1=(1;\,-3;\,5;\,6)$, $\vec{a}_2=(1;\,-3;\,1;\,1)$, $\vec{a}_3=(-1;\,-3;\,13;\,16)$, $\vec{a}_4=(1;\,-3;\,9;\,11)$;

2) $\vec{a}_1 = (1;\ 2;\ 3;\ 1)$, $\vec{a}_2 = (2;\ 3;\ 1;\ 2)$, $\vec{a}_3 = (3;\ 1;\ 2;\ -2)$, $\vec{a}_4 = (0;\ 4;\ 2;\ 5)$.

4. Линейный оператор φ переводит векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ соответственно в векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$. Найти матрицу оператора φ в том же базисе, в каком заданы координаты векторов, если $\vec{a}_1 = (1;\ 2;\ 4)$, $\vec{a}_2 = (1;\ -3;\ 1)$, $\vec{a}_3 = (1;\ 1;\ -5)$, $\vec{b}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}_2 = (0;\ 1;\ 2)$, $\vec{b}_3 = (0;\ 1;\ 3)$.

5. Линейный оператор φ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$, если $\vec{e}_1 = (1;\ 2;\ 4)$, $\vec{e}_2 = (2;\ -3;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (1;\ 1;\ -5)$, $\vec{e}\,'_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{e}\,'_2 = (0;\ 1;\ 2)$, $\vec{e}\,'_3 = (0;\ 1;\ 3)$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **2)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; **3)** $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая на плоскости

Пример 3.1.1

Даны координаты вершин треугольника *ABK*: *A*(–1; –2), *B*(1; 3), *K*(3; 2). Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) площадь треугольника;

в) длины медианы *BM*, высоты *KH* и биссектрисы *AL*;

г) координаты центра окружности, описанной вокруг треугольника.

Решение

а) Для нахождения длин сторон треугольника воспользуемся формулой для вычисления расстояния между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Тогда $AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{29}$, $BK = \sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$, $KA = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{2}$.

б) Площадь треугольника найдем по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$, a, b, c – стороны треугольника.

Так как $p = \dfrac{1}{2}(\sqrt{29} + \sqrt{5} + 4\sqrt{2}) \approx 6{,}64$, то

$$S = \sqrt{\frac{1}{16}(\sqrt{29} + \sqrt{5} + 4\sqrt{2})(\sqrt{29} + \sqrt{5} + 4\sqrt{2} - \sqrt{29})} \times$$

$$\times \sqrt{(\sqrt{29} + \sqrt{5} + 4\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{29} + \sqrt{5} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2})} \approx 6{,}00 .$$

в) Точка *M* делит сторону *AK* пополам, поэтому координаты точки *M* можно найти следующим образом:

$$x_M = \frac{x_A + x_K}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1,\ y_M = \frac{y_A + y_K}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 .$$

Тогда длина медианы *BM* будет равна: $BM = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2} = 3$.

Высоту *KH* найдем по следующей формуле: $KH = \dfrac{2S}{AB} = \dfrac{2 \cdot 6}{\sqrt{29}} \approx 2{,}23$.

Для вычисления длины биссектрисы *AL*, проходящей между сторонами $a = AK$ и $b = AB$ треугольника, воспользуемся формулой $l = \dfrac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$.

Тогда $AL = \dfrac{2\sqrt{4\sqrt{2}\sqrt{29}(\sqrt{29} + \sqrt{5} + 4\sqrt{2})(\sqrt{29} + \sqrt{5} + 4\sqrt{2} - \sqrt{5})}}{\sqrt{29} + 4\sqrt{2}} \approx 5{,}41$.

г) Центр описанной окружности равноудален от всех вершин треугольника. Можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases}(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2;\\(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=R^2;\\(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2;\\(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=(x-x_C)^2+(y-y_C)^2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-3)^2;\\(x-1)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y-2)^2.\end{cases}$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$\begin{cases}4x+10y-5=0;\\4x-2y-3=0.\end{cases}$$

Решением данной системы является пара чисел $x=\dfrac{5}{6}$ и $y=\dfrac{1}{6}$.

Вычисления в Mathematica

Ввод начальных условий (рис. 3.1).

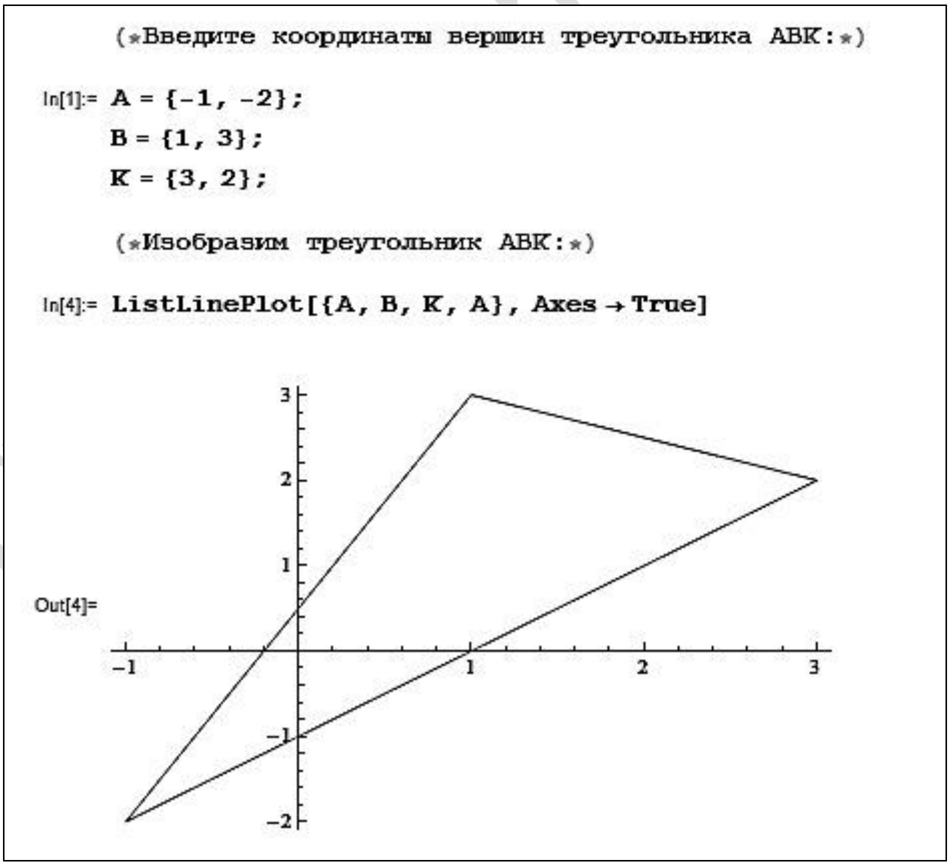


Рис. 3.1

Тогда

а) Находим длины сторон треугольника (рис. 3.2).

```
(*Длины сторон треугольника:*)

In[5]:= AB = Norm[B - A];
        BK = Norm[K - B];
        AK = Norm[K - A];
        Print["AB=", Norm[B - A]]
        Print["BK=", Norm[K - B]]
        Print["AK=", Norm[K - A]]

        AB=√29
        BK=√5
        AK=4 √2
```

Рис. 3.2

б) Находим площадь треугольника (рис. 3.3).

```
(*Площадь треугольника:*)

In[11]:= p = 1/2 (AB + BK + AK);
         S = N[√(p (p - AB) (p - BK) (p - AK)), 5];
         Print["S=", S]

         S=6.0000
```

Рис. 3.3

в) Находим длины медианы *BM*, высоты *KH* и биссектрисы *AL* (рис. 3.4).

```
(*Длина медианы BM:*)

In[14]:= M = {(A[[1]] + K[[1]])/2, (A[[2]] + K[[2]])/2};
         BM = N[Norm[B - M], 5];
         Print["BM=", BM]

         BM=3.0000

(*Длина высоты KH:*)

In[17]:= KH = N[2 S/AB, 5];
         Print["KH=", KH]

         KH=2.2283

(*Биссектриса AL:*)

In[19]:= AL = N[(2 √(AB * AK * p * (p - BK)))/(AB + AK), 5];
         Print["AL=", AL]

         AL=5.4050
```

Рис. 3.4

г) Находим координаты центра окружности, описанной вокруг треугольника *ABK* (рис. 3.5).

```
(* Координаты центра описанной окружности:*)

In[21]:= okr = Solve[(x - A[[1]]) ^2 + (y - A[[2]]) ^2 = (x - B[[1]]) ^2 + (y - B[[2]]) ^2 &&
        (x - B[[1]]) ^2 + (y - B[[2]]) ^2 = (x - K[[1]]) ^2 + (y - K[[2]]) ^2, {x, y}];
     Print["Координаты  центра описанной окружности", okr]

     Координаты  центра описанной окружности{{x → 5/6, y → 1/6}}
```

Рис. 3.5

Пример 3.1.2

Дано уравнение прямой $\frac{x+2}{4}+\frac{y-3}{2}=-2$. Найти:

а) общее уравнение прямой;
б) уравнение с угловым коэффициентом;
в) уравнение прямой в отрезках;
г) нормальное уравнение прямой.

Решение

а) Приведем уравнение к общему знаменателю: $\frac{x+2+2(y-3)+8}{4}=0$, $\frac{x+2y+4}{4}=0 \Rightarrow x+2y+4=0$ – общее уравнение прямой.

б) Из общего уравнения прямой выразим y и получим уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=-\frac{1}{2}x-2$.

в) Разделив общее уравнение на свободный член, взятый с соответствующим знаком, и выполнив небольшие преобразования, получим уравнение в отрезках: $-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y=1$.

г) Если общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ умножить на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (нормирующий множитель), при этом знак выбрать так, чтобы $\mu C<0$, то получим нормальное уравнение прямой.

В данном случае $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда нормальное уравнение прямой имеет следующий вид: $-\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y+4)=0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$.

Вычисления в Mathematica

Уравнение прямой представим как функцию $F(x;y)=0$ (рис. 3.6).

```
(*Запишите уравнение прямой в виде dir=F(x;y):*)
In[1]:= dir = (x + 2)/4 + (y - 3)/2 + 2;
```

Рис. 3.6

а) Находим общее уравнение прямой (рис. 3.7).

```
In[2]:= t1 = Simplify[dir] // TraditionalForm;
        Print[t1, "=0"]
        (*Общее уравнение прямой:*)
        1/4 (x + 2 y + 4)=0
```

Рис. 3.7

При необходимости коэффициент $\frac{1}{4}$ можно убрать. При дальнейших расчетах такая форма записи учтена.

б) Находим уравнение с угловым коэффициентом (рис. 3.8).

```
In[4]:= t2 = Simplify[Solve[dir = 0, y]] // TraditionalForm
        (*Уравнение прямой с угловым коэффициентом:*)
Out[4]//TraditionalForm=
        {{y → -x/2 - 2}}
```

Рис. 3.8

в) Находим уравнение прямой в отрезках (рис. 3.9).

```
In[5]:= c1 = -dir /. {x → 0, y → 0};
        a1 = Coefficient[dir, x, 1];
        b1 = Coefficient[dir, y, 1];
        If[ b1/c1 > 0, Print[a1/c1, "x+", b1/c1, "y=1"],
         Print[a1/c1, "x", b1/c1, "y=1"]]
        (*Уравнение прямой в отрезках:*)
        -1/4x-1/2y=1
```

Рис. 3.9

г) Находим нормальное уравнение прямой (рис. 3.10).

```
In[9]:= c = dir /. {x → 0, y → 0};
If[c > 0, μ = -1/Sqrt[a1^2 + b1^2], μ = 1/Sqrt[a1^2 + b1^2]];
Which[ μ*b1 > 0 &&μ*c > 0 ,
 Print[μ*a1, "x+", μ*b1, "y+", μ*c, "=0"], μ*b1 > 0 &&μ*c < 0 ,
 Print[μ*a1, "x+", μ*b1, "y", μ*c, "=0"], μ*b1 < 0 &&μ*c > 0 ,
 Print[μ*a1, "x", μ*b1, "y+", μ*c, "=0"], μ*b1 < 0 &&μ*c < 0 ,
 Print[μ*a1, "x", μ*b1, "y", μ*c, "=0"]]
(*Нормальное уравнение прямой:*)
```

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$$

Рис. 3.10

Здесь нормирующий множитель получен для выражения $\frac{1}{4}(x+2y+4)=0$, но поскольку именно это выражение умножается на μ, то на конечный результат это не влияет.

Пример 3.1.3

Даны координаты вершин треугольника *ABK*: *A*(–1; 1), *B*(6; 5), *K*(2; 1). Найти уравнения:

а) сторон треугольника;

б) медианы *AM*;

в) высоты *BH*;

г) биссектрисы *KF*.

Решение

а) Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, записывается в следующем виде: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ или $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

Тогда уравнения сторон имеют вид:

1) *AB*: $\frac{x+1}{6+1}=\frac{y-1}{5-1}$ или $\frac{x+1}{7}=\frac{y-1}{4}$, т. е. $4x+4=7y-7$ или $4x-7y+11=0$;

2) *BK*: $\frac{x-6}{2-6}=\frac{y-5}{-1-5}$ или $\frac{x-6}{-4}=\frac{y-5}{-6}$, т. е. $-6x+36=-4y+20$ или $3x-2y-8=0$;

3) *KA*: $\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y+1}{1+1}$ или $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{2}$, т. е. $2x-4=-3y-3$ или $2x+3y-1=0$.

б) Найдем координаты точки *M* (середина отрезка *BK*):

$$x_M = \frac{x_B + x_K}{2} = \frac{6+2}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_B + y_K}{2} = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Составим уравнение медианы *AM*, используя формулу из пункта «а»:

$$\frac{x+1}{4+1} = \frac{y-1}{2-1}, \text{ т. е. } x - 5y + 6 = 0.$$

в) Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$, имеет следующий вид: $y - y_1 = k(x - x_1)$.

В данном случае высота *BH* проходит через вершину *B*.

Найдем угловой коэффициент из уравнения стороны *KA*: $k_1 = -\frac{2}{3}$.

Отметим, что угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, можно вычислить с помощью формулы $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. В нашем случае $k_1 = \frac{y_A - y_K}{x_A - x_K} = \frac{1-(-1)}{-1-2} = -\frac{2}{3}$.

В силу условия перпендикулярности стороны *KA* и высоты *BH* угловой коэффициент высоты *BH* будет равен: $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{2}$.

Тогда уравнение высоты *BH* имеет следующий вид:

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x-6) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 4.$$

г) Из свойств биссектрисы внутреннего угла треугольника следует: $\frac{AF}{FB} = \frac{KA}{BK} = \lambda$.

Так как $KA = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13}$ и $BK = \sqrt{(2-6)^2 + (-1-5)^2} =$

$= \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, то $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}$.

Мы получили отношение, в котором точка *F* делит сторону *AB*. Найдем координаты точки *F* по следующим формулам: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, т. е.

$$x_F = \frac{-1 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3}.$$

Итак, уравнение биссектрисы *KF* имеет следующий вид:

$$\frac{x-2}{\frac{4}{3} - 2} = \frac{y+1}{\frac{7}{3} + 1} \text{ или } \frac{x-2}{-\frac{2}{3}} = \frac{y+1}{\frac{10}{3}}, \text{ т. е. } 10x - 20 = -2y - 2 \text{ или } 5x + y - 9 = 0.$$

Вычисления в Mathematica

Введем координаты вершин треугольника (рис. 3.11).

```
(*Введите координаты вершин треугольника АВК:*)

In[1]:= A = {-1, 1};
        B = {6, 5};
        K = {2, -1};
```

Рис. 3.11

Найдем уравнения:

а) Сторон треугольника (рис. 3.12).

```
(*Уравнения сторон треугольника:*)
```

$$L_{AB} = \mathtt{Simplify}\left[\mathtt{Det}\left[\begin{pmatrix} x & y & 1\\ A[[1]] & A[[2]] & 1\\ B[[1]] & B[[2]] & 1\end{pmatrix}\right]=0\right];$$

$$L_{BK} = \mathtt{Simplify}\left[\mathtt{Det}\left[\begin{pmatrix} x & y & 1\\ B[[1]] & B[[2]] & 1\\ K[[1]] & K[[2]] & 1\end{pmatrix}\right]=0\right];$$

$$L_{KA} = \mathtt{Simplify}\left[\mathtt{Det}\left[\begin{pmatrix} x & y & 1\\ K[[1]] & K[[2]] & 1\\ A[[1]] & A[[2]] & 1\end{pmatrix}\right]=0\right];$$

```
Print["AB: ", L_AB]
Print["BK: ", L_BK]
Print["KA: ", L_KA]

AB: 11 + 4 x = 7 y
BK: 3 x = 2 (4 + y)
KA: 2 x + 3 y = 1
```

Рис. 3.12

б) Медианы *AM* (рис. 3.13).

```
(*Уравнение медианы AM:*)
```

$$\texttt{In[10]:=}\ M = \left\{\frac{B[[1]]+K[[1]]}{2},\ \frac{B[[2]]+K[[2]]}{2}\right\};\ \texttt{(*Координаты середины стороны BK*)}$$

$$L_{AM} = \mathtt{Simplify}\left[\mathtt{Det}\left[\begin{pmatrix} x & y & 1\\ A[[1]] & A[[2]] & 1\\ M[[1]] & M[[2]] & 1\end{pmatrix}\right]=0\right];$$

```
Print["AM: ", L_AM]

AM: 6 + x = 5 y
```

Рис. 3.13

в) Высоты *BH* (рис. 3.14).

$$\texttt{(*Уравнение высоты BH:*)}$$

$$k_{AK} = \frac{\texttt{K[[2]] - A[[2]]}}{\texttt{K[[1]] - A[[1]]}}\texttt{;(*Угловой коэффициент стороны AK*)}$$

$$\texttt{If}\left[k_{AK} \neq 0,\ k_{BH} = -\frac{1}{k_{AK}}\right];$$

$$\texttt{y1 = Simplify}[k_{BH}\,\texttt{(x - B[[1]]) + B[[2]]]};$$

```
If[kAK == 0, Print["BH: ", "x=", B[[1]]], Print["BH: ", "y=", y1]]
```

$$\texttt{BH: y=}-4 + \frac{3\,x}{2}$$

Рис. 3.14

г) Биссектрисы *KF* (рис. 3.15).

$$\texttt{(*Уравнение биссектрисы KF:*)}$$

$$\lambda = \frac{\texttt{Norm[A - K]}}{\texttt{Norm[B - K]}};$$

$$\texttt{F = N}\left[\left\{\frac{\texttt{A[[1]]} + \lambda\,\texttt{B[[1]]}}{1+\lambda},\ \frac{\texttt{A[[2]]} + \lambda\,\texttt{B[[2]]}}{1+\lambda}\right\}\right];$$

$$L_{KF} = \texttt{Simplify}\left[\texttt{Det}\left[\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ \texttt{K[[1]]} & \texttt{K[[2]]} & 1 \\ \texttt{F[[1]]} & \texttt{F[[2]]} & 1 \end{pmatrix}\right] = 0\right];$$

$$\texttt{Print["KF: ", }L_{KF}\texttt{]}$$

```
KF: 1. x + 0.2 y = 1.8
```

Рис. 3.15

При данных начальных условиях можно получить более «красивый» ответ, если не использовать при вычислении координат точки *F* функцию **N[expr]** (рис. 3.16).

$$\texttt{(*Уравнение биссектрисы KF:*)}$$

$$\lambda = \frac{\texttt{Norm[A - K]}}{\texttt{Norm[B - K]}};$$

$$\texttt{F = }\left\{\frac{\texttt{A[[1]]} + \lambda\,\texttt{B[[1]]}}{1+\lambda},\ \frac{\texttt{A[[2]]} + \lambda\,\texttt{B[[2]]}}{1+\lambda}\right\};$$

$$L_{KF} = \texttt{Simplify}\left[\texttt{Det}\left[\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ \texttt{K[[1]]} & \texttt{K[[2]]} & 1 \\ \texttt{F[[1]]} & \texttt{F[[2]]} & 1 \end{pmatrix}\right] = 0\right];$$

$$\texttt{Print["KF: ", }L_{KF}\texttt{]}$$

```
KF: 5 x + y = 9
```

Рис. 3.16

Задания для самостоятельной работы

1. Отрезок с концами $A(-4; -3)$ и $B(5; 6)$ разделен на три части. Найти координаты точек деления.

2. Даны вершины треугольника $A(–6; –2)$, $B(3; 5)$ и $C(6; –8)$. Определить расстояние от точки O пересечения медиан треугольника до вершины C.

3. Найти угол между прямыми $x-3y-9=0$ и $-3x+y+6=0$.

4. Показать, что прямые $4x-2y+5=0$ и $5x+10y-8=0$ перпендикулярны.

5. В треугольнике ABC найти длину высоты BD, если $A(–5; –1)$, $B(–6; 6)$ и $C(–2; –4)$.

6. Найти точки пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(14; 3)$, $B(1; 14)$, $C(–26; 11)$ и $D(–4; –6)$.

7. Даны вершины треугольника $A(–1; –3)$, $B(5; 5)$ и $C(1; 2)$. Найти уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины C.

3.2. Прямая и плоскость в пространстве

Пример 3.2.1

Найти расстояние от точки $A(5; –3; 6)$ до плоскости $5x-4y+3z-14=0$.

Решение

Расстояние от точки $M_1(x_1; \mathrm{y}_1; \mathrm{z}_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Таким образом, расстояние от точки A до плоскости $5x-4y+3z-14=0$ равно: $d=\dfrac{|5\cdot5-4\cdot(-3)+3\cdot6-14|}{\sqrt{5^2+(-4)^2+3^2}}=\dfrac{41}{5\sqrt2}=\dfrac{41\cdot5\sqrt2}{5\sqrt2\cdot5\sqrt2}=\dfrac{41\sqrt2}{10}$.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 3.17).

```
In[1]:= (*Введите координаты точки A:*)
        A = {5, -3, 6};
        (*Укажите значения A1,B1,C1,D1 плоскости A1x+B1y+C1z+D1=0:*)
        A1 = 5;
        B1 = -4;
        C1 = 3;
        D1 = -14;
        (*Расстояние от точки до плоскости:*)
        d = Expand[Abs[A1*A[[1]] + B1*A[[2]] + C1*A[[3]] + D1] / Sqrt[A1^2 + B1^2 + C1^2]]
Out[6]= 41/(5 Sqrt[2])
In[7]:= (*Выведем результат в другом формате:*)
        d1 = N[d]
Out[7]= 5.79828
```

Рис. 3.17

Пример 3.2.2

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(4; –2; 3) и перпендикулярной плоскостям $4x - y + 2z + 5 = 0$ и $x - 5y - 2z + 3 = 0$.

Решение

Нормальный вектор искомой плоскости можно найти, вычислив векторное произведение нормальных векторов, заданных по условию плоскостей:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 10\vec{j} - 19\vec{k}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1; \mathrm{y}_1; \mathrm{z}_1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$.

Следовательно, искомая плоскость имеет вид: $12(x-4) + 10(y+2) - 19(z+3) = 0$ или $12x + 10y - 19z - 85 = 0$.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 3.18).

```
In[1]:= (*Введите координаты точки A:*)
  A = {4, -2, -3};

  (*Введите координаты вектора n⃗1 нормали первой плоскости:*)
  n1 = {4, -1, 2};

  (*Введите координаты вектора n⃗2 нормали второй плоскости:*)
  n2 = {1, -5, -2};

  n = n1 × n2;
  K = Expand[n[[1]] (x - A[[1]]) + n[[2]] (y - A[[2]]) + n[[3]] (z - A[[3]])] //
     TraditionalForm;

  Print["Вектор нормали искомой плоскости: n⃗=", n]
  Print["Уравнение искомой плоскости:   ", K, "=0"]

  Вектор нормали искомой плоскости: n⃗={12, 10, -19}
  Уравнение искомой плоскости:  12 x + 10 y - 19 z - 85=0
```

Рис. 3.18

Пример 3.2.3

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A_1(3; –1; –2), A_2(4; –1; 5), A_3(–2; 3; 1).

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z+2 \\ 4-3 & -1+1 & 5+2 \\ -2-3 & 3+1 & 1+2 \end{vmatrix} = 0,$

$-28x-38y+4z+54=0 \Rightarrow 14x+19y-2z-27=0.$

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 3.19).

```
In[1]:= (*Введите координаты точек:*)
A = {3, -1, -2};
B = {4, -1, 5};
C1 = {-2, 3, 1};

(*Уравнение плоскости по трем заданным точкам:*)
L = Det[( x - A[[1]]             y - A[[2]]             z - A[[3]]
          B[[1]] - A[[1]]        B[[2]] - A[[2]]        B[[3]] - A[[3]]
          C1[[1]] - A[[1]]       C1[[2]] - A[[2]]       C1[[3]] - A[[3]] )];
Print[Simplify[L] // TraditionalForm, "=0"]

(*Уравнение искомой плоскости:*)
-28 x - 38 y + 4 z + 54=0
```

Рис. 3.19

Пример 3.2.4

Определить канонические и параметрические уравнения прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-2=0, \\ -x+4y+5z-3=0. \end{cases}$

Решение

Найдем направляющий вектор $\vec{n}$ искомой прямой как векторное произведение нормальных векторов плоскостей, определяющих прямую:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -13\vec{i} - 17\vec{j} + 11\vec{k}.$$

В качестве точки, принадлежащей искомой прямой, можно взять точку пересечения прямой с плоскостью xOy. В этом случае $z_1 = 0$ и координаты x_1 и y_1 определяются из системы уравнений заданных плоскостей, если в них взять $z = 0$:

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0, \\ -x + 4y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы является пара чисел $x = 1$ и $y = 1$, т. е. имеем точку $M(1; 1; 0)$.

Воспользуемся следующими формулами:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{x - y_1}{l} = \frac{z - z_1}{p}$$ – канонические уравнения прямой;

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + lt, \\ z = z_1 + pt \end{cases}$$ – параметрические уравнения прямой,

где $M(x_1; y_1; z_1)$ – точка, принадлежащая искомой прямой, $\vec{n} = \{m; l; p\}$ – направляющий вектор прямой.

Запишем искомые уравнения:

$$\frac{x-1}{-13} = \frac{y-1}{-17} = \frac{z}{11}, \quad \begin{cases} x = 1 - 13t, \\ y = 1 - 17t, \\ z = 11t. \end{cases}$$

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные в **Mathematica** (рис. 3.20).

```
In[1]:= (*Введите начальные условия {A1x+B1y+C1z+D1=0
                                   {A2x+B2y+C2z+D2=0 : *)
        (*A1x+B1y+C1z+D1=0:*)
        A1 = 3;
        B1 = -1;
        C1 = 2;
        D1 = -2;
        (*A2x+B2y+C2z+D2=0:*)
        A2 = -1;
        B2 = 4;
        C2 = 5;
        D2 = -3;
```

Рис. 3.20

Находим точку, принадлежащую искомой прямой, и направляющий вектор прямой (рис. 3.21).

```
(*Решение:*)
n1 = {A1, B1, C1};
n2 = {A2, B2, C2};
n = n1 × n2;
ur1 = A1 * x + B1 * y + D1;
ur2 = A2 * x + B2 * y + D2;
sol = Solve[ur1 = 0 && ur2 = 0, {x, y}];
x1 = x /. sol[[1]];
y1 = y /. sol[[1]];
z1 = 0;
```

Рис. 3.21

Зададим вывод уравнения прямой в каноническом виде (рис. 3.22).

```
X = (x - x1) // TraditionalForm;
Y = (y - y1) // TraditionalForm;
Z = (z - z1) // TraditionalForm;
    X        ""       Y       ""       Z
"_______"  "="  "______"  "="  "______" // TableForm
 n[[1]]     ""    n[[2]]    ""    n[[3]]
```

Рис. 3.22

В результате получаем (рис. 3.23).

```
(*Каноническое уравнение прямой:*)
Out[21]//TableForm=
  x - 1          y - 1          z
  ------    =    ------    =    -----
  -13            -17            11
```

Рис. 3.23

Запишем уравнение в параметрическом виде (рис. 3.24).

```
"x=" n[[1]] * t + x1
"y=" n[[2]] * t + y1 // TableForm
"z=" n[[3]] * t + z1
```

Рис. 3.24

Получаем (рис. 3.25).

```
(*Параметрическое уравнение прямой:*)
Out[22]//TableForm=
  x=   1 - 13 t
  y=   1 - 17 t
  z=   11 t
```

Рис. 3.25

Пример 3.2.5

Выяснить, лежат ли прямые $\frac{x-2}{1}=\frac{x+3}{4}=\frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x+2}{-2}=\frac{x+1}{1}=\frac{z-7}{3}$ в одной плоскости. Если лежат, то найти величину острого угла между ними.

Решение

Две прямые, заданные уравнениями вида $\frac{x-x_1}{m}=\frac{x-y_1}{n}=\frac{x-z_1}{p}$, лежат в одной плоскости, если выполняется следующее условие:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

В данном случае $\begin{vmatrix} -2-2 & -1+3 & 7-1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$, следовательно, прямые лежат в одной плоскости.

Величину острого угла между прямыми можно найти по формуле

$$\cos\alpha=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Получаем $\cos\alpha=\frac{|1(-2)+4\cdot 1+(-1)\cdot 3|}{\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{18}\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{7}}{42}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{\sqrt{7}}{42}\approx 86^{\circ}.$$

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные (рис. 3.26).

```
(*Введите начальные условия:*)
x1 = 2;            x2 = -2;
y1 = -3;           y2 = -1;
z1 = 1;            z2 = 7;
m1 = 1;            m2 = -2;
n1 = 4;            n2 = 1;
p1 = -1;           p2 = 3;
```

Рис. 3.26

В программе анализируются возможные варианты взаимного расположения прямых (рис. 3.27). В том случае, если прямые лежат в одной плоскости, вычисляется угол между ними.

```
Print["Ответ:"]
If[Det[( x2 - x1  y2 - y1  z2 - z1
           m1       n1       p1
           m2       n2       p2   )] == 0,
 Print["Прямые лежат в одной плоскости"] &&
  Print["α=",
   N[ArcCos[Abs[m1*m2 + n1*n2 + p1*p2] / (Sqrt[m1^2 + n1^2 + p1^2] Sqrt[m2^2 + n2^2 + p2^2])] * 180/π], " o"],
 Print["Прямые не лежат в одной плоскости"]]
Ответ:
Прямые лежат в одной плоскости
α=86.3883 o
```

Рис. 3.27

Пример 3.2.6

Установить взаимное расположение прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{x+1}{-3}=\frac{z-5}{6}$ и плоскости $-3x+4y+3z-5=0$.

Решение

Угол между прямой, заданной уравнением вида $\frac{x-x_1}{m}=\frac{x-y_1}{n}=\frac{x-z_1}{p}$, и плоскостью, заданной уравнением вида $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле $\sin\alpha=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, а условие принадлежности прямой плоскости определяется системой уравнений $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0. \end{cases}$

Найдем угол между заданными прямой и плоскостью:

$$\sin\alpha=\frac{|-3\cdot 2+4\cdot(-3)+3\cdot 6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+6^2}\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}}=0 \Rightarrow \alpha=0.$$

При таком угле прямая либо принадлежит плоскости, либо параллельна ей. Проверим, выполняется ли условие принадлежности прямой плоскости:

$$\begin{cases} -3\cdot 2+4\cdot(-3)+3\cdot 6=-6-12+18=0, \\ -3\cdot 2+4\cdot(-1)+3\cdot 5-5=-6-4+15-5=0. \end{cases}$$

Итак, условие выполняется и, следовательно, прямая принадлежит плоскости.

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные (рис. 3.28).

```
(*Введите начальные условия:*)
x1 = 2;
y1 = -1;
z1 = 5;
m1 = 2;
n1 = -3;
p1 = 6;

A1 = -3;
B1 = 4;
C1 = 3;
D1 = -5;
```

Рис. 3.28

В программе анализируется взаимное расположение прямой и плоскости (рис. 3.29). Для заданных начальных условий программа также вычисляет угол, под которым прямая и плоскость пересекаются (см. рис. 3.29).

```
Print["Ответ:"]
α = ArcSin[Abs[A1*m1 + B1*n1 + C1*p1] / (Sqrt[m1^2 + n1^2 + p1^2] Sqrt[A1^2 + B1^2 + C1^2])];
If[α == π/2, Print["Прямая и плоскость перпендикулярны"]]
If[α == 0 && (A1*x1 + B1*y1 + C1*z1 + D1) == 0,
 Print["Прямая принадлежит плоскости"]]
If[α == 0 && (A1*x1 + B1*y1 + C1*z1 + D1) ≠ 0,
 Print["Прямая параллельна плоскости"]]
If[α ≠ π/2 && α ≠ 0,
 Print["Прямая и плоскость пересекаются под углом α=",
  N[α*180/π], " °"]]
Ответ:
Прямая принадлежит плоскости
```

Рис. 3.29

Результат работы программы при других начальных условиях (рис. 3.30).

```
x1 = 3;     A1 = 4;
y1 = -4;    B1 = 2;
z1 = 2;     C1 = -3;
m1 = -5;    D1 = 6;
n1 = 1;
p1 = -2;

Ответ:
Прямая и плоскость пересекаются под углом α=24.0064 °
```

Рис. 3.30

Задания для самостоятельной работы

1. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $2x-4y+3z+14=0$

2. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 2; -6)$ на плоскость $8x-4y+10z+11=0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $5x+9y+z-13=0$, $x+5y-3z-1=0$ и точку $M(2; 4; 3)$.

4. Какой угол образует с плоскостью $2x+2y+4z-5=0$ вектор $\vec{c}=-\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$?

5. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-2; 3; -4)$ и $B(-1; 5; -2)$.

6. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x+3y-z+1=0, \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-5z+4=0, \\ -2x-5y-2=0. \end{cases}$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 5; -2)$ параллельно прямым $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-2}{-2}$ и $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{4}$.

8. Прямая l проходит через точку $M(4; 2; -3)$ и точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$ с плоскостью $x-3y+z-8=0$. Найти угол, образованный прямой l с плоскостью $3x+4y-z+5=0$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3; 1; 2)$, $M_2(1; -1; 0)$ и перпендикулярной плоскости $4x-2y+8z-15=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 0; 3)$ и перпендикулярной векторам $\vec{a}=(3; 2; 2)$ и $\vec{b}=(0; -2; 5)$.

11. Даны вершины треугольника $A(-5; -3; -6)$, $B(5; 6; 1)$ и $C(-3; 2; -4)$. Составить параметрические уравнения его медиан.

12. Найти расстояние от точки $M(3; 4; -5)$ до прямой $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{5}$.

13. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+2}{-2}$ на плоскость $4x+6y-2z+15=0$.

14. Даны вершины треугольника $A(4; 5; -1)$, $B(-3; 2; 4)$ и $C(5; -1; 3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине C.

3.3. Кривые второго порядка

Пример 3.3.1

Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2; 7)$ и $B(-1; 5)$.

Решение

Пусть точка $N(x;y)$ принадлежит искомому множеству. По условию расстояние от точки N до точки A и расстояние от точки N до точки B равны, следовательно, равны и квадраты расстояний:

$$(x-2)^2+(y-7)^2=(x+1)^2+(y-5)^2;$$

$$x^2-4x+4+y^2-14y+49=x^2+2x+1+y^2-10y+25;$$

$$6x+4y-27=0.$$

Таким образом, получили уравнение прямой.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 3.31).

```
In[1]:= (*Введите координаты точек A и B:*)
        A = {2, 7};
        B = {-1, 5};

        Print["Решение:"]
        Simplify[((x - A[[1]]) ^2 + (y - A[[2]]) ^2) ==
          ((x - B[[1]]) ^2 + (y - B[[2]]) ^2)]

        Решение:

Out[4]= 6 x + 4 y = 27
```

Рис. 3.31

Пример 3.3.2

Найти координаты центра и радиус окружности $3x^2+3y^2-5x+6y-5=0$.

Решение

Разделив уравнение на 3 и сгруппировав члены уравнения, получим:

$$x^2-\frac{5}{3}x+y^2+2y-\frac{5}{3}=0.$$

Дополним выражение до полных квадратов и выполним преобразования:

$$x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}-\frac{25}{36}+y^2+2y+1-1-\frac{5}{3}=0;$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+(y+1)^2=\frac{25}{36}+1+\frac{5}{3};$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+(y+1)^2=\frac{121}{36};$$

$$\frac{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}{\left(\frac{11}{6}\right)^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(\frac{11}{6}\right)^2}=1.$$

Таким образом, координаты центра окружности $x_0=\frac{5}{6}$ и $y_0=-1$, а радиус окружности $R=\frac{11}{6}$.

Вычисления в Mathematica

Введем начальные условия (рис. 3.32):

```
In[1]:= (*Уравнение рассмотрим в формате Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0*)
        (*Введите начальные условия:*)
        A1 = 3;
        C1 = 3;
        D1 = -5/2;
        E1 = 6/2;
        F1 = -5;
```

Рис. 3.32

Решение задачи выполним в общем виде (рис. 3.33).

```
Print[""]
Print["Ответ:"]
x0 = -D1/A1;
y0 = -E1/C1;
R = Sqrt[(D1^2/A1 + E1^2/C1 - F1)/A1];
Print["Координаты центра окружности: x0=", x0, "; y0=", y0]
Print["Радиус окружности: R=", R]
Graphics[Circle[{x0, y0}, R], AxesLabel → {x, y}, Axes → True,
 Prolog → {Black, PointSize[0.02], Point[{x0, y0}]}, Epilog → {
   {Red, Text["O", {x0 + 0.2, y0 + 0.1}]}}]
Print[""]
```

Рис. 3.33

Дополнительно к результатам вычислений выводится рисунок окружности (рис. 3.34).

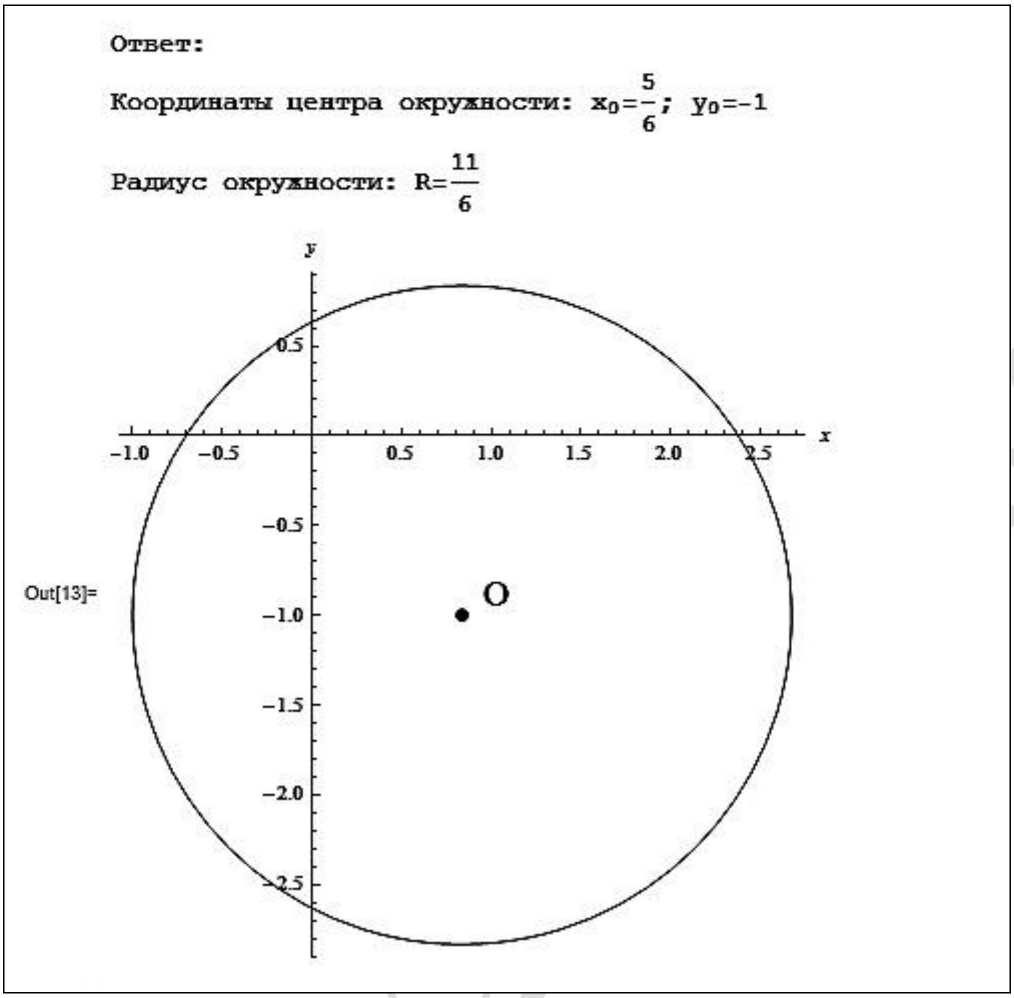


Рис. 3.34

Данная задача может быть обобщена на случай, когда дано уравнение эллипса. Приведем решение в пакете **Mathematica**. В условии примера заменим только коэффициент при y^2 (рис. 3.35).

```
In[1]:= (*Уравнение рассмотрим в формате Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0*)
        (*Введите начальные условия:*)
        A1 = 3;
        C1 = 12;
        D1 = -5 / 2;
        E1 = 6 / 2;
        F1 = -5;
```

Рис. 3.35

Отметим, что для построения графиков кривых, заданных неявным уравнением, используется функция **ContourPlot** (рис. 3.36).

```
Print[""]
Print["Ответ:"]
x0 = -D1/A1;
y0 = -E1/C1;
a = Sqrt[(D1^2/A1 + E1^2/C1 - F1)/A1];
b = Sqrt[(D1^2/A1 + E1^2/C1 - F1)/C1];
r = Max[a, b];
Print["Координаты центра эллипса: x₀=", x0, "; y₀=", y0]
Print["Полуоси эллипса: a=", a, "; b=", b]
ContourPlot[{A1*x^2 + C1*y^2 + 2*D1*x + 2*E1*y + F1 == 0},
 {x, x0 - 1.1 r, x0 + 1.1 r}, {y, y0 - 1.1 r, y0 + 1.1 r},
 ContourStyle -> Thickness[0.01], AxesLabel -> {x, y}, Axes -> True,
 Prolog -> {Black, PointSize[0.02], Point[{x0, y0}]}, Epilog -> {
   {Red, Text["O", {x0 + 0.2, y0 + 0.09}]}}]
Print[""]
```

Рис. 3.36

В результате работы программы получаем искомые координаты центра эллипса и его полуоси, а также изображение эллипса (рис. 3.37).

Ответ:

Координаты центра эллипса: $x_0=\frac{5}{6}$; $y_0=-\frac{1}{4}$

Полуоси эллипса: $a=\frac{\sqrt{\frac{47}{2}}}{3}$; $b=\frac{\sqrt{\frac{47}{2}}}{6}$

Out[15]=

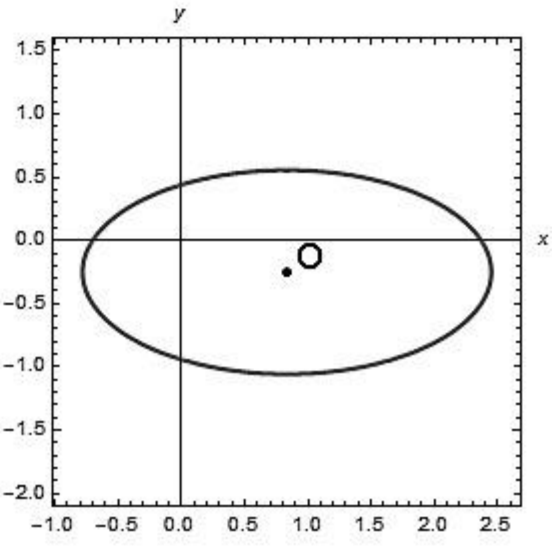


Рис. 3.37

Пример 3.3.3

Составить уравнение лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ в полярных координатах.

Решение

Переход к полярным координатам выполним по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Таким образом, $((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2)^2 = 2a^2((\rho\cos\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^2)$; $\rho^4 1^2 = 2a^2\rho^2\cos 2\varphi$. Так как $\rho > 0$, то $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 3.38).

```
In[1]:= Print["Ответ:"]
  FullSimplify[(x^2 + y^2)^2 == 2 a^2 (x^2 - y^2) /.
     {x → ρ*Cos[ϕ], y → ρ*Sin[ϕ]}, Assumptions -> ρ > 0]

  Manipulate[ContourPlot[{(x^2 + y^2)^2 == 2 a^2 (x^2 - y^2)},
     {x, -√2 *6, √2 *6}, {y, -√2 *6, √2 *6},
     ContourStyle → Thickness[0.01]], {{a, 1}, 1, 6}]
  Print[""]
```

Рис. 3.38

Уравнение лемнискаты и ее изображение представлены на рис. 3.39.

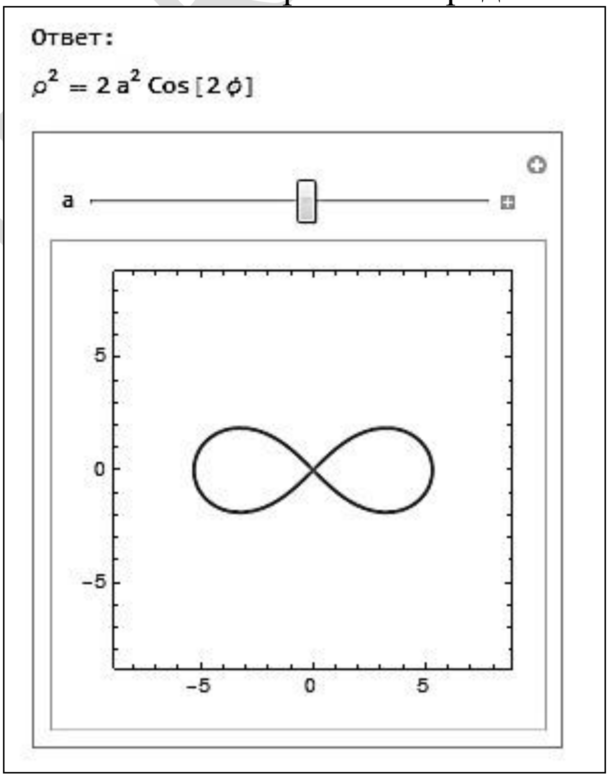


Рис. 3.39

Благодаря функции **Manipulate**, можно посмотреть, как будет меняться рисунок при изменения параметра a: при $a=2$ – рис. 3.40, при $a=6$ – рис. 3.41.

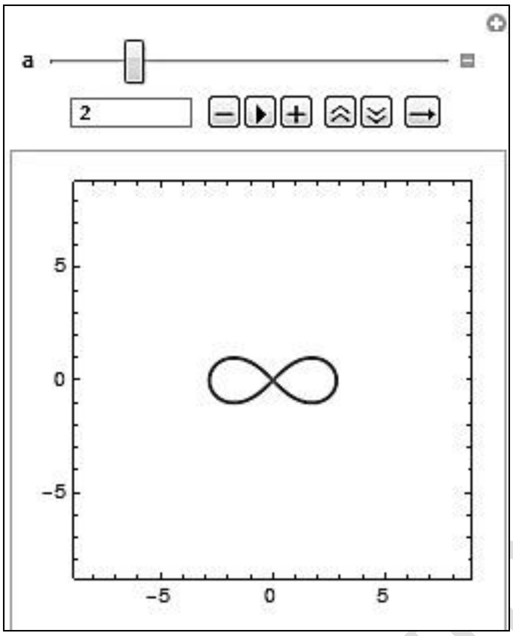


Рис. 3.40

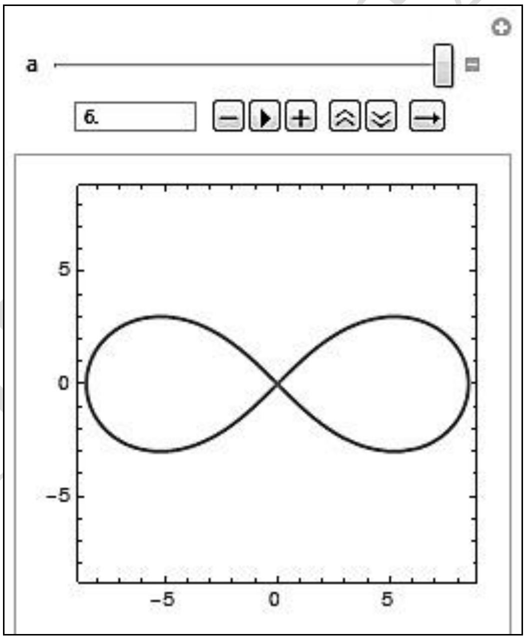


Рис. 3.41

Пример 3.3.4

В полярной системе координат задана кардиоида $\rho = 2r(1-\cos\varphi)$. Записать параметрические уравнения кардиоиды и изобразить кардиоиду.

Решение

Полярная и декартова системы координат связаны системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Подставим в систему $\rho = 2r(1-\cos\varphi)$:

$$\begin{cases} x = 2r(1-\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = 2r(1-\cos\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Если рассматривать в качестве параметра φ, то получим параметрические уравнения кардиоиды:

$$\begin{cases} x = 2r(1-\cos t)\cos t, \\ y = 2r(1-\cos t)\sin t. \end{cases}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{cases} x = 2r\cos t - 2r\cos^2 t, \\ y = 2r\sin t - 2r\cos t\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2r\cos t - r\cos 2t - r, \\ y = 2r\sin t - r\sin 2t. \end{cases}$$

Обратим внимание, что в выражении $x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi - r$ присутствует слагаемое «–*r*», не зависящее от *t*. Если убрать «–*r*» из выражения, то получим ту же кривую, но смещенную по оси Ox вправо на *r*.

Построения выполним в пакете **Mathematica**.

Вычисления в Mathematica

Приведем пример построения кардиоиды, заданной в полярной и декартовой системах координат (рис. 3.42), а также для случая, когда линия задана параметрически (рис. 3.43).

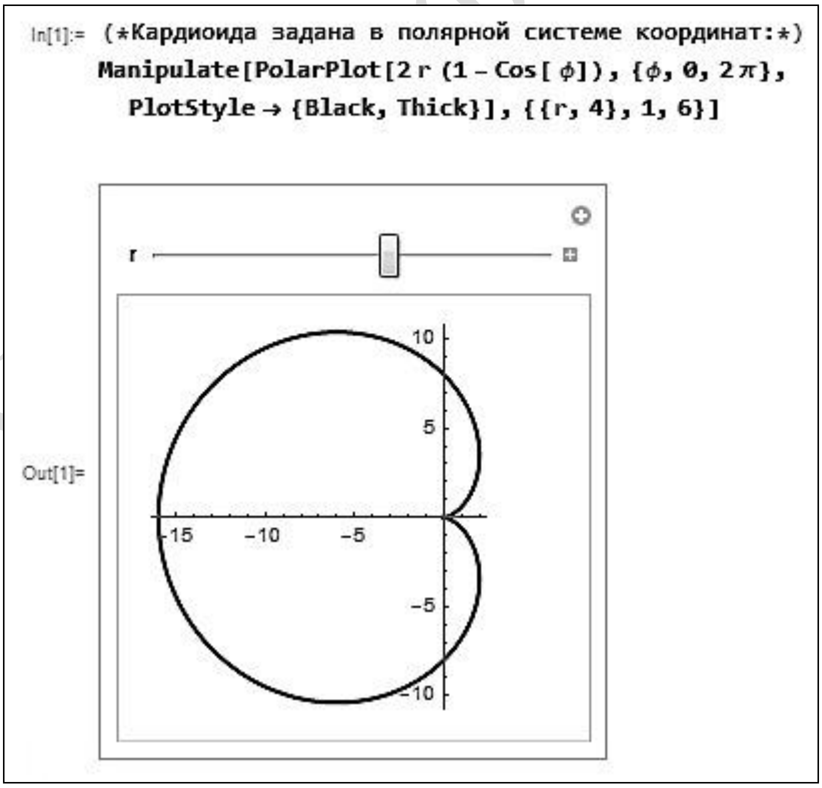


Рис. 3.42

```
In[2]:= (*Кардиоида задана параметрически:*)
        x[t_] := 2 r Cos[t] - r Cos[2 t] - r;
        y[t_] := 2 r Sin[t] - r Sin[2 t];
        Manipulate[
         {ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. {r → r1}, {t, 0, 2 π},
           PlotStyle -> {Black, Thick}]}, {{r1, 4}, 1, 6}]
Out[4]=
```

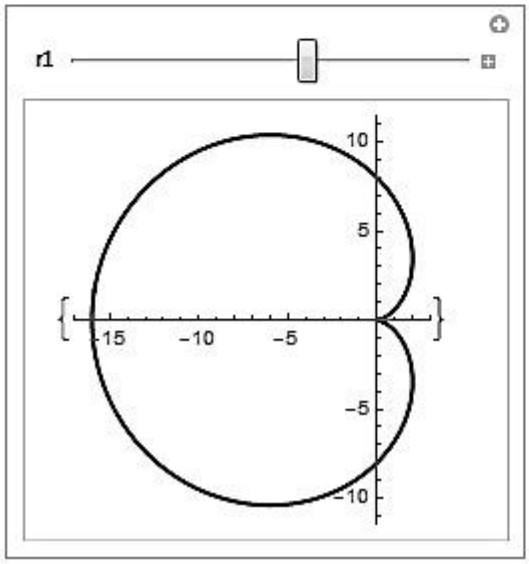


Рис. 3.43

Видим, что рис. 3.42 и 3.43 совпадают.

Приведем пример построения линии, убрав из выражения $x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi - r$ слагаемое «–*r*» (рис. 3.44).

```
In[5]:= (*Кардиоида задана параметрически:*)
        x1[t_] := 2 r Cos[t] - r Cos[2 t];
        y1[t_] := 2 r Sin[t] - r Sin[2 t];
        Manipulate[
         {ParametricPlot[{x1[t], y1[t]} /. {r → r1}, {t, 0, 2 π},
           PlotStyle -> {Black, Thick}]}, {{r1, 4}, 1, 6}]
Out[7]=
```

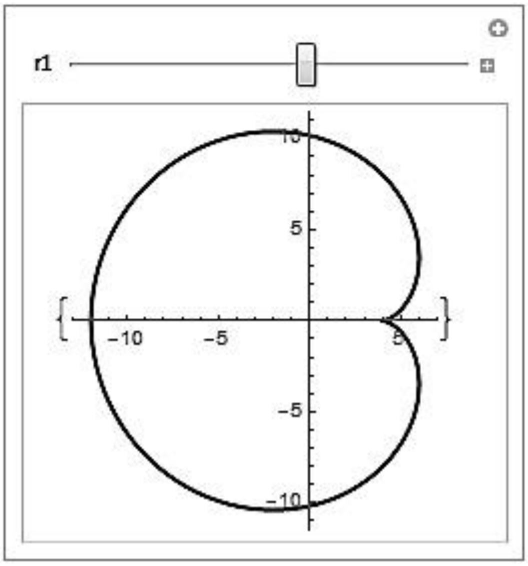


Рис. 3.44

Итак, график кардиоиды на рис. 3.44 сместился вправо на $r = 4$.

Напомним, что в декартовой системе координат кардиоиду можно задать с помощью следующего уравнения: $(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$ (рис. 3.45).

```
In[20]:= (*Кардиоида задана в декартовой системе координат:*)
Manipulate[ContourPlot[{(x² + y² + 2 r*x)² = 4 r² (x² + y²)},
  {x, -5*r, 1*r}, {y, -3*r, 3*r},
  ContourStyle → {Black, Thickness[0.01]}, Axes → True,
  Frame → False], {{r, 4}, 1, 6}]
Print[""]
```

Out[20]=

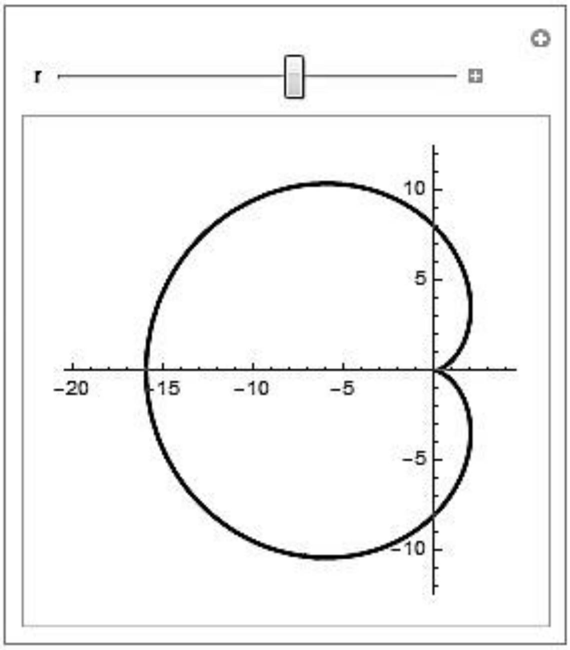


Рис. 3.45

Пример 3.3.5

Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3;\,2)$ и $N(-1;\,4)$.

Решение

Пусть искомое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. По условию обе точки M и N принадлежат эллипсу, поэтому можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3^2}{a^2} + \dfrac{2^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{(-1)^2}{a^2} + \dfrac{4^2}{b^2} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1, \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{16}{b^2} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{b^2} = 1 - \dfrac{9}{a^2}, \\ \dfrac{1}{a^2} + 4\left(1 - \dfrac{9}{a^2}\right) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{35}{2}, \\ a^2 = \dfrac{35}{3}. \end{cases}$$

Итак, искомое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{\frac{35}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{35}{2}} = 1.$

Вычисления в Mathematica

Решение данной задачи в **Mathematica** представлено на рис. 3.46.

```
In[1]:= (*Введите координаты точек M и N:*)
  M1 = {3, 2};
  N1 = {-1, 4};

  Print["Ответ:"]
  sol =
   If[M1 ≠ N1,
    Solve[{M1[[1]]^2/a1 + M1[[2]]^2/b1 == 1, N1[[1]]^2/a1 + N1[[2]]^2/b1 == 1},
     {a1, b1}]];
  If [sol ≠ {}, {a2 = a1 /. sol[[1]], b2 = b1 /. sol[[1]]}];
  If [sol == {} || a2 ≤ 0 || b2 ≤ 0 || M1 == N1,
   Print[
    "При заданных условиях нельзя получить каноническое
      уравнение эллипса"],
   Print["Уравнение эллипса:  ",
    {{"x^2", "", "y^2", "", ""}, {"___", "+", "___", "=", "1"}, {"a2", "", "b2", "", ""}} // TableForm]]
```

Ответ:

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{\frac{35}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{35}{2}} = 1$

Рис. 3.46

Если задать некорректное условие, то программа не будет работать и выдаст сообщение об ошибке. Изменим, например, координаты точек (рис. 3.47).

```
In[1]:= (*Введите координаты точек M и N:*)
  M1 = {7, 12};
  N1 = {-3, 5};
```

Рис. 3.47

В этом случае получим следующий результат (рис. 3.48).

```
Ответ:
При заданных условиях нельзя получить каноническое уравнение эллипса
```

Рис. 3.48

Пример 3.3.6

Дана гипербола $9x^2 - 16y^2 = 36$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот.

Решение

Разделим обе части уравнения на 36, получим $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{4y^2}{9} = 1$.

а) Полуоси гиперболы: $a = \sqrt{4} = 2$; $b = \sqrt{\dfrac{6}{4}} = \dfrac{3}{2}$.

б) Фокусы гиперболы имеют координаты $F_1(c;\,0)$ и $F_2(-c;\,0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Найдем c: $c = \sqrt{2^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{2}$. Тогда $F_1\left(\dfrac{5}{2};\,0\right)$ и $F_2\left(-\dfrac{5}{2};\,0\right)$.

в) Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$.

г) Уравнения асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, следовательно, $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.

Вычисления в Mathematica

Вводим начальные условия (рис. 3.49).

```
In[1]:= (*Уравнение гиперболы дано в формате Ax²-By²=C1*)
        (*Введите начальные данные:*)
        A1 = 9;
        B1 = 16;
        C1 = 36;
```

Рис. 3.49

Описание решения задачи на рис. 3.50.

```
Print["Решение:"]
a = Sqrt[C1/A1];  b = Sqrt[C1/B1];
c = Sqrt[(a)^2 + (b)^2];  ϵ = c/a;
Print["Полуоси гиперболы: a=", a, " b=", b]
Print["Фокусы: F₁(", c, ";" , 0, ") и F₂(", -c,
 ";" , 0, ")"]
Print["Эксцентриситет: ϵ=", ϵ]
Print["Уравнения асимптот: y=±", b/a, "x"]
```

Рис. 3.50

Описание вывода графика гиперболы на рис. 3.51.

```
Show[ContourPlot[{A1 * x^2 - B1 * y^2 = C1}, {x, -2 c, 2 c},
   {y, -2 c, 2 c}, ContourStyle → Thickness[0.01],
   AxesLabel → {x, y}, Axes → True,
   Prolog → {Black, PointSize[0.02], Point[{0, 0}]},
   Epilog → {{Text["O", {0.5, 0.5}]}}],
  ContourPlot[{y = b/a x}, {x, -2 c, 2 c}, {y, -2 c, 2 c}],
  ContourPlot[{y = - b/a x}, {x, -2 c, 2 c}, {y, -2 c, 2 c}],
  ListPlot[{{c, 0}, {-c, 0}},
   PlotStyle → {Blue, Thick, PointSize[Large]}]]
Print[""]
```

Рис. 3.51

Результаты вычислений представлены на рис. 3.52.

Решение:

Полуоси гиперболы: $a=2$ $b=\frac{3}{2}$

Фокусы: $F_1(\frac{5}{2};0)$ и $F_2(-\frac{5}{2};0)$

Эксцентриситет: $\epsilon=\frac{5}{4}$

Уравнения асимптот: $y=\pm\frac{3}{4}x$

Рис. 3.52

На рис. 3.53 представлен график гиперболы.

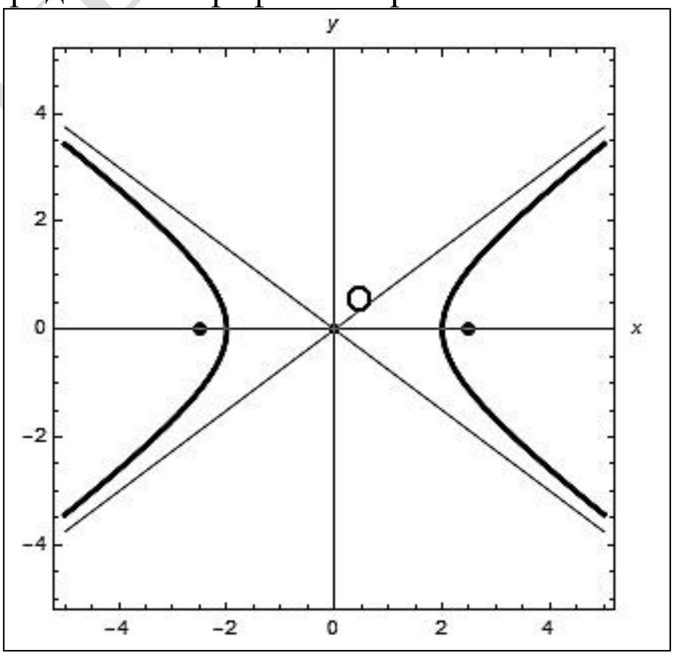


Рис. 3.53

Пример 3.3.7

Найти точки параболы $y^2 = 12x$, расстояние от которых до фокуса параболы равно 7.

Решение

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Параметр параболы равен $p = \dfrac{12}{2} = 6$. Координаты фокуса – $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow F(3; 0)$.

Пусть $A(x; y)$ – искомая точка, принадлежащая параболе.

По условию расстояние от точки до фокуса равно 7. Для нахождения координат точки A необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-0)^2 = 7^2, \\ y^2 = 12x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + 12x = 7^2, \\ y^2 = 12x, \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 12x = 49 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 40 = 0$.

Корни этого квадратного уравнения равны: $x_1 = 4$ и $x_2 = -10$. Так как по условию $x > 0$ (поскольку $y^2 = 12x$), то корень $x_2 = -10$ исключаем. При $x_1 = 4$ получаем $y_1 = 4\sqrt{3}$ и $y_2 = -4\sqrt{3}$.

Таким образом, получаем координаты двух точек $A_1(4; 4\sqrt{3})$ и $A_2(4; -4\sqrt{3})$.

Вычисления в Mathematica

Решение данной задачи можно оформить кратко (рис. 3.54).

```
In[1]:= (*Уравнение параболы задано в формате y^2=2px*)
        (*Введите начальные условия:*)
        p = [12]/2; (*запишите в рамку число, стоящее перед x*)
        d = [7]; (*расстояние от фокуса до искомых точек*)
        Print["Ответ:"]
        F = {p/2, 0}; (*координаты фокуса*)
        A = {x, y}; (*координаты искомой точки*)

        Solve[{EuclideanDistance[A, F] = d, y^2 = 2*p*x}, {x, y}]

        Ответ:
Out[6]= {{x → 4, y → -4 √3}, {x → 4, y → 4 √3}}
```

Рис. 3.54

Возможные варианты решения:

1) две точки – программа выдает две пары чисел (рис. 3.54);

2) одна точка (искомая точка совпадет с вершиной параболы) – программа дает одно решение;

3) нет решений (маленькое значение d) – результатом работы программы является пустое множество { }.

Можно выполнить более подробное решение данной задачи, где будут учтены все три случая и выданы соответствующие ответы.

Начало программы не меняем (рис. 3.55).

```
In[1]:= (*Уравнение параболы задано в формате y^2=2px*)
  (*Введите начальные условия:*)
  p = 12/2; (*запишите в рамку число, стоящее перед x*)
  d = 7; (*расстояние от фокуса до искомых точек*)
  Print["Ответ:"]
  F = {p/2, 0};(*координаты фокуса*)
  A = {x, y}; (*координаты искомой точки*)
```

Рис. 3.55

Рассматриваем ситуации, когда искомая точка не совпадет с вершиной параболы (рис. 3.56).

```
If[d ≠ p/2, sol := Solve[{EuclideanDistance[A, F] = d, y^2 = 2*p*x}, {x, y}]];
If[d ≠ p/2 && sol ≠ {}, {x1 = x /. sol[[1]], y1 = y /. sol[[1]], x2 = x /. sol[[2]],
   y2 = y /. sol[[2]]}];
If[d ≠ p/2 && sol ≠ {}, Print["A1(", x1, ";", y1, ")"]]
If[d ≠ p/2 && sol ≠ {}, Print["A2(", x2, ";", y2, ")"]]
If[d ≠ p/2 && sol ≠ {},
 Show[ContourPlot[y^2 = 2*p*x, {x, -x1/10, x1 + x1/10}, {y, -y1 - y1/10, y1 + y1/10},
   ContourStyle -> Thickness[0.005], AxesLabel -> {x, y}, Axes -> True,
   Prolog -> {Black, PointSize[Large], Point[{p/2, 0}]}],
  ListPlot[{{x1, y1}, {x2, y2}}, PlotStyle -> {Blue, Thick, PointSize[Large]}]]]
```

Рис. 3.56

В случае совпадения точки с вершиной параболы, а также при отсутствии решения работает часть программы, приведенная на рис. 3.57.

```
If[d == p/2, Print["A=O(", 0, ";", 0,
   ") - искомая точка совпадает с вершиной параболы
"]]
If[d == p/2,
 Show[ContourPlot[y^2 = 2*p*x, {x, -1, 2 p}, {y, -2 p, 2 p},
   ContourStyle → Thickness[0.005], AxesLabel → {x, y}, Axes → True,
   Prolog → {Black, PointSize[Large], Point[{p/2, 0}]}],
  ListPlot[{{0, 0}}, PlotStyle → {Blue, Thick, PointSize[Large]}]]]
If[sol == {}, " Решений нет, точки находятся внутри параболы"]
```

Рис. 3.57

Ответ дополнен изображением параболы и искомых точек (рис. 3.58).

Ответ:

A1(4;-4$\sqrt{3}$)

A2(4;4$\sqrt{3}$)

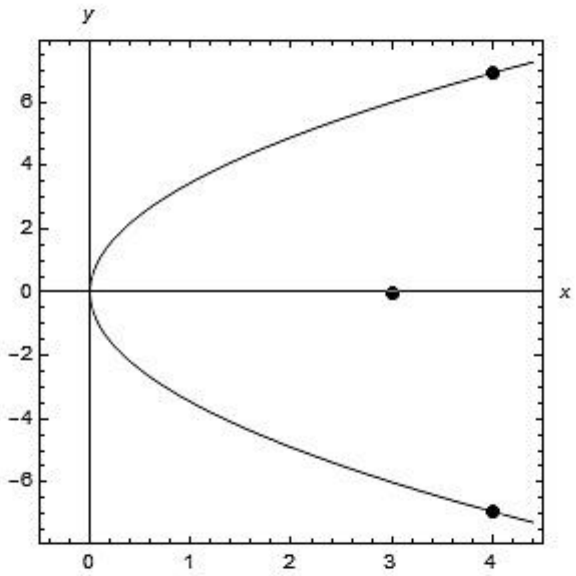


Рис. 3.58

Рассмотрим случай, когда искомая точка совпадает с вершиной параболы (рис. 3.59, 3.60).

```
(*Уравнение параболы задано в формате y²=2px*)
(*Введите начальные условия:*)
p = [28]/2; (*запишите в рамку число, стоящее перед x*)
d = [7]; (*расстояние от фокуса до искомых точек*)
```

Рис. 3.59

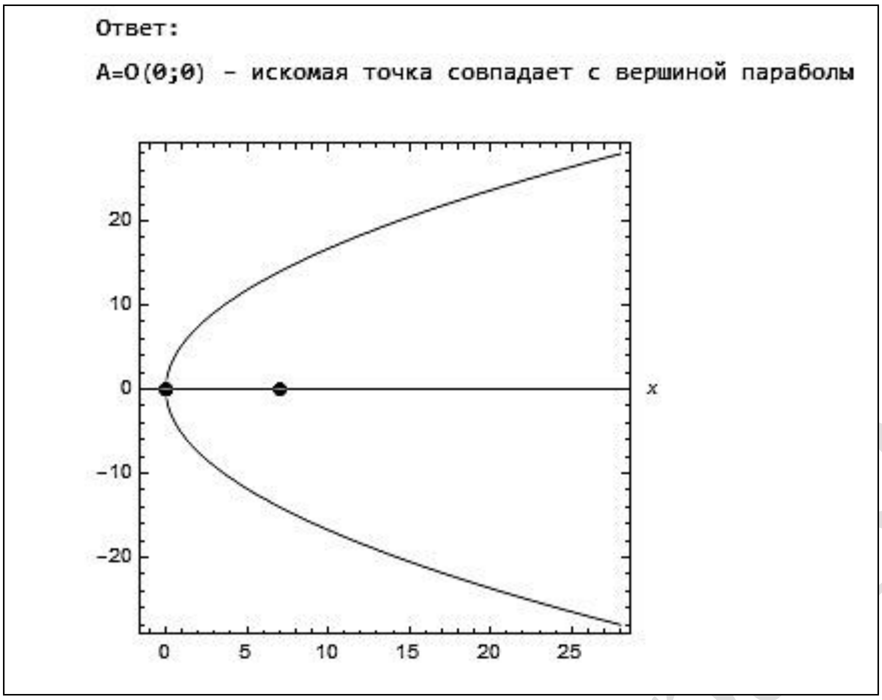


Рис. 3.60

При некоторых начальных условиях задача не имеет решений. В программе этот случай также учитывается (рис. 3.61, 3.62).

```
In[1]:= (*Уравнение параболы задано в формате y²=2px*)
        (*Введите начальные условия:*)
        p = 28/2; (*запишите в рамку число, стоящее перед x*)
        d = 3; (*расстояние от фокуса до искомых точек*)
```

Рис. 3.61

```
        Ответ:
Out[13]= Решений нет, точки находятся внутри параболы
```

Рис. 3.62

Пример 3.3.8

Задано уравнение кривой второго порядка $7x^2+4\sqrt{3}xy+3y^2-8x-4y+8=0$. Определить тип кривой (эллиптический, гиперболический, параболический) и привести уравнение к общему уравнению кривой второго порядка.

Решение

Общее уравнение кривой второго порядка записывается в виде $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

Классифицируем кривую:

$AC - B^2 > 0$ – кривая эллиптического типа (эллипс, окружность, точка, мнимая кривая);

$AC - B^2 < 0$ – кривая параболического типа (гипербола, сопряженная ей гипербола, пара пересекающихся действительных прямых);

$AC - B^2 = 0$ – кривая гиперболического типа (парабола, пара действительных параллельных прямых, две совпадающие параллельные прямые, мнимая кривая).

Определим тип кривой $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8x - 4y + 8 = 0$.

Так как $AC - B^2 = 21 - 12 = 9 > 0$, то уравнение определяет кривую эллиптического типа.

От общего уравнения кривой второго порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ можно перейти к уравнению вида $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, повернув координатные оси на угол $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{A - C}{2B}$, $B \neq 0$.

В данном случае $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{7-3}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Тогда

$$\begin{cases} x = x_2 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, \\ y = x_2 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2} - y_2 \dfrac{1}{2}, \\ y = x_2 \dfrac{1}{2} + y_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Выполним замену в исходном уравнении:

$$7\left(x_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - y_2 \frac{1}{2}\right)^2 + 4\sqrt{3}\left(x_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - y_2 \frac{1}{2}\right)\left(x_2 \frac{1}{2} + y_2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ 3\left(x_2 \frac{1}{2} + y_2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 8\left(x_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - y_2 \frac{1}{2}\right) - 4\left(x_2 \frac{1}{2} + y_2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 8 = 0,$$

$$7\left(\sqrt{3}x_2 - y_2\right)^2 + 4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x_2 - y_2\right)\left(x_2 + \sqrt{3}y_2\right) +$$

$$+ 3\left(x_2 + \sqrt{3}y_2\right)^2 - 8\left(\sqrt{3}x_2 - y_2\right) - 4\left(x_2 + \sqrt{3}y_2\right) + 8 \cdot 4 = 0,$$

$$\frac{21}{4}x_2^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2}x_2 y_2 + \frac{7}{4}y_2^2 + 3x_2^2 + 3\sqrt{3}x_2 y_2 - \sqrt{3}x_2 y_2 - 3y_2^2 +$$

$$+ \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x_2 y_2 + \frac{9}{4}y_2^2 - 4\sqrt{3}x_2 + 4y_2 - 2x_2 - 2\sqrt{3}y_2 + 8 = 0,$$

$$9x_2^2 + y_2^2 - 2(2\sqrt{3} + 1)x_2 + 2(2 - \sqrt{3})y_2 + 8 = 0.$$

Итак, получили искомое уравнение, в котором слагаемое $2Bxy$ в общем уравнении равно нулю.

Вычисления в Mathematica

Ввод начальных данных оформлен таким образом, чтобы коэффициенты с множителем 2 можно было просто записать в знаменатель, не вычисляя (рис. 3.63, 3.64).

```
(*Уравнение рассмотрим в формате A1x^2+2B1xy+C1y^2+2D1x+2E1y+F1=0*)
(*Введите начальные условия:*)
A1 = 7;          B1 = 4 Sqrt[3]/2;
C1 = 3;          D1 = -8/2;
E1 = -4/2;       F1 = 8;
```

Рис. 3.63

```
Print[""]
Print["Ответ:"]
Which[A1*C1 - B1^2 > 0,
 Print["Уравнение определяет кривую эллиптического типа"],
 A1*C1 - B1^2 < 0,
 Print["Уравнение определяет кривую гиперболического типа"],
 A1*C1 - B1^2 == 0,
 Print["Уравнение определяет кривую параболического типа"]]
If[B1 = 0, α, α = N[ArcCot[(A1-C1)/(2*B1)]/2, 3]];
Print["Угол поворота осей координат при преобразовании: α=",
 α*180/π, ""°]
Print["Уравнение кривой в новых координатных осях:"]
Print[
 Simplify[
   A1*x1^2 + 2*B1*x1*y1 + C1*y1^2 + 2*D1*x1 + 2*E1*y1 + F1 = 0 /.
    {x1 → (x2*Cos[α] - y2*Sin[α]),
     y1 → (x2*Sin[α] + y2*Cos[α])}] // TraditionalForm]
```

Рис. 3.64

Результат работы программы (рис. 3.65).

```
Ответ:
Уравнение определяет кривую эллиптического типа
Угол поворота осей координат при преобразовании: α=30.0°
Уравнение кривой в новых координатных осях:
```

$$9.0\,x_2^2 + 1.00\,y_2^2 + 0.54\,y_2 + 8.0 = 8.9\,x_2$$

Рис. 3.65

Задания для самостоятельной работы

1. Какие из нижеприведенных уравнений определяют окружности? Найти координаты центра и радиус каждой из них:

1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; **2)** $x^2+y^2+y=0$; **3)** $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; **4)** $3x^2+3y^2+6x-4y-2=0$; **5)** $x^2+y^2+x=0$.

2. Написать уравнение окружности, проходящей через точки (0; –2), (3; 1) и (6; –2).

3. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $9x^2+25y^2=450$.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что его большая полуось $a=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}5$.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$. Расстояние между фокусами равно 20.

6. Найти расстояние между левым фокусом гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и правым фокусом сопряженной с ней гиперболы.

7. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $25x^2+9y^2=225$. Найти уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

8. Построить параболы и найти их параметры:

1) $y^2=-4x$; **2)** $x^2+6x+y+7=0$.

9. Найти координаты такой точки параболы $y^2=6x$, которая находится от директрисы на расстоянии $\frac{7}{2}$.

10. Упростить уравнения кривых второго порядка и построить их в старых и новых координатных осях:

1) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$; **2)** $9x^2-12xy+4y^2-36y+100=0$.

3.4. Поверхности второго порядка

Пример 3.4.1

Найти центр и радиус сферы, проходящей через четыре точки $A_1(5; 0; 4)$, $A_2(4; -3; 8)$, $A_3(1; 2; 4)$ и $A_4(1; 1; 1)$.

Решение

Уравнение сферы будем искать в виде $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, где $(a;b;c)$ – координаты центра сферы, R – радиус сферы.

Так как точки принадлежат сфере, то можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases}(5-a)^2+(0-b)^2+(4-c)^2=R^2,\\(4-a)^2+(-3-b)^2+(8-c)^2=R^2,\\(1-a)^2+(2-b)^2+(4-c)^2=R^2,\\(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2=R.^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-10a+b^2+c^2+41=R^2,\\a^2-8a+b^2+6b+c^2-16c+89=R^2,\\a^2-2a+b^2-4b+c^2-8c+21=R^2,\\a^2-2a+b^2-2b+c^2-2c+3=R^2.\end{cases}$$

Решением данной системы являются два набора чисел: $a=1, b=-3, c=4, R=-5$ и $a=1, b=-3, c=4, R=5$. Радиус не может быть отрицательным, поэтому окончательно получаем $a=1, b=-3, c=4, R=5$.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 3.66).

```
In[1]:= (*Введите координаты точек:*)
     A1 := {5, 0, 4}
     A2 := {4, -3, 8}
     A3 := {1, 2, 4}
     A4 := {1, 1, 1}

     Solve[
      {(A1[[1]] - a) ^2 + (A1[[2]] - b) ^2 + (A1[[3]] - c) ^2 = R^2,
       (A2[[1]] - a) ^2 + (A2[[2]] - b) ^2 + (A2[[3]] - c) ^2 = R^2,
       (A3[[1]] - a) ^2 + (A3[[2]] - b) ^2 + (A3[[3]] - c) ^2 = R^2,
       (A4[[1]] - a) ^2 + (A4[[2]] - b) ^2 + (A4[[3]] - c) ^2 = R^2},
      {a, b, c, R}]

Out[5]= {{a → 1, b → -3, c → 4, R → -5}, {a → 1, b → -3, c → 4, R → 5}}
```

Рис. 3.66

Пример 3.4.2

Составить уравнения касательных плоскостей к сфере $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ в точках ее пересечения с прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Решение

Если уравнение прямой представить в параметрическом виде $\begin{cases}x=1+2t,\\y=-2,\\z=1-t\end{cases}$ и подставить данные равенства в уравнение сферы, то можно определить параметр t:

$$(1+2t-3)^2+(-2+2)^2+(1-t-1)^2=25 \Leftrightarrow 5t^2-8t-21=0 \Rightarrow t_{1,2}=-\frac{7}{5};3.$$

Найдем координаты точек пересечения $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\begin{cases} x_1=1+2\left(-\frac{7}{5}\right)=-\frac{9}{5}, \\ y_1=-2, \\ z_1=1+\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{12}{5} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2=1+2\cdot 3=7, \\ y_2=-2, \\ z_2=1-3=-2. \end{cases}$$

Координаты центра сферы $M_0(3;-2;1)$. Найдем нормальные векторы касательных плоскостей:

$$\overline{M_1M_0}=\left(3+\frac{9}{5};-2+2;\,1-\frac{12}{5}\right)=\left(\frac{24}{5};\,0;\,-\frac{7}{5}\right),$$

$$\overline{M_2M_0}=(3-7;-2+2;1+2)=(-4;\,0;\,3).$$

Запишем уравнения касательных плоскостей:

$$\frac{24}{5}\left(x+\frac{9}{5}\right)+0(y+2)-\frac{7}{5}\left(z-\frac{12}{5}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{24}{5}x-\frac{7}{5}z+\frac{60}{5}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24x-7z+60=0 \text{ и } -4(x-7)+0+3(z+2)=0 \Leftrightarrow -4x+3z+34=0.$$

Вычисления в Mathematica

Введем начальные данные (рис. 3.67).

```
In[1]:= (*Координаты центра сферы:*)
        a = 3;
        b = -2;
        c = 1;
        (*Радиус сферы:*)
        R = 5;
        (*Координаты направляющего вектора прямой:*)
        k = 2;
        l = 0;
        m = -1;
        (*Координаты точки, принадлежащей прямой:*)
        x0 = 1;
        y0 = -2;
        z0 = 1;
```

Рис. 3.67

Находим точки пересечения прямой и сферы, а также нормальные векторы искомых плоскостей (рис. 3.68).

```
(*Решение:*)
ur = Solve[(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2 /.
    {X → x0 + k*t, Y → y0 + l*t, Z → z0 + m*t}, t];
x1 = x0 + k*t /. ur[[1]];
y1 = y0 + l*t /. ur[[1]];
z1 = z0 + m*t /. ur[[1]];

x2 = x0 + k*t /. ur[[2]];
y2 = y0 + l*t /. ur[[2]];
z2 = z0 + m*t /. ur[[2]];

n1 = {a - x1, b - y1, c - z1};
n2 = {a - x2, b - y2, c - z2};
```

Рис. 3.68

Записываем уравнения плоскостей и условия графического отображения решения задачи (рис. 3.69).

```
Print["Касательные плоскости:"]
Print[
 Simplify[n1[[1]] * (x - x1) + n1[[2]] * (y - y1) + n1[[3]] * (z - z1)] //
  TraditionalForm, "=0"]
Print[
 Simplify[n2[[1]] * (x - x2) + n2[[2]] * (y - y2) + n2[[3]] * (z - z2)] //
  TraditionalForm, "=0"]
Show[ContourPlot3D[{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,
   n1[[1]] * (x - x1) + n1[[2]] * (y - y1) + n1[[3]] * (z - z1),
   n2[[1]] * (x - x2) + n2[[2]] * (y - y2) + n2[[3]] * (z - z2)},
  {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}, Mesh → None]]
```

Рис. 3.69

В результате работы программы выводятся уравнения плоскостей (рис. 3.70), а также рисунок сферы и найденных касательных плоскостей (рис. 3.71).

Касательные плоскости:

$\frac{1}{5}(24x - 7z + 60)=0$

$-4x + 3z + 34=0$

Рис. 3.70

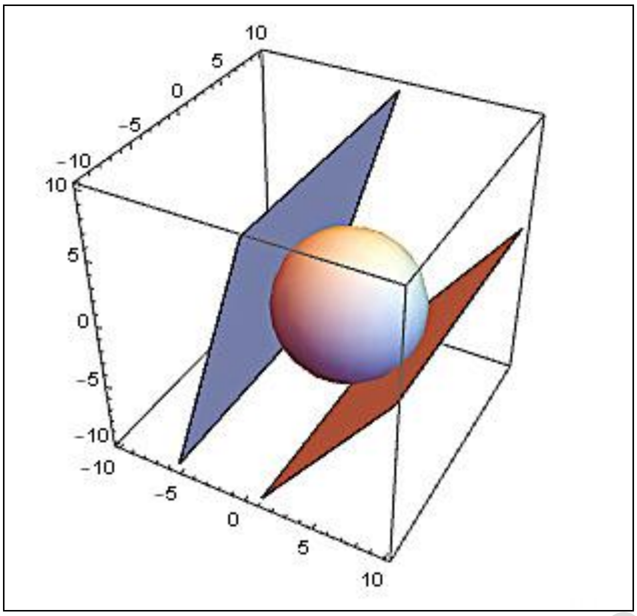


Рис. 3.71

Пример 3.4.3

Найти уравнение линий, определяемых следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{(x-3)^2}{2} + \dfrac{(y-1)^2}{5}, \\ 2x - 3y + 5z - 13 = 0. \end{cases}$$

Решение

Из второго уравнения системы выразим z и подставим в первое уравнение:

$$2 \cdot \frac{1}{5}(13 - 2x + 3y) = \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{5}.$$

Раскроем скобки и приведем подобные. В результате получим искомое уравнение линии: $5x^2 - 22x + 2y^2 - 16y - 5 = 0$.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 3.72).

```
eqv = 2 * z = (x - 3)^2/2 + (y - 1)^2/5 && 2 * x - 3 * y + 5 * z - 13 = 0;
graf = GroebnerBasis[eqv, {x, y}, {z}];
Print["Система уравнений определяет линию: ", graf == 0]
ContourPlot[graf = 0, {x, -5, 10}, {y, -5, 10},
 ContourStyle → Thickness[0.01], AxesLabel → {x, y}, Axes → True]
```

Рис. 3.72

По рис. 3.73 видно, что данное уравнение определяет эллипс.

Система уравнений определяет линию:

$\{-5 - 22x + 5x^2 - 16y + 2y^2\} = 0$

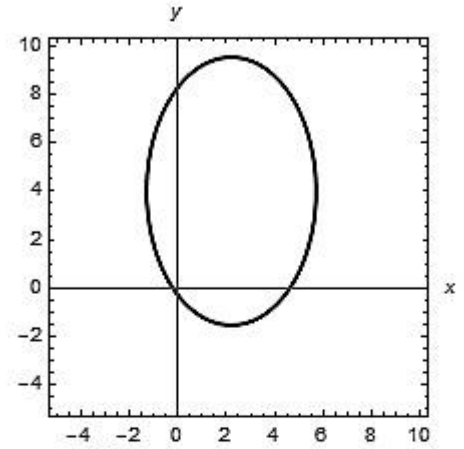


Рис. 3.73

Приведем примеры построения некоторых поверхностей второго порядка в **Mathematica**.

1. Параболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$, пересекаемый плоскостью $z = -1$ (рис. 3.74).

```
Manipulate[
 Show[ContourPlot3D[{x^2 / a^2 + y^2 / b^2 == z, z - 1},
   {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, 0, 4}, Mesh → None,
   PlotPoints → 30]], {{a, 1}, 0.1, 1}, {{b, 1}, 0.1, 1}]
```

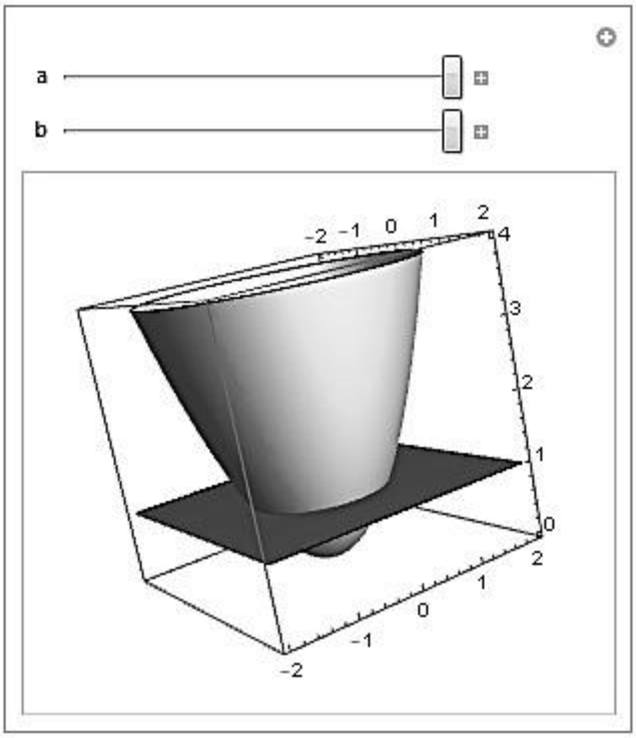


Рис. 3.74

Функция **Manipulate** позволяет посмотреть, как изменяется картинка, если изменить параметры a и b. Изначально на экран выводится изображение при $a=1$ и $b=1$.

2. Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ (рис. 3.75).

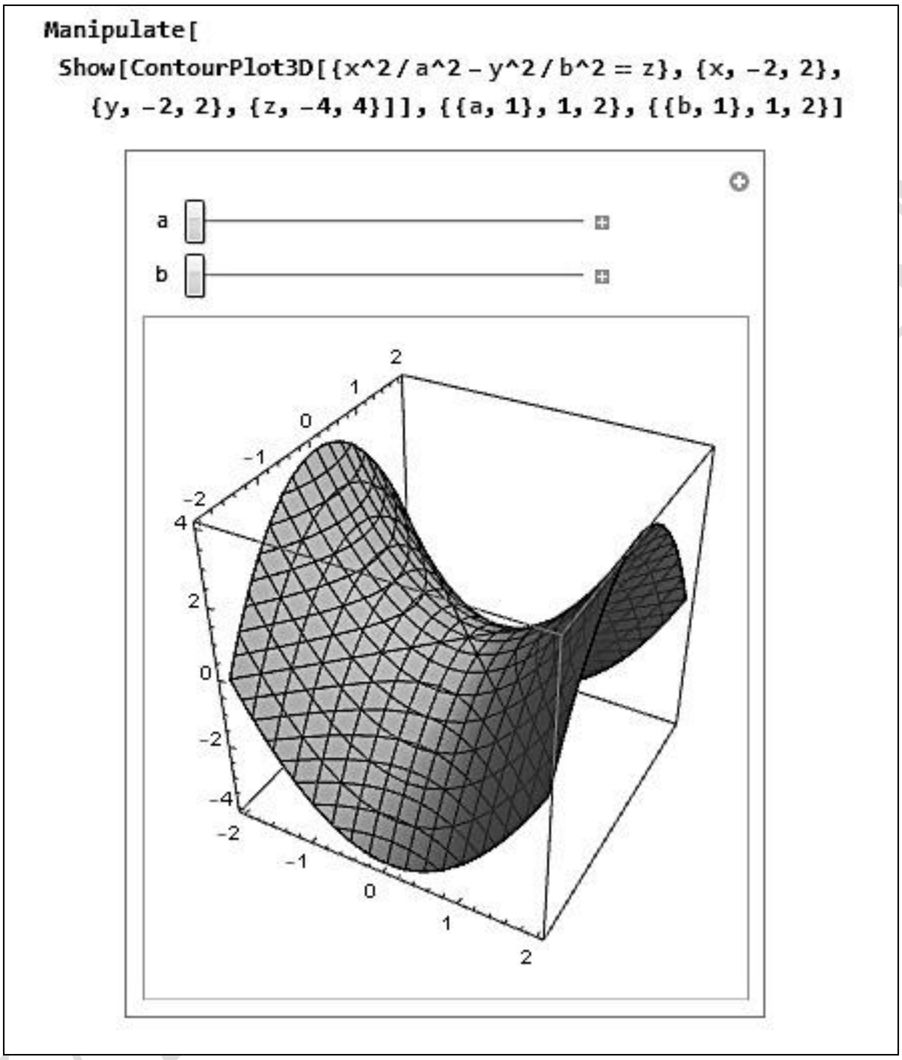


Рис. 3.75

3. Эллипсоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, пересекаемый плоскостью yOz, определяется в **Mathematica** следующим образом (рис. 3.76).

```
Show[ContourPlot3D[{x^2/5^2 + y^2/4^2 + z^2/3^2 = 1, x}, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, {z, -5, 5}, Mesh → None, PlotPoints → 30]]
```

Рис. 3.76

Изображение представлено на рис. 3.77.

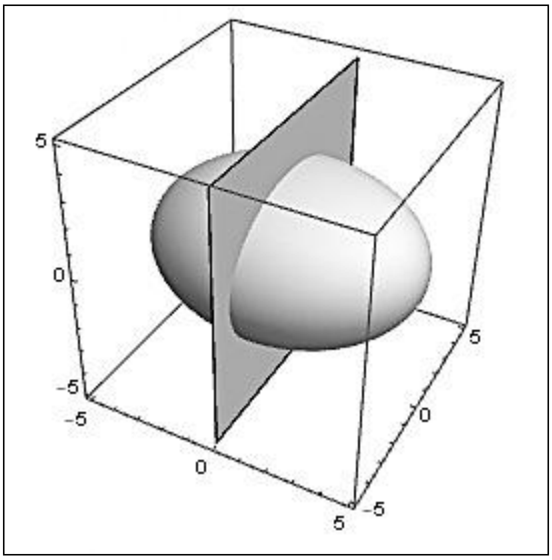


Рис. 3.77

4. Зададим двуполостной гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 3.78).

```
Manipulate[
 Show[ContourPlot3D[{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 == -1}, {x, -10, 10},
   {y, -10, 10}, {z, -10, 10}, PlotPoints -> 30]],
 {{a, 1.5}, 1, 2}, {{b, 1.5}, 1, 2}, {{c, 1.5}, 1, 2}]
```

Рис. 3.78

Изображение двуполостного гиперболоида приведено на рис. 3.79

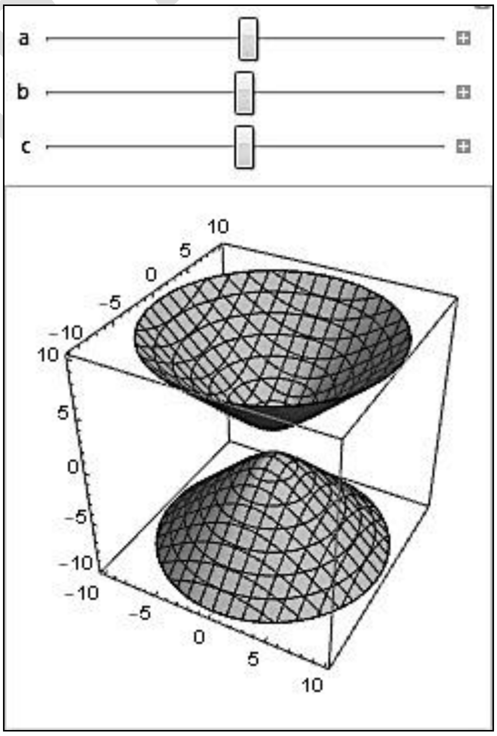


Рис. 3.79

Задания для самостоятельной работы

1. Определить координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4y - 3z + 2 = 0$.

2. По какой линии пересекается конус $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 0$ с плоскостью $y = 3$? Изобразить поверхность и плоскость.

3. Найти уравнение линии пересечения поверхностей $z = 5 - 4x^2 - 4y^2$ и $z = 2x^2 + 2y^2$. Изобразить линию.

4. Найти уравнение эллиптического параболоида, имеющего вершину в начале координат, осью которого является ось Oz, если известны координаты двух точек, принадлежащих эллиптическому параболоиду: $A_1(-1; -2; 2)$ и $A_2(-1; 1; 1)$.

5. Получить изображения следующих поверхностей:

1) сферы, пересекаемой координатными плоскостями;

2) однополостного гиперболоида.

4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Пример 4.1

Составить матрицу квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 - -8x_1x_3 + 7x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2$ и найти ее ранг.

Решение

Порядок матрицы равен 3, т. к. квадратичная форма содержит три переменные. Квадратичной форме соответствует единственная симметричная матрица. В данном случае $a_{11} = 1,\ a_{12} = a_{21} = -3,\ a_{13} = a_{31} = -4,\ a_{22} = 7,\ a_{23} = = a_{32} = 2,\ a_{33} = -5,$ поэтому $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Ранг матрицы можно вычислять разными способами. Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) \cdot (-4) -$$

$$-7 \cdot (-4) \cdot (-4) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3) \cdot (-5) = -35 + 24 + 24 - 112 - 4 + 45 = -58.$$

Так как $|A| \neq 0$, то $r(A) = 3$. Поскольку ранг равен числу переменных $(r = n)$, то данная квадратичная форма является невырожденной.

Вычисления в Mathematica

С помощью функции $\mathbf{Coefficient[p, t]}$ определяются коэффициенты при некотором выражении t (рис. 4.1).

```
In[1]:= (*Запишите квадратичную форму:*)
        L := x1^2 - 6 x1 * x2 - 8 x1 * x3 + 7 x2^2 + 4 x2 x3 - 5 x3^2
        (*Решение:*)
        a11 := Coefficient[L, x1^2]
        a22 := Coefficient[L, x2^2]
        a33 := Coefficient[L, x3^2]
        a12 := Coefficient[L, x1 * x2] / 2
        a13 := Coefficient[L, x1 * x3] / 2
        a23 := Coefficient[L, x2 x3] / 2
        a21 := a12
        a31 := a13
        a32 := a23
        Print["Матрица квадратичной формы: A=",
          (A = {{a11, a12, a13}, {a21, a22, a23}, {a31, a32, a33}}) //
           MatrixForm]
        Print["Ранг матрицы: r(A)=", MatrixRank[A]]
```

Рис. 4.1

Результаты работы программы приведены на рис. 4.2.

$$\text{Матрица квадратичной формы: } A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы: r(A)=3

Рис. 4.2

Пример 4.2

Записать в матричном виде квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_2) = 17x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_2x_3$.

Решение

Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

В матричной записи квадратичная форма имеет следующий вид:

$$L(x_1, x_2, x_2) = X^{\mathrm{T}} A X = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \cdot \begin{pmatrix} 17 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 4.3).

```
(*Запишите квадратичную форму:*)
L := [17] x1^2 + [6] x1 * x2 + [0] x1 * x3 + [-2] x2^2 + [-8] x2 x3 + [1] x3^2
(*Решение:*)
a11 := Coefficient[L, x1^2]
a22 := Coefficient[L, x2^2]
a33 := Coefficient[L, x3^2]
a12 := Coefficient[L, x1 * x2] / 2
a13 := Coefficient[L, x1 * x3] / 2
a23 := Coefficient[L, x2 x3] / 2
a21 := a12
a31 := a13
a32 := a23
Print["Матричная запись квадратичной формы:"]
Print["L(x1,x2,x3)=(x1,x2,x3)·",
  (A = {{a11, a12, a13}, {a21, a22, a23}, {a31, a32, a33}}) //
   MatrixForm, "·", {x1, x2, x3} // MatrixForm]
```

Матричная запись квадратичной формы:

$$L(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} 17 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.3

Пример 4.3

Записать квадратичную форму по ее матрице:

а) $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & -10 \\ 5 & -10 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

а) Элементы матрицы, расположенные на главной диагонали $a_{11}=11,\ a_{22}=5,\ a_{33}=22$ являются коэффициентами при x_i^2. Так как квадратичной форме соответствует единственная симметрическая матрица, то $a_{12}=a_{21}=8,\ a_{13}=a_{31}=5,\ a_{23}=a_{32}=-10$. Коэффициенты при $x_i x_j$ $(i \neq j)$ делятся пополам, поэтому квадратичная форма имеет вид $L(x_1,x_2,x_3)=11x_1^2+$ $+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+10x_3x_1-20x_3x_2$.

б) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2$.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 4.4).

```
(*Запишите матрицы квадратичных форм:*)
A1 := ( 11   8    5
         8   5  -10
         5 -10    2 )
A2 := (  1  -2
        -2   0 )

Print["Ответ:"]
If[A1[[1, 2]] ≠ A1[[2, 1]] || A1[[1, 3]] ≠ A1[[3, 1]] ||
   A1[[2, 3]] ≠ A1[[3, 2]], Print["Матрица A1 введена неверно!"],
  Print["L1(x1,x2,x3)=",
   A1[[1, 1]] * x1^2 + 2 * A1[[1, 2]] * x1 * x2 + 2 * A1[[1, 3]] * x1 * x3 +
    A1[[2, 2]] x2^2 + 2 * A1[[2, 3]] * x2 x3 + A1[[3, 3]] * x3^2]]
If[A2[[1, 2]] ≠ A2[[2, 1]] , Print["Матрица A2 введена неверно!"],
  Print["L2(x1,x2,x3)=",
   A2[[1, 1]] * x1^2 + 2 * A2[[1, 2]] * x1 * x2 + A2[[2, 2]] x2^2]]

Ответ:
L1(x1,x2,x3)=11 x1^2 + 16 x1 x2 + 5 x2^2 + 10 x1 x3 - 20 x2 x3 + 2 x3^2
L2(x1,x2,x3)=x1^2 - 4 x1 x2
```

Рис. 4.4

Пример 4.4

Привести к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ и указать соответствующее ортогональное преобразование.

Решение

Матрица данной квадратичной формы имеет вид: $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы A, т. е. спектр матрицы квадратичной формы.

Решим характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 1-\lambda & 1\\ 2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(-2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(1-\lambda)+2\cdot(-2)\cdot 1+2\cdot 1\cdot(-2)-2\cdot 2\cdot(1-\lambda)-1\cdot 1\cdot(-2-\lambda)-$$
$$-(-2)\cdot(-2)\cdot(1-\lambda)=(-2-\lambda)(1-\lambda)^2-8(1-\lambda)-(-2-\lambda)-8=$$
$$=(\lambda+2)\lambda(2-\lambda)-8(2-\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8)=0.$$

Итак, определили собственные значения матрицы A: $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-4$.

Запишем канонический вид квадратичной формы:

$L(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$.

Вычисления в Mathematica

Выполним ортогональное преобразование в **Mathematica** (рис. 4.5).

```
(*Запишите квадратичную форму:*)
L := [-2] x1^2 + [1] x2^2 + [1] x3^2 + [-4] x1 * x2 + [4] x1 * x3 + [2] x2 x3
(*Решение:*)
a11 := Coefficient[L, x1^2]
a22 := Coefficient[L, x2^2]
a33 := Coefficient[L, x3^2]
a12 := Coefficient[L, x1 * x2] / 2
a13 := Coefficient[L, x1 * x3] / 2
a23 := Coefficient[L, x2 x3] / 2
a21 := a12
a31 := a13
a32 := a23
Print["Матрица квадратичной формы:"]
Print["A=", (A = {{a11, a12, a13}, {a21, a22, a23}, {a31, a32, a33}}) //
  MatrixForm]
Print["Собственные значения матрицы A:"]
Print[Eigenvalues[A]]
sob := Eigenvalues[A]
Print["Канонический вид квадратичной формы:"]
Print["L=", sob[[1]] y1^2 + sob[[2]] y2^2 + sob[[3]] y3^2]
```

Рис. 4.5

Результат работы программы представлен на рис. 4.6.

Матрица квадратичной формы:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы A:

{-4, 2, 2}

Канонический вид квадратичной формы:

$$L=-4\,y_1^2+2\,y_2^2+2\,y_3^2$$

Рис. 4.6

Mathematica позволяет получить матрицу ортогональных преобразований, с помощью которой выполняется приведение квадратичной формы к каноническому виду (рис. 4.7, 4.8).

```
Print["Найдем векторы, образующие фундаментальную систему решений:"]
Print[Eigenvectors[A]]
Print["Ортонормируем векторы:"]
v := Orthogonalize[Eigenvectors[A]]
Print[v]
Print["Запишем ортогональную матрицу преобразований:"]
Print["S=", MatrixForm[Transpose[{v[[1]], v[[2]], v[[3]]}]]]
```

Рис. 4.7

Найдем векторы, образующие фундаментальную систему решений:

{{-2, -1, 1}, {1, 0, 2}, {-1, 2, 0}}

Ортонормируем векторы:

$$\left\{\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\},\ \left\{\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right\},\ \left\{-\sqrt{\frac{2}{15}},\ \sqrt{\frac{5}{6}},\ \frac{1}{\sqrt{30}}\right\}\right\}$$

Запишем матрицу ортогональных преобразований:

$$S=\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Рис. 4.8

Задания для самостоятельной работы

1. Записать матрицу квадратичной формы и найти ее ранг, если:

1) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

2) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

3) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

2. Составить квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3)$ по ее матрице:

1) $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & -1 \\ 15 & -1 & 12 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа:

1) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

2) $L(x_1, x_2) = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$;

3) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 8x_2x_3 + 4x_1x_3$.

4. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы с матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, и записать этот канонический вид:

1) $L(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 18x_2^2 + 18x_3^2$;

2) $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

3) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

5.1. Предел функции

Пример 5.1.1

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+1}{7x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{2x^2-x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6(1-\cos x)}{x\sin 3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4+2x^3+1}{3x^3-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}+\sqrt[3]{64x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\operatorname{ctg}(x-3)}{\ln(4-x)}$; 9) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}3(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; 11) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+3}\right)^{2+7x}$; 12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{7x^2+3}\right)^{\ln 2x}$.

Решение

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+1}{7x+8}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(7x+8)}=\dfrac{2^2+3\cdot 2+1}{7\cdot 2+8}=\dfrac{11}{22}=\dfrac{1}{2}$.

Здесь воспользовались теоремой о пределе частного.

При подстановке предельного значения аргумента в функцию часто приходят к неопределенным выражениям: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. В таких случаях нахождение предела называется раскрытием неопределенности.

Далее при вычислении пределов рассмотрим элементарные приемы раскрытия неопределенностей.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{2x^2-x-3}$.

Применить теорему о пределе частного в данном случае нельзя, т. к. предел знаменателя при $x\to -1$ равен 0:

$\lim\limits_{x\to -1} 2x^2-x-3=2(-1)^2-(-1)-3=2+1-3=0$.

Предел числителя также равен нулю:

$\lim\limits_{x\to -1} x^3-3x-2=(-1)^3-3\cdot(-1)-2=-1+3-2=0$.

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия выделяем в числителе и знаменателе множители, которые стремятся к нулю, после чего используем свойства пределов.

Разделим числитель на $x+1$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x-2 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3+x^2} & x^2-x-2 \\
-x^2-3x-2 & \\
-\underline{-x^2-x} & \\
-2x-2 & \\
-\underline{-2x-2} & \\
0. &
\end{array}
$$

Тогда $x^3-3x-2=(x+1)\left(x^2-x-2\right)$.

Разложим знаменатель на множители: $2x^2-x-3=2(x+1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

Итак, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{2x^2-x-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\left(x^2-x-2\right)}{2(x+1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}=$

$$=\frac{(-1)^2-(-1)-2}{2\left(-1-\dfrac{3}{2}\right)}=\frac{0}{-5}=0.$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\dfrac{\sqrt{0+4}-2}{\sqrt{0+9}-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

В данном примере для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к числителю и к знаменателю:

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+4-4\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\left(x^2+9-9\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{\sqrt{0+9}+3}{\sqrt{0+4}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4^x-64}{x-3}=\dfrac{4^3-64}{3-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Числитель и знаменатель дроби заменим эквивалентными бесконечными малыми.

Функцию, стоящую в числителе, представим в следующем виде:

$$4^x-64=4^x-4^3=4^3\left(\frac{4^x}{4^3}-1\right)=4^3\left(4^{x-3}-1\right),$$

$$4^{x-3}-1\sim(x-3)\ln4.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^3\cdot\left(4^{x-3}-1\right)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{64\cdot(x-3)\ln 4}{x-3}=64\ln 4$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6(1-\cos x)}{x\sin 3x}=\dfrac{6(1-\cos 0)}{0\sin 0}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Преобразуем функцию таким образом, чтобы можно было применить первый замечательный предел.

Используем формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6(1-\cos x)}{x\sin 3x}=6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin 3x}=12\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 3x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot x\sin 3x\cdot 3x}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{\sin\alpha x}=1\end{array}\right]=12\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{x\cdot 3x}=12\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3+1}{3x^3-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Если вместо x подставить ∞, то имеем отношение двух бесконечно больших величин. Тогда числитель и знаменатель разделим на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^4}{x^4}+\frac{2x^3}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{3x^3}{x^4}-\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^4}}=\frac{7+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{7+0+0}{0-0}=\frac{7}{0}=\infty.$$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}+\sqrt[3]{64x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{x^2+7}}{x}+\frac{\sqrt[3]{64x^3+1}}{x}}{\frac{\sqrt[5]{x^5+3}}{x}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{64x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[5]{\frac{x^5}{x^5}+\frac{3}{x^5}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}+\sqrt[3]{64+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^5}}}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt[3]{64+0}}{\sqrt[5]{1+0}}=$$

$$=\frac{1+4}{1}=5.$$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\,\mathrm{ctg}(x-3)}{\ln(4-x)}$.

Подставляя вместо x предельное значение, равное 3, получаем в числителе бесконечно большую, а в знаменателе бесконечно малую функцию. Причем, если «приближаемся» к 3 слева, в числителе получим «$-\infty$», а в знаменателе «$+0$», а если справа, то в числителе будет «$+\infty$», а в знаменателе «-0». Тогда $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\operatorname{ctg}(x-3)}{\ln(4-x)}=-\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=(\infty-\infty)$.

Неопределенность вида $(\infty-\infty)$ необходимо привести к неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ путем преобразования функции к виду дроби.

Рассматривая данную функцию как дробную, со знаменателем, равным единице, избавимся от иррациональности в числителе. Вспоминая формулу сокращенного умножения $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$, домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение к числителю:

$\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}$.

Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

10) $$\lim_{x\to 1}3(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=(0\cdot\infty)=3\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=3\cdot\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=3\cdot 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}=3\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=3\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=3\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{\pi}.$$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+3}\right)^{2+7x}=\left(1^{\infty}\right)$.

Неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$, т. к. при $x\to\infty$ $2+7x\to\infty$ и $\dfrac{5x+1}{5x+3}\to\dfrac{5}{5}=1$. Для раскрытия такого вида неопределенности выражение под знаком предела преобразуем так, чтобы использовать второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Выделим в скобке единицу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3-2}{5x+3}\right)^{2+7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{5x+3}\right)^{2+7x}.$$

Преобразуем дробь $\dfrac{-2}{5x+3}=\dfrac{1}{\frac{5x+3}{-2}}$ и, продолжая преобразования, помножим показатель степени на две дроби $\dfrac{5x+3}{-2}$ и $\dfrac{-2}{5x+3}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+3}{-2}}\right)^{\frac{5x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{5x+3}\cdot(2+7x)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+3}{-2}}\right)^{\frac{5x+3}{-2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2+7x)}{5x+3}\cdot}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-14x-4}{5x+3}\cdot}=e^{-\frac{14}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{e^{14}}}.$$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{7x^2+3}\right)^{\ln 2x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{7x^2+3}=\dfrac{1}{7}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln 2x=+\infty$, то в итоге получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{7x^2+3}\right)^{\ln 2x}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{+\infty}=0$.

Вычисления в Mathematica

Для вычисления предела функции $f(x)$ при $x\to x_0$ используется функция **Limit**$[f(x),\ x\to x_0]$.

Вычисление первого предела из примера 5.1.1. приведено на рис. 5.1.

```
In[1]:= Limit[(x^2 + 3 x + 1) / (7 x + 8), x → 2]

Out[1]= 1/2
```

Рис. 5.1

Запись элементарных функций в системе **Mathematica** имеет несколько отличий от математических обозначений, например, $\cos x\to$ **Cos**[**x**], $\sin x\to$ **Sin**[**x**], $\operatorname{tg} x\to$ **Tan**[**x**], $\operatorname{ctg} x\to$ **Cot**[**x**], $\ln x\to$ **Log**[**x**].

Mathematica вычисляет все элементарные функции как с действительным, так и с комплексным аргументом.

Вычисление пределов со второго по седьмой приведено на рис. 5.2, а с восьмого по двенадцатый – на рис. 5.3.

In[2]:= $\mathtt{Limit}\left[\left(x^3-3x-2\right)/\left(2x^2-x-3\right),\ x\to -1\right]$

Out[2]= 0

In[3]:= $\mathtt{Limit}\left[\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)/\left(\sqrt{x^2+9}-3\right),\ x\to 0\right]$

Out[3]= $\frac{3}{2}$

In[4]:= $\mathtt{Limit}\left[\left(4^x-64\right)/(x-3),\ x\to 3\right]$

Out[4]= $64\,\mathtt{Log}[4]$

In[5]:= $\mathtt{Limit}[(6\,(1-\mathtt{Cos}[x]))/(x\,\mathtt{Sin}[3x]),\ x\to 0]$

Out[5]= 1

In[6]:= $\mathtt{Limit}\left[\left(7x^4+2x^3+1\right)/\left(3x^3-2\right),\ x\to\infty\right]$

Out[6]= ∞

In[7]:= $\mathtt{Limit}\left[\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt[3]{64x^3+1}\right)/\left(\sqrt[5]{x^5+3}\right),\ x\to +\infty\right]$

Out[7]= 5

Рис. 5.2

In[8]:= $\mathtt{Limit}[(2\,\mathtt{Cot}[x-3])/\mathtt{Log}[4-x],\ x\to 3]$

Out[8]= $-\infty$

In[9]:= $\mathtt{Limit}\left[\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x},\ x\to\infty\right]$

Out[9]= 0

In[10]:= $\mathtt{Limit}[3\,(1-x)\,\mathtt{Tan}[\pi x/2],\ x\to 1]$

Out[10]= $\frac{6}{\pi}$

In[11]:= $\mathtt{Limit}\left[\left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{2+7x},\ x\to\infty\right]$

Out[11]= $\frac{1}{e^{14/5}}$

In[12]:= $\mathtt{Limit}\left[\left(\frac{x^2+1}{7x^2+3}\right)^{\mathtt{Log}[2x]},\ x\to +\infty\right]$

Out[12]= 0

Рис. 5.3

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

№ п/п	$f(x)$	$g(x)$	x_0
1	$\sqrt{4x-3}-3$	x^2-9	3
2	$\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x$	$e^{-2x}-1$	0
3	$x^2-\sqrt{x}$	$1-\sqrt{x}$	1
4	$\sqrt[3]{1+3x^2}-1$	x^2+x^3	0
5	x^2+3x+7	$-3x^5-x+1$	∞
6	$\cos 2x-\cos^3 2x$	$3x^2$	0
7	$\arcsin(x-2)$	x^2-4	2
8	$2x^2-3x$	$\sin 5x$	0
9	x^5+2x	$\operatorname{arctg} 8x^5$	0

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$.

№ п/п	$f(x)$	$g(x)$	x_0
1	$10-3x$	$\frac{4}{x-3}$	3
2	$\frac{x+2}{7x-1}$	$3x^2$	∞
3	$\cos 6x$	$\frac{1}{5x^2}$	0
4	$\frac{5x}{2+5x}$	$2x$	∞
5	$1+\sin^2 3x$	$\frac{1}{1-\cos 2x}$	0
6	$5-4x$	$\frac{3x}{2-2x}$	1
7	$1-\frac{2}{x}$	$4x-5$	∞
8	$1-\sin x$	$\frac{1}{\sin x}$	0
9	$\frac{2x-1}{x}$	$\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}$	1

5.2. Непрерывность функции

Пример 5.2.1

Найти односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{|x-1|}$ при $x\to 1$;

б) $f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{11}{16}x, & x<-1, \\ \dfrac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}, & x\geq -1 \end{cases}$ при $x\to 0$ и $x\to -1$.

Решение

а) Область определения функции $D(f)=\{x|\, x-1\neq 0\}=\mathrm{R}\setminus\{1\}$. Раскрывая модуль по определению, получаем

$$f(x)=\frac{1-x^2}{|x-1|}=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)}=-(1+x), \text{ если } x>1 \ (x-1>0), \\ \dfrac{1-x^2}{-(x-1)}=\dfrac{-(x-1)(1+x)}{-(x-1)}=1+x, \text{ если } x<1 \ (x-1<0). \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(1+x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(-(1+x))=-2$.

б) Функция не определена в точке $x=0$.

Найдем односторонние пределы в точках $x=0$ и $x=-1$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3+5^{-\infty}}=\frac{1}{3+\frac{1}{5^{\infty}}}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3+5^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\left(x^2+\frac{11}{16}x\right)=1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16},$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3+5^{-1}}=\frac{1}{3+\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}.$$

Вычисления в Mathematica

Задание дополнительной опции **Direction** в функции **Limit** позволяет вычислять односторонние пределы. Опция используется в виде **Direction** $\to$ **1** для вычисления предела слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, **Direction** $\to$ **–1** – справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{|x-1|}$ при $x \to 1$ на рис. 5.4.

$$\text{In[1]:= Limit}\left[\frac{1-x^2}{\text{Abs}[x-1]},\ x\to 1,\ \text{Direction}\to 1\right]$$

$$\text{Out[1]= } 2$$

$$\text{In[2]:= Limit}\left[\frac{1-x^2}{\text{Abs}[x-1]},\ x\to 1,\ \text{Direction}\to -1\right]$$

$$\text{Out[2]= } -2$$

Рис. 5.4

б) $f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{11}{16}x, & x<-1, \\ \dfrac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}, & x\ge -1 \end{cases}$ при $x \to 0$ и $x \to -1$ на рис. 5.5.

$$\text{In[3]:= Limit}\left[\frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}},\ x\to 0,\ \text{Direction}\to 1\right]$$

$$\text{Out[3]= } \frac{1}{3}$$

$$\text{In[4]:= Limit}\left[\frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}},\ x\to 0,\ \text{Direction}\to -1\right]$$

$$\text{Out[4]= } 0$$

$$\text{In[5]:= Limit}\left[x^2+\frac{11}{16}x,\ x\to -1,\ \text{Direction}\to 1\right]$$

$$\text{Out[5]= } \frac{5}{16}$$

$$\text{In[6]:= Limit}\left[\frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}},\ x\to -1,\ \text{Direction}\to -1\right]$$

$$\text{Out[6]= } \frac{5}{16}$$

Рис. 5.5

Кусочно-заданная функция задается в системе **Mathematica** функцией **Piecewise[{{val1, cond1},{val2, cond2}, ...}]**, где $\mathrm{val}\,i$ – выражение для i-го участка функции, $\mathrm{cond}\,i$ – условие для этого участка, определяющая область его определения.

Тогда односторонние пределы данной функции $f(x)$ можно вычислить следующим образом (рис. 5.6).

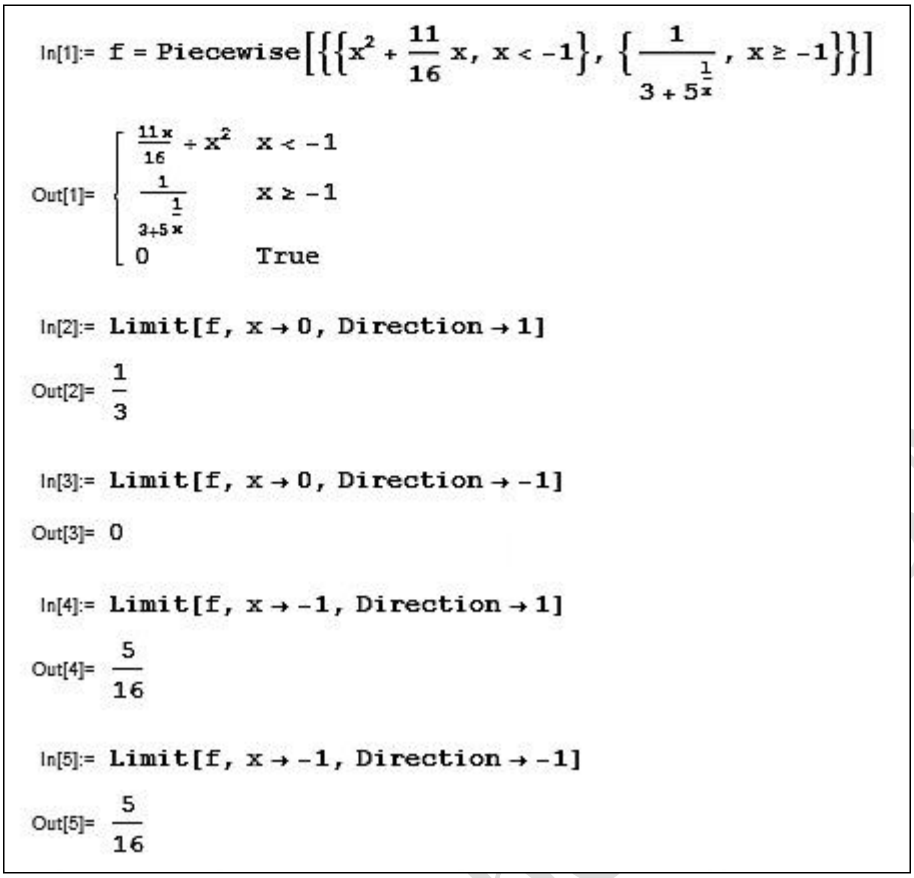


Рис. 5.6

Пример 5.2.2

Исследовать на непрерывность функцию и построить ее график:

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } x\le 0,\\ x^2+1, \text{ если } 0<x\le 1,\\ 2, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

Решение

Область определения функции $D(f)=\mathrm{R}$. На промежутках $(-\infty;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,+\infty)$ кусочно-заданная функция непрерывна, как состоящая из элементарных функций. Разрывы возможны в точках «стыковки» $x=0$ и $x=1$, в которых изменяется аналитическое задание функции. Проверим функцию на непрерывность в точках $x=0$, $x=1$ с помощью односторонних пределов:

1) $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^2+1\right)=1$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ конечны, но $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, то в точке $x=0$ функция имеет разрыв первого рода. В этой точке функция имеет скачок (модуль разности односторонних пределов называется *скачком* функции):

$$\left|\lim_{x\to 0+0} f(x) - \lim_{x\to 0-0} f(x)\right| = |1-0| = 1.$$

2) $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right) = 2, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2 = 2.$$

Значение функции в точке $x=1$ определяется вторым аналитическим выражением, т. е. $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

Так как $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$, то в точке $x=1$ функция непрерывна.

Итак, функция $f(x)$ разрывна в точке $x=0$ $(0 \in D(f))$. График этой функции построим в системе **Mathematica**.

Вычисления в Mathematica

Функция $f(x)$ задана на рис. 5.7.

```
In[1]:= f = Piecewise[{{-x, x <= 0}, {x^2 + 1, 0 < x <= 1}, {2, x > 1}}]

Out[1]= ⎧ -x        x ≤ 0
        ⎨ 1 + x^2   0 < x ≤ 1
        ⎪ 2         x > 1
        ⎩ 0         True
```

Рис. 5.7

В точках $x=0$ и $x=1$ может нарушаться непрерывность исследуемой функции. Определяем односторонние пределы в этих точках (рис. 5.8).

```
In[2]:= Limit[f, x → 0, Direction → 1]
Out[2]= 0

In[3]:= Limit[f, x → 0, Direction → -1]
Out[3]= 1

In[4]:= Limit[f, x → 1, Direction → 1]
Out[4]= 2

In[5]:= Limit[f, x → 1, Direction → -1]
Out[5]= 2
```

Рис. 5.8

Левосторонний и правосторонний пределы функции в точке $x=0$ конечны, но не одинаковы. Следовательно, $x=0$ является точкой разрыва I рода. Скачок функции в этой точке равен $|f(0+0) - f(0-0)| = 1 - 0 = 1$.

В точке $x=1$ выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x=1$ и $f(1-0) = f(1+0) = f(1) = 2$. Поэтому в точке $x=1$ функция $f(x)$ непрерывна.

Построим график функции $f(x)$ на отрезке $[-3;3]$ с помощью функции **Plot** (рис. 5.9).

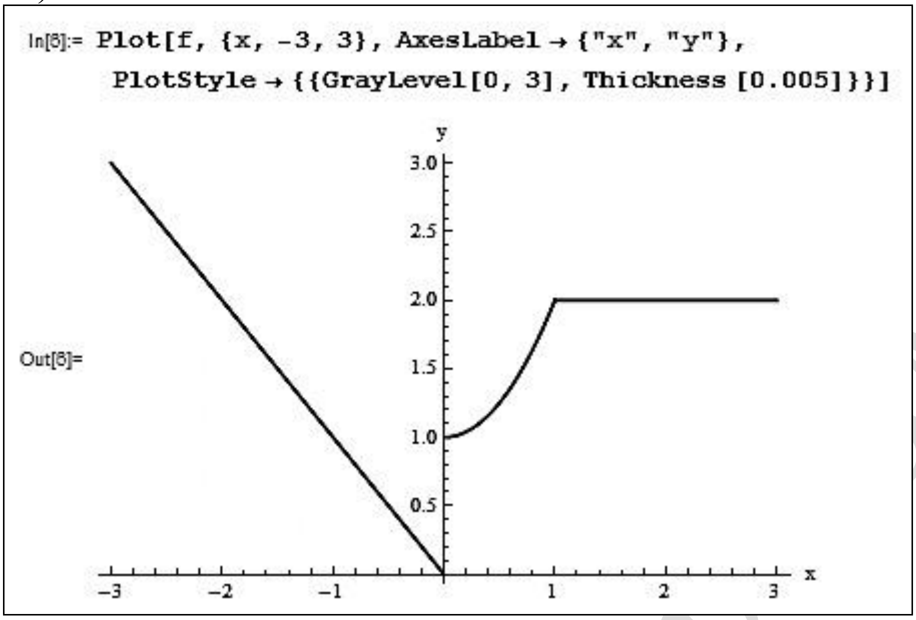


Рис. 5.9

Задания для самостоятельной работы

1. Найти односторонние пределы функций $y = f(x)$ и построить их графики:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ при $x \to 0$;

2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le -1, \\ x, & -1 < x \le 2, \\ \ln(x-2), & x > 2 \end{cases}$ при $x \to -1$ и $x \to 2$;

3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0, \\ \sqrt{4-x^2}, & 0 < x \le 2, \\ \dfrac{1}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$ при $x \to 0$ и $x \to 2$.

2. Исследовать функции $y = f(x)$ на непрерывность и построить их графики:

1) $f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \le -3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 < x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 2, \\ \dfrac{1}{x-2}, & x > 2; \end{cases}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-1}}+3}$.

5.3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Пример 5.3.1

Найти производные функций указанного порядка.

а) $y=\sin^3 4x\cdot e^{5x^2+1}, y'$; б) $y=\dfrac{2\cos x}{\left(x^2+4\right)^2}, y''$; в) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}, y'''$.

Решение

а) Функция $y=\sin^3 4x\cdot e^{5x^2+1}$ представляет собой произведение двух функций: $u=\sin^3 4x$ и $v=e^{5x^2+1}$, поэтому следует применить правило дифференцирования произведения $(uv)'=u'v+uv'$.

Итак,

$$y'=\left(\sin^3 4x\cdot e^{5x^2+1}\right)'=\left(\sin^3 4x\right)'e^{5x^2+1}+\sin^3 4x\left(e^{5x^2+1}\right)'=$$

$$=\begin{bmatrix}\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u',\\ \left(e^u\right)'=e^u\cdot u',\\ (\sin u)'=\cos u\cdot u'\end{bmatrix}=3\cdot\sin^2 4x\cdot(\sin 4x)'\cdot e^{5x^2+1}+\sin^3 4x\cdot e^{5x^2+1}\cdot\left(5x^2+1\right)'=$$

$$=3\cdot\sin^2 4x\cdot 4\cos 4x\cdot e^{5x^2+1}+\sin^3 4x\cdot e^{5x^2+1}\cdot 5\cdot 2x=$$

$$=12\cdot e^{5x^2+1}\cdot\sin^2 4x\cdot\cos 4x+10x\cdot e^{5x^2+1}\cdot\sin^3 4x=$$

$$=2\cdot e^{5x^2+1}\cdot\sin^2 4x\cdot(6\cos 4x+5x\sin 4x).$$

б) Найдем первую производную данной функции, применив правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$y'=\left(\frac{2\cos x}{\left(x^2+4\right)^2}\right)'=\frac{(2\cos x)'\left(x^2+4\right)^2-2\cos x\left(\left(x^2+4\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2+4\right)^2\right)^2}=$$

$$=\begin{bmatrix}(\cos u)'=-\sin u\cdot u', \\ \left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'\end{bmatrix}=\frac{-2\sin x\left(x^2+4\right)^2-2\cos x\cdot 2\cdot\left(x^2+4\right)\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^4}=$$

$$=\frac{-2\left(x^2+4\right)\left(\left(x^2+4\right)\sin x+4x\cdot\cos x\right)}{\left(x^2+4\right)^4}=-\frac{2\left(\left(x^2+4\right)\sin x+4x\cdot\cos x\right)}{\left(x^2+4\right)^3}.$$

Тогда $y''=\left(y'\right)'=\left(-\frac{2\left(\left(x^2+4\right)\sin x+4x\cdot\cos x\right)}{\left(x^2+4\right)^3}\right)'=\left(-\frac{2\sin x}{\left(x^2+4\right)^2}-\frac{8x\cos x}{\left(x^2+4\right)^3}\right)'=$

$$=\left(-\frac{2\sin x}{\left(x^2+4\right)^2}\right)'-\left(\frac{8x\cos x}{\left(x^2+4\right)^3}\right)'=\left[\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\right]=$$

$$=-\frac{(2\sin x)'\left(x^2+4\right)^2-2\sin x\left(\left(x^2+4\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2+4\right)^2\right)^2}-\frac{(8x\cos x)'\left(x^2+4\right)^3-8x\cos x\left(\left(x^2+4\right)^3\right)'}{\left(\left(x^2+4\right)^3\right)^2}=$$

$$=\begin{bmatrix}(\sin u)'=\cos u\cdot u', \\ \left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u', \\ (uv)'=u'v+uv'\end{bmatrix}=-\frac{2\cos x\left(x^2+4\right)^2-2\sin x\cdot 2\cdot\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4}-$$

$$-\frac{\left((8x)'\cos x+8x(\cos x)'\right)\left(x^2+4\right)^3-8x\cos x\cdot 3\left(x^2+4\right)^2\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^6}=\left[\cos u=-\sin u\cdot u'\right]=$$

$$=-\frac{2\left(x^2+4\right)^2\cos x-8x\left(x^2+4\right)\sin x}{\left(x^2+4\right)^4}-$$

$$-\frac{\left(x^2+4\right)^2\left(8(\cos x-x\sin x)\left(x^2+4\right)-48x^2\cos x\right)}{\left(x^2+4\right)^6}=$$

$$=-\frac{2\left(x^4+8x^2+16+4x^2+16-24x^2\right)\cos x-8\left(x^3+4x+x^3+4x\right)\sin x}{\left(x^2+4\right)^4}=$$

$$=\frac{-2\left(x^4-12x^2+32\right)\cos x+16x\left(x^2+4\right)\sin x}{\left(x^2+4\right)^4}.$$

в) Так как $y'''=\left(y''\right)'$, $y''=\left(y'\right)'$, то сначала найдем первую и вторую производные:

$$y'=\left(\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}\right)'=\left[(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'\right]=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{x-3}{x+3}}\cdot\left(\frac{x-3}{x+3}\right)'=$$

$$=\left[\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\right]=\frac{1}{6}\cdot\frac{x+3}{x-3}\cdot\frac{(x-3)'(x+3)-(x-3)(x+3)'}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-3}\cdot\frac{1\cdot(x+3)-(x-3)\cdot 1}{x+3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-3}\cdot\frac{6}{x+3}=\frac{1}{x^2-9};$$

$$y''=\left(\frac{1}{x^2-9}\right)'=\left[\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'\right]=-\frac{1}{\left(x^2-9\right)^2}\cdot\left(x^2-9\right)'=-\frac{2x}{\left(x^2-9\right)^2}.$$

Тогда $y'''=\left(-\frac{2x}{\left(x^2-9\right)^2}\right)'=\left[\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\right]=$

$$=\frac{(-2x)'\left(x^2-9\right)^2-(-2x)\left(\left(x^2-9\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2-9\right)^2\right)^2}=\frac{-2\left(x^2-9\right)^2+2x\cdot 2\cdot\left(x^2-9\right)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(x^2-9\right)\left(-2\cdot\left(x^2-9\right)+8x^2\right)}{\left(x^2-9\right)^4}=\frac{6x^2+18}{\left(x^2-9\right)^3}=\frac{6\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-9\right)^3}.$$

Вычисления в Mathematica

Для вычисления производной используется функция **D[f, x]**, где f – функция от переменной x или алгебраическое выражение, содержащее переменную x. Обязательно необходимо указывать аргумент функции, в противном случае не получится результат.

При вычислении n-й производной используется функция **D[f, {x,n}]**.

Используем функцию **Simplify** в конце строки после основной функции, чтобы результат имел вид упрощенного выражения.

Результаты вычисления производных функций указанного порядка представлены на рис. 5.10 (пример 5.3.1, а), рис. 5.11 (пример 5.3.1, б) и рис. 5.12 (пример 5.3.1, в).

```
In[1]:= D[Sin[4 x]^3 Exp[5 x^2 + 1], x] // Simplify

Out[1]= 2 e^(1+5 x^2) Sin[4 x]^2 (6 Cos[4 x] + 5 x Sin[4 x])
```

Рис. 5.10

На рис. 5.10 видим, что степень функции $\sin^3 4x$ в **Mathematica** вводится после аргумента **Sin[4x]^3**.

```
In[2]:= D[2 Cos[x]/(x^2 + 4)^2, {x, 2}] // Simplify
```

$$\text{Out[2]=}\ \frac{-2\left(32-12x^2+x^4\right)\text{Cos}[x]+16x\left(4+x^2\right)\text{Sin}[x]}{\left(4+x^2\right)^4}$$

Рис. 5.11

```
In[3]:= D[1/6 Log[((x - 3)/(x + 3))], {x, 3}] // Simplify
```

$$\text{Out[3]=}\ \frac{6\left(3+x^2\right)}{\left(-9+x^2\right)^3}$$

Рис. 5.12

Пример 5.3.2

Найти производную n-го порядка функции $y=7^{5x+1}$.

Решение

1. Последовательно находим производные:

$$y'=\left(7^{5x+1}\right)'=\left[\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'\right]=7^{5x+1}\ln 7\cdot(5x+1)'=7^{5x+1}\cdot 5\cdot\ln 7,$$

$$y''=\left(y'\right)'=\left(7^{5x+1}\cdot 5\cdot\ln 7\right)'=5\cdot\ln 7\cdot\left(7^{5x+1}\right)'=5\cdot\ln 7\cdot 7^{5x+1}\cdot 5\cdot\ln 7=$$
$$=5^2\cdot\ln^2 7\cdot 7^{5x+1},$$

$$y'''=\left(y''\right)'=5^2\cdot\ln^2 7\cdot\left(7^{5x+1}\right)'=5^2\cdot\ln^2 7\cdot 7^{5x+1}\cdot 5\cdot\ln 7=5^3\cdot\ln^3 7\cdot 7^{5x+1}.$$

Проанализировав эти выражения, делаем предположение, что

$$y^{(n)}(x)=5^n\cdot\ln^n 7\cdot 7^{5x+1}.$$

2. Докажем полученную формулу методом математической индукции. Формула верна при $n=1$, т. к. $y'(x)=5\cdot\ln 7\cdot 7^{5x+1}$.

Проверим, если формула верна при $n=k$, то она верна и при $n=k+1$:

$$y^{(k+1)}(x)=\left(y^{(k)}(x)\right)'=\left(5^k\cdot\ln^k 7\cdot 7^{5k+1}\right)'=5^k\cdot\ln^k 7\cdot 7^{5k+1}\cdot\ln 7\cdot 5=$$
$$=5^{k+1}\ln^{k+1} 7\cdot 7^{5k+1}.$$

Справедливость формулы $y^{(n)}(x)=5^n\cdot\ln^n 7\cdot 7^{5x+1}$ доказана.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 5.13).

```
In[1]:= D[7^(5 x+1), x]
Out[1]= 5 × 7^(1+5 x) Log[7]

In[2]:= D[7^(5 x+1), {x, 2}]
Out[2]= 25 × 7^(1+5 x) Log[7]^2

In[3]:= D[7^(5 x+1), {x, 3}]
Out[3]= 125 × 7^(1+5 x) Log[7]^3
```

Рис. 5.13

Пример 5.3.3

Вычислить пятую производную функции $y = x^4 e^{3x}$ в точке $x = 0$.

Решение

Воспользуемся формулой Лейбница:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{(n-3)}v''' + \ldots + uv^{(n)},$$

где $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v,\ C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Для $n = 5$ формула Лейбница имеет следующий вид: $y^{(5)} = (uv)^{(5)} = C_5^0 u^{(5)}v + C_5^1 u^{(4)}v' + C_5^2 u'''v'' + C_5^3 u''v''' + C_5^4 u'v^{(4)} + C_5^5 uv^{(5)}$.

Полагая $u = x^4$ и $v = e^{3x}$, находим:

$$u' = \left(x^4\right)' = 4x^3,\ u'' = (u')' = \left(4x^3\right)' = 12x^2,\ u''' = (u'')' = \left(12x^2\right)' = 24x,$$

$$u^{(4)} = (u''')' = (24x)' = 24,\ \ u^{(5)} = \left(u^{(4)}\right)' = (24)' = 0;$$

$$v' = \left(e^{3x}\right)' = 3e^{3x},\ v'' = \left(3e^{3x}\right)' = 9e^{3x},\ v''' = \left(9e^{3x}\right)' = 27e^{3x},$$

$$v^{(4)} = \left(27e^{3x}\right)' = 81e^{3x},\ \ v^{(5)} = \left(81e^{3x}\right)' = 243e^{3x}.$$

Теперь вычислим коэффициенты при производных $\left(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\ 0! = 1! = 1,\ C_n^k = C_n^{n-k}\right)$:

$$C_5^0 = \frac{5!}{0!\cdot(5-0)!} = \frac{5!}{1\cdot 5!} = 1,\ C_5^1 = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = \frac{4!\cdot 5}{1\cdot 4!} = 5,\ C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = 10,$$

$$C_5^3 = C_5^{5-2} = C_5^2 = 10,\ C_5^4 = C_5^{5-1} = C_5^1 = 5,\ C_5^5 = C_5^{5-0} = C_5^0 = 1.$$

Подставляем найденные производные и биномиальные коэффициенты в формулу Лейбница при $n = 5$:

$$\left(x^4e^{3x}\right)^{(5)} = 1\cdot 0\cdot e^{3x} + 5\cdot 24\cdot 3e^{3x} + 10\cdot 24x\cdot 9e^{3x} + 10\cdot 12x^2\cdot 27e^{3x} +$$
$$+5\cdot 4x^3\cdot 81e^{3x} + 1\cdot x^4\cdot 243e^{3x} = 9e^{3x}\left(40 + 240x + 360x^2 + 180x^3 + 27x^4\right).$$

Итак, подставив в найденное выражение значение $x = 0$, получим:

$$y^{(5)}(0) = 9e^{3\cdot 0}(40 + 240\cdot 0 + 360\cdot 0 + 180\cdot 0 + 27\cdot 0) = 9\cdot 1\cdot 40 = 360.$$

Вычисления в Mathematica

Найдем пятую производную функции $y = x^4e^{3x}$ по формуле Лейбница:

$$y^{(5)} = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \left(x^4\right)^{(5-k)}\left(e^{3x}\right)^k.$$

Для вычисления сумм в пакете **Mathematica** существует функция $\mathbf{Sum}\left[\mathbf{f}(\mathbf{k}),\left\{\mathbf{k},\mathbf{k}_{\mathbf{min}},\mathbf{k}_{\mathbf{max}}\right\}\right]$, а вычисления биномиальных коэффициентов $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ выполняется при помощи функции $\mathbf{Binomial}[\mathbf{n},\mathbf{k}]$ (рис. 5.14).

```
In[2]:= Sum[Binomial[5, k] D[x^4, {x, 5 - k}] D[Exp[3 x], {x, k}], {k, 0, 5}]

In[3]:= 360 e^(3 x) + 2160 e^(3 x) x + 3240 e^(3 x) x^2 + 1620 e^(3 x) x^3 + 243 e^(3 x) x^4 // Simplify

Out[3]= 9 e^(3 x) (40 + 240 x + 360 x^2 + 180 x^3 + 27 x^4)
```

Рис. 5.14

Вычисляем пятую производную функции в точке $x = 0$, используя результат последнего вычисления знаком **%**. Замену x на 0 осуществляем оператором **/.** (слеш и точка) или функцией **ReplaceAll** (рис. 5.15).

```
Out[3]= 9 e^(3 x) (40 + 240 x + 360 x^2 + 180 x^3 + 27 x^4)
In[4]:= ReplaceAll[%, x → 0]
Out[4]= 360
```

Рис. 5.15

Результат на рис. 5.15 совпадает с вычислениями «вручную».

Проверка нахождения производных и биномиальных коэффициентов «вручную» приведена на рис. 5.16–5.18.

```
In[5]:= u = x^4
Out[5]= x^4

In[6]:= D[u, x]
Out[6]= 4 x^3

In[7]:= D[u, {x, 2}]
Out[7]= 12 x^2
```

Рис. 5.16

```
In[8]:= D[u, {x, 3}]
Out[8]= 24 x
In[9]:= D[u, {x, 4}]
Out[9]= 24
In[10]:= D[u, {x, 5}]
Out[10]= 0
In[11]:= v = Exp[3 x]
Out[11]= e^(3 x)
In[12]:= D[v, x]
Out[12]= 3 e^(3 x)
In[13]:= D[v, {x, 2}]
Out[13]= 9 e^(3 x)
In[14]:= D[v, {x, 3}]
Out[14]= 27 e^(3 x)
In[15]:= D[v, {x, 4}]
Out[15]= 81 e^(3 x)
In[16]:= D[v, {x, 5}]
Out[16]= 243 e^(3 x)
```

Рис. 5.17

```
In[17]:= Binomial[5, 0]
Out[17]= 1
In[18]:= Binomial[5, 1]
Out[18]= 5
In[19]:= Binomial[5, 2]
Out[19]= 10
In[20]:= Binomial[5, 3]
Out[20]= 10
In[21]:= Binomial[5, 4]
Out[21]= 5
In[22]:= Binomial[5, 5]
Out[22]= 1
```

Рис. 5.18

Пример 5.3.4

Найти дифференциал функции $y = (\cos 5x)^{\sin 3x}$.

Решение

Так как $dy = y'dx$, то сначала найдем производную y'. Применим метод логарифмического дифференцирования:

$\ln y = \ln(\cos 5x)^{\sin 3x}$, дифференцируем равенство по x,

$(\ln y)' = \left(\ln(\cos 5x)^{\sin 3x}\right)'$,

$\dfrac{y'}{y} = (\sin 3x \cdot \ln(\cos 5x))'$, выражаем y',

$$y' = y(\sin 3x \cdot \ln(\cos 5x))' = (\cos 5x)^{\sin 3x} \cdot \left((\sin 3x)' \ln(\cos 5x) + \sin 3x(\ln(\cos 5x))'\right) =$$

$$= (\cos 5x)^{\sin 3x}\left(3\cos 3x \ln(\cos 5x) + \sin 3x \frac{(\cos 5x)'}{\cos 5x}\right) =$$

$$= (\cos 5x)^{\sin 3x}\left(3\cos 3x \ln(\cos 5x) + \sin 3x \frac{(-5\sin 5x)}{\cos 5x}\right) =$$

$$= (\cos 5x)^{\sin 3x}(3\cos 3x \ln(\cos 5x) - 5\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 5x).$$

Итак, $dy = y'dx = (\cos 5x)^{\sin 3x}(3\cos 3x \ln(\cos 5x) - 5\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 5x)dx$.

Вычисления в Mathematica

Функция **Dt[f]** позволяет вычислять полный дифференциал от функции f, а **Dt[f, x]** – полную производную функции f по переменной x.

Дифференциал функции $y = (\cos 5x)^{\sin 3x}$ (рис. 5.19).

```
In[1]:= Dt[Cos[5 x]^Sin[3 x]] // Simplify

Out[1]= Cos[5 x]^Sin[3 x] Dt[x] (3 Cos[3 x] Log[Cos[5 x]] - 5 Sin[3 x] Tan[5 x])
```

Рис. 5.19

Пример 5.3.5

Вычислить дифференциал второго порядка функции $y = 7^{-4x^2} + 3x$ в точке $x = \dfrac{1}{2}$.

Решение

Дифференциал второго порядка равен $d^2y = y''dx^2$, поэтому последовательно вычислим первую и вторую производные заданной функции:

$$y' = \left(7^{-4x^2} + 3x\right)' = \left(7^{-4x^2}\right)' + (3x)' = \left[\begin{array}{c} (a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \\ x' = 1 \end{array}\right] =$$

$$= 7^{-4x^2} \ln 7 \cdot \left(-4x^2\right)' + 3 = -8x \cdot 7^{-4x^2} \ln 7 + 3;$$

$$y'' = \left(-8x \cdot 7^{-4x^2} \ln 7\right)' + 3' = \begin{bmatrix} (uv)' = u'v + uv', \\ c' = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-8x)' \cdot 7^{-4x^2} \ln 7 + (-8x) \cdot \left(7^{-4x^2} \ln 7\right)' + 0 =$$

$$= -8 \ln 7 \cdot 7^{-4x^2} - 8x \ln 7 \cdot 7^{-4x^2} \ln 7(-8x) = 8 \ln 7 \cdot 7^{-4x^2} \left(8x^2 \ln 7 - 1\right).$$

Подставим в формулу $d^2 y$:

$$d^2 y = 8 \ln 7 \cdot 7^{-4x^2} \left(8x^2 \ln 7 - 1\right) dx^2.$$

Вычислим дифференциал в точке $x = \frac{1}{2}$:

$$d^2 y\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \ln 7 \cdot 7^{-4\left(\frac{1}{2}\right)^2} \left(8\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln 7 - 1\right) dx^2 = 8 \ln 7 \cdot 7^{-1} \cdot (2 \ln 7 - 1) dx^2 =$$

$$= \frac{8}{7} \ln 7 \cdot (2 \ln 7 - 1) dx^2.$$

Вычисления в Mathematica

Функция $\mathbf{Dt[f, \{x, n\}]}$ вычисляет полную производную n-го порядка функции f, поэтому для получения формулы дифференциала n-го порядка необходимо в конце функции записать dx, т. е. $\mathbf{Dt[f, \{x, n\}]dx}$.

Решение примера 5.3.5 представлено на рис. 5.20.

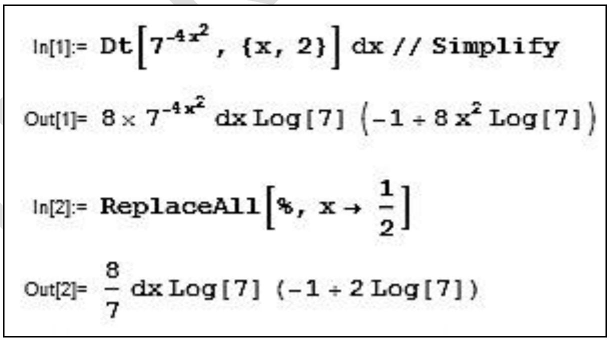


Рис. 5.20

Пример 5.3.6

Найти производные функций $y(x)$ n-го порядка, заданных неявно:

а) $y^2 \cos x = 4 \sin 3x,\ n = 1;$

б) $\operatorname{arctg} y - 3y + 2x = 5,\ n = 1;$

в) $2y \ln y = x,\ n = 2.$

Решение

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x,y)=0$, не разрешенного относительно y.

а) Дифференцируем по x равенство $y^2\cos x-4\sin 3x=0$, рассматривая при этом y как функцию от x:

$$\left(y^2\right)'\cos x+y^2(\cos x)'-4(\sin 3x)'=0,$$

$$2yy'\cos x-y^2\sin x-12\cos 3x=0.$$

Разрешим полученное уравнение относительно y':

$$2yy'\cos x=y^2\sin x+12\cos 3x,$$

$$y'=\frac{y^2\sin x+12\cos 3x}{2y\cos x}=\frac{y^2\sin x}{2y\cos x}+\frac{12\cos 3x}{2y\cos x}.$$

Так как $\dfrac{1}{\cos x}=\sec x$, то

$$y'=\frac{1}{2}y\sin x\sec x+\frac{6}{y}\cos 3x\sec x=\sec x\left(\frac{1}{2}y\sin x+\frac{6}{y}\cos 3x\right).$$

б) $\operatorname{arctg} y-3y+2x-5=0$,

$$(\operatorname{arctg} y)'-3y'+(2x)'-5'=0,$$

$$\frac{y'}{1+y^2}-3y'+2=0,$$

$$y'\left(\frac{1}{1+y^2}-3\right)+2=0,$$

$$y'=-\frac{2\left(1+y^2\right)}{-\left(2+3y^2\right)}=\frac{2\left(1+y^2\right)}{2+3y^2}.$$

в) $2y\ln y-x=0$,

$$2y'\ln y+2y(\ln y)'-x'=0,$$

$$2y'\ln y+\frac{2yy'}{y}-1=0,$$

$$y'=\frac{1}{2\ln y+2}=\frac{1}{2(\ln y+1)}.$$

Если необходимо найти y'', то

$$y''=\left(\frac{1}{2(\ln y+1)}\right)'=-\frac{(2(\ln y+1))'}{4(\ln y+1)^2}=-\frac{\frac{2y'}{y}}{4(\ln y+1)^2}=-\frac{y'}{2y(\ln y+1)^2}.$$

Вместо y' можно подставить найденное выше выражение, тогда

$$y'' = -\frac{\dfrac{1}{2(\ln y + 1)}}{2y(\ln y + 1)^2} = -\frac{1}{4y(\ln y + 1)^3}.$$

Вычисления в Mathematica

Для вычисления производной неявной функции используется функция **Dt[f, x]** и вводится подстановка **/.y** $\to$ **f(x)** или **/.y** $\to$ **y**[**x**], которая дает возможность получить уравнение относительно искомой производной.

а) Введем функцию **Dt** и подстановку (рис. 5.21).

```
In[1]:= Dt[y^2 Cos[x] - 4 Sin[3 x] = 0, x] /. y → y[x]
Out[1]= -12 Cos[3 x] - Sin[x] y[x]^2 + 2 Cos[x] y[x] y′[x] = 0
```

Рис. 5.21

Решим полученное уравнение на рис. 5.21 с помощью функции **Solve** и получим искомую производную $y'(x) = f'(x)$ функции $y = f(x)$, заданной в неявном виде $F(x, y) = 0$ (рис. 5.22).

```
In[2]:= Solve[%, y′[x]]
Out[2]= {{y′[x] → Sec[x] (12 Cos[3 x] + Sin[x] y[x]^2) / (2 y[x])}}
```

Рис. 5.22

Полученный результат совпадает с результатом решения «вручную».

б) Результат приведен на рис. 5.23.

```
In[3]:= Dt[ArcTan[y] - 3 y + 2 x - 5 = 0, x] /. y → y[x]
Out[3]= 2 - 3 y′[x] + y′[x] / (1 + y[x]^2) = 0
In[4]:= Solve[%, y′[x]]
Out[4]= {{y′[x] → -2 (1 + y[x]^2) / (-2 - 3 y[x]^2)}}
```

Рис. 5.23

в) Искомая производная $y'(x)$ функции $2y\ln y = x$, заданной в неявном виде, представлена на рис. 5.24.

```
In[5]:= Dt[2 y Log[y] - x = 0, x] /. y → y[x]
Out[5]= -1 + 2 y′[x] + 2 Log[y[x]] y′[x] == 0

In[6]:= Solve[%, y′[x]]
Out[6]= {{y′[x] → 1/(2 (1 + Log[y[x]]))}}
```

Рис. 5.24

Дифференцируя еще раз по x (рис. 5.25),

```
In[7]:= D[%, x]
Out[7]= {{y″[x] → -y′[x]/(2 (1 + Log[y[x]])^2 y[x])}}
```

Рис. 5.25

и подставляя найденное значение y' (рис. 5.26),

```
Out[6]= {{y′[x] → 1/(2 (1 + Log[y[x]]))}}

In[7]:= D[%, x]
Out[7]= {{y″[x] → -y′[x]/(2 (1 + Log[y[x]])^2 y[x])}}

In[8]:= ReplaceAll[%, Out[6]]
```

Рис. 5.26

находим вторую производную (рис. 5.27).

```
In[8]:= ReplaceAll[%, Out[6]]
Out[8]= {{{y″[x] → -1/(4 (1 + Log[y[x]])^3 y[x])}}}
```

Рис. 5.27

Пример 5.3.7

Разложить функцию до члена четвертого порядка.

а) $f(x)=x^4-3x^2+2x+2$ в точке $x_0=1$ по формуле Тейлора;

б) $f(x)=\ln(5-x)$ по формуле Маклорена.

Решение

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $\varepsilon\in(x_0;x)$, такая, что справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)}+$$

$$+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}\quad (\varepsilon=x_0+\theta(x-x_0),\ \ 0<\theta<1).$$

Формулу Тейлора можно записать в виде $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен Тейлора, $R_n(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа.

При $x=0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена.

а) Вычислим значение функции и ее производных в точке $x_0=1$:

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^4-3x^2+2x+2, && f(1)=1^4-3\cdot1^2+2\cdot1+2=2,\\
&f'(x)=4x^3-6x+2, && f'(1)=4\cdot1^3-6\cdot1+2=0,\\
&f''(x)=12x^2-6, && f''(1)=12\cdot1^2-6=6,\\
&f'''(x)=24x, && f'''(1)=24\cdot1=24,\\
&f^{(4)}(x)=24, && f^{(4)}(1)=24,\\
&f^{(5)}(x)=0, && f^{(5)}(1)=0.
\end{aligned}$$

Подставив найденные значения в формулу Тейлора, получим искомое разложение:

$$f(x)=x^4-3x^2+2x+2=2+\frac{0}{1!}(x-1)+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{24}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4=$$

$$=2+\frac{6}{1\cdot2}(x-1)^2+\frac{24}{1\cdot2\cdot3}(x-1)^3+\frac{24}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(x-1)^4=$$

$$=2+3(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4.$$

б) Так как $f(x)=\ln(5-x)=\ln\left(5\cdot\left(1-\frac{x}{5}\right)\right)=\ln5+\ln\left(1+\left(-\frac{x}{5}\right)\right)$, то, заменив x на $\left(-\frac{x}{5}\right)$ в формуле разложения функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$, получим:

$$\ln(5-x)=\ln5+\left(-\frac{x}{5}\right)-\frac{\left(-\frac{x}{5}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x}{5}\right)^3}{3}-\frac{\left(-\frac{x}{5}\right)^4}{4}+O\left(x^4\right)=$$

$$=\ln5-\frac{x}{5}-\frac{x^2}{5^2\cdot2}-\frac{x^3}{5^3\cdot3}-\frac{x^4}{5^4\cdot4}+O\left(x^4\right)=\ln5-\frac{x}{5}-\frac{x^2}{50}-\frac{x^3}{375}-\frac{x^4}{2500}+O\left(x^4\right).$$

Вычисления в Mathematica

Функция $\mathbf{Series}[\mathbf{f},\{\mathbf{x},\mathbf{x_0},\mathbf{n}\}]$ производит разложение функции f в ряд Тейлора по переменной x в окрестности точки $x = x_0$ до члена порядка n. Следует помнить, что функция **Series** создает ненулевой остаточный член, даже если он тождественно равен нулю.

Разложение функции из примера 5.3.7, а) приведено на рис. 5.28, из примера 5.3.7, б) – на рис. 5.29.

In[1]:= $\mathbf{Series}\left[x^4 - 3x^2 + 2x + 2,\ \{x,\ 1,\ 4\}\right]$

Out[1]= $2 + 3\,(x-1)^2 + 4\,(x-1)^3 + (x-1)^4 + O[x-1]^5$

Рис. 5.28

In[2]:= `Series[Log[5 - x], {x, 0, 4}]`

Out[2]= $\mathrm{Log}[5] - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{50} - \frac{x^3}{375} - \frac{x^4}{2500} + O[x]^5$

Рис. 5.29

Можно использовать функции **Collect** и **Normal** для устранения остаточного члена (рис. 5.30, 5.31).

In[1]:= $\mathbf{Normal}\left[\mathbf{Series}\left[x^4 - 3x^2 + 2x + 2,\ \{x,\ 1,\ 4\}\right]\right]$

Out[1]= $2 + 3\,(-1+x)^2 + 4\,(-1+x)^3 + (-1+x)^4$

Рис. 5.30

In[2]:= `Series[Log[5 - x], {x, 0, 4}]`

Out[2]= $\mathrm{Log}[5] - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{50} - \frac{x^3}{375} - \frac{x^4}{2500} + O[x]^5$

In[3]:= `Collect[%, x]`

Out[3]= $-\frac{x}{5} - \frac{x^2}{50} - \frac{x^3}{375} - \frac{x^4}{2500} + \mathrm{Log}[5]$

Рис. 5.31

После отбрасывания «остаточного члена» можно строить график полинома, приближающего исходную функцию (рис. 5.32).

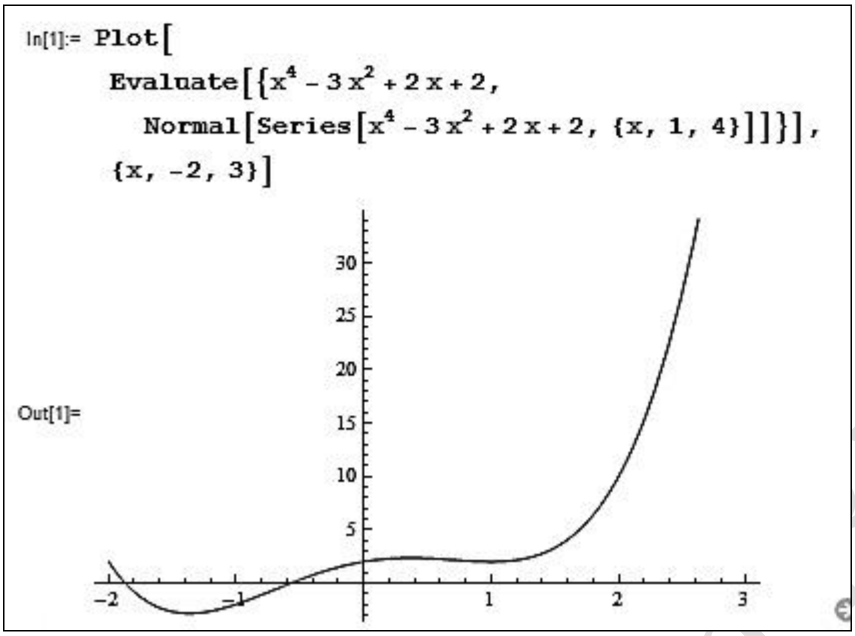


Рис. 5.32

Пример 5.3.8

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $f(x)=x+\dfrac{1}{1+x}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение

Функция $f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на интервалах $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Уравнение касательной: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Уравнение нормали: $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Найдем значение функции и ее производной в точке x_0:

$$f(x_0)=f(1)=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2},\ 2)\ f'(x)=\left(x+\frac{1}{1+x}\right)'=1-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f'(x_0)=f'(1)=1-\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}.$$

Итак, искомое уравнение касательной: $y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$.

Уравнение нормали: $y-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{\frac{3}{4}}(x-1)$, т. е. $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{6}$.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 5.33).

```
(*Введите функцию:*)
f[x_] := x + 1/(1 + x)
(*Введите абсциссу точки:*)
x0 := 1
(*Решение:*)
Print["Уравнение касательной:"]
y1[x_] := Expand[f[x0] + f'[x0] (x - x0)];
Print["y=", y1[x]]
Print["Уравнение нормали:"]
y2[x_] := Expand[f[x0] - 1/f'[x0] (x - x0)];
Print["y=", y2[x]]
Print["График функции, касательная и нормаль к графику функции в точке (",
 x0, ";", f[x0], "):"]
p1 = Plot[f[x], {x, -1, 2}, AspectRatio → Automatic, AxesLabel → {x, y},
   PlotStyle → Thickness[0.015]];
p2 = Plot[y1[x], {x, -1, 2}, AspectRatio → Automatic,
   PlotStyle → {Blue, Dashed, Thickness[0.01]}];
p3 = Plot[y2[x], {x, -1, 2}, AspectRatio → Automatic,
   PlotStyle → {Red, Dashed, Thickness[0.01]}];
Show[p1, p2, p3, PlotRange → All,
 Prolog → {Black, PointSize[0.04], Point[{x0, f[x0]}]}]
```

Рис. 5.33

Результат работы программы представлен на рис. 5.34.

Уравнение касательной:

$$y=\frac{3}{4}+\frac{3x}{4}$$

Уравнение нормали:

$$y=\frac{17}{6}-\frac{4x}{3}$$

График функции, касательная и нормаль к графику функции в точке $(1;\frac{3}{2})$:

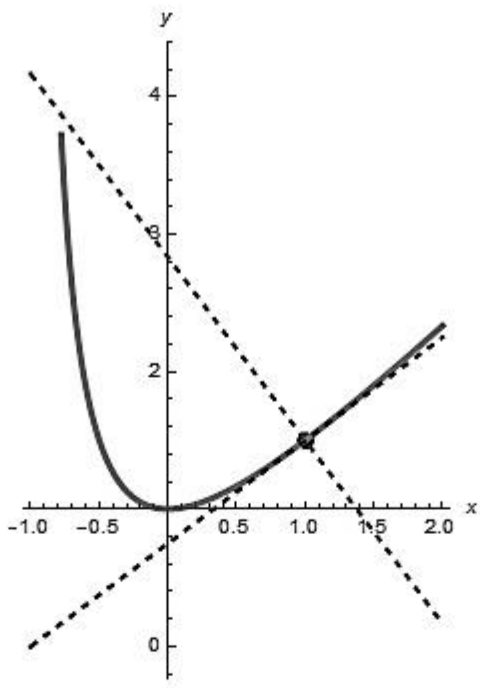


Рис. 5.34

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные заданных функций $y=f(x)$ указанного порядка n.

№ п/п	$f(x)$	n
1	$4x^2\operatorname{ctg}(5x+1)$	3
2	$\dfrac{3e^{7x+2}}{2x+4}$	2
3	$\left(4\sqrt{x}+3x^2\right)\operatorname{arctg}^2(2x+1)$	2
4	$\ln\left(2x+\sqrt{7+2x^2}\right)$	2
5	$\arcsin^4\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$	1

2. Найти производные n-го порядка заданных функций $y=f(x)$.

№ п/п	$f(x)$
1	$\ln(3x+5)$
2	$(4x^3+7x+1)\cos 5x$
3	$\dfrac{x+1}{2x+3}$
4	$(x^3-1)e^{5x}$
5	$\sin 2x\cos 3x$

3. Найти производные функций $y=f(x)$ указанного порядка n, используя формулу Лейбница.

№ п/п	$f(x)$	n
1	$2\sin 7x\ln 4x$	3
2	$(x^2+3)\cdot 5^{3x}$	4
3	$(3x^2+1)\cos 2x$	5
4	$x^2\sin 5x$	20
5	$\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$	100

4. Найти производные функций, заданных параметрически.

№ п/п	$x(t)$	$y(t)$
1	t^2+t^{-3}	$\sin(3^{-1}t^3+3t)$
2	$\ln\operatorname{tg} 7$	$(\sin t)^{-1}$
3	$\sqrt{t^2-2t}$	$\sqrt[3]{t-1}$
4	$2\ln t$	t^2-5
5	e^{-7t}	$5e^{9t}$

5. Найти производные второго порядка от функций $F(x,y)=0$, заданных неявно.

№ п/п	$F(x,y)$
1	$2y^3+x^3-5xy$
2	$\operatorname{tg} y-8yx^2+x-7$
3	$7\sin(4xy)+2\operatorname{tg}(3xy)$
4	$2\arcsin(5xy)+3\operatorname{tg}(2x+3y)$
5	$9xy-4y+2e^{y+x}$

6. Найти дифференциал функций $y=f(x)$ в точке x_0.

№ п/п	$f(x)$	x_0
1	$e^x \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1+e^x}$	0
2	$\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$	3
3	$\sqrt{2\left(2+4x-x^2\right)}$	0
4	$4\ln\left(7x^3+15x^2-1\right)$	1
5	$17\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$	2

7. Найти дифференциал второго порядка от функции *y*=*f*(*x*).

№ п/п	$f(x)$
1	$4\sin 2x\left(3x^2+1\right)$
2	$(x+1)e^{2x}+3\operatorname{ctg}^2 x$
3	$\sqrt{\ln^2 3x-9}$
4	$7^{-4x^3}(2x+1)-5\operatorname{arctg}^2 3x$
5	$4x\sqrt{3+2x^2}-11$

8. С помощью правила Лопиталя найти $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)$.

№ п/п	$y(x)$	$f(x)$	$g(x)$	x_0
1	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	e^x-e^{-x}	$\ln(1+x)$	0
2	$(f(x))^{g(x)}$	$\operatorname{tg} x$	$\sin 2x$	$\dfrac{\pi}{2}$
3	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$1-2\cos x$	$\sin(\pi-3x)$	$\dfrac{\pi}{3}$
4	$f(x)g(x)$	$\ln x$	$\operatorname{tg} 3x$	0
5	$f(x)-g(x)$	$\dfrac{1}{3^x}$	$\dfrac{1}{e^{2x}-1}$	0
6	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$2^x x-2$	x^2-1	1
7	$(f(x))^{g(x)}$	$1-x$	$\ln x$	1
8	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\ln(1+2x)$	$\sqrt[5]{5x-2}$	$+\infty$

№ п/п	$y(x)$	$f(x)$	$g(x)$	x_0
9	$f(x)g(x)$	$2x$	$\sin\frac{3}{x}$	∞
10	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\sin 6x$	$\sin 6x - \sin 7x$	0
11	$f(x) - g(x)$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{\ln x}$	1
12	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}$	$x-2$	2

9. Найти разложение функции $y=f(x)$ в окрестности указанной точки x_0 по формуле Тейлора.

№ п/п	$f(x)$	x_0
1	$\frac{1}{4-3x}$	2
2	$x^3 \operatorname{arctg} x$	0
3	$\cos 2x$	$\frac{\pi}{6}$
4	$\ln(2x+1)$	3
5	$\frac{x^2}{1+x}$	0
6	$x^5 - 3x^2 + 5x - 2$	2
7	$\sin 3x$	0

10. Построить касательную и нормаль к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

№ п/п	$f(x)$	x_0
1	$x^2 + \sqrt{x^3}$	1
2	$\sin x$	$\frac{\pi}{3}$
3	$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$	2
4	$\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$	9
5	$x^2 + x + 1$	–1

5.4. Исследование функций

Пример 5.4.1

С помощью первой производной исследовать функцию
$$f(x)=\begin{cases}-6x-x^2-8, & x<-2,\\ x+2, & -2\le x<0,\\ \sqrt{x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Решение

Областью определения данной функции будет вся числовая ось, т. к. все три элементарные функции, составляющие исходную функцию $f(x)$, определены там, где они заданы, а интервалы полностью покрывают всю числовую ось.

Исследуем функцию на непрерывность, подозрительными являются точки стыковки $x=-2$ и $x=0$:

1) $x=-2$: $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2-0}\left(-6x-x^2-8\right)=0$,

$\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2+0}(x+2)=0$,

$f(-2)=0$.

Итак, в точке $x=-2$ функция непрерывна.

2) $x=0$: $\lim\limits_{x\to0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}(x+2)=2$,

$\lim\limits_{x\to0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\sqrt{x}=0$.

Итак, $x=0$ – неустранимая точка разрыва первого рода.

Найдем производную $f'(x)=\begin{cases}-6-2x, & x<-2,\\ 1, & -2\le x<0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x\ge 0.\end{cases}$

Определим критические точки первого порядка:

1) $y'=0$: $-6-2x=0 \Rightarrow x=-3$;

2) y' не существует: $x=-2,\ \ x=0$.

Так как $x=0$ – точка разрыва, то критическими точками являются $x=-3$ и $x=-2$.

Нанесем на числовую ось (рис. 5.35) критические точки и точки разрыва и определим знак производной на каждом из интервалов.

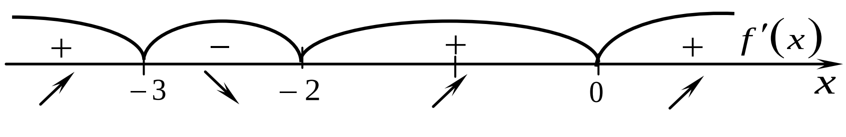


Рис. 5.35

Итак, точка $x=-3$ является точкой локального максимума, а точка $x=-2$ – локального минимума и $y(-3)=1$, $y(-2)=0$.

Построим графики функции в пакете **Matematica** (рис. 5.36).

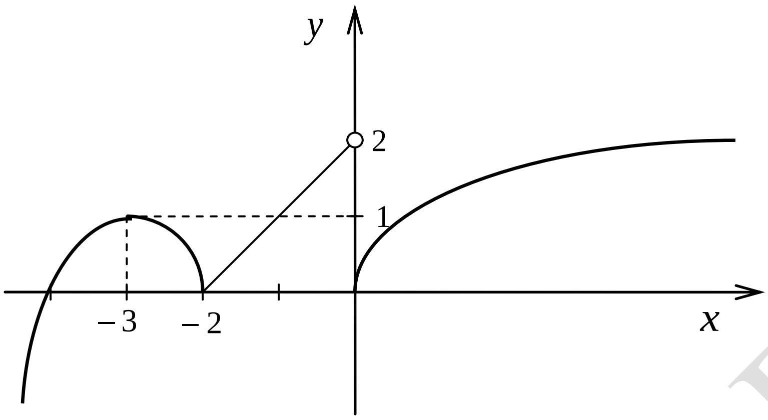


Рис. 5.36

Вычисления в Mathematica

Введем функцию (рис. 5.37).

```
In[1]:= f := Piecewise[{{-6 x - x^2 - 8, x < -2}, {x + 2, -2 <= x < 0}, {√x , x >= 0}}, x]
        Print["Исследовать функцию:"]
        Print["f(x)=", f]

        Исследовать функцию:

               -8 - 6 x - x^2   x < -2
        f(x) = 2 + x            -2 ≤ x < 0
               √x               x ≥ 0
               x                True
```

Рис. 5.37

Найдем односторонние пределы в точках «стыковки» функции. Вычислим значения функции в этих точках. Данный этап работы программы отражен на рис. 5.38.

```
In[4]:= Print["Исследуем функцию на непрерывность"]
        Print["x=-2"]
        Print[" lim_{x→-2-0} f(x)= lim_{x→-2-0} (-8-6x-x^2)=", Limit[f, x -> -2, Direction -> 1]]
        Print[" lim_{x→-2+0} f(x)= lim_{x→-2+0} (x+2)=", Limit[f, x -> -2, Direction -> -1]]
        Print["f(-2)=", f /. {x → -2}]
        Print["x=0"]
        Print["lim_{x→0-0} f(x)=lim_{x→0-0} (x+2)=", Limit[f, x → 0, Direction -> 1]]
        Print["lim_{x→0+0} f(x)=lim_{x→0+0} √x =", Limit[f, x → 0, Direction -> -1]]
        Print["f(0)=", f /. {x → 0}]
```

Рис. 5.38

Получили следующие результаты (рис. 5.39).

Исследуем функцию на непрерывность

$x=-2$

$\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-0} (-8-6x-x^2) = 0$

$\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2+0} (x+2) = 0$

$f(-2)=0$

$x=0$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} (x+2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{x} = 0$

$f(0)=0$

Рис. 5.39

Видим, что при $x=-2$ функция непрерывна, при $x=0$ функция имеет неустранимый разрыв первого рода.

Найдем точки, в которых производная функции равна нулю. Зададим построение графика производной функции (рис. 5.40).

```
In[13]:= Print["Найдем критические точки функции"]
         Print["Производная функции:"]
         g = D[f, x]
         Print["Производная функции равна нулю при"]
         Solve[D[f, x] = 0, x]
         Print["График производной функции:"]
         Plot[g, {x, -7, 7}, PlotStyle → Hue[0.7], AxesLabel → {x, y}]
```

Рис. 5.40

Результат работы программы по определению критических точек функции приведен на рис. 5.41.

Найдем критические точки функции

Производная функции:

Out[15]= $\begin{cases} -6-2x & x<-2 \\ 1 & -2<x<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x>0 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$

Производная функции равна нулю при

Out[17]= $\{\{x\to -3\}\}$

Рис. 5.41

График производной функции представлен на рис. 5.42.

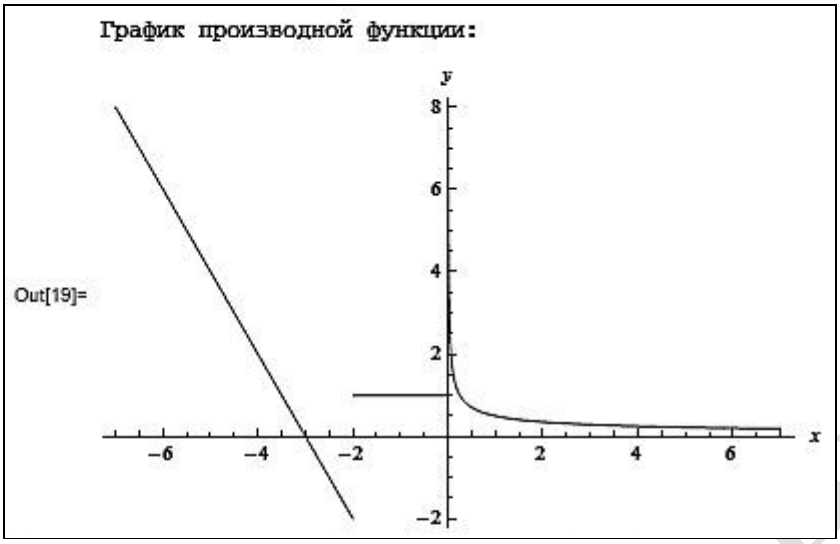


Рис. 5.42

Проанализировав полученные результаты, делаем вывод, что при $x = -3$ и $x = -2$ функция имеет локальные экстремумы. Вычислим значения функции при указанных значениях аргумента (рис. 5.43).

```
In[20]:= Print["Локальные экстремумы:"]
         Print["fmax=f(-3)=", f /. {x → -3}]
         Print["fmin=f(-2)=", f /. {x → -2}]

         Локальные экстремумы:
         fmax=f(-3)=1
         fmin=f(-2)=0
```

Рис. 5.43

Построим график функции (рис. 5.44).

```
In[23]:= Print["График функции:"]
         Plot[{f}, {x, -5, 5}, PlotStyle → {Hue[0.3], Hue[0.7]},
          AxesLabel → {x, y},
          Epilog → {PointSize[Large], Point[{0, 0}]}]

         График функции:
```

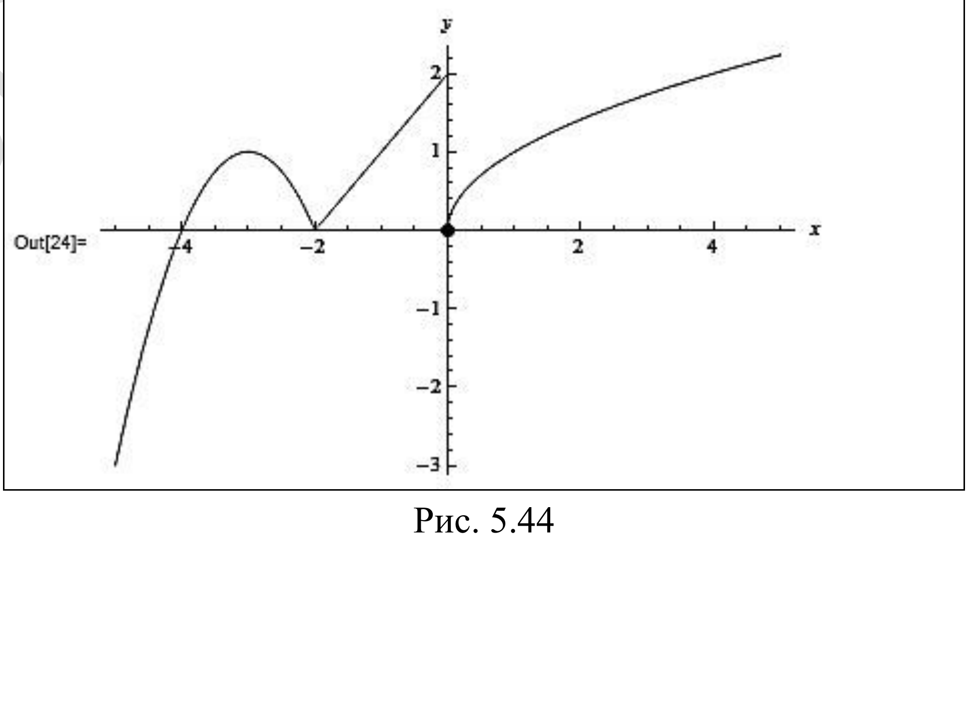


Рис. 5.44

Пример 5.4.2

Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение

Для построения графика функции проведем ее исследования по схеме:

1. Найдем область определения функции.

Функция не определена при $x=1$ и $x=-1$. Область определения $D(y)$ функции – вся числовая ось, за исключением точек $x=1$ и $x=-1$, т. е. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность.

Функция $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ является четной, т. к. $y(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=y(x)$.

Следовательно, график симметричен относительно оси Oy. Функция не периодическая.

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

С осью Ox: $y=0$, тогда $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0$, отсюда $x\in\varnothing$, т. е. точек пересечения с осью Ox нет.

С осью Oy: $x=0$, тогда $y=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$, т. е. $(0;-1)$ – точка пересечения с осью Oy.

4. Найдем интервалы возрастания и убывания функции.

Вычисляем первую производную функции:

$$y'=\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Критические точки:

1) $y'=0$ или $\dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=0$, откуда $x=0$;

2) y' не существует, когда $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Точки $x=1$ и $x=-1$ не являются критическими, поскольку они не принадлежат области определения функции, но т. к. они влияют на распределение знаков производной, то пренебречь ими нельзя (рис. 5.45).

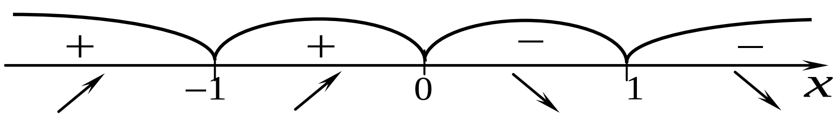


Рис. 5.45

В интервалах $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ функция возрастает, в интервалах $(0;1)\cup(1;+\infty)$ функция убывает. Точка $x=0$ будет точкой максимума, т. к. при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «–», тогда $y_{\max}(0)=\dfrac{0^2+1}{0^2-1}=-1$.

5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

Для отыскания интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(-4x)'\cdot(x^2-1)^2-(-4x)\cdot((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{-4\cdot(x^2-1)^2+4x\cdot2\cdot(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-4\cdot x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{-4\cdot(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Выясним, в каких точках вторая производная равна нулю или не существует:

1) $y''=0$ или $\dfrac{-4\cdot(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}=0$, откуда $x\in\varnothing$;

2) y'' не существует, когда $x_1=1$ и $x_2=-1$ (точки разрыва функции).

Точки $x=1$ и $x=-1$ не являются критическими, но т. к. они влияют на распределение знаков второй производной, то наносим эти точки на числовую ось и исследуем знак второй производной на каждом из интервалов (рис. 5.46).

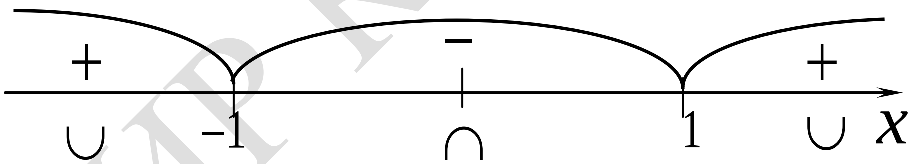


Рис. 5.46

Точек перегиба нет, поскольку точки $x=1$ и $x=-1$ не принадлежат области определения функции.

В интервалах $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ график функции вогнутый, а в интервале $(-1;1)$ – выпуклый.

6. Найдем асимптоты графика функции.

Прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами графика рассматриваемой функции.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ и } b = \lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Так как $k=0$, то $y=1$ – горизонтальная асимптота. В силу четности функции прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. Наклонных асимптот нет.

7. Проанализировав полученные результаты, строим график функции $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (рис. 5.47).

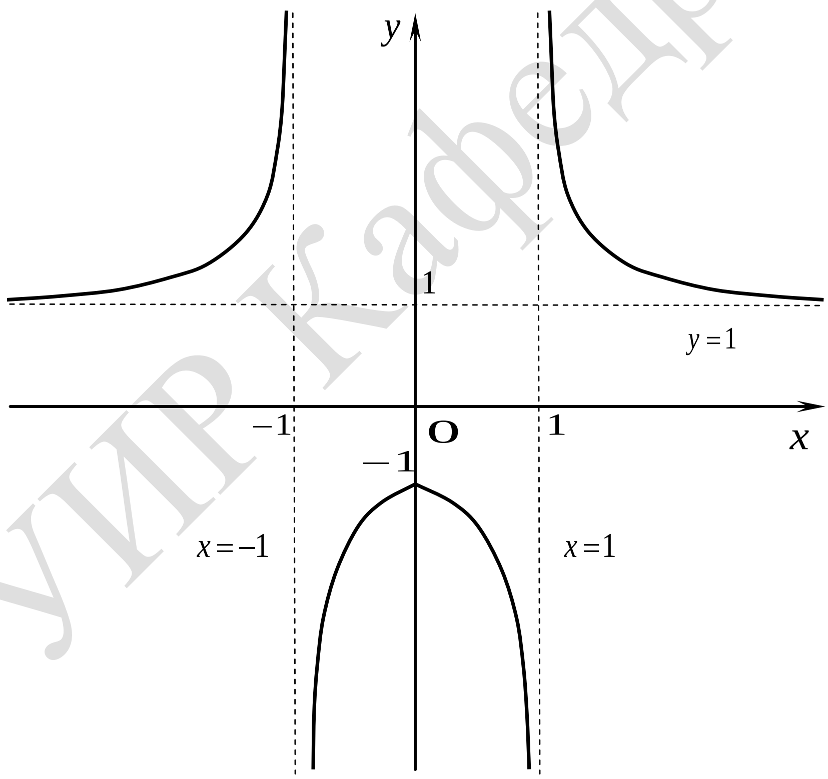


Рис. 5.47

Вычисления в Mathematica

Исследование функции $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ приведено на рис. 5.48–5.54, построение графика функции – на рис. 5.55.

```
In[1]:= (*Введите функцию:*)
        f[x_] := (x^2 + 1)/(x^2 - 1)
```

$$f[x\_] := \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

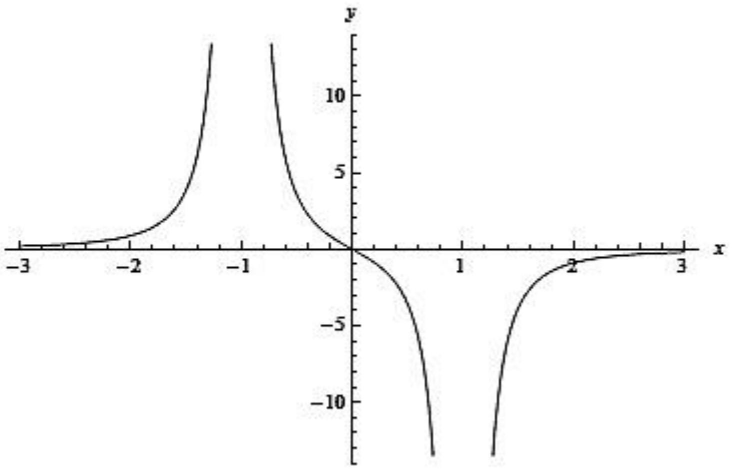
Рис. 5.48

```
In[2]:= (*Найдем точки пересечения функции с осью Ox:*)
        Print["Точки (точка) пересечения функции с осью Ox: ",
         Solve[f[x] = 0, x, Reals]]
        Print["Точки (точка) пересечения функции с осью Oy: ",
         f[0.]]

        Точки (точка) пересечения функции с осью Ox: {}
        Точки (точка) пересечения функции с осью Oy: -1.
```

Рис. 5.49

```
In[4]:=
    (*Вычислим производную функции f′(x) и изобразим график
     производной функции:*)
    Plot[f′[x], {x, -3, 3}, PlotStyle → Hue[0.7], AxesLabel → {x, y}]
```

Out[4]=



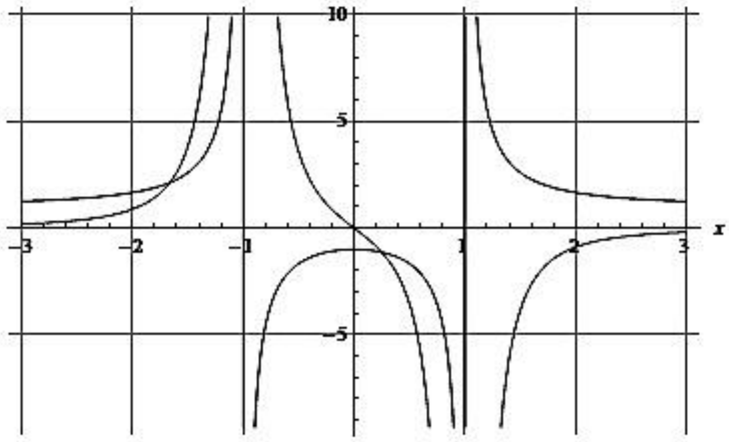

```
    (*Из графика видно, что в точке x=0 функция f(x) имеет экстремум*)
    (*На отрезке (-∞;-1)⋃(-1;0) функция возрастает,
    а  на (0;1)⋃(1;+∞) убывает*)
```

Рис. 5.50

In[5]:= (*Изобразим графики f(x) и f′(x):*)

```
Plot[{f′[x], f[x]}, {x, -3, 3}, PlotStyle → {Hue[0.7], Hue[1]},
 GridLines → Automatic, AxesLabel → {x, y}]
```

Out[5]=



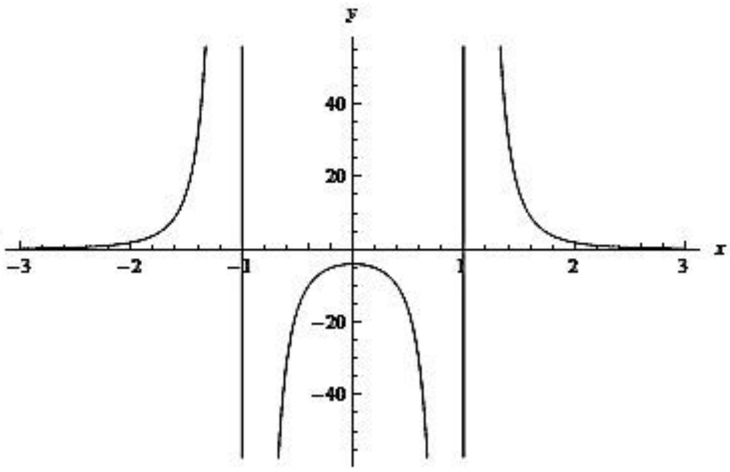
(*В точках x=1 и x=-1 производная обращается в бесконечность,
но данные точки не являются точками экстремума,
т.к. не принадлежат области определения функции*)

Рис. 5.51

In[6]:= (*Найдем вторую производную функции f″(x) и изобразим
ее график*)

```
Plot[f″[x], {x, -3, 3}, PlotStyle → Hue[0.7], AxesLabel → {x, y}]
```

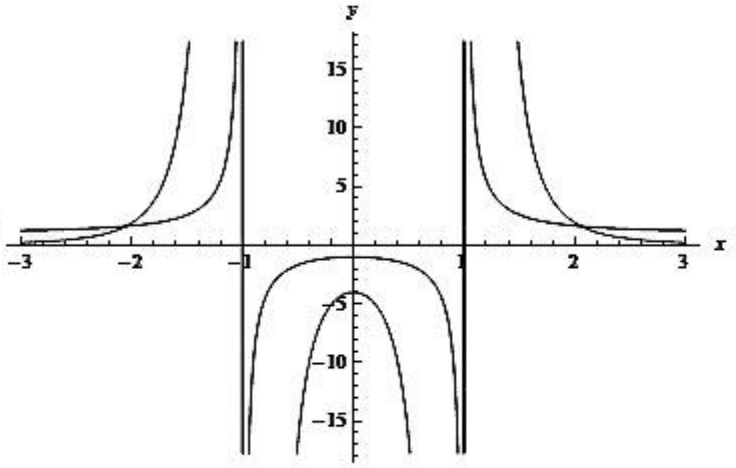
Out[6]=



(*Из графика видно, что функция не имеет точек перегиба*)

Рис. 5.52

```
In[7]:= (*Нарисуем графики f(x) и f''(x) вместе*)
        Plot[{f''[x], f[x]}, {x, -3, 3}, PlotStyle → {Hue[0.7], Hue[1]},
         AxesLabel → {x, y}]

Out[7]=
```




```
        (*Интервалы выпуклости и вогнутости очевидны из графика*)
```

Рис. 5.53

```
In[8]:= (*Для нахождения вертикальных асимптот определим значения x,
        при которых знаменатель обращается в ноль (точки разрыва):*)
        r := Solve[Denominator[f[x]] == 0, x, Reals]
        r2 := x /. r
        Print["Вертикальные асимптоты: ", "x=", r2[[1]], " и x=",
         r2[[2]]]

        Вертикальные асимптоты: x=-1 и x=1

In[11]:=
        (*Найдем горизонтальные (наклонные) асимптоты:*)
        k := Limit[f[x]/x, x → ∞]
        Print["k=", k]
        b := Limit[f[x] - k x, x → ∞]
        Print["b=", b]

        k=0

        b=1

In[15]:= (*Т.к. k=0, то:*)
        Print["Горизонтальная асимптота: y=", b]

        Горизонтальная асимптота: y=1
```

Рис. 5.54

```
In[16]:=
(*Построим график функции*)
Plot[{f[x]}, {x, -4, 4}, PlotStyle → {Hue[0.3], Hue[0.7]},
 AxesLabel → {x, y}]
```

Out[16]=

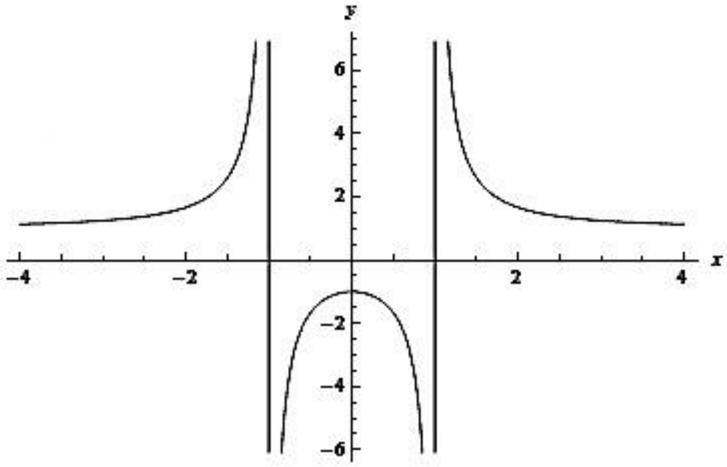


Рис. 5.55

Задания для самостоятельной работы

1. Найти область определения функции $f(x)$.

№ п/п	$f(x)$
1	$\sqrt[3]{6x^2 - x^3}$
2	$\dfrac{\sin x}{x^2 - 2x}$
3	$\dfrac{\sqrt{6-3x}}{\ln x^2}$
4	$\begin{cases} x^2, & x < -3, \\ \operatorname{ctg} x, & -3 \le x < 1, \\ \arccos\dfrac{x}{2}, & x > 1 \end{cases}$
5	$\dfrac{(x-3)^3}{(x-3)^2 - 4}$
6	$\dfrac{3x+2}{4x^2 + x + 8}$

2. Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции $f(x)$.

№ п/п	$f(x)$
1	x^3-9x^2+15x
2	$\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$
3	$(x-3)^2(x+3)$
4	xe^{-x}
5	$\dfrac{x^2-5}{x+3}$

3. Исследовать с помощью второй производной функции $f(x)=e^{-x^2}$ и $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$.

4. Найти асимптоты функции $f(x)$.

№ п/п	$f(x)$
1	$x^2(x-1)^{-1}$
2	$\dfrac{1}{\ln x^2}$
3	$\sqrt{x^2+4x+8}$

5. Исследовать функцию $f(x)$ и построить ее график.

№ п/п	$f(x)$
1	$\dfrac{x^3}{4(x^2-9)}$
2	$\sqrt[3]{x^3-4x}$
3	$\dfrac{2x^3-3x}{x-2}$
4	$x^3-9x^2+24x-16$
5	$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ \ln x, & 0<x<1, \\ \dfrac{1-x^2}{x+2}, & x\ge 1 \end{cases}$

6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Пример 6.1

Записать комплексное число $\dfrac{10+8i}{9-i}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение

Найдем действительную и мнимую части комплексного числа:

$$\frac{10+8i}{9-i}=\frac{(10+8i)(9+i)}{(9-i)(9+i)}=\frac{90+10i+72i+8i^2}{81-i^2}=\frac{90+82i-8}{81+1}=\frac{82+82i}{82}=1+i.$$

Применяя формулы $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, находим модуль и аргумент комплексного числа $1+i$ $(x=1,\ y=1)$:

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Комплексное число $1+i$ имеет следующий вид:

1) в тригонометрической форме $x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

2) в показательной форме $x+iy=re^{i\varphi}$:

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 6.1).

```
In[1]:= (*Введите комплексное число:*)
        z = (10 + 8 i)/(9 - i);
        Print["Приведем комплексное число к стандартному виду:"]
        Print["z=", z]
        Print["Модуль комплексного числа:"]
        Print["|z|=", n = Abs[z]]
        Print["Аргумент комплексного числа:"]
        Print["φ=", a = Arg[z]]
        Print["Тригонометрическая форма комплексного числа:"]
        Print["z=", n, "(Cos(", a, ")+", i, "Sin(", a, "))"]
        Print["Показательная форма комплексного числа:"]
        Print["z=", n * e^(i*a)]
```

Рис. 6.1

Решение представлено на рис. 6.2.

Приведем комплексное число к стандартному виду:

$z=1+i$

Модуль комплексного числа:

$|z|=\sqrt{2}$

Аргумент комплексного числа:

$\phi=\frac{\pi}{4}$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$z=\sqrt{2}\,(\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{4})+i\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}))$

Показательная форма комплексного числа:

$z=\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$

Рис. 6.2

Пример 6.2

Найти z_1+z_2, $z_1\overline{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=(1-i)^3$, $z_2=5+2i$.

Решение

Запишем комплексное число z_1 в алгебраической форме: $(1-i)^3=1^3-3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i$.

Тогда

1) $z_1+z_2=(-2-2i)+(5+2i)=3$;

2) $z_1\overline{z_2}=(-2-2i)(5-2i)=-10+4i-10i+4i^2=-14-6i$;

3) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-2-2i}{5+2i}=\frac{(-2-2i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)}=\frac{-10+4i-10i+4i^2}{25-4i^2}=\frac{-14-6i}{29}=$

$=\frac{-14}{29}-\frac{6}{29}i$.

Вычисления в Mathematica

Введем начальные условия (рис. 6.3).

```
In[1]:= (*Введите начальные условия:*)
        z1 = (1 - i)^3;
        z2 = 5 + 2 i;
        Print["Решение:"]
        Print["z1+z2=", z1 + z2]
        Print["z1·z2‾=", z1 * Conjugate[z2]]
        Print["z1/z2=", z1/z2]
```

Рис. 6.3

Результат работы программы представлен на рис. 6.4.

Решение:

$z1+z2=3$

$z1-\overline{z2}=-14-6\,i$

$\frac{z1}{z2}=-\frac{14}{29}-\frac{6\,i}{29}$

Рис. 6.4

Пример 6.3

Вычислить $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

Решение

Запишем комплексное число $z=\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:

$$r=|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2,\ \arg z=\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},\text{ т. е.}$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Для нахождения $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$ воспользуемся формулой Муавра: $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

Итак, $\left(\sqrt{3}+i\right)^6=2^6\left(\cos 6\cdot\frac{\pi}{6}+i\sin 6\cdot\frac{\pi}{6}\right)=2^6((-1)+i\cdot 0)=-2^6=-64$.

Вычисления в Mathematica

Решение примера 6.3 представлено на рис. 6.5.

```
In[1]:= (*Введите начальные данные:*)
        z = √3 + i;
        k = 6 ; (*степень*)

        Print["Решение:"]
        n = Abs[z];
        a = Arg[z];
        Print["(√3 +i)^6=", n^k (Cos[k*a] + i*Sin[k*a])]

        Решение:
        (√3 +i)^6=-64
```

Рис. 6.5

Пример 6.4

Решить уравнение $z^3-2-2i=0$.

Решение

Из уравнения $z^3-2-2i=0$: $z=\sqrt[3]{2+2i}$.

Представим комплексное число $2+2i$ в тригонометрической форме.

Так как $r=|z|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{2}=\dfrac{\pi}{4}$, то $2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

По формуле для корней из комплексного числа $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, где $k=\overline{0,\,n-1}$, находим

$$z=\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right).$$

Полагая k равным 0, 1, 2, получим три корня уравнения:

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi\cdot 0\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi\cdot 0\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi\cdot 1\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi\cdot 1\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi\cdot 2\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi\cdot 2\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right).$$

Используя формулы для косинуса и синуса разности углов, получаем:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right);$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right).$$

Итак,

$$z_0=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$z_1=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i,$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Найденным корням уравнения соответствуют вершины треугольника, вписанного в окружность радиусом $R=\sqrt{2}$ с центром в начале координат.

Вычисления в Mathematica

Вычисления в **Mathematica** имеют следующий вид (рис. 6.6).

```
In[1]:= ComplexExpand[Solve[x^3 - 2 - 2 i == 0]]

Out[1]= {{x → -1 + i}, {x → 1/2 - √3/2 + i (-1/2 - √3/2)}, {x → 1/2 + √3/2 + i (-1/2 + √3/2)}}
```

Рис. 6.6

Задания для самостоятельной работы

1. Представить в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

1) $z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; **2)** $z=\frac{2+3i}{4-2i}$; **3)** $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

2. Найти z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если:

1) $z_1=5-i$, $z_2=2-3i$;

2) $z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)$.

3. Возвести в указанную степень комплексные числа:

1) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right)^5$; **2)** $(1-i)^7$; **3)** $\left(\frac{i^{16}+3}{i^6+3}\right)^5$.

4. Найти все значения корня:

1) $\sqrt{3+4i}$; **2)** $\sqrt[4]{8-8\sqrt{3}i}$; **3)** $\sqrt[5]{-32}$.

5. Решить уравнения и изобразить их корни:

1) $z^4+64=0$; **2)** $z^2+4=0$; **3)** $z^7+128=0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные операции и функции

Клавиши быстрого доступа (горячие клавиши)

Таблица П.1

Комбинация	Действия
Shift + **Enter** или правый **Enter**	Вычисляет текущую ячейку
Alt + **Enter**	Создает новую ячейку
Shift + **Ctrl** + **D**	Разбивает текущую ячейку
Shift + **Ctrl** + **M**	Склеивает несколько ячеек
%	Возвращает результат последней операции
%%	Возвращает результат предпоследней операции
Ctrl + **2**	Шаблон квадратного корня
Ctrl + **6**	Верхний индекс
Ctrl + **-**	Нижний индекс
Ctrl + **7**	Надстрочный символ
Ctrl + **=**	Подстрочный символ
Ctrl + **2, затем Ctrl** + **5**	Корень любой степени
Ctrl + **/**	Дробь
[Esc] $->$ **[Esc]**	Стрелка $\rightarrow$

Основные математические функции и символы

Таблица П.2

Функция	Описание
1	2
Sqrt[x]	Квадратный корень: $\sqrt{x}$
Abs[x]	Модуль числа x: $\lvert x \rvert$
Exp[x]	Показательная функция: e^x
Log[x]	Натуральный логарифм: $\ln x$
Log[a, x]	Логарифм по основанию a: $\log_a x$
Sign[x]	Возвращает -1, 0 или 1, если аргумент x соответственно отрицательный, нулевой или положительный
n!	Факториал
Pi	$\pi = 3{,}14159$

Окончание табл. П.2

1	2
E	$e = 2{,}71828$
Sin[x]	Синус: $\sin x$
Cos[x]	Косинус: $\cos x$
ArcSin[x]	Арксинус: $\arcsin x$
ArcCos[x]	Арккосинус: $\arccos x$
Tan[x]	Тангенс: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
Cot[x]	Котангенс: $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
Sec[x]	Секанс: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
Csc[x]	Косеканс: $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$
ArcTan[x]	Арктангенс: $\operatorname{arctg} x$
ArcCot[x]	Арккотангенс: $\operatorname{arcctg} x$
Sinh[x]	Гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
Cosh[x]	Гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
Tanh[x]	Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Coth[x]	Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Работа с комплексными числами

Таблица П.3

Функция	Описание
I	Мнимая единица: $i = \sqrt{-1}$
Arg[z]	Аргумент комплексного числа z
Im[z]	Мнимая часть комплексного числа z
Re[z]	Действительная часть комплексного числа z
Conjugate[z]	Комплексно-сопряженное с z число

Работа с матрицами

Таблица П.4

Функция	Описание
MatrixForm[{a, b}, {c, d}]	Выводит традиционную запись матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Dimension[A]	Определяет размерность матрицы A
Drop[A, i]	Удаляет i-ю строку матрицы A
Drop[A, {j}, {k}]	Удаляет j-й и k-й столбец матрицы A
A[[i, j]]	Выбирает элемент матрицы A с индексами i, j.
A[[i]]	Выбирает i-ю строку матрицы A
Transpose[A][[j]]	Выбирает j-й столбец матрицы A
Replace[A, {a, b, ...}, n]	Заменяет n-ю строку матрицы A элементами $\{a, b, ...\}$
IdentityMatrix[n]	Определяет единичную матрицу n-го порядка
DiagonalMatrix[{a, b, ...}, k]	Определяет диагональную матрицу, содержащую отличные от нуля элементы a, b, ... на диагонали k
ConstantArray[b, {m, n}]	Определяет матрицу размера $\{m,n\}$ с одинаковыми элементами b
Tr[A]	Вычисляет след матрицы A
Dot[A, B]	Вычисляет произведение матриц A и B
Inverse[A]	Вычисляет обратную матрицу A^{-1}
RowReduce[A]	Приводит матрицу A к ступенчатому виду
MatrixRank[A]	Вычисляет ранг матрицы A
Tranpose[A]	Транспонирует матрицу A
MatrixPower[a, n]	Возводит в n-ую степень матрицу A
Det[A]	Вычисляет определитель матрицы A
Minors[A, k]	Выдает миноры k-го порядка матрицы A
Eigenvalues[A]	Вычисляет собственные значения матрицы A
Eigenvectors[A]	Вычисляет собственные векторы матрицы A
CharacteristicPolynomial[A, λ]	Выводит характеристический полином матрицы A относительно λ

Решение систем линейных уравнений

Таблица П.5

Функция	Описание
Solve[p, x]	Решение уравнения p относительно переменной x
Solve[{p, s, ...}, {x$_1$, x$_2$, ...}]	Решение системы уравнений $p,\ s,\ldots$ относительно переменных $x_1,\ x_2,\ldots$
NSolve[{p, s, ...}, {x$_1$, x$_2$, ...}]	Численное решение заданной системы уравнений
LinearSolve[A, B]	Решение системы линейных уравнений в матричной форме; решение матричного уравнения $AX = B$
RowReduce[C]	Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, где $C = \left(A\middle\vert B\right)$ – расширенная матрица системы линейных уравнений

Работа с векторами

Таблица П.6

Функция	Описание
Dot[a, A]	Умножает вектор $\vec{a}$ на матрицу A
a.b или **Dot[a, b]**	Вычисляет скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
a×b или **Cross[a, b]**	Вычисляет векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
a*b.c или **Dot[a, Cross[b, c]]**	Вычисляет смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$
a*b	Поэлементно умножает векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$
Norm[a]	Вычисляет длину вектора $\vec{a}$
Normalize[{{x$_1$, x$_2$, ...}]]	Возвращает нормированный вектор, координаты которого заданы $\{x_1,\ x_2,\ldots\}$
Orthogonalize[{a, b, ...}]	Строит нормированный ортогональный базис из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...
VectorAngle[a, b]	Вычисляет угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
Projection[a, b]	Вычисляет проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

Операции математического анализа

Таблица П.7

Функция	Описание
Limit[f(x), x → x_0]	Вычисляет предел функции $f(x)$ при стремлении x к заданному значению x_0
Limit[f(x), x → x_0, Direction → 1]	Вычисляет левосторонний предел
Limit[f(x), x → x_0, Direction → –1]	Вычисляет правосторонний предел
D[f, x]	Вычисляет производную функции от одной переменной x
D[f, {x, n}]	Вычисляет n-ю производную
Dt[f]	Вычисляет полный дифференциал от функции f
Dt[f, x]	Вычисляет полную производную функции f по переменной x
Dt[f, {x, n}]	Вычисляет полную производную n-го порядка функции f
Dt[f, {x, n}]dx	Вычисляет дифференциал n-го порядка
Series[f, {x, x_0, n}]	Раскладывает функцию f в ряд Тейлора по переменной x в окрестности точки $x = x_0$ до члена порядка n

Графические возможности

Таблица П.8

Функция	Описание
1	2
Piecewise [{{val1, cond1}, {val2, cond2}, ...}]	Задает кусочно-заданную функцию, где val$i$ – выражение для i-го участка функции, cond$i$ – условие для этого участка, определяющее область его определения
Plot[f(x), {x, x_{min}, x_{max}}]	График функции одного аргумента
Plot[f_1(x), f_2(x), ...}, {x, x_{min}, x_{max}}]	Отображает графики нескольких функций одного аргумента на одном рисунке
ParametricPlot {x(t), y(t), ...}, {t, t_{min}, t_{max}}]	График функции, заданной параметрически

Продолжение табл. П.8

1	2
PolarPlot[f(φ), { φ, φ_{min}, φ_{max}}]	График кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярных координатах
CountourPlot[F(x, y)==0, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}]	График функции $F(x, y) = 0$, заданной неявно
Show[g_1, g_2, ...]	Отображает графические объекты, позволяет совместить несколько полученных ранее графиков на одной координатной плоскости
Axes → True / Axes → False	Отображает оси / исключает отображение осей
AxesLabel → {x, y}	Создает надписи координатных осей
AxesStyle	Задает цвет и тип линии для осей
AxesOrigin → {a, b}	Определяет точку (a, b) пересечения осей
Ticks → None	Удаляет метки на осях координат; по умолчанию на каждой из осей наносятся метки
GridLines	Наносит координатную сетку
Frame	Определяет наличие или отсутствие рамки вокруг графика
PlotLabel	Подписывает график на рисунке
Filling → {1 → {2}}	Изображает заполненную область между кривыми 1 и 2
Filling → Axis	Изображает заполненную область между кривой и осью (Axis)
Filling → Bottom	Изображает заполненную область между кривой и нижней границей графика
AspectRatio → Automatic	Устанавливает одинаковый масштаб по осям x и y
AspectRatio → k	Задает отношение высоты графика к его ширине (не масштаб по осям) равным k
PlotRang → {{x_{min}, x_{max}}, {y_{min}, y_{max}}}	Указывает конкретный интервал изменения функции, который должен быть отображен на графике
PlotRange → All	Отображает всю область изменения функции

Продолжение табл. П.8

1	2
PlotStyle	Задает толщину, цвет и стиль кривой, изображаемой на графике, и включает список директив
Thickness[l]	Устанавливает толщину l, заданную как отношение ширины линии к ширине всего графика
PointSize[r]	Задает размер точек при построении графиков по точкам в относительных единицах; для задания точек в абсолютных единицах необходимо воспользоваться функцией **AbsolutPointSize[r]**
Background →	Задает цвет заднего фона, на котором отображается график
DefaultColor	Устанавливает цвет по умолчанию
Dashing[{d$_1$, d$_2$, ...}]	Изображает линию пунктиром; d_1, d_2 – длины изображаемых и неизображаемых сегментов кривой в относительных единицах
Circle[{x, y}, r]	Изображает окружность с центом в точке $\{x, y\}$ и радиусом r
Disk[{x, y}, r]	Изображает круг (область) с центром в точке (x, y) и радиусом r
Line[{x$_1$, y$_1$}, ...]	Изображает ломаную с вершинами в точках $\{\{x_1, y_1\},\ldots\}$
Point[{x, y}]	Изображает точку с координатами $\{x, y\}$
Polygon[{{x$_1$, y$_1$}, ...}]	Изображает замкнутый многоугольник (область) с вершинами в точках $\{\{x_1, y_1\},\ldots\}$
Rectangle[{x$_1$, y$_1$}, {x$_2$, y$_2$}]	Изображает прямоугольник (область), определяемый двумя диагонально расположенными вершинами
Rotate[G, –α, {x, y}]	Поворачивает графический объект или текст на угол $-\alpha$ вокруг точки с координатами $\{x, y\}$; положительное направление угла отсчитывается против часовой стрелки, поэтому угол поворота равен $-\alpha$

Окончание табл. П.8

1	2
Text["текст", {x, y}]	Размещает в точке с координатами $\{x, y\}$ текстовую строку
Point[{x, y, z}]	Изображает в пространстве точку с координатами $\{x, y, z\}$
Line[{x_1, y_1, z_1}, ...}]	Изображает ломаную в пространстве с вершинами в точках $\{\{x_1, y_1, z_1\}, \ldots\}$
Polygon[{{x_1, y_1, z_1}, ...}]	Изображает многогранную двумерную область в пространстве с вершинами в точках $\{\{x_1, y_1, z_1\}, \ldots\}$
Text["текст", {x, y, z}]	Размещает в точке с координатами $\{x, y, z\}$ текстовую строку
Plot3D[f(x, y), {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}]	Изображает трехмерный график
RevolutionPlot3D[f_z(r, φ), {r, r_{min}, r_{max}}, { φ, $φ_{min}$, $φ_{max}$}]	Изображает график функции, заданной в цилиндрических координатах
SphericalPlot3D[f_z(t, φ), {t, t_{min}, t_{max}}, {φ, $φ_{min}$, $φ_{max}$}]	Изображает график функции, заданной в сферических координатах
Manipulate	Позволяет посмотреть изменение рисунка при изменении параметра; передвигая бегунок панели **Manipulate**
Prolog	Отображает примитив перед рисованием графика
Epilog	Отображает примитив после рисования графика
ViewPoint	Определяет точку, из которой рассматривается изображаемая поверхность
ViewVertical	Изменяет вертикальное направление на графике
Mash → False (None)	Убирает изображение сетки, вместо опции **False** можно воспользоваться аналогом **None**

Элементы программирования

Таблица П.9

Функция	Описание
If[условие, действие для истины, действия для лжи]	Условный оператор
Do[тело цикла, {i, imin, imax}]	Простой цикл
For[i = 1, условие, i + +, тело цикла]	Цикл со счетчиком
While[уловие, тело цикла]	Условный цикл

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Таблица П.10

	Разложение функции в ряд Маклорена	Область сходимости
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
4	$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{m \cdot (m-1) \ldots (m-n+1)}{n!} x^n + \ldots$	$-1 < x < 1$
5	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$	$-1 < x \le 1$
6	$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$	$-1 \le x \le 1$
7	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$	$-1 < x < 1$
8	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$	$-1 < x < 1$

Список использованных источников

Основная литература

1. Левин, В. А. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии на базе пакета «Mathematica» / В. А. Левин, В. В. Калинин, Е. В. Рыбалка. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007.

2. Половко, А. М. Mathematica для студента. / А. М. Половко. – СПб. : Издательство «БХВ-Петербург», 2007.

3. Дьяконов, В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2008.

4. WolframAlpha: Computational Intelligence [Электронный ресурс]. – 2018. – Режим доступа : http://www.wolframalpha.com.

5. Лекции с анимацией [Электронный ресурс]. – 2018. – Режим доступа : http://yura.volchenko.com/Education.php.

Дополнительная литература

6. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica: курс лекций/ Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2005.

7. Голубева, Л. Л. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica : Лаб. практикум для студентов мех.-мат. фак. В 2 ч. Ч. 1 / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2012.