

# ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. Знакопеременные ряды.

Тема 9

# Числовые ряды

Определение **Числовым рядом** называется выражение следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{\infty} a_p = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = S_n + r_n$$
$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \quad - \text{остаток ряда.}$$

Если существует предел последовательности  $S_n$  **частичных сумм ряда**, то ряд называется **сходящимся**, а предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  называется суммой ряда.

**Необходимое условие сходимости:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

# Признаки сходимости числовых рядов

## 1. Признак сравнения в форме неравенства.

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n ,$$

причем для любого номера  $n \in N$   $n$ -ые члены рядов связаны неравенством

$$0 < a_n \leq b_n$$

Тогда из сходимости «большого» ряда следует сходимость «меньшего» ряда , а из расходимости «меньшего» ряда следует расходимость «большого» ряда.

# Признаки сходимости числовых рядов

«Большой ряд» называется **мажорирующим** рядом, а «меньший» – **мажорируемым**.

Поэтому признак может быть сформулирован следующим образом:

- Из сходимости мажорирующего ряда следует
- сходимость мажорируемого ряда, и, наоборот,
- из расходимости мажорируемого ряда следует
- расходимость мажорирующего ряда.

# Признаки сходимости числовых рядов

## 2. Признак сравнения в предельной форме.

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$  ,

то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  ,

т.е.  $a_n \sim b_n$  при  $n \rightarrow \infty$  , то в смысле сходимости оба ряда ведут себя одинаково.

# Признаки сходимости числовых рядов

## 3. Признак Д'Аламбера

Пусть для знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 0$$

Тогда:

- 1) если  $l > 1$  , ряд **расходится**;
- 2) если  $l < 1$  , ряд **сходится**.

В случае  $l = 1$  возможна как сходимость, так и расходимость ряда. (Признак не работает.)

# Признаки сходимости числовых рядов

## 4. Радиальный признак Коши

Пусть для знакоположительного ряда существует предел

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Тогда:

- 1) если  $l > 1$  , ряд **расходится**;
- 2) если  $l < 1$  , ряд **сходится**.

В случае  $l = 1$  возможна как сходимость, так и расходимость ряда. (Признак не работает.)

# Признаки сходимости числовых рядов

## 5. Интегральный признак сходимости Коши-Маклорена

Если для знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  существует такая **неотрицательная, непрерывная, монотонно убывающая** функция  $f(x)$ , определенная на промежутке  $[1, +\infty)$ , для которой  $f(n) = a_n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , то исследуемый ряд сходится **в том и только том случае**, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$



# Знакопеременные ряды

**Определение.** Числовой ряд называется **знакопеременным**, если в нем присутствует бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Примеры:

• 1.  $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n ,$

• 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

# Знакопеременные ряды

**Определение.** Знакопередающимися рядами называются такие ряды, два соседних члена которых имеют разные знаки.

- Знакопередающиеся ряды принято записывать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$$

где предполагается, что  $a_n > 0$ .

# Знакопеременные ряды

## Признак Лейбница

Пусть знакочередующийся ряд удовлетворяет двум следующим условиям:

1. члены ряда  $\{a_n\}$  монотонно убывают,
2. выполняется необходимое условие сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

- Тогда исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$  сходится.

# Знакопеременные ряды

Ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, называются *рядами Лейбница*.

## Следствие признака Лейбница

- Для ряда Лейбница  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$  выполняются

следующие неравенства:

$$S \leq a_1$$

и

$$|r_n| \leq |a_{n+1}|.$$

# Знакопеременные ряды

## Эталонные ряды Лейбница

1. Ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$  сходятся, если  $\alpha > 0$ , и расходятся, если  $\alpha \leq 0$ .

2. Ряды  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln^{\alpha} n}$  сходятся для любого  $\alpha$ .

# Знакопеременные ряды

## Определение 1

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

## Определение 2

Знакопеременный ряд **называется условно сходящимся**, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

# Знакопеременные ряды

## Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов тоже сходится абсолютно
2. Для любого абсолютно сходящегося ряда допустима произвольная перестановка и произвольная группировка членов ряда. При этом новый ряд будет по-прежнему абсолютно сходящимся к той же сумме.
3. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов по Коши сходится

# Знакопеременные ряды

## Свойство условно сходящегося ряда (теорема Римана)

Если ряд – *условно сходящийся*, то можно указать такую перестановку его членов, что либо полученный в результате перестановки ряд будет сходиться к любому наперёд заданному числу, либо будет вообще расходиться.

**Замечание.** Для исследования условной сходимости *нельзя применять признаки сравнения знакоположительных рядов.*



# Знакопеременные ряды

## Пример

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)$$

Исследуемый ряд - сумма двух рядов. Первый – гармонический, второй ряд условно сходится (по признаку Лейбница).

Исследуемый ряд же - расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.

# Знакопеременные ряды

Примеры:

• 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q^{n-1}},$$

• 2.

$$\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n ,$$

• 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n \cdot \sin n}}$$