

ПЛИС/FPGA АРХИТЕКТУРА ОБРАТИМОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО УМНОЖИТЕЛЯ КВАТЕРНИОНОВ

асп. Рыбенков Е.В; доц., к.т.н Петровский Н.А

Кафедра электронных вычислительных средств,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Беларусь



ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ (DSPA'18)
Москва 28–30 марта 2018 года

Мотивация:

В настоящее время методологии проектирования систем на ПЛИС/FPGA основываются на **IP компонентах** (IP – intellectual property). IP компоненты обеспечивают регулировку параметров в процессе создания проекта ПЛИС/FPGA и дают возможность **выбора** наиболее эффективной **архитектуры** для конкретного целевого приложения.

Цель статьи:

Разработать параметризованную **Q-MUL IP-компоненту** оператора умножения кватернионов, которая обеспечивает широкий диапазон регулировок параметров Q-ПУБФ без потери свойства обратимости.

Алгебра кватернионов \mathbb{H} – ассоциативная, некоммутативная 4-мерная алгебра¹:

$$\mathbb{H} = \{Q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \mid q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$$

Умножение кватернионов определяется соотношением мнимых частей:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j.$$

Сопряженный кватернион:

$$\bar{Q} = \mathbf{D}_c \cdot Q = q_1 - q_2i - q_3j - q_4k$$

$$\mathbf{D}_c = \text{diag}(1, -\mathbf{I}_3)$$

¹ Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. — М : Наука, 1973. — С. 145.

Умножение кватернионов в матричном виде:

$$P \cdot Q \neq Q \cdot P$$
$$R = P \cdot Q = \mathbf{M}^+(P) \cdot Q = \mathbf{M}^-(Q) \cdot P$$

$$\mathbf{M}^\pm(\bar{Q}) = \mathbf{M}^\pm(Q)^T$$

Матрица “левого” умножения $\mathbf{M}^+(P)$:

$$\mathbf{M}^+(P) = \begin{bmatrix} P_1 & -P_2 & -P_3 & -P_4 \\ P_2 & P_1 & -P_4 & P_3 \\ P_3 & P_4 & P_1 & -P_2 \\ P_4 & -P_3 & P_2 & P_1 \end{bmatrix};$$

Матрица “правого” умножения $\mathbf{M}^-(Q)$:

$$\mathbf{M}^-(Q) = \begin{bmatrix} Q_1 & -Q_2 & -Q_3 & -Q_4 \\ Q_2 & Q_1 & Q_4 & -Q_3 \\ Q_3 & -Q_4 & Q_1 & Q_2 \\ Q_4 & Q_3 & -Q_2 & Q_1 \end{bmatrix}$$

Соотношение между матрицами умножения:

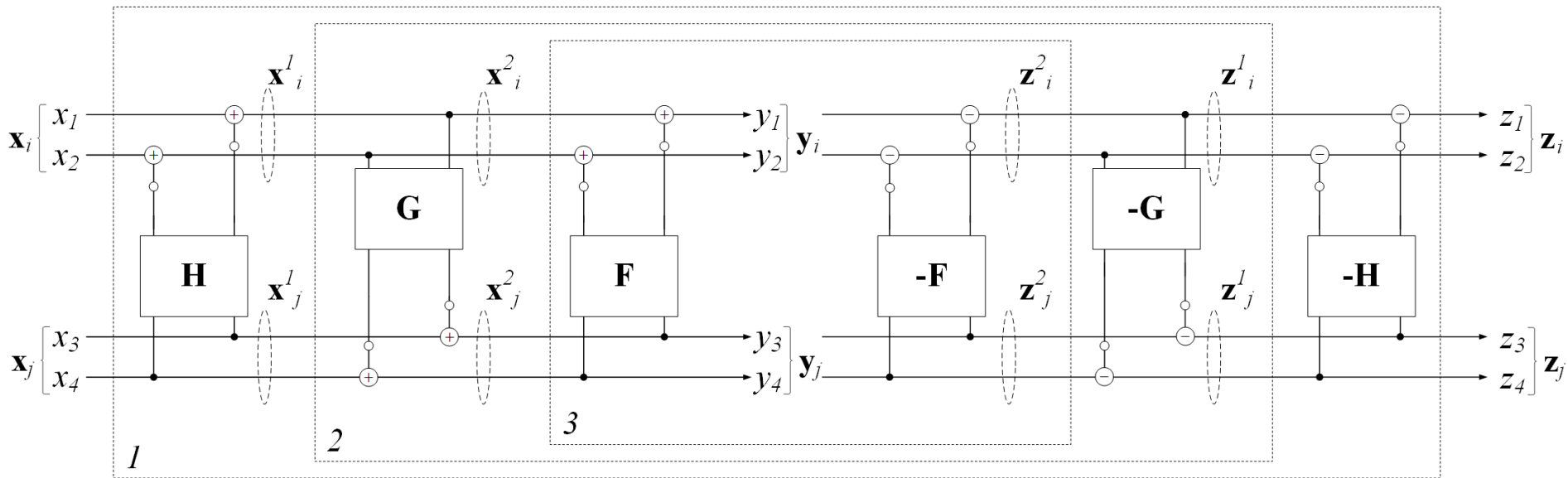
$$\mathbf{M}^\mp(Q) = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{M}^\pm(\bar{Q}) \cdot \mathbf{D}_c$$

Блочная лестничная факторизация умножителя кватернионов

Блочная лестничная факторизация матрицы “левого” умножения²:

$$M^+(Q) = \begin{bmatrix} C(Q) & -S(Q) \\ S(Q) & C(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & F(Q) \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ G(Q) & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & H(Q) \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix},$$

$$M^+(\bar{Q}) = \begin{bmatrix} I_2 & -H(Q) \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ -G(Q) & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & -F(Q) \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix},$$



² Parfieniuk M., Petrovsky A. Quaternion multiplier inspired by the lifting implementation of plane rotations // IEEE Trans. Circuits and systems – I: regular papers. – 2010. - Vol. 57, № 10. — P. 2708–2717.

Контроль динамического диапазона лестничных коэффициентов

Приведение лестничных коэффициентов к диапазону $[-1, 1]^3$:

$$\mathbf{M}^{\pm}(Q) = \begin{cases} \mathbf{P}_{post} \cdot \mathbf{M}^{\pm}(\tilde{Q}) \cdot \mathbf{P}_{pre}, & \text{если } \det(\mathbf{P}) = 1 \\ \mathbf{P}_{post} \cdot \mathbf{M}^{\mp}(\tilde{Q}) \cdot \mathbf{P}_{pre}, & \text{если } \det(\mathbf{P}) = -1 \end{cases}$$

Исходный кватернион: $Q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$

Модифицированный кватернион: $\tilde{Q} = q_3 + q_1i + q_4j + q_2k$

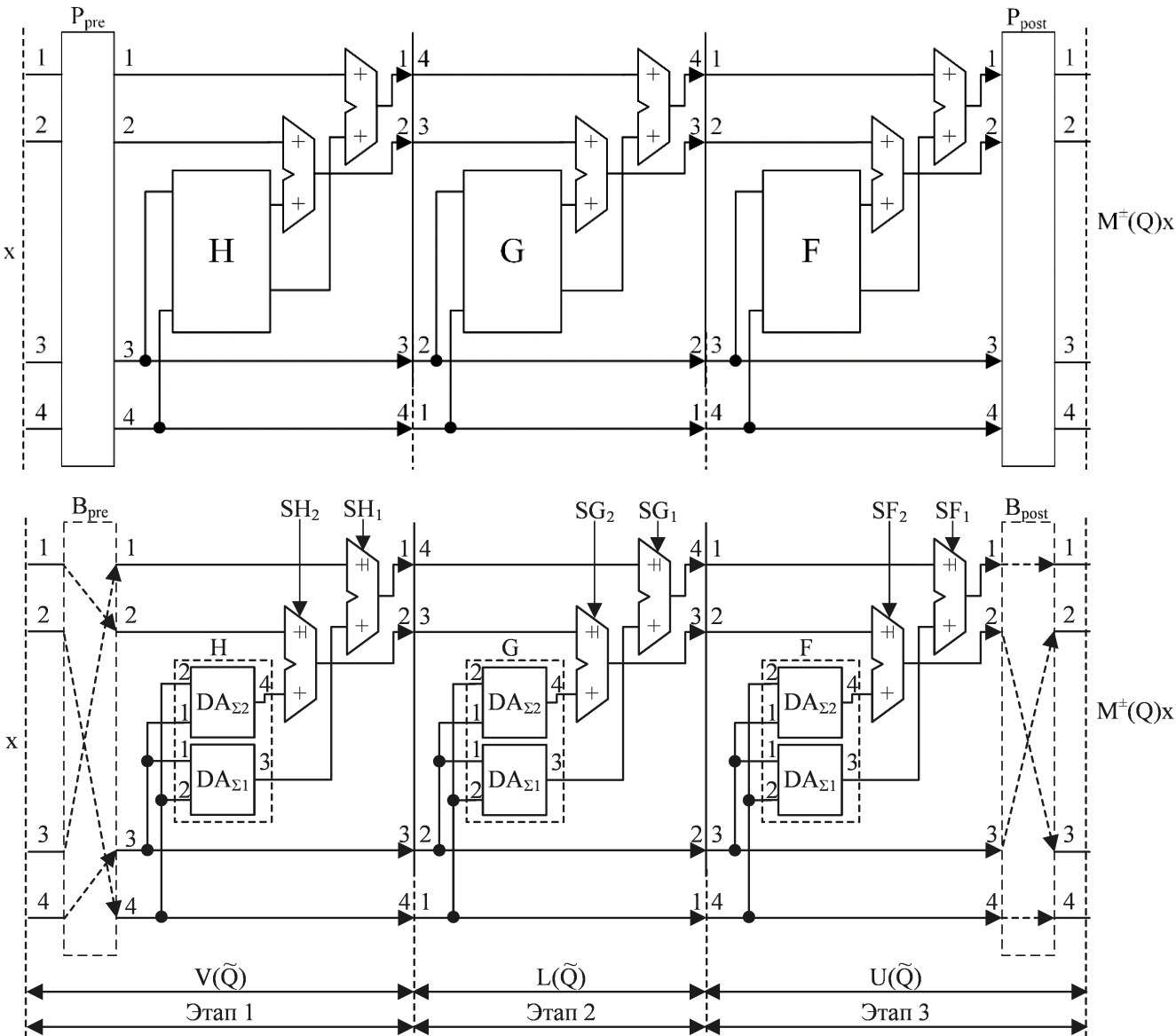
$$\mathbf{P}_{pre} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_{post} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

³ M. Parfieniuk and A. Petrovsky, "Quaternion multiplier inspired by the lifting implementation of plane rotations," IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 57, no. 10, pp. 2708–2717, Oct. 2010.

Правила модификации операторов умножения кватернион

№	Целевой оператор умножения $\mathbf{M}^{\pm}(Q)$	Правило модификации оператора для \tilde{Q}
1	$\mathbf{M}^+(Q)$	$\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = \mathbf{P}_{pre}; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{P}_{post}, \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}; \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H},$
2	$\mathbf{M}^+(\bar{Q})$	$\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = \mathbf{P}_{post}^T; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{P}_{pre}^T, \tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{H}; \tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{F},$
3	$\mathbf{M}^-(Q)$	$\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = (\mathbf{P}_{post}^T) \cdot \mathbf{D}_c; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{D}_c \cdot (\mathbf{P}_{pre}^T),$ $\tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{H}; \tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{F},$
4	$\mathbf{M}^-(\bar{Q})$	$\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = \mathbf{P}_{pre} \cdot \mathbf{D}_c; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{P}_{post}, \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}; \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$

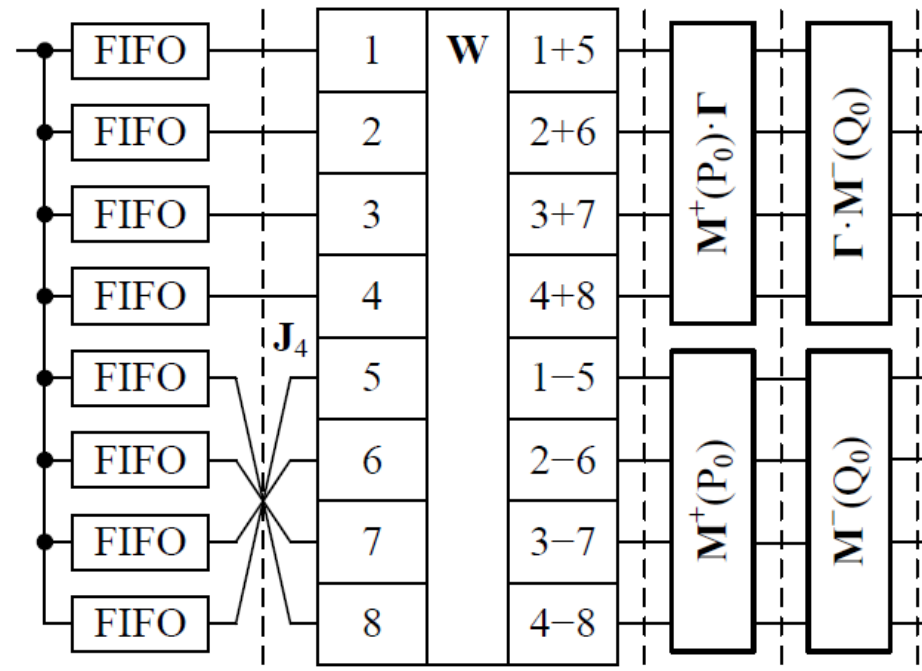
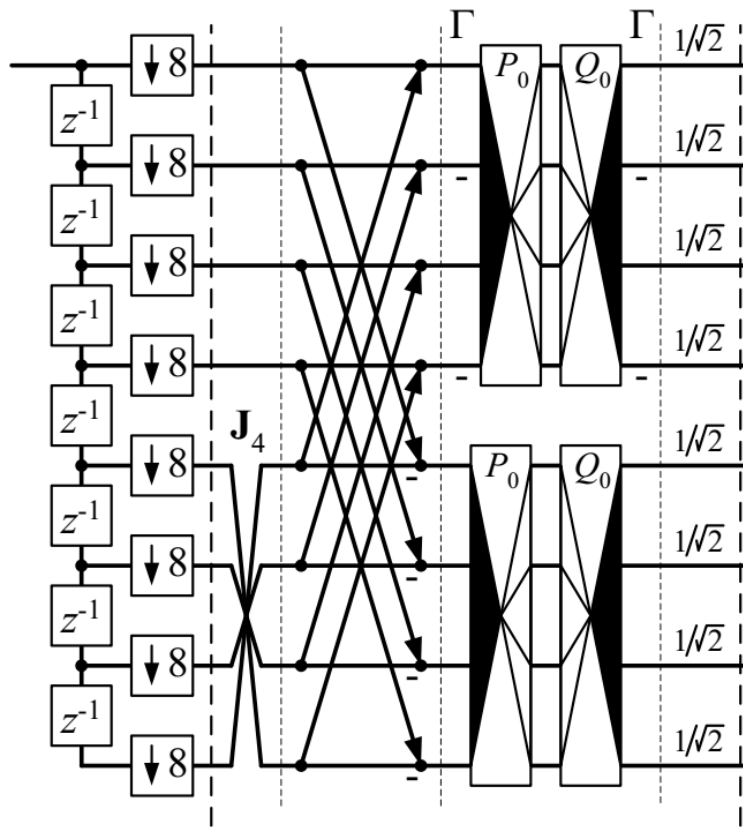
Структурная схема Q-MUL IP компоненты



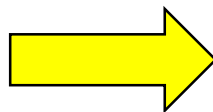
Правила изменения знаков коэффициентов умножителя кватернионов

Оператор умножения	Лестничные коэффициенты умножителя кватернионов
$\mathbf{M}^+(Q)$	$\mathbf{SH} = [SH_1, SH_2]^T = [r_1, r_2], \mathbf{SG} = [SG_1, SG_2]^T = [l_3 \cdot r_3, l_4 \cdot r_4],$ $\mathbf{SF} = [SF_1, SF_2]^T = [l_1, l_2],$ $\tilde{f}_{11} = l_1 \cdot f_{11}; \tilde{f}_{21} = l_2 \cdot f_{21}; \tilde{f}_{12} = l_1 \cdot f_{12}; \tilde{f}_{22} = l_2 \cdot f_{22},$ $\tilde{g}_{11} = l_3 \cdot g_{11}; \tilde{g}_{21} = l_4 \cdot g_{21}; \tilde{g}_{12} = l_3 \cdot g_{12}; \tilde{g}_{22} = l_4 \cdot g_{22},$ $\tilde{h}_{11} = r_3 \cdot h_{11}; \tilde{h}_{21} = r_3 \cdot h_{21}; \tilde{h}_{12} = r_4 \cdot h_{12}; \tilde{h}_{22} = r_4 \cdot h_{22}.$
$\Gamma_4 \cdot \mathbf{M}^+(Q)$	$\mathbf{SH} = [SH_1, SH_2]^T = [r_1, r_2], \mathbf{SG} = [SG_1, SG_2]^T = [l_3 \cdot r_3, -l_4 \cdot r_4],$ $\mathbf{SF} = [SF_1, SF_2]^T = [l_1, -l_2],$ $\tilde{f}_{11} = l_1 \cdot f_{11}; \tilde{f}_{21} = -l_2 \cdot f_{21}; \tilde{f}_{12} = l_1 \cdot f_{12}; \tilde{f}_{22} = -l_2 \cdot f_{22},$ $\tilde{g}_{11} = l_3 \cdot g_{11}; \tilde{g}_{21} = -l_4 \cdot g_{21}; \tilde{g}_{12} = l_3 \cdot g_{12}; \tilde{g}_{22} = -l_4 \cdot g_{22},$ $\tilde{h}_{11} = r_3 \cdot h_{11}; \tilde{h}_{21} = r_3 \cdot h_{21}; \tilde{h}_{12} = r_4 \cdot h_{12}; \tilde{h}_{22} = r_4 \cdot h_{22}.$
$\mathbf{M}^+(Q) \cdot \Gamma_4$	$\mathbf{SH} = [SH_1, SH_2]^T = [r_1, -r_2], \mathbf{SG} = [SG_1, SG_2]^T = [l_3 \cdot r_3, -l_4 \cdot r_4],$ $\mathbf{SF} = [SF_1, SF_2]^T = [l_1, l_2],$ $\tilde{f}_{11} = l_1 \cdot f_{11}; \tilde{f}_{21} = l_2 \cdot f_{21}; \tilde{f}_{12} = l_1 \cdot f_{12}; \tilde{f}_{22} = l_2 \cdot f_{22},$ $\tilde{g}_{11} = l_3 \cdot g_{11}; \tilde{g}_{21} = l_4 \cdot g_{21}; \tilde{g}_{12} = l_3 \cdot g_{12}; \tilde{g}_{22} = l_4 \cdot g_{22},$ $\tilde{h}_{11} = r_3 \cdot h_{11}; \tilde{h}_{21} = r_3 \cdot h_{21}; \tilde{h}_{12} = -r_4 \cdot h_{12}; \tilde{h}_{22} = -r_4 \cdot h_{22}.$

Структура параунитарного банка фильтров



Решетчатая структура ПУБФ



Аппаратная реализация ПУБФ

Заключение

Выводы:

1. Предложенная схема Q-MUL IP-компоненты является универсальной, поскольку изменение векторов знаков **SH**, **SG**, **SF**, матриц \mathbf{V}_{post} , \mathbf{V}_{pre} и коэффициентов блоков **F**, **G**, **H** позволяют не меняя структуру умножителя $\mathbf{M}^+(Q)$ вычислять все используемые модификации операторов умножителей кватернионов в Q-ПУБФ.
2. Операция умножения в блоках **F**, **G**, **H** может быть реализована на основе алгоритмов 2D CORDIC⁴, представления коэффициентов суммой степеней двойки⁵, распределённой арифметики на памяти⁶ или на сумматорах (DA-ADDER) .

⁴ Petrovsky, N. CORDIC-lifting factorization of paraunitary filter banks based on the quaternionic multipliers for lossless image coding / N. Petrovsky, A. Stankevich, A. Petrovsky // Multidimensional Systems and Signal Processing, in special issue Efficient video coding and beyond. — 2016. — V.27, № 3. — P. 667–695.

⁵ Multiplierless structurally orthogonal block-lifting-based quaternionic paraunitary filter banks with sum of-powers-of-two coefficients / N.A. Petrovsky, E.V. Rybenkov, A.A. Petrovsky // 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO'2017). – Bar, Montenegro. – 2017. – P. 255-258.

⁶ Structurally orthogonal finite precision FPGA implementation of block-lifting-based quaternionic paraunitary filter banks for L2L image coding / N.A. Petrovsky, E.V. Rybenkov, A.A. Petrovsky // Digital Signal Processing (DSP'2017): Proc. 22nd Int. Conf., London, United Kingdom, August 23-25, 2017 / Imperial college London. – London, 2017. – 5 P.

Спасибо за внимание!

Q-ПУБФ определение

8-канальный Q-ПУБФ анализа с линейной ФЧХ и попарно зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров определяется следующим образом¹ :

$$\begin{aligned} E(z) &= \mathbf{G}_{N-1}(z)\mathbf{G}_{N-2}(z) \dots \mathbf{G}_1(z)\mathbf{E}_0; \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_0 \mathbf{W} \cdot \text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, \mathbf{J}_{M/2}); \mathbf{G}_i = \frac{1}{2} \Phi_i \mathbf{W} \Lambda(z) \mathbf{W}; \\ \Phi_i &= \text{diag}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q_i), \mathbf{M}^-(Q_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P_i), \mathbf{M}^+(P_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{I}_4); \\ \Phi_{N-1} &= \text{diag}(\mathbf{J}_4, \mathbf{I}_4) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^-(Q_i), \mathbf{M}^-(Q_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{M}^+(P_i), \mathbf{M}^+(P_i)) \cdot \text{diag}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{I}_4), \end{aligned}$$

где M – число каналов;

N – порядок факторизации;

$\mathbf{J}_{M/2}$ – обратная единичная матрица;

$\mathbf{I}_{M/2}$ – единичная матрица;

$\mathbf{\Gamma}$ – диагональная матрица, элементы которой определяются как

$$\gamma_{mm} = (-1)^{m-1}, \quad m = 1, \dots, M - 1.$$

¹ Парфенюк М., Петровский А.А. Параунитарные банки фильтров на основе алгебры кватернионов: теория и применение // Цифровая обработка сигналов. - 2008, № 1, с.22-36.