Применение техники кодирования алгебраическими числами для построения схем быстрого вычисления дискретного косинусного преобразования

Вашкевич М.И.   Петровский А.А.

Кафедра электронных вычислительных средств
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Содержание доклада

- ✓ Введение
- ✓ Алгебраическая теория обработки сигнала (АТОС): обзор
- ✓ Представление дискретного косинусного преобразования (ДКП) в АТОС
- ✓ Получение быстрого алгоритма ДКП
- ✓ Техника кодирования алгебраическими целыми числами
- ✓ Реализация схемы вычисления ДКП с использованием алгебраических целых чисел
- ✓ Заключение

Введение

Цель исследования: разработать метод синтеза и реализации ДКП, который бы позволил получить:

- ✓ Быстрый алгоритм ДКП с малой вычислительной сложность;
- ✓ Регулярную граф-схему алгоритма ДКП;
- ✓ Реализацию не требующую умножителей и обладающую высокой точностью;

Алгебраическая теория обработки сигнала (АТОС)

АТОС – общий аксиоматический подход, позволяющий установить взаимосвязь между алгебраическими структурами и дискретными преобразованиями, используемыми в ЦОС.

В АТОС преобразованию ставится в соответствие ***полиномиальная алгебра***:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x]/p_n(x), \qquad b = [p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)]$$

где $\mathbb{F}$ – поле констант;
$\mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ – *векторное пространство* из полиномов от x над полем $\mathbb{F}$, степень которых меньше $\deg p_n(x) = n$.
Умножение элементов в $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ выполняется по модулю $p_n(x)$.

Алгебраическая теория обработки сигнала (АТОС)

В соответствии с Китайской теоремой об остатках

$$\mathcal{F}\colon\ \mathbb{F}[x]/p(x) \to \bigoplus_{0\le k<n} \mathbb{F}[x]/(x-\alpha_k),$$

где $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ – корни полинома $p(x)$.

Если в алгебре $\mathbb{F}[x]/p(x)$ определен базис $b = (p_0(x), \dots, p_{n-1}(x))$, то преобразование $\mathcal{F}$ приобретет матричную форму:

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}_{b,\alpha} = [p_\ell(\alpha_k)]_{0\le k,\ell<n}.$$

$\mathcal{P}_{b,\alpha}$ называют ***полиномиальным преобразованием*** алгебры $\mathbb{F}[x]/p(x)$ с базисом b.

Дискретное косинусное преобразование (ДКП)

ДКП-2 определяется следующим образом

$$y_k = \sum_{\ell=0}^{n} \cos\left(\frac{(2k+1)\ell}{2n}\right) x_\ell\,, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

ДКП-4:

$$y_k = \sum_{\ell=0}^{n} \cos\left(\frac{(2k+1)(2\ell+1)}{2n}\right) x_\ell\,, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

Оба преобразования легко представляются в виде векторно-матричного умножения:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{T}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{y}^T = [y_0, \dots, y_{n-1}]$,

$\mathbf{x}^T = [x_0, \dots, x_{n-1}]$,

$\boldsymbol{T}$ – матрица преобразования.

Дискретное косинусное преобразование в АТОС

В АТОС **ДКП-2 и ДКП-4** связаны со следующими полиномиальными алгебрами

$$\mathbb{F}[x]/(x-1)U_{n-1}(x), \quad b = [V_0(x), \dots, V_{n-1}(x)],$$
$$\mathbb{F}[x]/2T_n(x), \quad b = [V_0(x), \dots, V_{n-1}(x)],$$

где $T_n(x), U_n(x)$ и $V_n(x)$ – *полиномы Чебышева* первого, второго и третьего рода, соответственно.

Получение быстрого алгоритма в АТОС

В АТОС **быстрый алгоритм** дискретного преобразования $\mathcal{P}_{b,\alpha}$ образуется, как *пошаговая декомпозиция* полиномиальной алгебры, используя факторизацию $p_n(x) = q_k(x) \cdot r_m(x)$:

$$\mathbb{F}[x]/p_n(x) \to \mathbb{F}[x]/q_k(x) \oplus \mathbb{F}[x]/r_m(x) \to$$
$$\to \bigoplus_{0 \le i < k} \mathbb{F}[x]/(x - \beta_i) \oplus \bigoplus_{0 \le j < m} \mathbb{F}[x]/\left(x - \gamma_j\right) \to$$
$$\to \bigoplus_{0 \le i < n} \mathbb{F}[x]/(x - \alpha_i),$$

что позволяет найти факторизацию матрицы преобразования:

$$\mathcal{P}_{b,\alpha} = P\left(\mathcal{P}_{c,\beta} \oplus \mathcal{P}_{d,\gamma}\right)B.$$

Быстрый рекурсивный алгоритм ДКП-2

Быстрый алгоритм ДКП-2 ($n = 2^k$) можно получить исходя из следующей факторизации полинома Чебышева второго рода:

$$U_{n-1}(x) = U_{n/2-1}(x) \cdot 2T_n(x),$$

Что приводит к следующей рекурсивной формуле:

$$\text{DCT-2}_n = \underbrace{L^n_{n/2}}_{\text{permutation}} \times (\underbrace{\text{DCT-2}_{n/2}}_{\substack{\text{half-size}\\ \text{DCT-2}}} \oplus \underbrace{\text{DCT-4}_{n/2}}_{\substack{\text{half-size}\\ \text{DCT-4}}}) \times \underbrace{B_n}_{\substack{\text{sparse}\\ \text{matrix}}}$$

Быстрый рекурсивный алгоритм ДКП-4

Для получения **быстрого алгоритма ДКП-4** ($n = 2^k$) предлагается следующая факторизация[1]:

$$2T_n(x) - 2\cos r\pi =$$
$$= \left(2T_{n/2}(x) - 2\cos\tfrac{r}{2}\pi\right)\cdot\left(2T_{n/2}(x) - 2\cos\pi\left(1 - \tfrac{r}{2}\right)\right)$$

Что приводит к следующей рекурсивной формуле:

$$\text{DCT-4}_n(r) = \underbrace{P}_{\text{permutation}} \times \left(\underbrace{\text{DCT-4}_{\frac{n}{2}}\left(\tfrac{r}{2}\right)}_{\text{half-size DCT-4}} \oplus \underbrace{\text{DCT-4}_{\frac{n}{2}}}_{\text{half-size DCT-4}}\left(1 - \tfrac{r}{2}\right)\right) \times \underbrace{B_n^{(C4)}(r)}_{\text{sparse matrix}}$$

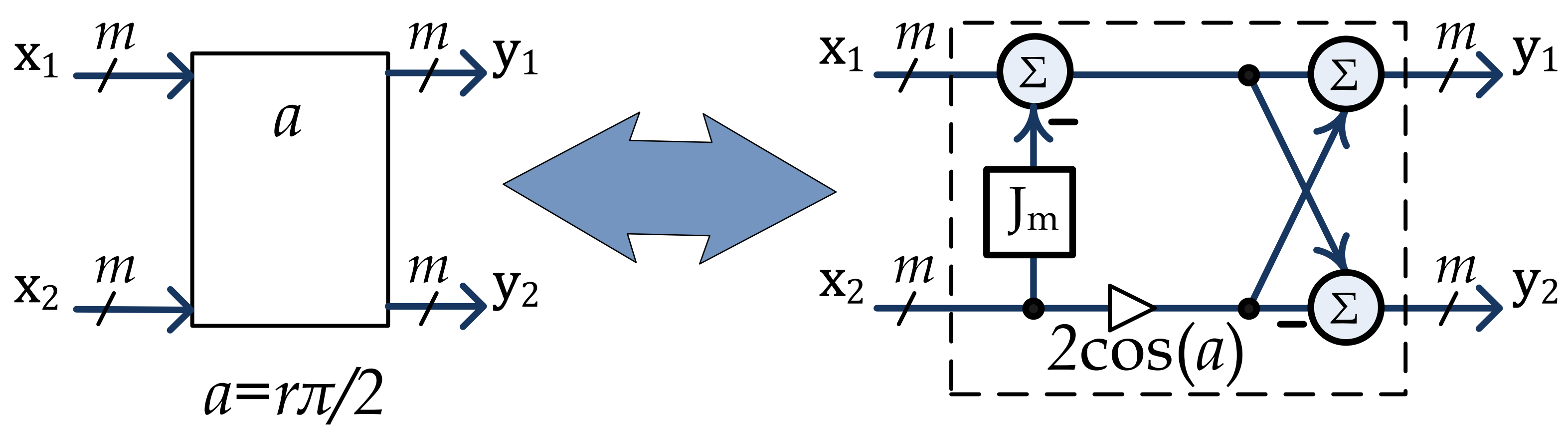
---

[1] $r \in (0, 1)$

Быстрый алгоритм ДКП-2

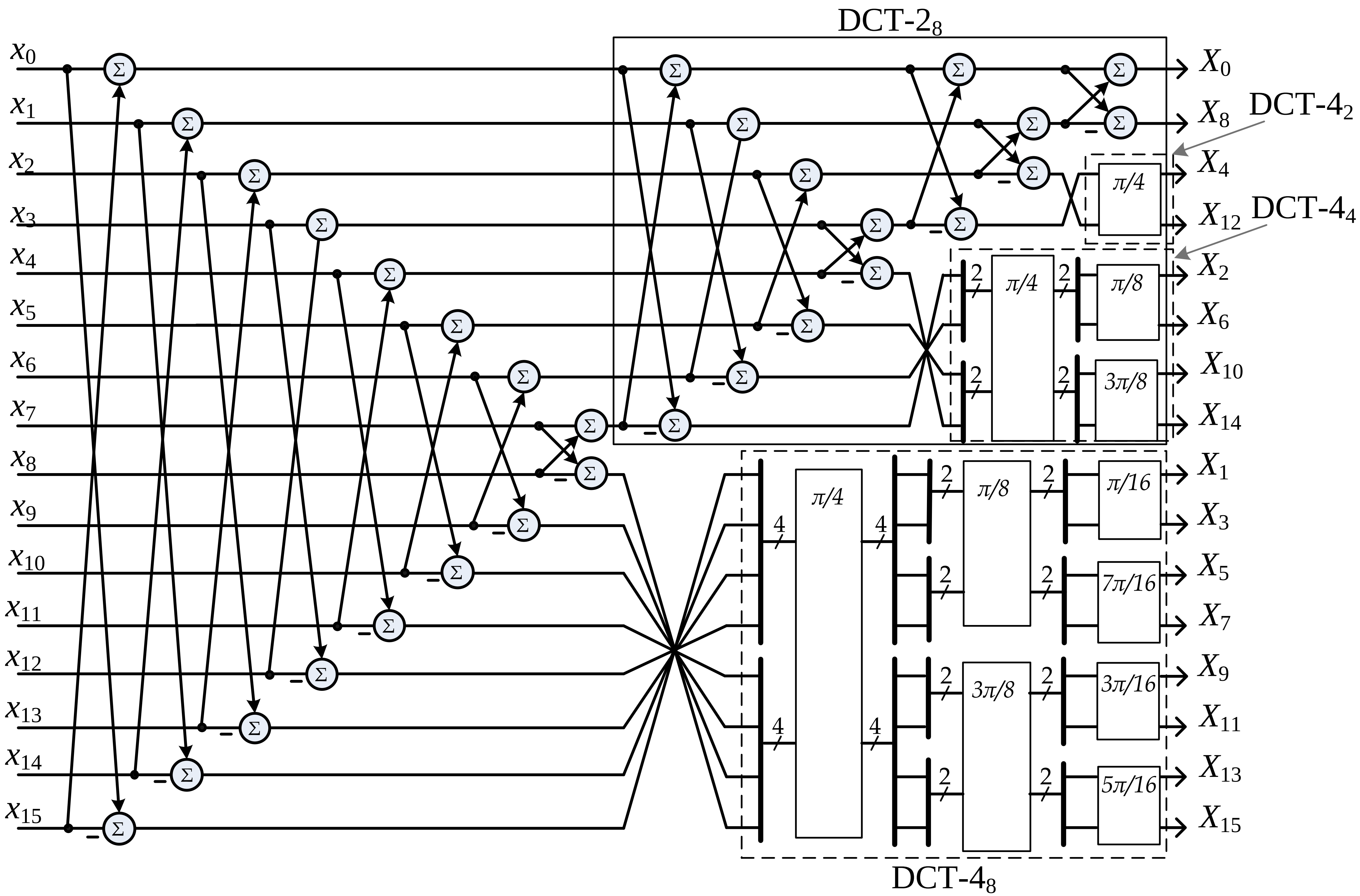
Совместное использование представленных факторизаций позволяет получить быстрый рекурсивный алгоритм $\mathrm{DCT\text{-}2}_{2^k}$. **Ключевой шаг** этого алгоритма – умножение на матрицу $B_n^{(C4)}(r)$. Все иррациональные множители сосредоточены в ней. Эта операция подобна операции *бабочка* алгоритма БПФ.

$$\mathbf{y} = B_n^{(C4)}(r)\mathbf{x}, \text{ где}$$
$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T\ \mathbf{x}_2^T],$$
$$\mathbf{y}^T = [\mathbf{y}_1^T\ \mathbf{y}_2^T]$$



16-точечтный быстрый алгоритм ДКП-2

Граф-схема 16-точечного ДКП-2



Алгебраические целые числа

- ✓ ***Алгебраическими целыми числами*** (АЦЧ) называют комплексные (и в частности вещественные) корни многочленов с целыми коэффициентами, у которых старший коэффициент равен единице.

- ✓ Пример: $z = 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$
является корнем полинома
$p(z) = z^4 - 4z^2 + 2.$

Кодирование множителей ДКП используя АЦЧ

Поскольку **все множители ДКП** имеют вид $2\cos\frac{k\pi}{2n}$, то имеет смысл определить z=$2\cos\frac{\pi}{2n}$. В этом случае полином $p(z)$ и все множители можно выразить, используя полиномы Чебышева первого рода:

$$
\begin{aligned}
p(z) &= 2T_n(z/2), \\
2\cos\frac{k\pi}{2n} &= 2T_k(z/2).
\end{aligned}
$$

Кодирование множителей 16-точечного ДКП-2

AI ENCODING SCHEMES FOR DCT-4_2, DCT-4_4 AND DCT-4_8

AI representation of multiplier for DCT-4_2 $(z = 2\cos(\pi/4))$

$$p(z) = z^2 - 2$$

$$2\cos(\pi/4) = z$$

AI representation of multipliers for DCT-4_4 $(z = 2\cos(\pi/8))$

$$p(z) = z^4 - 4z^2 + 2$$

$$2\cos(\pi/8) = z$$
$$2\cos(2\pi/8) = z^2 - 2$$
$$2\cos(3\pi/8) = z^3 - 3z$$

AI representation of multipliers for DCT-4_8 $(z = 2\cos(\pi/16))$

$$p(z) = z^8 - 8z^6 + 20z^4 - 16z^2 + 2$$

$$2\cos(\pi/16) = z$$
$$2\cos(2\pi/16) = z^2 - 2$$
$$2\cos(3\pi/16) = z^3 - 3z$$
$$2\cos(4\pi/16) = z^4 - 4z^2 + 2$$
$$2\cos(5\pi/16) = z^5 - 5z^3 + 5z$$
$$2\cos(6\pi/16) = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2$$
$$2\cos(7\pi/16) = z^7 - 7z^5 + 14z^3 - 7z$$

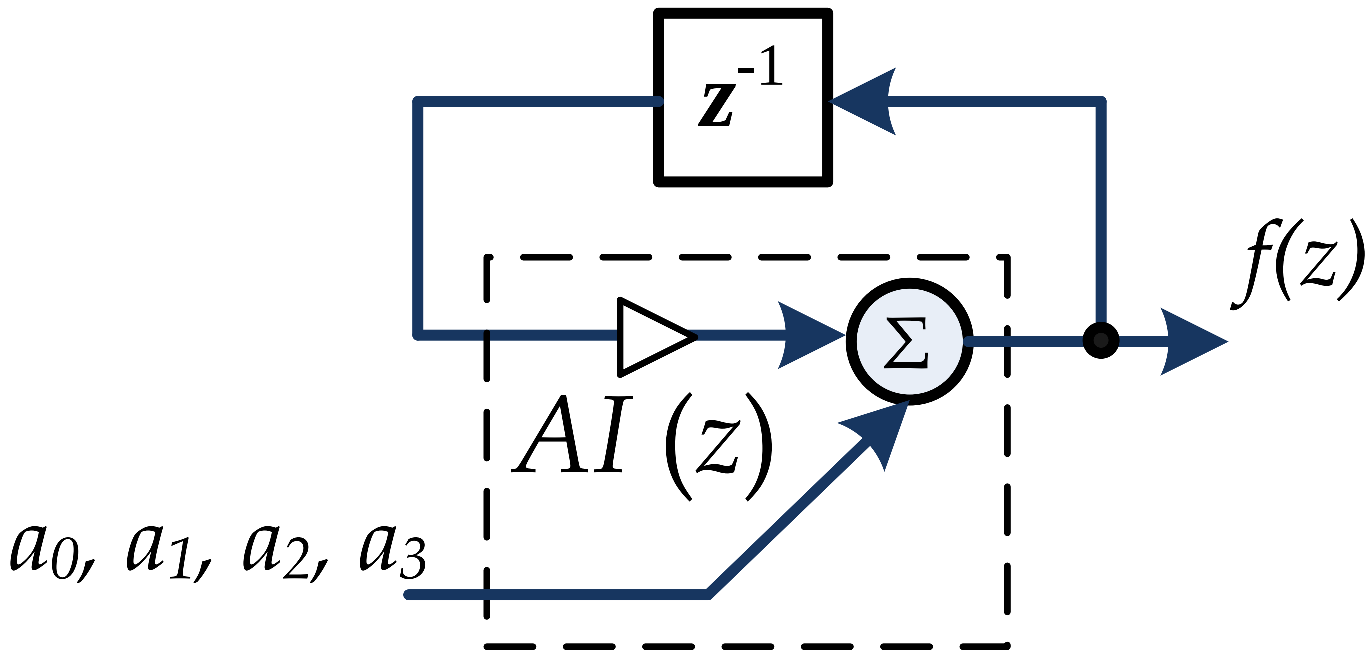
Декодирование алгебраических целых чисел

Декодирование необходимо для преобразования выходов схемы ДКП (представленных в виде полинома)

$$f(z) = a_0 z^0 + \cdots a_{n-1} z^{n-1}$$

к численному виду. Это делается с использованием схемы Горнера:

$$f(z) = (\ldots(a_{n-1}z + a_{n-2})z + a_{n-3})z + \cdots + a_1)z_1 + a_0$$



Мера точности: Эффективность кодирования

Вычисление показателя эффективности кодирования – широко используемый способ определения того, насколько хорошо преобразование «упаковывает» энергию сигнала в небольшое число коэффициентов.

$$C_g = 10\log_{10}\frac{\sigma_x^2}{\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sigma_{x_k}^2\|f_k\|^2\right)^{1/n}},$$

где n – число базисных функций преобразования,

σ_x^2 – дисперсия входа,

$\sigma_{x_k}^2$ – дисперсия k-го выхода преобразования,

$\|f_k\|^2$ – норма k-ой базисной функции.

Сравнение показателя эффективности кодирования

Преобразование	Эффективность кодирования
Реализация с плавающей точкой $\mathbf{DCT\text{-}2_{16}}$	9,4555 [dB]
16-point binDCT[2]	9,4499 [dB]
Предлагаемая реализация (9 бит на дробную часть)	9,4546 [dB]
Предлагаемая реализация (12 бит на дробную часть)	9,4553 [dB]

Реализация на основе АЦЧ имеет эффективность кодирования близкую к истинному ДКП-2.

---

[2] J. Liang and T. D. Tran, "Fast multiplierless approximations of the DCT with the lifting scheme," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 49, pp. 3032–3044, 2001.

Заключение

Предложен метод синтеза и реализации дискретного косинусного преобразования для размера входного блока данных равного степени числа два. Достоинства-ми получаемых в результате синтеза схем ДКП является

- ✓ Регулярность граф-схемы алгоритма ДКП
- ✓ Реализация на основе кодирования АЦЧ не требую-щая умножителей
- ✓ Высокая точность