

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра физики

**Е. В. Андрос, А. В. Березин, А. А. Григорьев**

## **ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики  
и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей  
1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»,  
1-40 03 01 «Искусственный интеллект», 1-40 04 01 «Информатика  
и технологии программирования», 1-40 05 01 «Информационные системы  
и технологии (по направлениям)», 1-58 01 01 «Инженерно-психологическое  
обеспечение информационных технологий»*

Минск БГУИР 2018

УДК [537+535](076)

ББК 22.3я73

А66

Рецензенты:

кафедра технической физики  
Белорусского национального технического университета  
(протокол №6 от 02.02.2018);

доцент кафедры естественных наук  
государственного учреждения образования  
«Университет гражданской защиты  
Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь»  
кандидат физико-математических наук, доцент В. И. Терешенков

**Андрос, Е. В.**

А66      Электромагнетизм. Волновая оптика. Практикум по решению задач : пособие / Е. В. Андрос, А. В. Березин, А. А. Григорьев. – Минск : БГУИР, 2018. – 74 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-424-6.

Предназначено для оказания помощи студентам в изучении разделов «Электромагнетизм» и «Волновая оптика» курса общей физики, организации самостоятельной работы студентов. Полностью соответствует типовой программе по физике для высших учебных заведений. Включает краткие сведения из математики, теоретический материал по темам «Электростатическое поле в вакууме», «Магнитное поле в вакууме», «Сила Ампера. Сила Лоренца», «Диэлектрики и магнетики», «Закон электромагнитной индукции», «Уравнения Максвелла», «Электромагнитные волны. Энергия и импульс электромагнитного поля», «Волновая оптика», примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения (с ответами) по вышеуказанным темам.

УДК [537+535](076)  
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-543-424-6

© Андрос Е. В., Березин А. В.,  
Григорьев А. А., 2018  
© УО «Белорусский государственный  
университет информатики  
и радиоэлектроники», 2018

## Содержание

1. Краткие сведения из математики.....	4
1.1. Производная. Дифференциал.....	4
1.2. Первообразная. Неопределенный интеграл .....	5
1.3. Определенный интеграл .....	5
1.4. Векторный анализ .....	6
2. Электростатическое поле в вакууме.....	9
2.1. Напряженность. Принцип суперпозиции .....	9
2.2. Теорема Гаусса для вектора напряженности $\vec{E}$ .....	14
2.3. Связь напряженности и потенциала.....	18
3. Магнитное поле в вакууме .....	23
3.1. Вектор магнитной индукции. Закон Био – Савара – Лапласа .....	23
3.2. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ .....	28
4. Сила Ампера. Сила Лоренца .....	30
5. Диэлектрики и магнетики.....	36
5.1. Диэлектрики в электрическом поле .....	36
5.2. Магнитное поле в веществе .....	44
6. Закон электромагнитной индукции.....	47
7. Уравнения Максвелла .....	53
8. Электромагнитные волны. Энергия и импульс электромагнитного поля.....	56
9. Волновая оптика .....	61
9.1. Интерференция света.....	61
9.2. Дифракция света.....	66
Список использованных источников .....	73

# 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

## 1.1. Производная. Дифференциал

Физические величины зависят от времени (например, скорость и ускорение материальной точки), от пространственных координат (например, напряженность электрического поля), т. е. являются функциями времени и координат. Отвлекаясь от физического смысла величин, пишут:  $y = f(x)$ ,  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  для функций одной и нескольких независимых переменных. Рассмотрим функцию одной переменной  $y = f(x)$ . На интервале  $[x, x_1]$  приращению аргумента  $\Delta x = x_1 - x$  отвечает приращение функции  $\Delta y = f(x_1) - f(x)$ .

**Производной**  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$  от функции  $y = f(x)$  по  $x$  называется предел отношения  $\Delta y / \Delta x$ , когда  $\Delta x$  стремится к нулю:

$$y' = f' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если этот предел существует. Производная дает скорость изменения функции по  $x$ .

Операция нахождения производной называется *дифференцированием функции*. Производные конкретных функций находят, используя основные свойства производной, правило дифференцирования сложной функции и таблицы производных.

Пусть заданы две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ . Тогда выполняются свойства:

$$(f + g)' = f' + g'; (fg)' = f'g + fg'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}.$$

**Дифференциал функции**  $f(x)$  определяется следующим образом:  $dy = f' dx$ , где  $dx \equiv \Delta x$  – дифференциал аргумента, совпадающий с его приращением. Дифференциал функции  $dy$  не совпадает с ее приращением  $\Delta y$ . Однако, выбрав достаточно малым приращение аргумента  $\Delta x$ , можно со сколь угодно малой относительной погрешностью считать равными  $\Delta y$  и  $dy$  –  $\Delta y \approx dy$ . Следовательно,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x; f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

На этих формулах основаны приближенные вычисления функций. В пределе  $\Delta x \rightarrow 0$  дифференциал функции и ее приращение совпадают. В этом случае  $dy$  и  $dx$  будем называть *элементарными (бесконечно малыми) приращениями функции и аргумента*.

Пусть  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  – функция  $n$  переменных  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

**Частная производная функции**  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  по переменной  $x_1$  есть предел отношения

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\Delta x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Частная производная дает скорость изменения функции  $f$  по  $x_1$  при фиксированных значениях остальных независимых переменных. Аналогично определяются частные производные по  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Частную производную по переменной  $x_k$  можно найти, взяв обыкновенную производную от функции  $f$  по  $x_k$ , считая остальные  $n - 1$  переменные постоянными.

**Второй производной функции  $y = f(x)$  по  $x$**  называется производная от ее первой производной по  $x$ :

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

## 1.2. Первообразная. Неопределенный интеграл

**Интегрирование** – операция, обратная дифференцированию. При интегрировании по известной функции  $f(x)$  находят функцию  $F(x)$ , производная которой равна  $f(x)$ :

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

Функцию  $F(x)$  называют **первообразной  $f(x)$** . Первообразная определена с точностью до произвольного постоянного слагаемого  $C$ .

Множество первообразных функций  $f(x)$  называют **неопределенным интегралом от  $f(x)$**  и обозначают символом

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

При интегрировании используют свойства неопределенных интегралов, таблицу неопределенных интегралов, различные методы.

## 1.3. Определенный интеграл

Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$ . Разобьем этот отрезок на  $n$  отрезков  $[x_k, x_{k-1}]$ , причем  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Сумма

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k) \Delta x_k,$$

где  $x_k \leq \varepsilon_k \leq x_{k+1}$ ,  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  называется интегральной суммой функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Предел этой суммы, когда  $n \rightarrow \infty$ , а все  $\Delta x_k \rightarrow 0$ , называется **определенным интегралом функции  $f(x)$  в пределах от  $x = a$  до  $x = b$** :

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ :  $F(x)' = f(x)$ .

#### 1.4. Векторный анализ

**Скалярной величиной (скаляром)** называется величина, которая при определенном выборе единицы меры задается числом ее измеряющим (температура, энергия и т. д.).

**Векторной величиной (вектором)** называют направленный отрезок. Вектор характеризуется численным значением (модулем, величиной) в выбранном масштабе и направлением в пространстве. В пространстве векторов определены операции умножения вектора на число, сложения векторов.

*Сложение векторов* выполняется согласно правилу треугольника (параллелограмма). В декартовой системе координат вектор  $\vec{a}$  можно задать с помощью его проекций  $a_x, a_y, a_z$  на координатные оси:  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ . Сложение векторов можно выполнить, сложив их одноименные проекции.

*Скалярным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$*  называется скаляр, величина которого равна произведению величин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними. Скалярное произведение равно сумме произведений одноименных проекций векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

*Векторным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$*  называется вектор  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ , перпендикулярный векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и направленный в соответствии с правилом правого винта (буравчика). Модуль векторного произведения равен произведению модулей  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , умноженному на синус угла между ними:

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = ab \sin \alpha.$$

В декартовой системе координат векторное произведение можно представить в виде формального определителя:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Если в каждой точке некоторой области пространства, в частности, во всем пространстве задана скалярная или векторная величина (скалярная или векторная функция), то мы имеем *скалярное* или *векторное поле (функцию)* соответственно. Математические свойства полей изучают в векторном анализе. Физические величины, описывающие электромагнитное поле, являются скалярными и векторными функциями или полями. В декартовой системе координат элементарному перемещению  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  отвечает элементарное приращение скалярного поля

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

которое представляет собой скалярное произведение двух векторов  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  и  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla}\varphi = \text{grad}\varphi$ .

Векторное поле, компоненты которого равны  $a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ,  $a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ , называют **градиентом скалярного поля  $\varphi$** . Очевидно, что проекции векторного поля  $\text{grad}\varphi$  на координатные оси дают скорости изменения скалярного поля  $\varphi$  в соответствующих направлениях. Для упрощения записи основных формул векторного анализа (соответственно электродинамики), а также работы с ними вводится векторный дифференциальный оператор  $\vec{\nabla}$  («набла»). В декартовой системе координатах он имеет вид

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Это формальное выражение приобретает смысл, если его справа умножить на скалярную или векторную функцию (поле). При умножении на скалярную функцию координат  $\varphi$  (скалярное поле) в полном соответствии с правилом умножения вектора на число получаем векторную функцию (векторное поле):

$$\vec{a} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

**Потоком векторного поля  $\vec{a}$  через поверхность  $(S)$**  называют интеграл

$$\Phi = \int (\vec{a}, d\vec{S}),$$

взятый по этой поверхности. Здесь  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  – вектор, перпендикулярный поверхности в данной точке и равный по величине площади  $dS$  выбранного элементарного участка поверхности;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к выбранному участку ( $dS$ ). При вычислении потока через замкнутую поверхность принято вектор нормали к ней направлять наружу. Произвольную точку  $P$  пространства, где определено векторное поле  $\vec{a}$ , окружим замкнутой поверхностью  $(S)$ . Поверхность ограничивает трехмерную область  $(V)$  объемом  $V$ .

**Дивергенцией векторного поля  $\vec{a}$  в точке  $P$**  называют предел отношения

$$\text{div}\vec{a}(P) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{a}, d\vec{S})}{V},$$

где подразумевается, что при  $V \rightarrow 0$  поверхность  $(S)$  стягивается в точку  $P$ . Очевидно, что дивергенция векторного поля является скалярным полем. Далее аргумент  $P$  будем опускать. В декартовой системе координат

$$\text{div}\vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Интеграл по замкнутому контуру (кривой, линии)  $(L)$

$$C = \oint (\vec{a}, d\vec{l}) = \oint adl\cos\alpha$$

называют *циркулирующей векторного поля*  $\vec{a}$ . Здесь  $dl$  – элементарный участок контура;  $d\vec{l} = dl\vec{\tau}$  – элементарный вектор касательный к контуру;  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательный к контуру;  $\alpha$  – угол между  $\vec{a}$  и  $d\vec{l}$ . Направление обхода контура при интегрировании согласуется с направлением вектора нормали к поверхности, ограниченной контуром правилом правого винта (буравчика).

Равенство нулю циркуляции при произвольном выборе контура говорит о *потенциальности этого поля*. В этом случае его можно представить, как градиент некоторого скалярного поля. Неравенство нулю циркуляции говорит о *вихревом характере поля*. Для детального изучения свойств поля следует перейти к рассмотрению циркуляции по бесконечно малым контурам. Каждый такой контур охватывает площадку  $dS$ , ориентация которой задается единичным вектором нормали  $\vec{n}$ . Полностью характеризует площадку (величину и ориентацию в пространстве) вектор  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ .

Существуют три линейно независимые ориентации, задаваемые, например, единичными векторами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . При вычислении циркуляции по бесконечно малым контурам, охватывающим произвольную точку пространства и ориентированным перпендикулярно векторам  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , получают три бесконечно малые величины. Отношение этих величин к величине охватываемой площадки дает три конечные функции, образующие новое векторное поле. Его называют *ротором поля*  $\vec{a}$  и обозначают символом  $\text{rot}\vec{a}$ . В декартовой системе координат

$$\text{rot}\vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Очевидно, можно записать кратко:  $\text{rot}\vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}]$ . Ротор вектора  $\vec{a}$  есть формальное векторное произведение векторного оператора набла на  $\vec{a}$ .

**Теорема Остроградского – Гаусса.** Поток вектора  $\vec{a}$  через произвольную замкнутую поверхность ( $S$ ) равен интегралу, взятому от дивергенции  $\vec{a}$  по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью:

$$\oint (\vec{a}, d\vec{S}) = \int (\vec{\nabla}, \vec{a}) dV.$$

**Теорема Стокса.** Циркуляция вектора  $\vec{a}$  по произвольному замкнутому контуру ( $L$ ) равна потоку вектора  $\text{rot}\vec{a}$  через поверхность ( $S$ ), ограниченную этим контуром:

$$\oint (\vec{a}, d\vec{l}) = \oint ([\vec{\nabla}, \vec{a}], d\vec{S}).$$



## 2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 2.1. Напряженность. Принцип суперпозиции

*Электрический заряд*  $q$  – свойство тел или частиц, характеризующее их способность к электромагнитным взаимодействиям.

*Электростатическое поле* – не изменяющееся во времени электрическое поле, создаваемое электрическими зарядами, неподвижными относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

Заряженные тела (часто говорят просто заряды) взаимодействуют посредством электрических полей, образованных этими телами.

Взаимодействие двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в вакууме описывается *законом Кулона*:

$$\vec{F}_{21}(\vec{r}) = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}.$$

Модуль силы Кулона:

$$F_{12} = F_{21} = k \frac{|q_1| |q_2|}{r_{21}^2},$$

где  $\vec{r}_{21}$  – радиус-вектор заряда  $q_2$  относительно заряда  $q_1$ ;  $k$  – коэффициент пропорциональности ( $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ );  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная ( $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>/(Н · м<sup>2</sup>)).

Силовой характеристикой электрического поля является *вектор напряженности*  $\vec{E}(\vec{r})$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q},$$

где  $\vec{E}(\vec{r})$  – напряженность электрического поля в данной точке;  $\vec{F}(\vec{r})$  – сила, действующая на неподвижный пробный точечный заряд  $q$ .

Напряженность неподвижного точечного заряда  $q$  в вакууме определяется по формуле

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q}{r^3} \vec{r},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор рассматриваемой точки поля относительно заряда  $q$ .

Направление вектора напряженности в данной точке поля совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, помещенный в данную точку, со стороны заряда  $q$ .

Выполняется *принцип суперпозиции*: напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных каждым зарядом системы в отдельности.

Для дискретного распределения зарядов:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i.$$

Для непрерывного распределения заряда:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k \frac{dq}{r^3} \vec{r},$$

где  $d\vec{E}$  – поле, созданное зарядом  $dq$  в точке, определенной радиусом-вектором  $\vec{r}$  относительно заряда  $dq$ .

При этом характер распределения заряда в пространстве определяется объемной, поверхностной и линейной плотностью соответственно:  $\rho = \frac{dq}{dV}$ ;  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ ;  $\lambda = \frac{dq}{dl}$ .

### Примеры решения задач

**Задача 2.1.** Тонкое полукольцо радиусом  $R = 20$  см заряжено равномерно зарядом  $q = 0,7$  нКл. Найти модуль напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

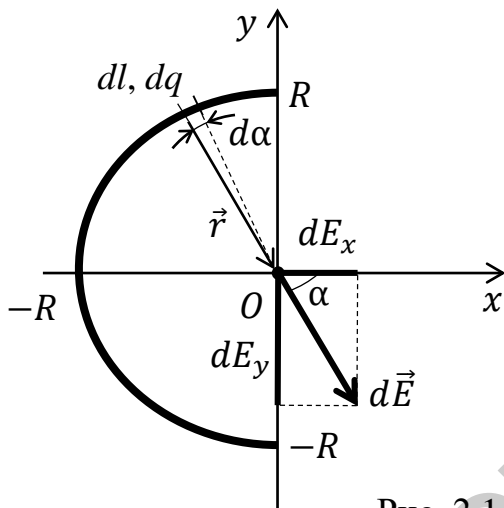


Рис. 2.1

**Решение.** Разобьем полукольцо на совокупность элементарных участков  $dl$ , обладающих зарядом  $dq = \lambda dl$ , где  $\lambda$  – линейная плотность заряда полукольца (рис. 2.1). Выберем произвольный участок  $dl$ . Поскольку заряд каждого из участков можно считать точечным, то модуль напряженности электрического поля, создаваемого зарядом  $dq$  в центре кривизны полукольца, равен  $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ .

Воспользуемся принципом суперпозиции:

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cdot \cos\alpha = \int \frac{dq \cdot \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} =$$

$$= \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \cos\alpha = \left| \begin{array}{l} dl = R d\alpha; \\ \lambda = \frac{q}{\pi R} \end{array} \right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q R \cos\alpha d\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 R^3} = \frac{q \sin\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} = \frac{0,7 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 3,14^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,04} = 0,1 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 0,1 \text{ кВ/м};$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cdot \sin\alpha = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \cdot (-\cos\alpha) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Таким образом,  $E = E_x = 0,1$  кВ/м.

**Ответ:** напряженность  $\vec{E}$  направлена вдоль оси  $Ox$ , ее модуль  $E = 0,1$  кВ/м.

**Задача 2.2.** Найти модуль напряженности поля, созданного бесконечной заряженной нитью с постоянной линейной плотностью заряда  $\lambda$  на расстоянии  $a$  от нити.

**Решение.** Разобьем нить на совокупность элементарных участков  $dl$ , обладающих зарядом  $dq = \lambda dl$  (рис. 2.2). Рассмотрим произвольный участок  $dl$ . Поскольку заряд каждого из участков можно считать точечным, то модуль напряженности электрического поля, создаваемого зарядом  $dq$  в точке  $A$ , равен  $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Воспользуемся принципом суперпозиции:

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cdot \cos\alpha = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha =$$

$$= \left. \begin{array}{l} y = a \cdot \operatorname{tg}\alpha; \frac{dy}{d\alpha} = \frac{a}{\cos^2\alpha}, \\ \text{тогда } dy = \frac{a \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha}. \end{array} \right| = \int \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Учтем, что } dl = dy; r = \frac{a}{\cos\alpha} \end{array} \right|$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \sin\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot 2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a};$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cdot \sin\alpha = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \sin\alpha = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \sin\alpha =$$

$$= \int \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \sin\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot (-\cos\alpha) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Таким образом,  $E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$ .

**Ответ:** напряженность  $\vec{E}$  направлена вдоль оси  $Ox$ , ее модуль  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$ .

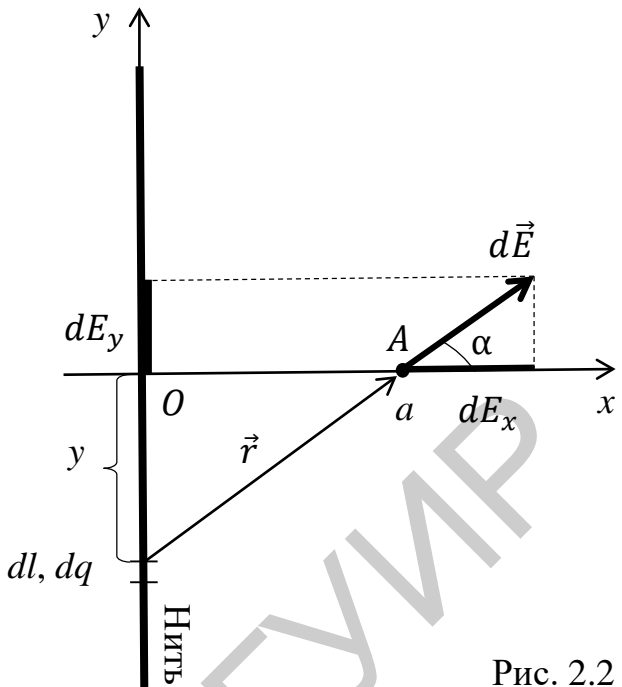


Рис. 2.2

**Задача 2.3.** Тонкий диск радиусом  $R$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти модуль напряженности электрического поля на оси диска на высоте  $h$  от центра.

**Решение.** Разобьем диск на совокупность тонких колец радиусом  $r_k$  ( $0 < r_k < R$ ), шириной  $dr_k$ , обладающих зарядом  $dq = \sigma dS_k$ , где  $dS_k$  – площадь поверхности кольца. Выберем произвольное кольцо (рис. 2.3). Вектор напряженности электрического поля на оси кольца направлен вдоль оси  $Oy$ , а его модуль равен  $dE_k = \frac{dq \cdot h}{4\pi\epsilon_0(h^2 + r_k^2)^{3/2}}$  (данную формулу можно получить, решив задачу 2.7).

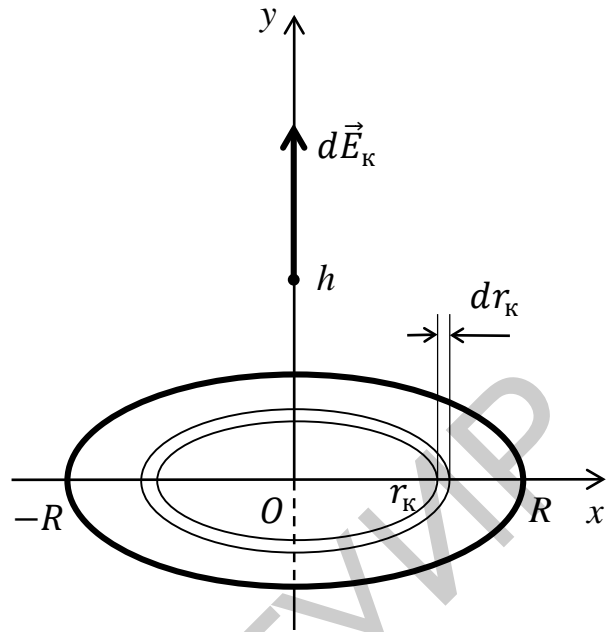


Рис. 2.3

Учитывая, что все векторы  $d\vec{E}_k$  сонаправлены, воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\begin{aligned}
 E &= \int dE_k = \int \frac{h \cdot dq}{4\pi\epsilon_0(h^2 + r_k^2)^{3/2}} = \int \frac{h \cdot \sigma dS_k}{4\pi\epsilon_0(h^2 + r_k^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что} \\ dS_k = 2\pi r_k dr_k \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^R \frac{h \cdot \sigma \cdot 2\pi r_k dr_k}{4\pi\epsilon_0(h^2 + r_k^2)^{3/2}} = \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r_k dr_k}{(h^2 + r_k^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что} \\ d(h^2 + r_k^2) = 2r_k dr_k \end{array} \right| = \\
 &= \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{d(h^2 + r_k^2)}{(h^2 + r_k^2)^{3/2}} = \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{h^2 + r_k^2}} \Big|_0^R = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Из полученного выражения следует, что напряженность электрического поля в центре диска, т. е. при  $h = 0$ , равна  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

**Ответ:** напряженность  $\vec{E}$  направлена вдоль оси  $Oy$ , ее модуль  $E = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right)$ .

**Задача 2.4.** Полусфера радиусом  $R$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найти модуль напряженности электрического поля в центре полусферы.

**Решение.** Разобьем полусферу на тонкие кольца радиусом  $r_k$  и шириной  $dl$ , симметричные относительно оси  $Ox$ , обладающие зарядом  $dq = \sigma dS_k$ . Рассмотрим произвольное кольцо (рис. 2.4). Радиус кольца  $r_k = R \sin \alpha$ , ширина кольца  $dl = R d\alpha$ .

Вектор напряженности электрического поля на оси кольца направлен вдоль оси  $Ox$ , а его модуль равен  $dE_{\kappa} = \frac{dq \cdot h}{4\pi\epsilon_0(h^2+r_{\kappa}^2)^{3/2}}$ .

При этом  $(h^2+r_{\kappa}^2) = R^2$ ;  $h = R\cos\alpha$ , тогда  $dE_{\kappa} = \frac{dq \cdot R\cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{dq \cdot \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ .

Так как в точке  $O'$  все векторы  $d\vec{E}_{\kappa}$  направлены вдоль оси  $Ox$ , воспользуемся принципом суперпозиции:

$$E = \int dE_{\kappa} = \int \frac{dq \cdot \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \int \frac{\sigma dS_{\kappa} \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что} \\ dS_{\kappa} = 2\pi r_{\kappa} dl \\ r_{\kappa} = R\sin\alpha \end{array} \right| = \int \frac{\sigma \cdot 2\pi r_{\kappa} dl \cdot \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\alpha d(2\alpha) =$$

$$= \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \cdot (-\cos 2\alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$

**Ответ:** напряженность  $\vec{E}$  направлена вдоль оси  $Ox$ , ее модуль  $E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$ .

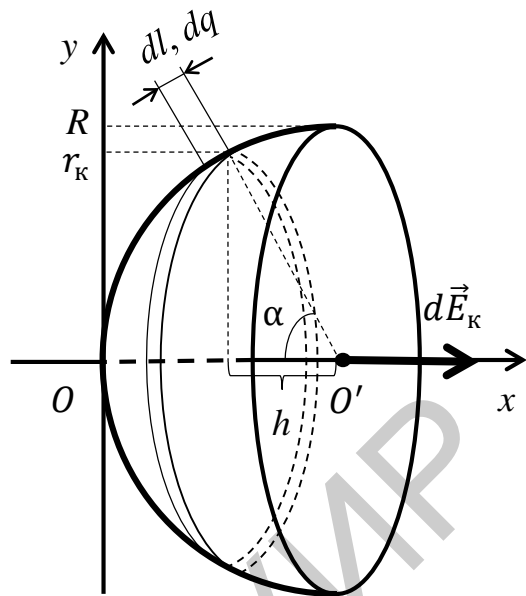


Рис. 2.4

### Задачи для самостоятельного решения

**2.5.** Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длиной  $2a$  заряжен равномерно зарядом  $q$ . Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния  $r$  от центра стержня до точки прямой: а) перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр; б) совпадающей с осью стержня, если  $r \gg a$ .

**Ответ:** а)  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2+r^2}}$ ; б)  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r^2-a^2)}$ .

**2.6.** Очень длинная прямая равномерно заряженная нить имеет заряд  $\lambda$  на единицу длины. Найти модуль и направление напряженности электрического поля в точке, которая отстоит на расстояние  $y$  и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через один из ее концов.

**Ответ:**  $E = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 y}$ ; вектор  $\vec{E}$  направлен под углом  $45^\circ$  к нити.

**2.7.** Тонкое непроводящее кольцо радиусом  $R$  имеет заряд  $q$ , распределенный с постоянной линейной плотностью. Определить напряженность электрического поля на оси кольца в точке, отстоящей от центра на расстояние  $h$ .

**Ответ:**  $E = \frac{q \cdot h}{4\pi\epsilon_0(h^2+r^2)^{3/2}}$ ; вектор напряженности направлен вдоль оси кольца.

**2.8.** Сфера радиусом  $R$  заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = (\vec{a}, \vec{R})$ , где  $\vec{a}$  – постоянный вектор;  $\vec{R}$  – радиус-вектор точки сферы относительно ее центра. Найти напряженность электрического поля в центре сферы.

**Ответ:**  $\vec{E} = -\frac{R}{3\epsilon_0} \vec{a}$ .

**2.9.** Две длинные параллельные нити равномерно заряжены каждая с линейной плотностью  $\lambda = 0,5$  мкКл/м. Расстояние между нитями  $l = 45$  см. Найти максимальное значение модуля напряженности электрического поля в плоскости симметрии этой системы, расположенной между нитями (рис. 2.5).

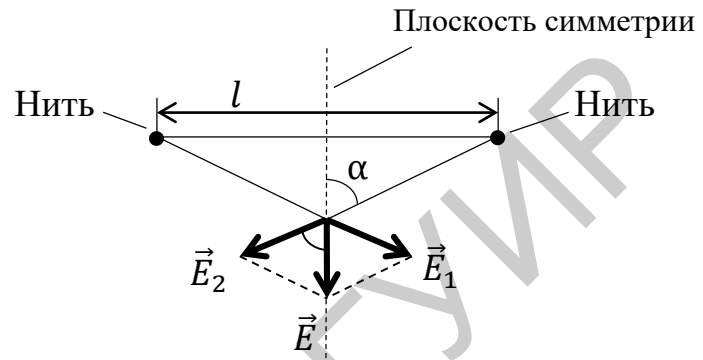


Рис. 2.5

**Ответ:**  $E_{\max} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 l} = 40$  кВ/м.

## 2.2. Теорема Гаусса для вектора напряженности $\vec{E}$

**Теорема Гаусса в интегральной форме.** Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри данной поверхности, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ :

$$\int (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

На практике при симметричном распределении заряда теорема Гаусса позволяет найти модуль напряженности электростатического поля в различных точках пространства относительно заряженного тела. Для этого нужно вычислить заряд внутри воображаемой замкнутой поверхности и поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность с учетом направления  $\vec{E}$  и исходя из симметрии задачи. Для нахождения заряда внутри замкнутой поверхности в зависимости от характера распределения заряда используется плотность (объемная, поверхностная, линейная (см. подразд. 2.1)).

Используя теорему Остроградского – Гаусса, можно записать *теорему Гаусса в дифференциальной форме*:

$$(\vec{\nabla}, \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ или } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

где  $\rho$  – плотность распределения заряда.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса по сути выражает ее физический смысл: источником электростатического поля является электрический заряд.

### Примеры решения задач

**Задача 2.10.** Шар радиусом  $R$  имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния  $r$  до его центра как  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ , где  $\rho_0$  – постоянная. Полагая, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1$  всюду, найти модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию  $r$ .

**Решение.** Поскольку распределение заряда сферически симметрично, то поле во всем пространстве будет центрально-симметричным: вектор  $\vec{E}$  в любой точке проходит через центр шара, а модуль вектора напряженности зависит только от расстояния до центра шара. В качестве замкнутой поверхности выберем сферу, содержащую точку, в которой вычисляется поле. Центр сферы совместим с центром шара (рис. 2.6). Направление нормали к сфере в любой точке сферы совпадает с направлением напряженности в этой точке.

Во всех точках сферы модуль напряженности одинаков (ввиду одинакового расстояния  $r$  от центра):  $E = \text{const}$ .

Найдем поток вектора  $\vec{E}_1$  через замкнутую поверхность радиусом  $r < R$ :

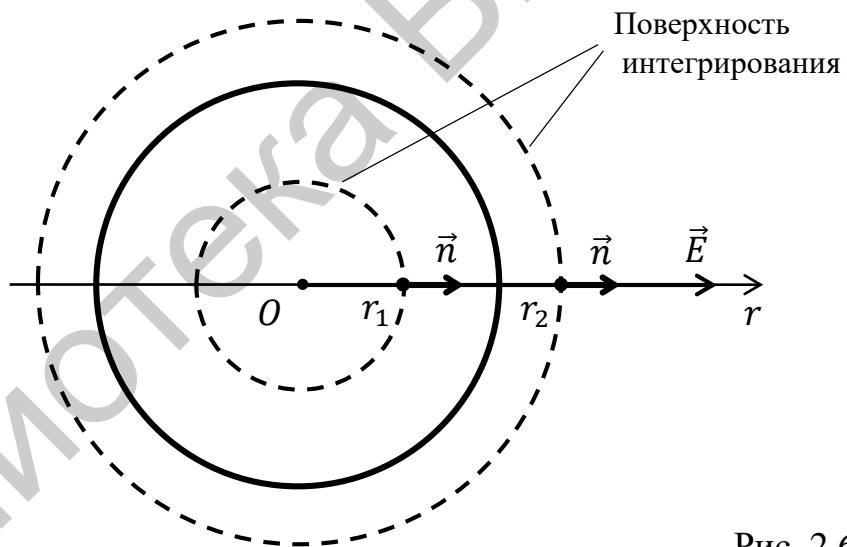


Рис. 2.6

$$\oint (\vec{E}_1, d\vec{S}) = \oint E_1 \cdot dS \cdot \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) = E_1 \oint dS \cdot \cos 0 = E_1 \oint dS = E_1 4\pi r_1^2.$$

Очевидно, что полученное выражение для потока останется справедливым и для сферы, содержащей точку вне заряженного шара, т. е. в случае  $r_2 > R$ :  $\oint (\vec{E}_2, d\vec{S}) = E_2 4\pi r_2^2$ .

Определим заряд, охваченный замкнутой поверхностью радиусом  $r_1 < R$ .

Поскольку объемная плотность заряда зависит только от расстояния  $r$  до центра шара, разобьем шар радиусом  $r_1$  на концентрические с ним шаровые слои радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  ( $0 < r < r_1$ ) с зарядом  $dq = \rho dV$  (рис. 2.7).

$$\begin{aligned}
q_1 &= \int \rho dV = \int \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dV = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что} \\ dV = 4\pi r^2 dr \end{array} \right| = \\
&= \int_0^{r_1} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \\
&= 4\pi\rho_0 \left( \int_0^{r_1} r^2 dr - \frac{1}{R} \int_0^{r_1} r^3 dr \right) = \\
&= 4\pi\rho_0 \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^{r_1} - \frac{1}{R} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{r_1} \right) = \frac{4\pi\rho_0 r_1^3}{3} \left(1 - \frac{3r_1}{4R}\right).
\end{aligned}$$

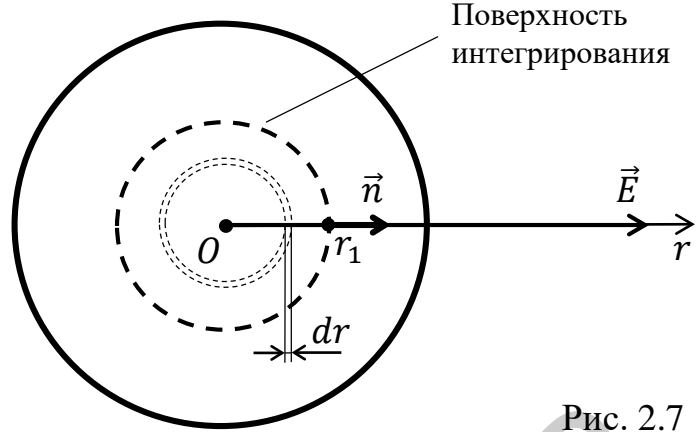


Рис. 2.7

Определим заряд, охваченный замкнутой поверхностью радиусом  $r_2 > R$ . При этом, поскольку при  $r > R$  объемная плотность обращается в нуль, интегрирование будем вести в пределах  $0 < r < R$ :

$$\begin{aligned}
q_2 &= \int \rho dV = \int \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dV = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \\
&= 4\pi\rho_0 \left( \int_0^R r^2 dr - \frac{1}{R} \int_0^R r^3 dr \right) = 4\pi\rho_0 \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^R - \frac{1}{R} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в теорему Гаусса и вычислим модуль вектора напряженности:

$$\begin{aligned}
E_1 4\pi r_1^2 &= \frac{4\pi\rho_0 r_1^3}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r_1}{4R}\right) \Rightarrow E_1 = \frac{\rho_0 r_1}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r_1}{4R}\right); \\
E_2 4\pi r_2^2 &= \frac{\pi\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r_2^2}.
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$  при  $r \leq R$ ;  $E = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$  при  $r \geq R$ .

**Задача 2.11.** Бесконечный цилиндр радиусом  $R$  имеет заряд, объемная плотность которого зависит от расстояния  $r$  до его оси как  $\rho = \frac{\rho_0}{r}$ , где  $\rho_0$  — постоянная. Найти модуль напряженности электрического поля внутри и вне цилиндра. Вычислить модуль напряженности поля на поверхности цилиндра. Диэлектрическую проницаемость всюду считать равной единице.

**Решение.** Линии напряженности радиально расходятся от оси цилиндра. В качестве замкнутой поверхности выберем коаксиальный с бесконечным цилиндром цилиндр высотой  $h$  и радиусом  $r$ , боковая поверхность которого содержит точку, в которой нужно определить модуль вектора напряженности.



Найдем поток вектора  $\vec{E}_1$  через замкнутую поверхность радиусом  $r_1 < R$  (рис. 2.8):  $\Phi = \int (\vec{E}_1, d\vec{S})$ .

Принимая во внимание, что вектор нормали  $\vec{n}$  к поверхности ориентирован по-разному на боковой поверхности и основаниях цилиндра по отношению к вектору напряженности, рассмотрим отдельно поток вектора  $\vec{E}$  через боковую поверхность и через основания:

$$\int (\vec{E}_1, d\vec{S}) = \int_{(S_{\text{бок}})} E_1 dS \cdot \cos 0 + 2 \int_{(S_{\text{осн}})} E_1 dS \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \int_{(S_{\text{бок}})} E_1 dS = E_1 S_{\text{бок}} =$$

$$= E_1 \cdot 2\pi r_1 h.$$

Очевидно, что поток вектора напряженности через поверхность радиусом  $r_2 > R$  также равен  $\int (\vec{E}_2, d\vec{S}) = E_2 \cdot 2\pi r_2 h$ .

Найдем заряд, заключенный в замкнутую поверхность радиусом  $r_1 < R$ . Поскольку объемная плотность заряда зависит только от расстояния  $r$  до оси цилиндра, разобьем цилиндр радиусом  $r_1$  на соосные с ним цилиндрические слои радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  ( $0 < r < r_1$ ) с зарядом  $dq = \rho dV$ :

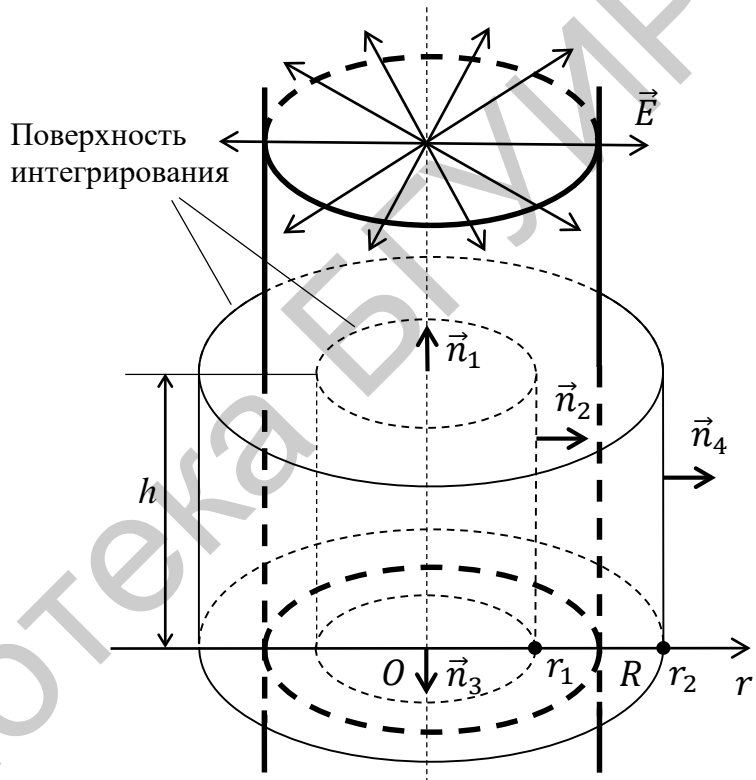


Рис. 2.8

$$q_1 = \int \rho dV = \int_0^{r_1} \frac{\rho_0}{r} dV = \left| \frac{\text{Учтем, что}}{dV = 2\pi r dr \cdot h} \right| = 2\pi h \rho_0 \int_0^{r_1} \frac{1}{r} r dr = 2\pi h \rho_0 r \Big|_0^{r_1} =$$

$$= 2\pi h \rho_0 r_1.$$

Аналогично получим выражение для заряда  $q_2$ , заключенного в замкнутую поверхность радиусом  $r_2 > R$ , интегрирование при этом будем вести в пределах  $0 < r < R$ :

$$q_2 = \int \rho dV = \int_0^R \frac{\rho_0}{r} dV = \rho_0 \int_0^R \frac{2\pi r dr \cdot h}{r} = 2\pi h \rho_0 r \Big|_0^R = 2\pi h \rho_0 R.$$

Подставим полученные выражения для потока и заряда в теорему Гаусса:

$$E_1 \cdot 2\pi r_1 h = \frac{2\pi h \rho_0 r_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} = \text{const};$$

$$E_2 \cdot 2\pi r_2 h = \frac{2\pi h \rho_0 R}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{r_2}.$$

Подстановка в любую из полученных выше формул  $r = R$  дает значение модуля напряженности электрического поля на цилиндрической поверхности:  $E_{\text{пов}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$ .

**Ответ:**  $E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} = \text{const}$  при  $r < R$ ;  $E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{r}$  при  $r > R$ ;  $E_{\text{пов}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$  при  $r = R$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**2.12.** Бесконечная цилиндрическая поверхность радиусом  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найти модуль напряженности электрического поля внутри и вне цилиндра. Вычислить модуль напряженности поля на поверхности цилиндра. Диэлектрическую проницаемость всюду считать равной единице.

**Ответ:**  $E = 0$  при  $r < R$ ;  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{r}$  при  $r > R$ ;  $E_{\text{пов}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  при  $r = R$ .

**2.13.** Система состоит из шара радиусом  $R$ , заряженного сферически симметрично, и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью  $\rho = \frac{\alpha}{r}$ , где  $\alpha$  – постоянная;  $r$  – расстояние от центра шара. Найти заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от  $r$ . Чему равна эта напряженность? Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1$  всюду.

**Ответ:**  $q = 2\pi R^2 \alpha$ ;  $E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}$ .

**2.14.** Заряд  $q$  равномерно распределен по объему шара радиусом  $R$ . Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, найти напряженность электрического поля внутри и вне шара.

**Ответ:**  $E = \frac{qr}{4\pi R^3 \varepsilon_0}$  при  $r \leq R$ ;  $E = \frac{q}{4\pi R^2 \varepsilon_0}$  при  $r \geq R$ .

**2.15.** Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$ , где  $\rho_0$  и  $\alpha$  – положительные постоянные;  $r$  – расстояние от центра системы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию  $r$ .

**Ответ:**  $E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha R^2} (1 - \exp(-\alpha r^3))$ .

### 2.3. Связь напряженности и потенциала

**Потенциал  $\varphi(\vec{r})$**  – энергетическая характеристика электростатического поля; выражает потенциальную энергию единичного положительного точечного заряда, помещенного в данную точку поля:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_p(\vec{r})}{q}.$$

Величина потенциальной энергии, а значит, и потенциала, зависит от выбора нулевого уровня энергии. Например, для точечного заряда уровень нулевой энергии обычно принимают в бесконечности относительно заряда, создающего поле. Тогда потенциал поля, созданного точечным зарядом, равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{kq}{r},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор данной точки поля относительно заряда  $q$ .

Поскольку напряженность и потенциал характеризуют одну и ту же точку поля, между ними существует связь:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Из последней формулы видно, что  $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ;  $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ;  $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ .

Зная напряженность поля, можно определить потенциал любой точки поля:

$$\varphi = -\int E_x dx; \varphi = -\int E_y dy; \varphi = -\int E_z dz, \text{ или } \varphi = -\int(\vec{E}, d\vec{r}).$$

**Разность потенциалов** между любыми точками поля:

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{r}).$$

### Примеры решения задач

**Задача 2.16.** Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью  $\lambda = 0,4$  мкКл/м. Вычислить разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 2 находится дальше от нити, чем точка 1, в  $\eta$  раз ( $\eta = 2$ ).

**Решение.** Найдем модуль напряженности электрического поля, созданного заряженной нитью, например, с помощью теоремы Гаусса.

Исходя из того, что силовые линии радиально расходятся от нити, в качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр высотой  $h$  и радиусом  $r$ , ось которого совпадает с нитью (рис. 2.9).

Поток вектора напряженности через цилиндрическую замкнутую поверхность  $\Phi(\vec{E}, d\vec{S}) = E \cdot 2\pi rh$ .

Найдем заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности:

$$q = \int \lambda dl = \lambda h.$$

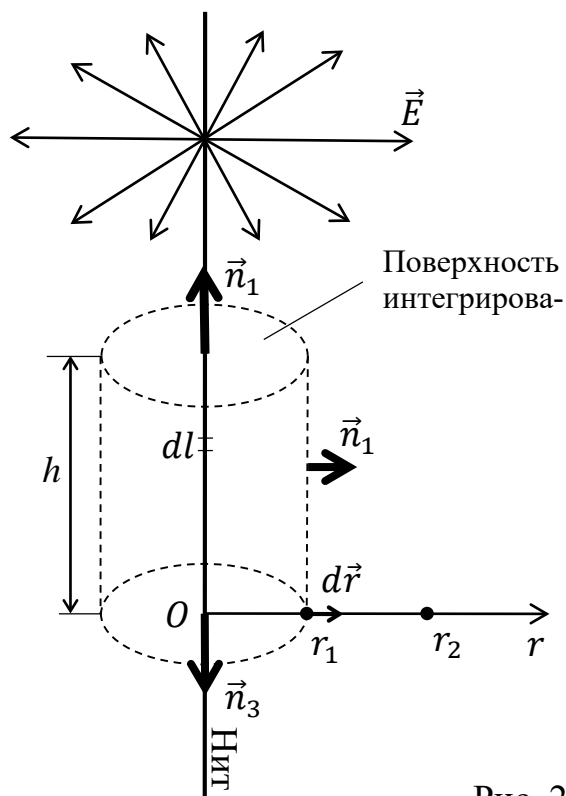


Рис. 2.9

Подставим полученные выражения для потока и заряда в теорему Гаусса:  $E \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$ .

Разность потенциалов точек 1 и 2:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{E}, d\vec{r}) = \int_{r_1}^{r_2} E dr \cdot \cos 0 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что} \\ r_2 = 2r_1 \end{array} \right| = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln 2.$$

Таким образом,  $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln 2 = \frac{0,4 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln 2 = 5 \cdot 10^3 \text{ В} = 5 \text{ кВ}$ .

**Ответ:**  $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln 2 = 5 \text{ кВ}$ .

**Задача 2.17.** Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра как  $\varphi = ar^2 + b$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные. Найти распределение объемного заряда  $\rho(r)$  внутри шара.

**Решение.** Представим квадрат радиуса-вектора произвольной точки шара в декартовой системе координат с началом координат в центре шара как сумму квадратов координат:  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Запишем с учетом данного представления потенциал поля внутри шара:  $\varphi = a(x^2 + y^2 + z^2) + b$ .

Используя связь напряженности и потенциала, получим выражение для вектора напряженности:  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$ , где  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = E_x$ ;  $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = E_y$ ;  $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = E_z$ .

Найдем проекции вектора напряженности:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(a(x^2 + y^2 + z^2) + b) = -2ax; E_y = -2ay; E_z = -2az.$$

Теорема Гаусса в дифференциальной форме для поля вектора  $\vec{E}$  позволяет найти  $\rho$  по известной напряженности  $\vec{E}$ :

$$\rho = \epsilon_0 \text{div}\vec{E} = \epsilon_0 (\nabla, \vec{E}) = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Получим

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(-2ax) + \frac{\partial}{\partial y}(-2ay) + \frac{\partial}{\partial z}(-2az) = -(2a + 2a + 2a) = -6a.$$

Подставим полученное выражение в теорему Гаусса и найдем распределение объемного заряда внутри шара:  $\rho = -6a\epsilon_0$ .

**Ответ:**  $\rho = -6a\epsilon_0 = \text{const}$ .

**Задача 2.18.** Найти потенциал электростатического поля с напряженностью  $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 + y^2)\vec{j}$ .

**Решение.** Потенциал произвольной точки поля можно представить в следующем виде:  $\varphi = -\int E_x \cdot dx = -\int 2axy \cdot dx = -ax^2y + C_1(y, z)$  или

$\varphi = -\int E_y \cdot dy = -\int a(x^2 + y^2) \cdot dy = -ax^2y - a\frac{y^3}{3} + C_2(x, z)$ , где  $E_x$  и  $E_y$  – проекции вектора  $\vec{E}$  ( $E_x = 2axy$ ,  $E_y = a(x^2 + y^2)$ );  $C_1(y, z)$  и  $C_2(x, z)$  – постоянные интегрирования.

Учитывая равенство полученных выражений, получаем  $-a\frac{y^3}{3} + C_2(x, z) = C_1(y, z)$ .

Данное равенство справедливо в случае  $-a\frac{y^3}{3} + C = C_1(y)$ , где  $C$  – произвольная постоянная. То есть  $C_1(y) = -a\frac{y^3}{3} + C$ .

Тогда  $\varphi = -ax^2y - a\frac{y^3}{3} + C = -ay\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) + C$ .

**Ответ:**  $\varphi = -ay\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) + C$ .

**Задача 2.19.** Вычислить потенциал сферического слоя, заряженного равномерно с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Радиусы слоя  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) (рис. 2.10). Диэлектрическую проницаемость всюду считать равной единице.

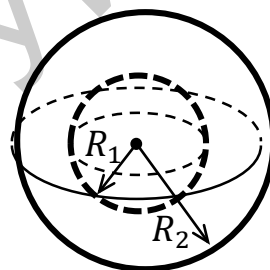


Рис. 2.10

**Решение.** Изобразим рисунок в проекции на плоскость листа. Найдем модуль напряженности электрического поля, созданного заряженным сферическим слоем, с помощью теоремы Гаусса.

Исходя из того, что силовые линии радиально расходятся из центра слоя,

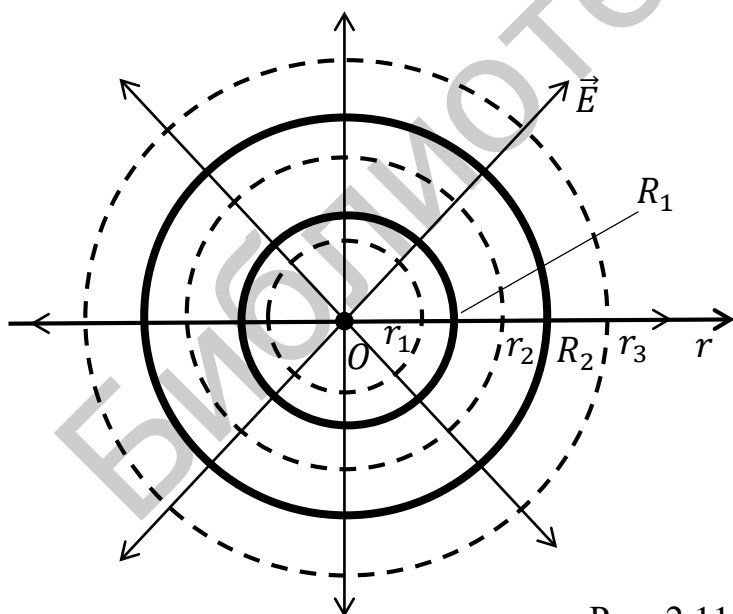


Рис. 2.11

в качестве замкнутой поверхности выберем сферу радиусом  $r$  (рис. 2.11). Поток вектора напряженности через сферическую замкнутую поверхность равен  $\oint(\vec{E}, d\vec{S}) = E \cdot 4\pi r^2$ .

Заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности радиусом  $r = r_1 < R_1$ , равен  $q_1 = \int \rho dV = 0$ , т. к. внутри данной замкнутой поверхности объемная плотность заряда равна нулю.

Найдем заряд, заключенный в замкнутую поверхность радиусом  $r = r_2$  ( $R_1 < r_2 < R_2$ ):

$$q_2 = \int \rho dV = \int_{R_1}^r \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho \frac{r^3 - R_1^3}{3}.$$

Найдем заряд, заключенный в замкнутую поверхность радиусом  $r = r_3$  ( $r_3 > R_2$ ):

$$q_3 = \int \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{3}.$$

Подставим полученные выражения для потока и заряда в теорему Гаусса:

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_1 = 0 \quad (r < R_1);$$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{3} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{3r^2};$$

$$E_3 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \Rightarrow E_3 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3r^2}.$$

Если заряды находятся в замкнутой области пространства, то потенциал в бесконечности можно принять равным нулю:  $\varphi_\infty = 0$ .

Найдем разность потенциалов между точками в бесконечности и точками вне заряженного слоя при  $r > R_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{\infty-r_3} &= \varphi_\infty - \varphi_3 = \int_{\infty}^r (\vec{E}_3, d\vec{r}) = \int_{\infty}^r E_3 dr \cos 0 = \int_{\infty}^r \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3r^2} dr = \\ &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{\infty}^r = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3r}. \end{aligned}$$

Так как  $\varphi_\infty = 0$ , то  $\varphi_3(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3r}$ .

При  $r = R_2$  потенциал на внешней поверхности сферического слоя будет равен  $\varphi_{R_2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3R_2}$ .

Рассмотрим разность потенциалов между точками на внешней поверхности и точками внутри заряженного слоя:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{R_2-r_2} &= \varphi_{R_2} - \varphi_2 = \int_{R_2}^r (\vec{E}_2, d\vec{r}) = \int_{R_2}^r E_2 dr \cos 0 = \int_{R_2}^r \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{3r^2} dr = \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( \int_{R_2}^r r dr - \int_{R_2}^r \frac{R_1^3}{r^2} dr \right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) \Big|_{R_2}^r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{R_1^3}{R_2} \right). \end{aligned}$$

Откуда  $\varphi_2(r) = \varphi_{R_2} - \Delta\varphi_{R_2-r_2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left( \frac{R_2^2}{2} - \frac{r^2}{6} - \frac{R_1^3}{3r} \right)$ .

При  $r = R_1$  потенциал на внутренней поверхности сферического слоя будет равен  $\varphi_{R_1} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$ .

Найдем разность потенциалов между точками на внутренней поверхности и точками внутри полости при  $r < R_1$ :

$$\Delta\varphi_{R_1-r_1} = \varphi_{R_1} - \varphi_1 = \int_{R_1}^r (\vec{E}_1, d\vec{r}) = 0.$$

Тогда  $\varphi_1 = \varphi_{R_1} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) = \text{const.}$

**Ответ:**  $\varphi_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$  при  $r \leq R_1$ ;  $\varphi_2(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left( \frac{R_2^2}{2} - \frac{r^2}{6} - \frac{R_1^3}{3r} \right)$  при  $R_1 \leq r \leq R_2$ ;  $\varphi_3(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{3r}$  при  $r \geq R_2$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**2.20.** Потенциал поля в некоторой области пространства зависит только от координаты  $x$  как  $\varphi = -ax^3 + b$ , где  $a$  и  $b$  – некоторые постоянные. Найти распределение объемного заряда  $\rho(x)$ .

**Ответ:**  $\rho(x) = 6a\varepsilon_0 x$ .

**2.21.** Найти потенциал электростатического поля с напряженностью  $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$ .

**Ответ:**  $\varphi = -y(ax + bz) + C$ .

**2.22.** Вычислить потенциал шара с зарядом  $Q$ , равномерно распределенным по объему. Радиус шара  $R$ . Диэлектрическую проницаемость всюду считать равной единице.

**Ответ:**  $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right)$  при  $r \leq R$ ;  $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$  при  $r \geq R$ .

**2.23.** Вычислить потенциал бесконечно длинного полого цилиндра, заряженного равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Радиус цилиндра  $R$ . Диэлектрическую проницаемость всюду считать равной единице.

*Указание.* За нуль удобно принять потенциал на оси цилиндра:  $\varphi_0 = 0$ .

**Ответ:**  $\varphi = 0$  при  $r \leq R$ ;  $\varphi = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}$  при  $r \geq R$ .

## 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 3.1. Вектор магнитной индукции.

#### Закон Био – Савара – Лапласа

*Магнитное поле* – вид материи, создаваемый движущимися зарядами (токами) и действующий на движущиеся заряды (токи).

Силовой характеристикой магнитного поля является *вектор магнитной индукции*  $\vec{B}(\vec{r})$ :

$$B = \frac{F_{\text{магн max}}}{|q| \cdot v},$$

где  $B$  – модуль вектора индукции магнитного поля в некоторой точке;  $\vec{F}_{\text{магн}}$  – сила, действующая на точечный заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле. Единица измерения в СИ: 1 Тл (тесла).

Если в некоторой точке пространства магнитное поле создано несколькими движущимися зарядами (токами), то выполняется *принцип суперпозиции*:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i.$$

Если в некоторой точке пространства магнитное поле создается тонким проводником с током, вектор магнитной индукции определяется **законом Био – Савара – Лапласа**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3},$$

где  $d\vec{l}$  – элементарный участок тонкого проводника с током  $I$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор данной точки поля относительно элементарного участка  $d\vec{l}$ .

По принципу суперпозиции магнитное поле, создаваемое всем тонким проводником длиной  $L$  с током  $I$ , определяется по формуле

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

### Примеры решения задач

**Задача 3.1.** Ток  $I$  течет по тонкому замкнутому проводнику. Радиус изогнутой части проводника  $R$ , угол  $2\varphi = 90^\circ$ . Найти магнитную индукцию в точке  $O$  (рис. 3.1).

**Решение.** Разобьем контур, изображенный на рис. 3.1, на две части: прямолинейную и изогнутую. Рассмотрим магнитное поле, созданное каждой частью проводника с током, по отдельности.

1. Разобьем прямолинейный участок проводника на элементарные участки  $d\vec{l}$  с током  $I$ . Каждый такой уча-

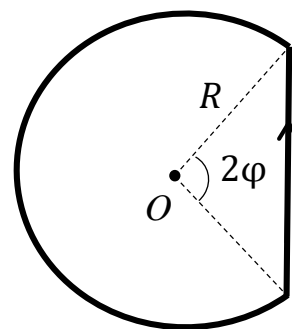


Рис. 3.1

сток создает магнитное поле, вектор  $d\vec{B}_1$  которого согласно закону Био – Савара – Лапласа  $d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  (рис. 3.2).

Модуль вектора  $d\vec{B}_1$  равен

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} dl \cdot r \cdot \sin\alpha.$$

Из рис. 3.2 видно, что  $r = \frac{b}{\sin\alpha}$ ;

$$\frac{b}{-y} = \operatorname{tg}\alpha; \quad dl = dy.$$

Выполним преобразования:  $y = -\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha}$ ;

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left( -\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha} \right) = -b \frac{d(\operatorname{tg}\alpha)}{d\alpha} / \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{b}{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{b}{\sin^2\alpha}.$$

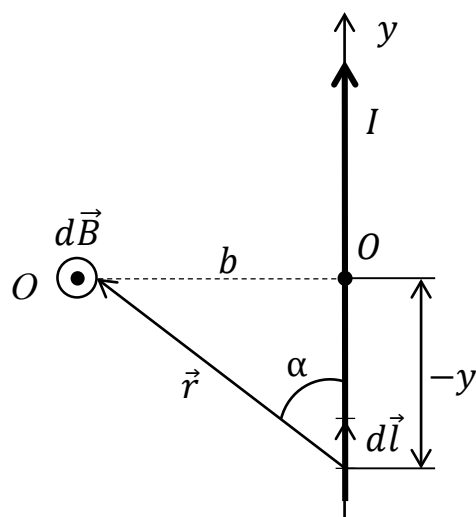


Рис. 3.2



Тогда  $dy = dl = \frac{b}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ .

Подставим полученные выражения в формулу для  $dB_1$  и воспользуемся принципом суперпозиции:

$$B_1 = \int dB_1 = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} dl \cdot r \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} b \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Исходя из условия задачи (рис. 3.3),  $b = R \sin \frac{\pi}{4} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ;  $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ ;  $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ . Тогда  $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ .

*Примечание.* Для бесконечно длинного проводника  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = \pi$ . Тогда модуль магнитной индукции в любой точке на расстоянии  $b$  от проводника с током  $I$  равен:  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$ .

2. Рассмотрим круговой виток радиусом  $R$  с током  $I$  (рис. 3.4). Разобьем виток на элементарные участки  $d\vec{l}$  и выберем произвольный участок. Радиус-вектор данного участка –  $\vec{r}$ , его модуль  $r = R$ . Каждый такой участок создает магнитное поле, вектор  $d\vec{B}$  которого согласно закону Био – Савара – Лапласа  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$  направлен перпендикулярно плоскости витка.

Воспользуемся принципом суперпозиции:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

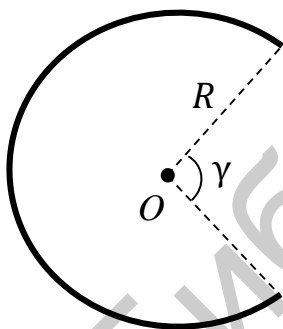


Рис. 3.5

В силу принципа суперпозиции очевидно, что часть витка будет создавать магнитное поле, модуль магнитной индукции которого равен  $B_n = \frac{\pi - \gamma}{2\pi} B$  (рис. 3.5).

Возвращаясь к условию задачи, определим модуль магнитной индукции поля, созданного изогнутой частью витка с током:  $B_2 = \frac{\pi - 2\varphi}{2\pi} B = \frac{3\pi/2}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$ .

Таким образом, на основании принципа суперпозиции найдем индукцию поля, созданного контуром (см. рис. 3.1):

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \right).$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \right).$

**Задача 3.2.** Ток  $I$  течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиусом  $R$  (рис. 3.6). Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$ .

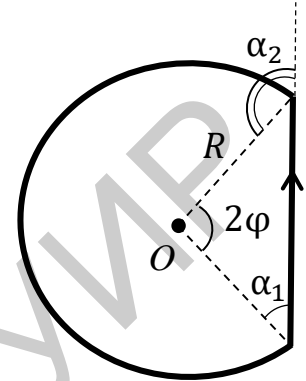


Рис. 3.3

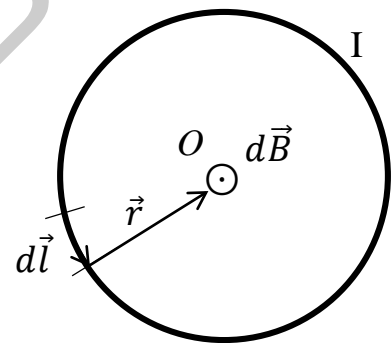


Рис. 3.4

**Решение.** Представим поверхностный ток как совокупность тонких бесконечных токов  $dI$ , текущих вдоль поверхности проводника. Индукция магнитного поля каждого линейного тока –  $d\vec{B}$ , модуль которой  $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R}$  (см. решение задачи 3.1).

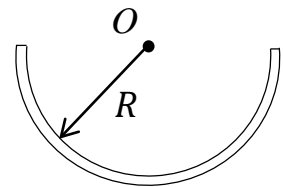


Рис. 3.6

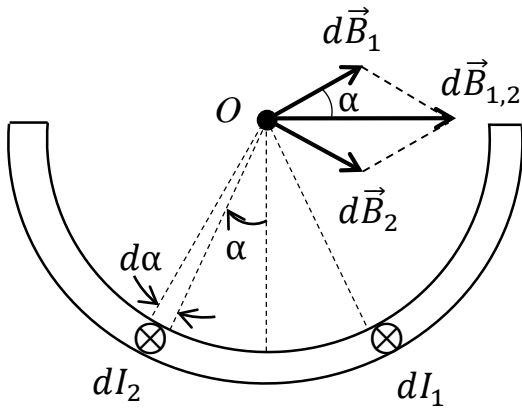


Рис. 3.7

Рассмотрим два произвольных, симметричных точке  $O$  тока  $dI_1$  и  $dI_2$  и соответствующие им векторы магнитной индукции  $d\vec{B}_1$  и  $d\vec{B}_2$  (рис. 3.7). В соответствии с принципом суперпозиции результирующий вектор  $d\vec{B}_{1,2}$  будет направлен горизонтально. Поскольку пара токов  $dI_1$  и  $dI_2$  выбрана произвольно, то очевидно, что индукция магнитного поля, созданного проводником в форме тонкого полукольца, имеет только горизонтальную проекцию, численное значение которой

$$B = \int dB \cos \alpha = \int \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} \cos \alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{2\pi R} \cdot \frac{I}{\pi R} R \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$

**Задача 3.3.** Непроводящий тонкий диск радиусом  $R$ , равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью  $\sigma$ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Найти индукцию магнитного поля на оси диска на высоте  $h$  над центром диска.

**Решение.** Разобьем диск на тонкие concentric rings радиусом  $r$ , шириной  $dr$  с зарядом  $dq$ . При вращении диска можно считать, что заряд  $dq$  создает круговой ток  $dI$  (рис. 3.8). При решении задачи учтем, что  $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$ ;  $dI = \frac{dq}{T}$ , где  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – период вращения диска. Магнитное поле тока  $dI$  описывается

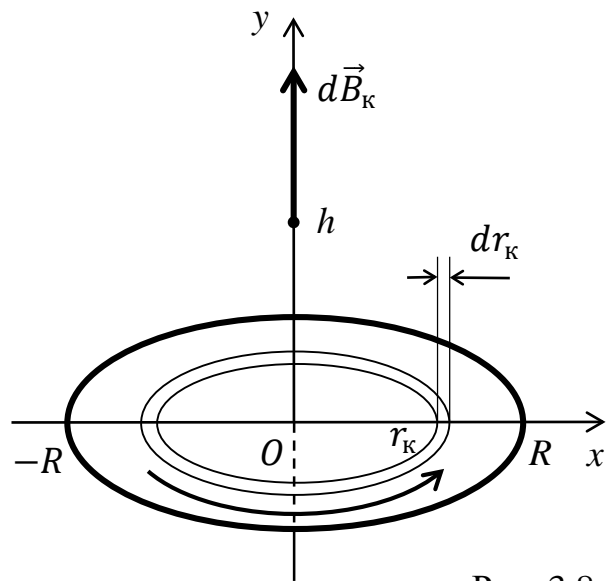


Рис. 3.8

вектором  $d\vec{B}$ , направленным вдоль оси диска, модуль которого равен:  

$$dB = \frac{\mu_0 dr^2}{2(r^2+h^2)^{3/2}}$$
 (данный результат можно получить, решив задачу 3.5).

Воспользуемся принципом суперпозиции:

$$B = B_y = \int_0^R \frac{\mu_0 dr^2}{2(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left( 2(r^2+h^2)^{1/2} + 2h^2(r^2+h^2)^{-1/2} \right) \Big|_0^R = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left( \frac{R^2+2h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h \right).$$

*Примечание.* При  $h = 0$  получим  $B_0 = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R}$  – модуль индукции магнитного поля в центре диска (учти, что  $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ ).

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left( \frac{R^2+2h^2}{(R^2+h^2)^{1/2}} - 2h \right).$

### Задачи для самостоятельного решения

**3.4.** Найти индукцию магнитного поля в центре контура, имеющего вид: 1) прямоугольника, если его диагональ  $d$ , угол между диагоналями  $\varphi$  и ток в контуре  $I$ ; 2) контура с током  $I$ , вид которого показан на рис. 3.9. Радиусы  $a$  и  $b$ , а также угол  $\varphi$  известны.

**Ответ:** 1)  $B = 4\mu_0 I / \pi d \sin \varphi$ ; 2)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right).$

**3.5.** По круговому витку радиусом  $R$  из тонкого провода циркулирует ток  $I$ . Найти магнитную индукцию на оси витка на высоте  $h$  над его центром.

**Ответ:**  $B = \mu_0 I R^2 / 2(R^2 + h^2)^{3/2}.$

**3.6.** Бесконечный ток равномерно распределен по плоскости  $xOy$  так, что модуль его линейной плотности одинаков и равен  $j$ . Определить модуль индукции магнитного поля на высоте  $h$  над этой плоскостью.

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 j}{2}.$

**3.7.** Непроводящая цилиндрическая поверхность радиусом  $R$  и высотой  $h$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти модуль магнитной индукции в центре одного из оснований цилиндра.

**Ответ:**  $B = \mu_0 R \sigma \omega h / 2(R^2 + h^2)^{1/2}.$

**3.8.** Однослойная катушка (соленоид) имеет длину  $l$  и радиус сечения  $R$ . Число витков на единицу длины –  $n$ . Найти индукцию магнитного поля в центре катушки, если ток через нее равен  $I$ .

**Ответ:**  $B = \mu_0 I n / \sqrt{1 + (2R/l)^2}.$

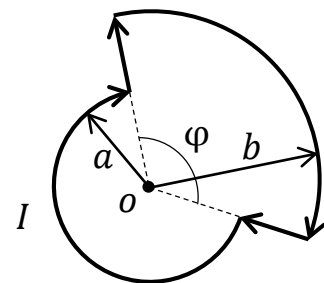


Рис. 3.9

### 3.2. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в интегральной форме.** Циркуляция вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру ( $L$ ) равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную  $\mu_0$ :

$$\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i.$$

На практике данная форма теоремы позволяет найти модуль вектора магнитной индукции в различных точках пространства относительно симметричного проводника с током подобно тому, как используется теорема Гаусса для нахождения модуля вектора напряженности электростатического поля.

**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в дифференциальной форме:**

$$[\vec{\nabla}, \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}, \text{ или } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

где  $\vec{j}$  – плотность тока проводимости.

Неравенство нулю ротора вектора  $\vec{B}$  говорит о вихревом характере магнитного поля.

#### Примеры решения задач

**Задача 3.9.** Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределенного по плоскости с линейной плотностью тока  $\vec{j}$ .

**Решение.** Пусть плоскость с током совпадает с плоскостью  $xOy$ . Рассмотрим поверхностный ток, как совокупность линейных токов (рис. 3.10). На основании принципа суперпозиции для вектора  $\vec{B}$  можно утверждать, что вектор индукции магнитного поля безграничной пластины с током в любой точке вне пластины направлен параллельно плоскости (см. задачу 3.6). Выберем замкнутый контур ( $L$ ) в виде прямоугольника ( $abcd$ ). За направление обхода контура выберем направление против часовой стрелки. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по контуру ( $L$ ):

$$\begin{aligned} \oint (\vec{B}, d\vec{l}) &= \int_{(ab)} B_1 dl_1 \cos 0 + \int_{(cd)} B_2 dl_2 \cos 0 + \int_{(bc)} B_3 dl_3 \cos \frac{\pi}{2} + \\ &+ \int_{(da)} B_4 dl_4 \cos \frac{\pi}{2} = \left| \begin{array}{l} \text{Введем обозначение:} \\ ab = cd = L \end{array} \right| = 2BL. \end{aligned}$$

Найдем суммарный ток, охваченный контуром:  $I = jL$ .

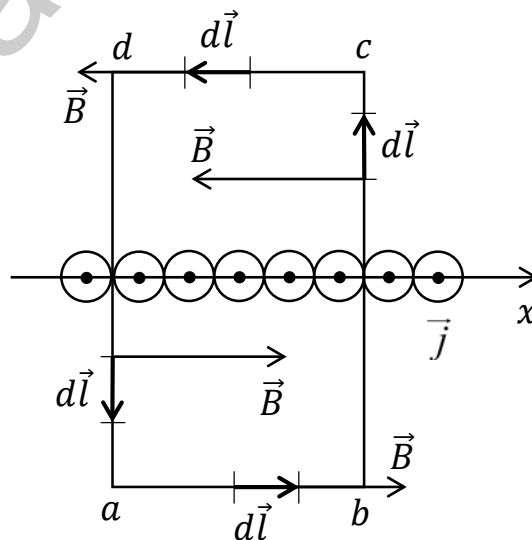


Рис. 3.10

Запишем теорему о циркуляции:  $2BL = \mu_0 jL$ . Тогда  $B = \frac{\mu_0 j}{2} = \text{const}$  в любой точке вне плоскости.

*Примечание.* Этот же ответ получается, если решить задачу с использованием принципа суперпозиции.

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 j}{2}$ .

**Задача 3.10.** По однородному прямому проводу, радиус сечения которого  $R$ , течет постоянный ток с плотностью  $j(r) = j_0 r^2$ . Найти модуль индукции магнитного поля этого тока в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Магнитная проницаемость всюду равна единице.

**Решение.** Замкнутый контур ( $L$ ) изобразим в виде окружности с центром на оси провода (рис. 3.11). За направление обхода контура выберем направление против часовой стрелки. Направление вектора  $\vec{B}$  определяется правилом правого винта по отношению к вектору плотности тока  $\vec{j}$ , поэтому сонаправлено с вектором  $d\vec{l}$  в любой точке контура.

Рассмотрим точку внутри проводника, положение которой определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_1$ . В силу характера  $j(r)$  очевидно, что модуль вектора магнитной индукции одинаков во всех точках контура.

Найдем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру ( $L_1$ ):

$$\oint (\vec{B}_1, d\vec{l}) = B_1 \int dl \cdot \cos 0 = B_1 L_1 = B_1 2\pi r_1.$$

Найдем суммарный ток, охваченный контуром ( $L_1$ ):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (\vec{j}, d\vec{S}) = \int j_0 r^2 dS \cdot \cos 0 = \\ &= \int_0^{r_1} j_0 r^2 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi j_0 r_1^4. \end{aligned}$$

Запишем теорему о циркуляции:

$$B_1 2\pi r_1 = \mu_0 \frac{\pi j_0 r_1^4}{2} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 j_0 r_1^3}{4}.$$

Рассмотрим точку вне проводника, положение которой определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_2$ . Аналогично первому случаю циркуляция вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру ( $L_2$ ) равна  $\oint (\vec{B}_2, d\vec{l}) = B_2 L_2 = B_2 2\pi r_2$ .

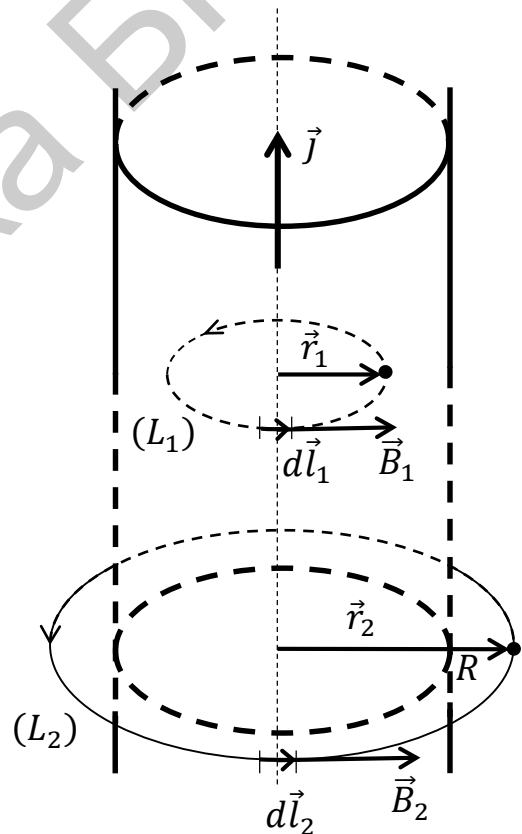


Рис. 3.11

Суммарный ток, охваченный контуром ( $L_2$ ):

$$I_2 = \int (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_0^R j_0 r^2 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi j_0 R^4.$$

Запишем теорему о циркуляции:  $B_2 2\pi r_2 = \mu_0 \frac{\pi j_0 R^4}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 j_0 R^4}{4r_2}$ .

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 j_0 r^3}{4}$  при  $r \leq R$ ;  $B = \frac{\mu_0 j_0 R^4}{4r}$  при  $r \geq R$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**3.11.** Определить модуль индукции магнитного поля тока, равномерно распределенного по двум параллельным плоскостям с линейными плотностями тока  $\vec{j}$  и  $-\vec{j}$ .

**Ответ:** между плоскостями  $B = \mu_0 j$ ; вне плоскостей  $B = 0$ .

**3.12.** По однородному прямому проводу, радиус сечения которого  $R$ , течет постоянный ток с плотностью  $\vec{j}$ . Найти индукцию магнитного поля этого тока в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Магнитная проницаемость всюду равна единице.

**Ответ:**  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j}, \vec{r}]$  при  $r \leq R$ ;  $\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2}{2r^2} [\vec{j}, \vec{r}]$  при  $r \geq R$ .

**3.13.** Однородный ток с плотностью  $\vec{j}$  течет внутри неограниченной пластины толщиной  $2d$  параллельно ее поверхности. Найти модуль индукции магнитного поля этого тока как функцию расстояния  $r$  от средней плоскости пластины. Магнитную проницаемость всюду считать равной единице.

**Ответ:**  $B = \mu_0 j r$  при  $r \leq d$ ;  $B = \mu_0 j d$  при  $r \geq d$ .

## 4. СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА

На точечный заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в электромагнитном поле, действует **сила Лоренца**:  $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ .

Сила зависит от времени, положения заряда, его скорости. Положение заряда можно задать с помощью радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из некоторой неподвижной точки  $O$  (начало координат) в точку нахождения заряда. Для количественного описания вводят систему координат (декартову, сферическую, цилиндрическую и т. д.). При выборе прямоугольной декартовой системы координат положение задается проекциями точки нахождения заряда на координатные оси  $x, y, z$ . Радиус-вектор  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

С течением времени  $\vec{r}, x, y, z$  меняются, т. е. они являются функциями времени. Скорость их изменения характеризует мгновенная скорость и ее проекции на координатные оси как производные этих функций по времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}; v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

*Скорость* – это производная радиуса-вектора по времени. За элементарный (бесконечно малый) промежуток времени  $dt$  заряд (материальная точка, частица) испытывает элементарное перемещение  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ .

*Дифференциал функции*  $\vec{r} - d\vec{r}$  равен производной этой векторной функции, умноженной на дифференциал независимой переменной  $t - dt$ . При движении заряда только в магнитном поле на него действует сила, перпендикулярная скорости. При элементарном перемещении  $d\vec{r}$  работа этой силы равна нулю. Поэтому будет сохраняться кинетическая энергия частицы.

Скорость изменения скорости называют *ускорением*:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}};$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z}.$$

Движение частицы определяется *вторым законом Ньютона*: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

В нерелятивистской механике, изучающей движение тел со скоростями  $v$  значительно меньшими скорости света  $c$ , импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ . В этом случае уравнение движения приобретает вид  $m\vec{a} = \vec{F}$ .

В релятивистской теории

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

*Электрический ток* – упорядоченное движение носителей тока с некоторой скоростью  $\vec{u}$ . Следовательно, в магнитном поле на носители тока будет действовать магнитная сила  $\vec{F}_m = q[\vec{u}, \vec{B}]$ . Ее действие передается проводнику и в результате на проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует сила – *сила Ампера*.

Пусть проводник с током занимает некоторый объем  $V$ . Распределение тока по объему характеризуется плотностью тока  $\vec{j}$ . На элементарный объем  $dV$  со стороны магнитного поля, индукция которого  $\vec{B}$ , будет действовать сила  $d\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}]dV$ .

В случае *тонкого проводника с током*  $I$  на элементарный участок  $d\vec{l}$  со стороны магнитного поля, индукция которого  $\vec{B}$ , действует сила  $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$ . Вектор  $d\vec{l}$  направлен по касательной к проводнику в направлении по току.

### Примеры решения задач

**Задача 4.1.** Частица с удельным зарядом  $q/m$  движется прямолинейно вдоль оси  $Ox$  под действием электрического поля  $\vec{E} = (E_0 - kx)\vec{i}$ , где  $E_0, k$  – положительные постоянные. В момент времени  $t = 0$  частица покоилась в

начале координат. Найти расстояние, пройденное частицей до точки, где она остановилась, и ее ускорение в этой точке.

**Решение.** Проекция уравнения движения частицы на ось  $Ox$  приводит к дифференциальному уравнению  $m \frac{dv_x}{dt} = q(E_0 - kx)$ .

Чтобы избавиться от одной переменной –  $t$ , будем рассматривать  $v_x$  как сложную функцию:  $v_x(x(t))$ . Тогда производная  $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x$ .

Подставив производную  $\frac{dv_x}{dt}$  в уравнение движения, получаем  $m \frac{dv_x}{dx} v_x = q(E_0 - kx)$  – уравнение, в котором можно разделить переменные:  $mv_x dv_x = q(E_0 - kx) dx$ .

Проинтегрировав это выражение, получаем

$$\int mv_x dv_x = \int q(E_0 - kx) dx; \frac{mv_x^2}{2} = q \left( E_0 x - \frac{kx^2}{2} \right) + C.$$

Постоянная интегрирования  $C = 0$ , т. к. частица покоилась в начале координат.

Следовательно, частица остановится ( $v_x = 0$ ), пройдя расстояние  $x_{\text{ост}} = \frac{2E_0}{k}$ .

Подставив полученное выражение в уравнение движения, найдем ускорение в точке остановки:  $a_{x_{\text{ост}}} = -qE_0/m$ .

**Ответ:**  $a_{x_{\text{ост}}} = -qE_0/m$ .

**Задача 4.2.** Из начала координат  $O$  области, где созданы однородные параллельные оси  $Oy$  электрическое и магнитное поля с напряженностью  $E$  и индукцией  $B$ , вылетает в направлении оси  $Ox$  частица с удельным зарядом  $q/m$ . Начальная скорость частицы равна  $v_0$ . Найти для нерелятивистского случая координату  $y_n$  частицы в момент, когда она  $n$ -й раз пересечет ось  $Oy$ . Определить угол  $\alpha$  между вектором скорости частицы и осью  $Oy$  в этот момент времени.

**Решение.** На частицу со стороны электрического поля действует сила  $q\vec{E}$ , направленная вдоль оси  $Oy$ . Со стороны магнитного поля действует сила  $q[\vec{v}, \vec{B}]$ , перпендикулярная оси  $Oy$ . Под действием электрического поля у скорости частицы появится компонента, параллельная  $Oy$ . Разобьем скорость на две составляющие:  $\vec{v}_{\parallel}$ , направленную вдоль полей, и  $\vec{v}_{\perp}$ , лежащую в плоскости  $xOz$  и перпендикулярную полям. Скорость частицы равна  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ .

Проекция уравнения движения частицы  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$  на ось  $Oy$  имеет следующий вид:  $m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE$ .

Следовательно,  $v_{\parallel} = v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{qEt}{m} \Rightarrow y = \frac{qEt^2}{2m}$  с учетом начальных условий.

Проекция уравнения движения на плоскость  $xOz$  имеет следующий вид:

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q[\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \vec{B}] \Rightarrow m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}].$$



Последнее уравнение формально описывает движение частицы под действием силы, перпендикулярной скорости и равной по модулю  $qv_{\perp}B$ . Такое движение происходит по окружности с центростремительным ускорением  $v_{\perp}^2/R$  в соответствии с уравнением  $m \frac{v_{\perp}^2}{R} = qv_{\perp}B$ .

Вследствие ортогональности силы  $q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]$  и скорости  $\vec{v}_{\perp}$  величина последней не меняется и равна  $v_{\perp} = v_0$ . Радиус окружности  $R$  постоянен. Частица одновременно движется с постоянной по величине скоростью  $v_{\perp}$  по окружности радиусом  $R$  и возрастающей со временем скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль оси  $Oy$ .

Таким образом, траектория движения представляет собой спираль на цилиндре, шаг которой возрастает. Частица будет пересекать ось  $Oy$  через промежутки времени, равные времени одного оборота проекции частицы на плоскость  $xOz$ :  $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$ .

Искомая координата пересечения оси  $Oy$  равна

$$y_n = \frac{qE(nT)^2}{2m} = \frac{2\pi^2 mEn^2}{qB^2}.$$

Угол между вектором скорости  $\vec{v}$  и осью  $Oy$  определяется соотношением  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{v_0 B}{2\pi En}$ .

**Ответ:**  $y_n = \frac{2\pi^2 mEn^2}{qB^2}$ ;  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0 B}{2\pi En}$ .

**Задача 4.3.** По безграничной плоскости течет ток, линейная плотность которого  $\vec{i}$  одинакова во всех точках плоскости. Над плоскостью параллельно  $\vec{i}$  расположен длинный тонкий прямой провод с током  $I$  (рис. 4.1). Найти силу, действующую на единицу длины провода со стороны поверхности.

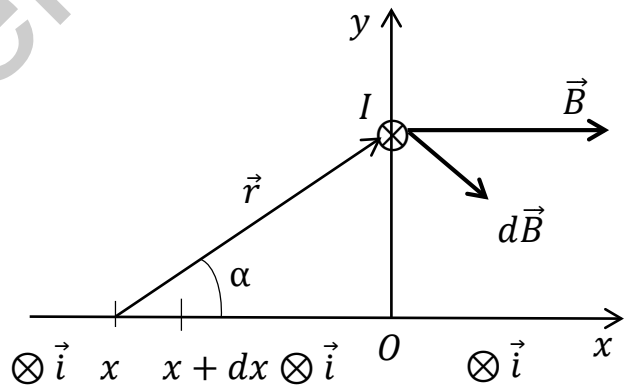


Рис. 4.1

**Решение.** Ось  $Ox$  расположим в плоскости с током и направим перпендикулярно  $\vec{i}$ . Поместим начало отсчета под проводом. Разобьем плоскость на полосы шириной  $dx$ , параллельные  $\vec{i}$ . Полоса в месте нахождения провода создает магнитное поле,

величина индукции которого  $dB = \frac{\mu_0 i dx}{2\pi r}$ .

Вектор  $d\vec{B}$  составляет угол  $\alpha$  с плоскостью. Проекция результирующего вектора  $\vec{B}$  на ось  $Ox$  равна

$$B_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 i dx}{2\pi r} \frac{h}{r} = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^2 + x^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)) = \frac{\mu_0 i}{2}.$$

Здесь  $h$  – высота провода над плоскостью.

Из симметрии задачи очевидно, что проекция  $\vec{B}$  на ось  $Oy$  равна нулю. Этому соответствует антисимметричность подинтегрального выражения

$$B_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 i dx x}{2\pi r r} = 0.$$

Индукция магнитного поля перпендикулярна проводу, параллельна плоскости и по величине равна  $B = \frac{\mu_0 i}{2}$ .

Следовательно, сила, действующая на единицу длины провода со стороны поверхности, равна  $F_{ед} = \frac{FA}{l} = \frac{\mu_0 i l}{2}$ .

**Ответ:**  $F_{ед} = \frac{\mu_0 i l}{2}$ .

**Задача 4.4.** Магнетрон состоит из нити накала радиусом  $a$  и коаксиального цилиндрического анода радиусом  $b$ , которые находятся в однородном магнитном поле, параллельном нити (рис. 4.2). Между нитью и анодом приложена ускоряющая разность потенциалов  $U$ . Найти значение индукции магнитного поля, при котором электроны, вылетающие с нулевой начальной скоростью из нити, будут достигать анода.

**Решение.** На электрон, движущийся в магнетроне, действует сила Лоренца.

Уравнение движения электрона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (-e)\vec{E} + (-e)[\vec{v}, \vec{B}]$$

умножим векторно слева на  $\vec{r}$ :

$$m \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = -e \left[ \vec{r}, [\vec{v}, \vec{B}] \right].$$

Векторное произведение  $[\vec{r}, \vec{E}] = \vec{0}$ ,

т. к.  $\vec{r} \updownarrow \vec{E}$ . Воспользовавшись равенством

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{v}] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right]$$

и расписав двойное векторное произведение, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{v}] &= -e\vec{v}(\vec{r}, \vec{B}) + e\vec{B}(\vec{r}, \vec{v}) = \\ &= e\vec{B}(\vec{r}, \vec{v}). \end{aligned}$$

Учли, что  $\vec{r} \perp \vec{B}$ .

Вектор  $\vec{v}$  разложим на радиальную составляющую  $\vec{v}_r$ , параллельную  $\vec{r}$ , и перпендикулярную  $\vec{r}$  составляющую  $\vec{v}_\varphi$ :  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$ .

Получаем уравнение  $m \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{v}_\varphi] = e\vec{B}r v_r$ .

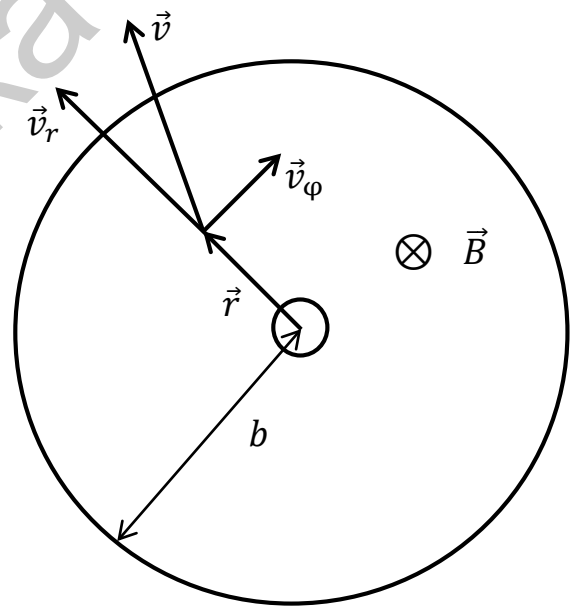


Рис. 4.2

Так как  $[\vec{r}, \vec{v}_\varphi] \parallel \vec{B}$ , то проекция этого уравнения на направление, заданное  $\vec{B}$ , равна  $m \frac{d}{dt}(rv_\varphi) = eBrv_r$ .

Подставив производные  $\frac{dr}{dt} = v_r$ ,  $\frac{dv_\varphi}{dt} = \frac{dv_\varphi}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv_\varphi}{dr} v_r$  в уравнение получаем после сокращения на  $v_r$  следующее выражение:

$$mv_\varphi + mr \frac{dv_\varphi}{dr} = eBr \Rightarrow m \frac{d(rv_\varphi)}{dr} = eBr.$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию  $\vec{v} = \vec{0}$  при  $r = 0$ , имеет следующий вид:  $rv_\varphi = \frac{eB}{2m} r^2 - \frac{eB}{2m} a^2$ .

Предельным случаем достижения анода будет касание траектории электрона анода. Тогда  $v_r = 0$ ,  $v = v_\varphi$ . Работу над электронами совершает только сила, действующая со стороны электрического поля. Поэтому скорость  $v$  можно вычислить из закона изменения кинетической энергии:  $\frac{mv^2}{2} = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ .

При касании  $v = v_\varphi$ . Следовательно, должно выполняться следующее условие:  $b \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{eB}{2m} b^2 - \frac{eB}{2m} a^2$ .

Отсюда получаем значения  $B$ , при которых электроны достигают анода:  $B \leq \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$ .

**Ответ:**  $B \leq \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**4.5.** Протон, ускоренный разностью потенциалов  $U$ , попадает в однородное электрическое поле плоского конденсатора, длина пластин которого в направлении движения равна  $l$ . Напряженность поля меняется во времени как  $E = kt$ , где  $k$  – постоянная. Считая протон нерелятивистским, найти угол между направлениями его движения до и после пролета конденсатора, если протон попадает в поле в момент  $t = 0$ . Краевыми эффектами пренебречь.

**Ответ:**  $\text{tg} \alpha = kl^2 \sqrt{m/32eU^3}$ .

**4.6.** Параллельно бесконечному проводу с током  $I$  на расстоянии  $d$  движется заряд  $q$  со скоростью  $v$ . С какой силой провод действует на заряд?

**Ответ:**  $F = \frac{\mu_0 I q v}{2\pi d}$ .

**4.7.** Квадратная рамка со стороной  $a$  лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом. Две стороны рамки параллельны проводу. Ближайшая из сторон находится на расстоянии  $d$  от провода. По проводу течет ток  $I_0$ , по рамке –  $I$ . Найти силу взаимодействия провода и рамки.

**Ответ:**  $F = \frac{\mu_0 I_0 I a^2}{2\pi d(d+a)}$ .

**4.8.** По двум длинным тонким параллельным проводникам текут постоянные токи  $I_1$  и  $I_2$ . Расстояние между проводниками  $a$ , ширина проводника с

током  $I_2 - b$ , проводник с током  $I_1$  – тонкий провод. Имея в виду, что оба проводника лежат в одной плоскости, найти силу магнитного взаимодействия между ними в расчете на единицу их длины.

**Ответ:**  $F_{\text{ед}} = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ .

**4.9.** С поверхности цилиндрического провода радиусом  $a$ , по которому течет постоянный ток  $I$ , вылетает электрон с начальной скоростью  $v_0$ , перпендикулярной поверхности провода. Найти максимальное расстояние  $r_{\text{max}}$ , на которое удалится электрон от оси провода, прежде чем он повернет обратно под действием магнитного поля тока.

**Ответ:**  $r_{\text{max}} = a \exp(2\pi m v_0 / \mu_0 e I)$ .

## 5. ДИЭЛЕКТРИКИ И МАГНЕТИКИ

### 5.1. Диэлектрики в электрическом поле

*Диэлектриками* называют вещества, которые практически не проводят электрический ток. В диэлектриках крайне мало свободных зарядов, способных перемещаться по всему объему тела под действием сколь угодно малых сил со стороны электрического поля. При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$  заряды диэлектрика (электроны, ядра, ионы) смещаются только в пределах своих атомов, молекул, кристаллических ячеек – положительные по полю, отрицательные против поля. Диэлектрик поляризуется, в результате чего в объеме и на поверхности диэлектрика возникают связанные заряды. Их распределение задаются *объемной*  $\rho'$  и *поверхностной*  $\sigma'$  плотностями. В целом электрически нейтральное поляризованное тело будет создавать дополнительное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}'$ .

Согласно *принципу суперпозиции*, напряженность электрического поля будет равна  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ .

Электрические свойства в целом нейтрального тела в первом приближении определяются его дипольным моментом. В случае системы, состоящей из двух точечных зарядов  $q > 0$  и  $-q$ , ее *дипольный момент*  $\vec{p} = q\vec{l}$ , где  $\vec{l}$  – радиус-вектор заряда  $q$  относительно  $-q$ . Дипольный момент  $\vec{p}$  определяет электрическое поле, создаваемое диполем. *Потенциальная энергия диполя* во внешнем электрическом поле, *момент сил*, действующих на диполь со стороны внешнего электрического поля, *результатирующая сил, действующих на диполь*, равны соответственно  $W = -(\vec{p}, \vec{E})$ ;  $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ ;  $\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$ . Здесь берется частная производная  $\vec{E}$  по направлению, задаваемому  $\vec{l}$ .

При поляризации элемент объема диэлектрика  $\Delta V$  приобретает дипольный момент, равный сумме дипольных моментов молекул  $\vec{p}_i$ , входящих в этот объем. Степень поляризации характеризуется *поляризованностью диэлектрика*:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i.$$

*Теорема Гаусса для поляризованности* содержит только связанные заряды:  $\rho' = -(\nabla, \vec{P})$ ;  $\oint(\vec{P}, d\vec{S}) = -q'$ .

На поверхности диэлектрика выполняется соотношение  $\sigma' = P_n$ , где  $P_n$  – проекция поляризованности на нормаль к границе диэлектрика, направленная наружу.

Как показывает опыт, для изотропных диэлектриков в широких пределах значений  $E$  выполняется соотношение

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E},$$

где  $\kappa$  – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика. Из этого соотношения и теоремы Гаусса для  $\vec{P}$  следует:

$$\rho' = -\frac{1}{1 + \kappa} (\epsilon_0 (\vec{E}, \nabla \kappa) + \kappa \rho).$$

Следовательно, объемная плотность связанных зарядов возникает лишь в случае неоднородных диэлектриков и/или при наличии сторонних зарядов в диэлектрике.

Напряженность электрического поля в присутствии диэлектриков определяется распределением сторонних и связанных зарядов. Чтобы избежать от связанных зарядов в основных уравнениях электродинамики, вводят вспомогательный вектор – **вектор электрического смещения**:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества ( $\epsilon = 1 + \kappa$ ).

*Теоремы Гаусса для вектора  $\vec{D}$*  в дифференциальной и интегральной форме –  $(\nabla, \vec{D}) = \rho$ ;  $\oint(\vec{D}, d\vec{S}) = q$  – содержат только сторонние заряды  $q$ , расположенные внутри замкнутой поверхности ( $S$ ), и объемную плотность сторонних зарядов.

На границе раздела двух диэлектриков происходит скачкообразное изменение их диэлектрической проницаемости. Поэтому при переходе границы раздела векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  будут также меняться скачкообразно. Пусть  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  – диэлектрические проницаемости двух сред. Тангенциальные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  (проекции векторов на касательную к границе раздела) удовлетворяют следующим условиям:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2}.$$

Нормальные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  (проекции векторов на нормаль к границе раздела) удовлетворяют условиям:

$$D_{1n} = D_{2n}; \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}.$$

Соотношения между проекциями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  у границы раздела называют *граничными условиями*.

Объемная плотность энергии электрического поля равна

$$w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}.$$

Существуют диэлектрики, поляризованные в отсутствие внешнего поля (*электреты*, некоторые диэлектрические кристаллы), диэлектрики с нелинейной зависимостью  $\vec{P}$  от  $\vec{E}$  (*сегнетоэлектрики*). В последних наблюдается явление *гистерезиса*.

### Примеры решения задач

**Задача 5.1.** Бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  помещена в однородное электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$ , направленное под углом  $\alpha$  к нормали  $\vec{n}$  к поверхности диэлектрика. Найти напряженность электрического поля внутри пластины и поверхностную плотность связанных зарядов на ее поверхности. Пластина находится в вакууме.

**Решение.** Пластина во внешнем поле поляризуется и на ее поверхностях возникают связанные заряды, поверхностная плотность которых  $\sigma'$  и  $-\sigma'$  (рис. 5.1).

В пределах пластины напряженность поля  $\vec{E}'$ , создаваемого этими зарядами, по модулю равна  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ . Она направлена перпендикулярно поверхностям пластины от положительно заряженной к отрицательно заряженной поверхности.

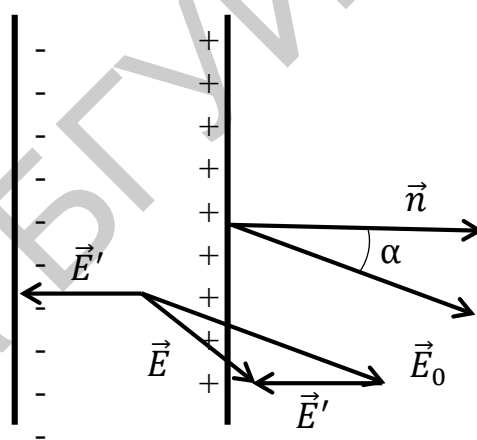


Рис. 5.1

В силу однородности диэлектрика и отсутствия в нем сторонних зарядов отсутствуют объемные связанные заряды ( $\rho' = 0$ ). Напряженность поля внутри пластины равна  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ .

Вне пластины связанные заряды поля не создают. Поэтому напряженность поля вне пластины равна  $\vec{E}_0$ .

Граничные условия  $E_{0\tau} = E_\tau$ ;  $D_{0n} = D_n$  и связь  $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$ ;  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$  позволяют найти тангенциальную и нормальную составляющие  $\vec{E}$ :  
 $E_\tau = E_{0\tau} = E_0 \sin \alpha$ ;  $E_n = E_{0n} / \epsilon = E_0 \cos \alpha / \epsilon$ .

По известным взаимно перпендикулярным составляющим вектора  $\vec{E}$  находим его модуль:  $E = \sqrt{E_\tau^2 + E_n^2} = \frac{E_0}{\epsilon} \sqrt{\epsilon^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ .

Направление вектора напряженности в диэлектрике зададим углом  $\beta$  между  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$ . Этот угол определяется следующим условием:  $\text{tg } \beta = E_\tau / E_n = \epsilon \text{tg } \alpha \Rightarrow \beta = \text{arctg}(\epsilon \text{tg } \alpha)$ .

Поляризованность:  $\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}$ .

Проекция поляризованности на нормальное направление дает поверхностную плотность связанных зарядов:  $\sigma' = P_n = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_n = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0 \cos \alpha}{\varepsilon}$ .

**Ответ:**  $E = \frac{E_0}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ ; угол между  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  равен  $\beta = \arctg(\varepsilon \operatorname{tg} \alpha)$ ;  $\sigma' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0 \cos \alpha}{\varepsilon}$ .

**Задача 5.2.** Однородный изотропный диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$  имеет вид сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого  $a$  и  $b$ . Сторонний заряд  $q$  равномерно распределен: 1) по внутренней поверхности слоя; 2) по всему объему слоя. Найти напряженность электрического поля  $E$ , потенциал  $\varphi$  (для первого случая), поляризованность  $P$ , как функции расстояния  $r$  от центра слоя, объемную и поверхностную плотности связанных зарядов  $\rho'$  и  $\sigma'$ . Диэлектрическая проницаемость окружающей среды  $\varepsilon_1 = 1$ .

**Решение.** Симметрия задачи позволяет сделать вывод, что искомые векторы параллельны или антипараллельны  $\vec{r}$  – радиусу-вектору точки наблюдения относительно центра слоя. Следовательно, векторы определяются проекциями на радиальное направление:  $E_r, P_r, D_r$ .

1) Воспользуемся теоремой Гаусса для  $\vec{D}$ , выбрав в качестве замкнутой поверхности концентрическую со слоем сферу радиусом  $r$ . Поток вектора  $\vec{D}$  через выбранную сферу равен  $D_r 4\pi r^2$ .  $D_r$  – проекция  $\vec{D}$  на радиальное направление, совпадающее с направлением вектора нормали  $\vec{n} = \vec{r}/r$  к выбранной поверхности (сфере). Поток равен стороннему заряду внутри выбранной поверхности. Следовательно, получаем  $D_r = 0, r < a; D_r = \frac{q}{4\pi r^2}, r > a$ .

Соотношения  $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon_0\varepsilon; \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$  дают выражения для напряженности и поляризованности:

$$E_r = 0, P_r = 0, r < a;$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, P_r = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon r^2}, b > r > a;$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, P_r = 0, r > b.$$

Положив потенциал равным нулю на бесконечности, по известной напряженности находим потенциал:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r dr = \int_a^b \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon} dr + \int_b^\infty \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon a^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon b^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}, r < a;$$

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^b \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon} dr + \int_b^\infty \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon b^2} +$$

$$+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2}, b > r > a;$$

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, r > b.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей поляризованности (в диэлектрике). Следует учесть, что нормаль к внутренней границе диэлектрика противоположна радиальному направлению. В результате получаем выражения для поверхностных плотностей связанных зарядов:

$$\sigma'(r = a) = -P_r(r = a) = -\frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon a^2};$$

$$\sigma'(r = b) = P_r(r = b) = \frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon b^2}.$$

2) Второй вариант распределения стороннего заряда рассматривается аналогично первому. Отличие лишь в том, что сторонний заряд внутри сферы радиусом, лежащим в пределах  $b > r > a$ , равен  $\frac{(r^3 - a^3)q}{(b^3 - a^3)}$ , а не  $q$ , как в первом варианте распределения стороннего заряда.

Воспользуемся теоремой Гаусса для  $\vec{D}$ , выбрав в качестве замкнутой поверхности концентрическую со слоем сферу радиусом  $r$ . Поток вектора  $\vec{D}$  через выбранную сферу равен  $D_r 4\pi r^2$ . Поток равен стороннему заряду внутри выбранной поверхности. Следовательно, получаем:

$$D_r = 0, r < a;$$

$$D_r = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{(r^3 - a^3)q}{(b^3 - a^3)}, b > r > a;$$

$$D_r = \frac{1}{4\pi r^2} q, r > b.$$

Соотношения  $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon_0\epsilon$ ;  $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}$  дают выражения для напряженности и поляризованности:

$$E_r = 0, P_r = 0, r < a;$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \frac{(r^3 - a^3)q}{(b^3 - a^3)}, P_r = \frac{(\epsilon - 1)(r^3 - a^3)q}{4\pi\epsilon r^2 (b^3 - a^3)}, b > r > a;$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, P_r = \frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi r^2}, r > b.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей поляризованности:

$$\sigma'(r = a) = P_r(r = a) = 0;$$

$$\sigma'(r = b) = P_r(r = b) = \frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon b^2}.$$

Для вычисления  $\rho'$  воспользуемся теоремой Гаусса для  $\vec{P}$  в интегральной форме. Вспомогательная поверхность – сфера радиусом  $r$ , находящаяся в



слое и концентрическая с ним. Связанный заряд внутри выбранной сферы равен

$$q'(r) = -P_r 4\pi r^2 = -\frac{(\varepsilon - 1)(r^3 - a^3)q}{\varepsilon(b^3 - a^3)}.$$

Дифференциал этого выражения  $dq' = -\frac{(\varepsilon - 1)3r^2 q}{\varepsilon(b^3 - a^3)} dr$  дает связанный заряд внутри сферического слоя, ограниченного сферами, радиусы которых  $r$  и  $r + dr$ . Объем слоя  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Следовательно, объемная плотность связанного заряда равна

$$\rho' = \frac{dq'}{dV} = -\frac{(\varepsilon - 1)3q}{4\pi\varepsilon(b^3 - a^3)}.$$

Плотность постоянна. Поэтому связанный объемный заряд всего диэлектрика равен

$$q' = \rho'V = -\frac{(\varepsilon - 1)3q}{4\pi\varepsilon(b^3 - a^3)} \frac{4\pi(b^3 - a^3)}{3} = -\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}q.$$

Связанный поверхностный заряд возникает только на внешней границе диэлектрика. Он равен  $q'_{\text{пов}} = \sigma'(r = b)4\pi b^2 = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon b^2} 4\pi b^2 = \frac{(\varepsilon - 1)q}{\varepsilon}$ .

Полный связанный заряд равен сумме найденных зарядов  $q' + q'_{\text{пов}} = 0$ , как и следовало ожидать.

**Ответ:** 1)  $E_r = 0, P_r = 0$  при  $r < a$ ;  $E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, P_r = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon r^2}$  при  $b > r > a$ ;  $E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, P_r = 0$  при  $r > b$ ;  $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$ , при  $r < a$ ;  $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$ , при  $b > r > a$ ;  $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$  при  $r > b$ ;  $\sigma'(r = a) = -\frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon a^2}$ ;  $\sigma'(r = b) = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon b^2}$ ; 2)  $E_r = 0, P_r = 0$  при  $r < a$ ;  $E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \frac{(r^3 - a^3)q}{(b^3 - a^3)}, P_r = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon r^2} \frac{(r^3 - a^3)q}{(b^3 - a^3)}$  при  $b > r > a$ ;  $E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, P_r = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi r^2}$  при  $r > b$ ;  $\sigma'(r = a) = 0$ ;  $\sigma'(r = b) = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon b^2}$ ;  $\rho' = -\frac{(\varepsilon - 1)3q}{4\pi\varepsilon(b^3 - a^3)}$ ;  $q'_{\text{пов}} = \frac{(\varepsilon - 1)q}{\varepsilon}$ .

**Задача 5.3.** Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора заполнено изотропным неоднородным диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния до оси конденсатора как  $\varepsilon = \alpha/r$ , где  $\alpha$  – постоянная. Радиусы обкладок –  $a$  и  $b$ , причем  $a < b$ , длина –  $L$ . Найти емкость конденсатора. Найти поверхностную и объемную плотности связанного заряда, полный заряд диэлектрика, если внутренней обкладке конденсатора сообщили положительный сторонний заряд  $q$ . Краевыми эффектами пренебречь.

**Решение.** Воспользуемся теоремой Гаусса для  $\vec{D}$ , выбрав в качестве замкнутой поверхности коаксиальный с обкладками конденсатора цилиндр радиусом  $r$  ( $a < r < b$ ). Длина цилиндра –  $L$ . Тогда

$$D_r 2\pi r L = q \Rightarrow D_r = \frac{q}{2\pi L r}; E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon L r}; P_r = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E_r = \frac{(\epsilon - 1) q}{2\pi \epsilon L r}.$$

Разность потенциалов обкладок (напряжение) с учетом  $\epsilon = \alpha/r$  равна

$$U = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi \epsilon_0 \alpha L} dr = \frac{q(b-a)}{2\pi \epsilon_0 \alpha L}.$$

$$\text{Емкость конденсатора } C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 \alpha L}{(b-a)}.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов равна проекции поляризованности на нормаль к поверхности диэлектрика. Следует учесть, что нормаль к внутренней границе диэлектрика противоположна радиальному направлению. В результате получаем выражения для поверхностных плотностей связанных зарядов:

$$\sigma'(r=a) = -P_r(r=a) = -\frac{(\epsilon-1)q}{2\pi \epsilon L a} = -\frac{(\alpha-a)q}{2\pi \alpha L a};$$

$$\sigma'(r=b) = P_r(r=b) = \frac{(\epsilon-1)q}{2\pi \epsilon L b} = \frac{(\alpha-b)q}{2\pi \alpha L b}.$$

Для вычисления  $\rho'$  воспользуемся теоремой Гаусса для  $\vec{P}$  в интегральной форме. Вспомогательная поверхность – коаксиальный со слоем диэлектрика цилиндр радиусом  $r$  и длиной  $L$ . Связанный заряд внутри выбранного цилиндра  $q'(r) = -P_r 2\pi r L = -\frac{(\epsilon-1)q}{\epsilon} = -\frac{(\alpha-r)q}{\alpha}$ .

Дифференциал этого выражения  $dq' = \frac{q}{\alpha} dr$  дает связанный заряд внутри цилиндрического слоя, ограниченного цилиндрами, радиусы которых  $r$  и  $r + dr$ . Объем слоя  $dV = 2\pi r L dr$ . Следовательно, объемная плотность связанного заряда  $\rho' = \frac{dq'}{dV} = \frac{q}{2\pi \alpha L r}$ .

Объемный связанный заряд всего диэлектрика

$$q'_{\text{об}} = \int \rho' dV = \int_a^b \frac{q}{2\pi \alpha L r} 2\pi r L dr = \frac{q}{\alpha} (b-a)$$

равен суммарному поверхностному связанному заряду, взятому с обратным знаком:

$$q'_{\text{пов}} = -\frac{(\alpha-a)q}{2\pi \alpha L a} 2\pi a L + \frac{(\alpha-b)q}{2\pi \alpha L b} 2\pi b L = -\frac{q}{\alpha} (b-a).$$

Поэтому полный заряд диэлектрика равен нулю. Полученный результат есть следствие нейтральности диэлектрика.

$$\text{Ответ: } C = \frac{2\pi \epsilon_0 \alpha L}{(b-a)}; \sigma'(r=a) = -\frac{(\alpha-a)q}{2\pi \alpha L a}; \sigma'(r=b) = \frac{(\alpha-b)q}{2\pi \alpha L b}; \rho' = \frac{q}{2\pi \alpha L r}; q_{\text{пол}} = q' + q'_{\text{пов}} = 0.$$

**Задача 5.4.** Точечный заряд  $q$  находится в вакууме на расстоянии  $l$  от плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика, заполняющего все полупространство. Проницаемость диэлектрика равна  $\epsilon$ . Найти поверх-

ностную плотность связанных зарядов как функцию расстояния  $r$  от точечного заряда  $q$ , а также суммарный связанный заряд на поверхности диэлектрика. Найти модуль вектора силы, действующей на заряд  $q$  со стороны связанных зарядов на поверхности диэлектрика.

**Решение.** В силу однородности диэлектрика и отсутствия в нем сторонних зарядов связанные заряды образуются только на поверхности. Напряженность поля, создаваемого этими зарядами,  $-\vec{E}'$ . Согласно граничным условиям, нормальная составляющая  $\vec{D}$  при переходе границы диэлектрика меняется непрерывно:  $D_{0n} = D_n \Rightarrow \epsilon_0(E_{0n} + E'_n) = \epsilon_0\epsilon(E_{0n} - E'_n)$ . Здесь  $\vec{E}_0$  – напряженность поля точечного заряда.

Теорема Гаусса для  $\vec{E}$  приводит к соотношению  $E'_n = \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}$ .

Следовательно, поверхностная плотность связанных зарядов равна 
$$\sigma' = \frac{2\epsilon_0(\epsilon - 1)}{1 + \epsilon} E_{0n} = -\frac{2\epsilon_0(\epsilon - 1) q \cos \alpha}{1 + \epsilon} = -\frac{(\epsilon - 1) ql}{(\epsilon + 1) 2\pi r^3}.$$

Сила, действующая на заряд  $q$  со стороны связанных зарядов на поверхности диэлектрика, очевидно, перпендикулярна поверхности диэлектрика и направлена в его сторону – заряд притягивается. Для вычисления ее модуля разбиваем поверхность диэлектрика на кольца, внутренний и внешний радиус колец  $R$  и  $R + dR$ . Центры колец совпадают с проекцией заряда  $q$  на поверхность диэлектрика. Модуль силы, действующей со стороны одного кольца на заряд, равен

$$dF = \frac{qdq' l}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ql\sigma' 2\pi R dR}{4\pi\epsilon_0 (l^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{(\epsilon - 1)q^2 l^2 R dR}{4\pi\epsilon_0 (\epsilon + 1) (l^2 + R^2)^3}.$$

Модуль искомой силы

$$F = \int_0^\infty \frac{(\epsilon - 1)q^2 l^2 R dR}{4\pi\epsilon_0 (\epsilon + 1) (l^2 + R^2)^3} = \frac{(\epsilon - 1)q^2}{16\pi\epsilon_0 (\epsilon + 1) l^2}.$$

**Ответ:**  $\sigma' = -\frac{(\epsilon - 1) ql}{(\epsilon + 1) 2\pi r^3}$ ;  $F = \frac{(\epsilon - 1)q^2}{16\pi\epsilon_0 (\epsilon + 1) l^2}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**5.5.** Вблизи точки  $A$ , находящейся на границе раздела стекло – вакуум, напряженность электрического поля в вакууме  $\vec{E}_0$  ( $E_0 = 50$  В/м) направлена под углом  $\alpha_0 = 45^\circ$  к нормали. Найти напряженность  $\vec{E}$  поля в стекле вблизи точки  $A$  (рис. 5.2), а также поверхностную плотность связанных зарядов в точке  $A$ . Для стекла  $\epsilon = 6$ .

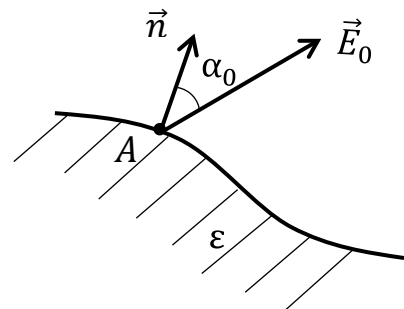


Рис. 5.2

**Ответ:**  $E = \frac{E_0}{\varepsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_0} = 35,8 \text{ В/м}; \sigma' = \varepsilon_0(1 - 1/\varepsilon)E_0 = 260,7 \text{ пКл/м}^2.$

**5.6.** Точечный заряд  $q$  находится в центре шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$ . Найти поляризованность  $\vec{P}$  как функцию радиуса-вектора  $\vec{r}$  относительно центра шара, а также заряд  $q'$  внутри концентрической с шаром сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

**Ответ:**  $\vec{P} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r}; q' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} q.$

**5.7.** Точечный заряд  $q$  находится в центре диэлектрического шара с проницаемостью  $\varepsilon_1$  и радиусом  $R_1$ . Шар окружен безграничным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ . Найти поверхностную плотность связанного заряда на шаре и на безграничном диэлектрике.

**Ответ:**  $\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1} \frac{q}{4\pi R_1^2}; \sigma_2 = \frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2} \frac{q}{4\pi R_1^2}.$

**5.8.** Бесконечно большая плоскопараллельная пластина из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  толщиной  $2d$  заряжена с объемной плотностью заряда  $\rho(r)$ , где  $r$  – расстояние от плоскости, параллельной границам пластины и находящейся в середине пластины. Найти объемную и поверхностную плотность связанных зарядов, если: 1)  $\rho = \text{const}$ ; 2)  $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r)$ , где  $\rho_0$  и  $\alpha$  – константы.

**Ответ:** 1)  $\rho' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \rho; \sigma' = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \rho d;$  2)  $\rho'(r) = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \rho_0 \exp(-\alpha r); \sigma' = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \frac{\rho_0}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha d)).$

**5.9.** При некоторых условиях поляризованность безграничной незаряженной пластины из диэлектрика имеет вид  $\vec{P} = \vec{P}_0(1 - x^2/d^2)$ , где  $\vec{P}_0$  – вектор, перпендикулярный пластине;  $x$  – расстояние от середины пластины;  $d$  – полутолщина пластины. Найти напряженность  $\vec{E}$  электрического поля внутри пластины и разность потенциалов между ее поверхностями.

**Ответ:**  $\vec{E} = -\vec{P}_0(1 - x^2/d^2)/\varepsilon_0; U = 4P_0 d/3\varepsilon_0.$

## 5.2. Магнитное поле в веществе

При помещении вещества во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  оно приобретает магнитный момент – *намагничивается*. Степень намагничивания магнетика характеризуется *намагниченностью*:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m,$$

равной магнитному моменту единицы объема вещества. Намагничивание вещества приводит к возникновению *токов намагничивания* (молекулярных токов), которые являются суммой молекулярных токов отдельных молекул.

Для намагниченности справедлива теорема о циркуляции:

$$\oint (\vec{J}, d\vec{l}) = I'; [\vec{\nabla}, \vec{J}] = \vec{j}',$$

где  $I'$  и  $\vec{j}'$  – ток намагничивания и его плотность.

Токи намагничивания создают дополнительное магнитное поле  $\vec{B}'$ . Индукция  $\vec{B}'$  может быть найдена на основании закона Био – Савара – Лапласа. Результирующее поле  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$  создается как макроскопическими токами, так и токами намагничивания.

*Теорема о циркуляции для напряженности магнитного поля*  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j}$  включает только токи проводимости:

$$\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = I, [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j}.$$

При определенных условиях выполняется соотношение  $\vec{j} = \chi \vec{H}$ , где  $\chi$  – магнитная восприимчивость. Тогда  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}$ , где  $\mu$  – магнитная проницаемость вещества ( $\mu = 1 + \chi$ ).

На границе раздела двух магнетиков выполняются *граничные условия* для нормальных и тангенциальных составляющих полей:  $B_{2n} = B_{1n}$ ,  $H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N$ ,  $J_{2\tau} - J_{1\tau} = i'_N$ . Здесь  $i_N$  и  $i'_N$  – проекции плотностей поверхностных токов проводимости и намагничивания на направление, касательное к границе раздела магнетиков и перпендикулярное касательному направлению, задаваемому вектором  $\vec{\tau}$ .

Граничные условия в векторном виде с учетом токов проводимости, протекающих по границе раздела магнетиков, равны  $(\vec{n}, (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)) = 0$ ,  $[\vec{n}, (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \vec{i}$ ,  $[\vec{n}, (\vec{J}_2 - \vec{J}_1)] = \vec{i}'$ . Здесь  $\vec{n}$  – вектор нормали к границе раздела магнетика, направленный из первой среды во вторую;  $\vec{i}, \vec{i}'$  – плотность поверхностных токов проводимости и намагничивания.

### Примеры решения задач

**Задача 5.10.** Постоянный ток  $I$  течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом  $R$ . Материалом провода является парамагнетик с восприимчивостью  $\chi$ . Найти зависимость индукции  $B$  от расстояния  $r$  до оси провода и объемную плотность тока намагничивания  $j'$ .

**Решение.** В качестве замкнутого контура  $L$  выберем окружность радиусом  $r < R$  с центром на оси цилиндра и лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. В соответствии с теоремой о циркуляции для вектора напряженности, получаем после интегрирования по выбранному контуру:

$$H2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2, H = \frac{Ir}{2\pi R^2}, J = \chi H = \chi \frac{Ir}{2\pi R^2}.$$

Следовательно, величина индукции магнитного поля внутри провода равна  $B = \mu_0(1 + \chi) \frac{Ir}{2\pi R^2}$ .

Аналогично вне провода ( $r > R$ ) получаем  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

Воспользовавшись теоремой о циркуляции для вектора намагниченности, получим выражение для тока намагничивания, охваченного контуром  $L$ :  

$$I' = J2\pi r = \chi \frac{Ir^2}{R^2}.$$

Ток намагничивания, протекающий через поверхность, ограниченную двумя окружностями радиусов  $r$  и  $r + dr$ , лежащих в плоскости перпендикулярной оси цилиндра, с центрами на оси равен  $dI' = \frac{2\chi I r}{R^2} dr$ .

Следовательно, плотность тока намагничивания равна

$$j' = \frac{dI'}{dS} = \frac{2\chi I r dr}{R^2 2\pi r dr} = \frac{\chi I}{\pi R^2}.$$

**Ответ:**  $B = \mu_0(1 + \chi) \frac{Ir}{2\pi R^2}; j' = \frac{\chi I}{\pi R^2}.$

**Задача 5.11.** Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком, восприимчивость которого зависит только от расстояния  $r$  до оси соленоиды как  $\chi = ar^2$ , где  $a$  – постоянная. На оси соленоиды индукция магнитного поля равна  $B_0$ . Найти зависимость от  $r$  намагниченности магнетика  $J(r)$  и плотности тока намагничивания  $j'(r)$  внутри магнетика.

**Решение.** В силу симметрии и условия задачи векторы  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}$  направлены параллельно оси соленоиды и образуют правовинтовую систему с током  $I$ , текущим по обмотке соленоиды. В плоскости, содержащей ось соленоиды, выбираем прямоугольный контур  $L$ , две стороны которого длиной  $l$  параллельны оси соленоиды. Две другие стороны находятся на расстояниях  $r$  и  $R$  от оси внутри и вне соленоиды соответственно. Они перпендикулярны оси соленоиды. Контур охватывает  $N$  витков.

В соответствии с теоремой о циркуляции вектора  $\vec{H}$  получаем:  $Hl = NI$ ,  
 $H = \frac{NI}{l}$ ,  $B = \mu_0(1 + \chi) \frac{NI}{l}$ ,  $B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}$ .

Следовательно, напряженность магнитного поля и намагниченность равны  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ ,  $\vec{J} = \chi \vec{H} = \frac{ar^2 \vec{B}_0}{\mu_0}$ .

Плотность тока намагничивания  $\vec{j}' = [\vec{\nabla}, \vec{J}]$  вычислим в цилиндрической системе координат, ось  $Oz$  которой совпадает с осью соленоиды. Вектор намагниченности имеет одну ненулевую компоненту  $J_z = ar^2 B_0 / \mu_0$ . Поэтому  $\vec{j}'$  имеет только одну ненулевую компоненту:  $j'_z = -\frac{\partial J_z}{\partial r} = -\frac{2arB_0}{\mu_0}$ .

Следовательно,  $j' = \frac{2arB_0}{\mu_0}$ .

Плотность тока намагничивания можно найти также, воспользовавшись теоремой о циркуляции  $\vec{J}$ :

$$\oint_{(L)} (\vec{J}, d\vec{l}) = \int_{(S)} (\vec{j}', d\vec{S}).$$

Циркуляцию вычислим по ранее введенному прямоугольному контуру  $L$ . Очевидно, что плотность тока намагничивания зависит только от  $r$ . Она перпендикулярна плоскости контура. Тогда

$$\frac{ar^2 B_0 l}{\mu_0} = \int_r^R j'(r) l dr + I'_{\text{пов}}.$$

Взяв производную по  $r$  от этого выражения, получаем выражение для плотности тока намагничивания:  $j' = -\frac{2arB_0}{\mu_0}$ . Знак минус указывает на то, что направление  $\vec{j}'$  и обход контура образуют левовинтовую систему.

**Ответ:**  $\vec{j} = \chi \vec{H} = \frac{ar^2 \vec{B}_0}{\mu_0}; j' = -\frac{2arB_0}{\mu_0}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**5.12.** Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного магнетика равна  $\vec{B}_0$ , причем вектор  $\vec{B}_0$  составляет угол  $\alpha_0$  с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика равна  $\mu$ . Найти модуль вектора индукции магнитного поля в магнетике вблизи поверхности.

**Ответ:**  $B = B_0 \sqrt{\mu^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ .

**5.13.** Постоянный ток  $I$  течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом  $R$ . Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью  $\chi$ . Найти поверхностный молекулярный ток  $I'_{\text{пов}}$ .

**Ответ:**  $I'_{\text{пов}} = \chi I$ .

**5.14.** Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца –  $d$ . Ширина зазора –  $b$ , индукция магнитного поля в зазоре –  $B$ . Пренебрегая рассеянием магнитного поля на краях зазора, найти модуль вектора напряженности магнитного поля внутри магнита.

**Ответ:**  $H \approx bB / \mu_0 \pi d$ .

## 6. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

**Явление электромагнитной индукции** состоит в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (потока вектора  $\vec{B}$ ) через поверхность, ограниченную этим контуром (охваченную контуром), возникает электрический ток – индукционный ток. Следовательно, при изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила (ЭДС) индукции  $\mathcal{E}_i$ .

Изменение магнитного потока может быть вызвано двумя принципиально различными способами:

1) движением контура и его отдельных участков. В этом случае ЭДС индукции объясняется действием на движущиеся вместе с участками контура носители тока сил со стороны магнитного поля;

2) при неподвижном контуре изменяется со временем вектор магнитной индукции. Дж. К. Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля. Это поле носит вихревой характер и при помещении в пространство замкнутого проводящего контура оно обуславливает возникновение ЭДС индукции.

Очевидно, что ЭДС индукции возникает и при использовании одновременно двух указанных способов.

Согласно **закону электромагнитной индукции** (закону Фарадея), какова бы ни была причина изменения магнитного потока, охватываемого замкнутым проводящим контуром, возникающая в контуре ЭДС индукции прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

**Магнитный поток:**  $\Phi = \int (\vec{B}, d\vec{S})$ . В СИ коэффициент пропорциональности равен единице. ЭДС и магнитный поток являются алгебраическими величинами, знак которых определяется выбором положительного направления обхода по контуру и выбором нормали  $\vec{n}$  к поверхности, ограниченной контуром, соответственно. Направление нормали  $\vec{n}$  и положительное направление обхода контура связаны друг с другом правилом правого винта. Тогда знак минус отражает **правило Ленца**: индукционный ток и  $\mathcal{E}_i$  всегда направлены так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Если замкнутый контур состоит из  $N$  одинаковых витков, каждый из которых охватывает одинаковый магнитный поток  $\Phi_1$ , то возникающую в контуре ЭДС индукции определяет полный магнитный поток (*потокосцепление*)  $\Psi = N\Phi_1$ :

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi_1}{dt}.$$

Протекающий по замкнутому контуру ток создает магнитное поле и, соответственно, возникает магнитный поток через контур. Согласно закону Био – Савара – Лапласа и принципу суперпозиции магнитная индукция  $\vec{B}$  и магнитный поток  $\Phi$  прямо пропорциональны силе тока  $I$  в контуре. Поэтому можно записать  $\Phi = LI$ .

При изменении силы тока в контуре в нем возникает ЭДС индукции, которую называют **ЭДС самоиндукции**  $\mathcal{E}_s$ . В соответствии с законом электромагнитной индукции она равна

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d(LI)}{dt}.$$

Если конфигурация контура не меняется и отсутствуют ферромагнетики, то индуктивность  $L$  постоянна и

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}.$$



В отсутствие ферромагнетиков объемная плотность энергии магнитного поля равна

$$w = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

### Примеры решения задач

**Задача 6.1.** П-образный проводник замкнут перпендикулярной к двум его параллельным участкам перемычкой, сопротивление которой  $R$ . В одной плоскости с ними лежит тонкий длинный прямой провод, по которому протекает ток  $I$ . Два параллельных участка П-образного проводника параллельны проводу и находятся на расстояниях  $a$  и  $b$  от него. Перемычка без трения перемещается с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной ей и лежащей в общей плоскости (рис. 6.1). Найти силу индукционного тока в перемычке, а также силу  $F$ , необходимую для поддержания скорости перемычки постоянной. Сопротивлением П-образного проводника и трением перемычки пренебречь.

**Решение.** Ось  $Ox$  направим вдоль проводника с током  $I$ , ось  $Oy$  – перпендикулярно  $Ox$  в плоскости проводников так, чтобы она проходила через средний участок П-образного проводника. Положение перемычки определяется координатой  $x$ . Перемычка и проводник образуют замкнутый контур в виде прямоугольника, который ограничивает плоскую поверхность площадью  $S = (b - a)x$ . Ток  $I$  создает магнитное поле, индукция которого  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$ .

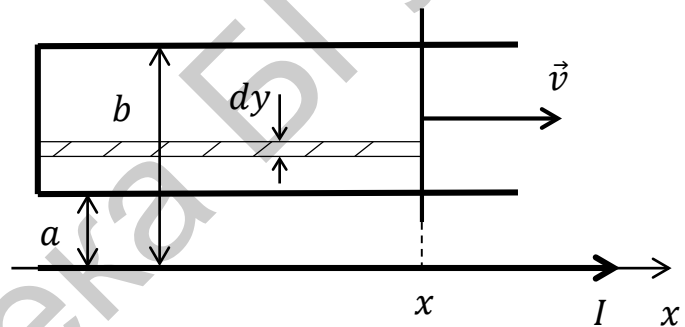


Рис. 6.1

Для вычисления магнитного потока через поверхность, ограниченную прямоугольником, разбиваем ее на узкие полосы шириной  $dy$ , параллельные  $Ox$ , площадью  $dS = x \cdot dy$ . Магнитный поток через полосу, положение которой задается координатой  $y$ , будет равен  $d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dS = \frac{\mu_0 I x}{2\pi y} dy$ .

Магнитный поток через всю поверхность равен

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I x}{2\pi y} dy = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

В контуре возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$  и индукционный ток, сила которого  $I_i = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln \frac{b}{a}$ .

Сила  $F$ , действующая на перемычку, должна уравновешивать силу Ампера (рис. 6.2). Для вычисления силы Ампера, действующей на перемычку,

разбиваем ее на элементарные участки длиной  $dy$ . Сила Ампера, действующая на этот участок, равна

$$dF_A = I_i B dy = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln \frac{b}{a} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dy.$$

Сила, необходимая для поддержания скорости перемишки постоянной, по модулю равна силе Ампера, действующей на всю перемишку,

$$F = F_A = \int_a^b \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \frac{v}{R} \ln \frac{b}{a} dy =$$

$$= \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right)^2 \frac{v}{R},$$

и противоположна ей по направлению:  $\vec{F} \updownarrow \vec{F}_A$ .

**Ответ:**  $I_i = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln \frac{b}{a}; F = \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right)^2 \frac{v}{R}.$

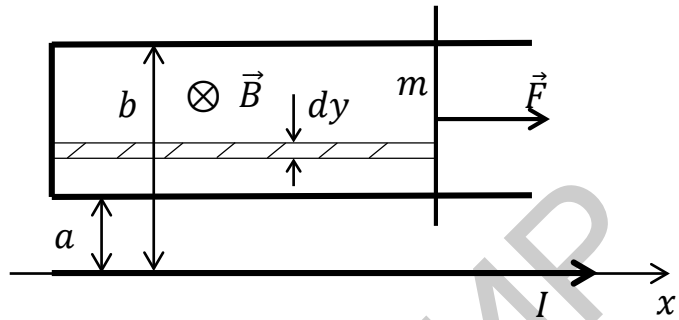


Рис. 6.2

**Задача 6.2.** П-образный проводник, сопротивлением которого можно пренебречь, замкнут проводящей перемишкой массой  $m$  и сопротивлением  $R$ . Расстояние между параллельными участками П-образного проводника –  $l$ . Система находится в магнитном поле, индукция  $\vec{B}$  которого перпендикулярна проводникам. В момент времени  $t = 0$  на перемишку начинает действовать сила  $\vec{F}$ , перпендикулярная перемишке и лежащая в одной плоскости с проводниками. Найти зависимость скорости перемишки от времени.

**Решение.** Выбираем вектор нормали  $\vec{n}$  к поверхности, ограниченной проводниками, сонаправленным с  $\vec{B}$ :  $\vec{n} \uparrow \vec{B}$ . Тогда в соответствии с правилом правого винта обход контура должен производиться по часовой стрелке. Магнитный поток через указанную поверхность меняется. Следовательно, в замкнутом контуре возникает ЭДС индукции и соответствующий индукционный ток:  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv_x, I_I = \frac{E_i}{R} = -\frac{Blv_x}{R}.$

Положение средней части проводника задано координатой  $x = 0$ , координата перемишки равна  $x$ . Знак минус означает, что ток течет против направления обхода, т. е. против часовой стрелки. На перемишку действует сила Ампера, направленная влево, величина которой равна  $F_A = |I_I l B| = \frac{l^2 B^2 v}{R}.$

Уравнение движения перемишки  $m \frac{dv}{dt} = F - \frac{l^2 B^2 v}{R}$  перепишем в виде  $\frac{mdv}{F - \frac{l^2 B^2 v}{R}} = dt$  и проинтегрируем. Получим  $\ln \left( F - \frac{l^2 B^2 v}{R} \right) = -\frac{l^2 B^2 v}{mR} t + C.$

Значение постоянной  $C = \ln F$  следует из начального условия. Отсюда получаем зависимость скорости перемишки от времени:

$$v = \left( 1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2 t}{mR}\right) \right) \frac{FR}{B^2 l^2}.$$

**Ответ:**  $v = \left( 1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2 t}{mR}\right) \right) \frac{FR}{B^2 l^2}.$

**Задача 6.3.** Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением  $R$  изменяется в течение времени  $\tau$  по закону  $\Phi = kt(\tau - t)$ . Найти количество тепла, выделенное в контуре за это время. Индуктивностью контура пренебречь.

**Решение.** В контуре возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = k(2t - \tau)$ .

Согласно закону Джоуля – Ленца в контуре за промежуток времени  $dt$  выделяется количество тепла, равное

$$\delta Q = I_i^2 R dt = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R^2} R dt = \frac{k^2(2t - \tau)^2}{R} dt.$$

Количество тепла за весь промежуток времени от  $t = 0$  до  $t = \tau$  равно

$$Q = \int_0^\tau \frac{k^2(2t - \tau)^2}{R} dt = \frac{k^2 \tau^3}{3R}.$$

**Ответ:**  $Q = \frac{k^2 \tau^3}{3R}.$

**Задача 6.4.** Тонкое проволочное кольцо, имеющее радиус  $a$  и сопротивление  $r$ , расположено внутри длинного соленоида так, что их оси совпадают. Длина соленоида –  $l$ , радиус сечения  $b \ll l$ . В некоторый момент времени соленоид подключили к источнику постоянного напряжения  $U$ . Полное сопротивление цепи равно  $R$ . Пренебрегая индуктивностью кольца, найти максимальное значение радиальной силы, действующей на единицу длины кольца.

**Решение.** После подключения источника напряжения сила тока в соленоиде меняется в соответствии с уравнением  $IR = U + \left(-L \frac{dI}{dt}\right)$ , где  $L$  – индуктивность соленоида.

Решение уравнения имеет вид  $I = \frac{U}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right)$ .

Индукция магнитного поля, создаваемого этим током,  $B = \mu_0 NI/l$ . Магнитный поток через проволочное кольцо  $\Phi = BS = \pi \mu_0 Na^2 I/l$  изменяется со временем. В кольце возникает индукционный ток:

$$I_i = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 Na^2}{lr} \frac{dI}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 Na^2}{lr} \frac{(U - IR)}{L}.$$

На элементарный участок кольца  $d\tau$  действует сила Ампера, величина которой  $dF_A = I_i B d\tau = \frac{\pi \mu_0 Na^2}{lr} \frac{(U - IR)}{L} \frac{\mu_0 NI}{l} d\tau$ . Сила направлена вдоль радиуса. Это и есть радиальная сила.

На единицу длины кольца действует сила  $\frac{dF_A}{d\tau} = \frac{\pi \mu_0 Na^2}{lr} \frac{(U - IR)}{L} \frac{\mu_0 NI}{l}$ . Она зависит от  $I$ .

Максимум достигается, очевидно, при  $I = U/2R$ . Максимальная радиальная сила в расчете на единицу длины равна

$$\frac{dF_A}{d\tau} = \frac{\mu_0 a^2 U^2}{4rRlb^2}.$$

**Ответ:**  $\frac{dF_A}{d\tau} = \frac{\mu_0 a^2 U^2}{4rRlb^2}.$

### Задачи для самостоятельного решения

**6.5.** Тонкий металлический стержень длиной  $l = 1,200$  м вращается с частотой  $n = 120$  мин<sup>-1</sup> в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной стержню и отстоящей от одного из его концов на расстояние  $l_1 = 0,250$  м. Вектор  $\vec{B}$  параллелен оси вращения,  $B = 1,00$  мТл. Найти разность потенциалов  $U$ , возникающую между концами стержня.

**Ответ:**  $U = \pi B n l (l - 2l_1) = 5,3$  мВ.

**6.6.** Между полюсами магнита находится небольшая катушка, ось которой совпадает с направлением вектора индукции магнитного поля магнита. Площадь поперечного сечения катушки равна  $S$ , число витков –  $N$ . При переворачивании катушки на  $180^\circ$  через подключенный к ней гальванометр протекает заряд  $q$ . Найти модуль индукции внешнего магнитного поля, если сопротивление цепи –  $R$ .

**Ответ:**  $B = qR/2nS$ .

**6.7.** В магнитном поле, создаваемом длинным прямым проводником с током  $I$ , находится П-образный проводник, по которому скользит с постоянной скоростью проводящая перемычка длиной  $l$  (рис. 6.3). Найти ЭДС индукции как функцию расстояния  $x$  между перемычкой и проводником. Проводник находится в одной плоскости с П-образным проводником, вектор скорости рамки  $\vec{v}$  перпендикулярен перемычке.

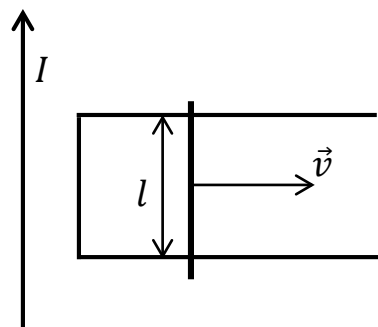


Рис. 6.3

**Ответ:**  $\mathcal{E}_i = \mu_0 I l v / 2\pi x$ .

**6.8.** В магнитном поле, создаваемом длинным прямым проводником с током  $I$ , находится квадратная рамка со стороной  $a$ . Найти ЭДС индукции как функцию расстояния  $r$  между рамкой и проводником. Проводник находится в одной плоскости с рамкой. Рамка движется со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной проводнику с током (рис. 6.4).

**Ответ:**  $\mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi r(r+a)}$ .

**6.9.** Непроводящее тонкое кольцо массой  $m$ , имеющее заряд  $q$ , может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили практически однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца,

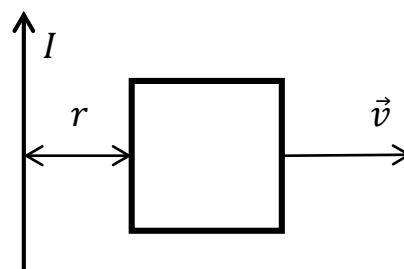


Рис. 6.4

которое начало нарастать во времени по некоторому закону  $\vec{B}(t)$ . Найти угловую скорость  $\vec{\omega}$  кольца в зависимости от индукции  $\vec{B}(t)$ .

**Ответ:**  $\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B}(t)$ .

## 7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

*Уравнения Максвелла в дифференциальной форме* записывают в следующем виде:

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla}, \vec{E}] &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0; \\ [\vec{\nabla}, \vec{H}] &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; (\vec{\nabla}, \vec{D}) = \rho, \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{div} \vec{B} = 0; \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \text{div} \vec{D} = \rho. \end{aligned}$$

Эквивалентные им *уравнения Максвелла в интегральной форме*:

$$\begin{aligned} \oint (\vec{E}, d\vec{l}) &= -\int \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right); \oint (\vec{B}, d\vec{S}) = 0; \\ \oint (\vec{H}, d\vec{l}) &= \int \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right); \oint (\vec{D}, d\vec{S}) = \int \rho dV. \end{aligned}$$

Величину  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  называют *плотностью тока смещения*. Для изотропных сред в случае достаточно слабых и медленно меняющихся полей уравнения Максвелла дополняются следующими *материальными уравнениями*:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

### Примеры решения задач

**Задача 7.1.** Определить величину напряженности магнитного поля в плоском конденсаторе, одна из пластин которого удаляется от неподвижной другой пластины со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной пластинам. Пластины имеют форму дисков. Разность потенциалов между пластинами  $U$  остается постоянной. Начальное расстояние между пластинами равно  $d_0$ .

**Решение.** Напряженность электрического поля в конденсаторе:  $E = \frac{U}{d} = \frac{U}{d_0 + vt}$ .

Выберем вспомогательный замкнутый контур  $L$  в виде окружности радиусом  $r$ , параллельной пластинам конденсатора и симметричной относительно оси конденсатора. Направление обхода по контуру и вектор нормали

к поверхности, ограниченной контуром, связаны правилом правого винта. Уравнение Максвелла приводит к выражению

$$\oint(\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{d}{dt} \int(\vec{D}, d\vec{S}) \Rightarrow H_l 2\pi r = \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U \pi r^2}{d_0 + vt} \right) = - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U \pi r^2 v}{(d_0 + vt)^2}.$$

Следовательно, напряженность магнитного поля в конденсаторе определяется выражением  $H_l = - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U r v}{2(d_0 + vt)^2}$ .

**Ответ:**  $H_l = - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U r v}{2(d_0 + vt)^2}$ .

**Задача 7.2.** Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . В момент  $t = 0$  внутренней сфере сообщили некоторый заряд  $q$ . Найти плотности токов смещения и проводимости и установить связь между ними в произвольной точке среды в один и тот же момент времени.

**Решение.** Напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от центра сфер  $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}$ .

Согласно закону Ома в дифференциальной форме, плотность тока проводимости равна  $\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho r^3}$ .

Плотность тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\varepsilon \frac{\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3} \frac{dq}{dt}$ .

Сила тока, протекающего через сферу радиусом  $r$  (концентрическую к металлическим сферам), равна скорости убыли заряда внутренней сферы:  $I = 4\pi r^2 j_r = - \frac{dq}{dt}$ , где  $j_r$  – проекция  $\vec{j}$  на радиальное направление, задаваемое единичным вектором  $\vec{r}/r$ ,  $\vec{j} = j_r \vec{r}/r$ .

Следовательно, плотность тока смещения равна  $\vec{j}_{\text{см}} = -\varepsilon_0\varepsilon \frac{\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3} 4\pi r^2 j_r = -\vec{j} = - \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho r^3}$ , при этом  $\vec{j}_{\text{см}} = -\vec{j}$ .

**Ответ:**  $\vec{j} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho r^3}$ ;  $\vec{j}_{\text{см}} = - \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho r^3}$ ;  $\vec{j}_{\text{см}} = -\vec{j}$ .

**Задача 7.3.** Длинный прямой соленоид имеет  $n$  витков на единицу длины. По нему течет переменный ток  $I = I_0 \sin \omega t$ . Найти плотность тока смещения внутри соленоида как функцию расстояния  $r$  от оси соленоида. Радиус сечения соленоида равен  $R$ .

**Решение.** Индукция магнитного поля внутри соленоида параллельна его оси и ее проекция на эту ось равна  $B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 \sin \omega t$ .

Выберем замкнутый контур в виде окружности радиусом  $r$  с центром на оси соленоида и лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. Воспользовавшись уравнением Максвелла, получим

$$\oint(\vec{E}, d\vec{l}) = - \int \left( \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right) \Rightarrow E_l 2\pi r = \pi r^2 \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t \Rightarrow E_l = \frac{\mu_0 n I_0 r \omega \cos \omega t}{2}.$$

Плотность тока смещения определяется проекцией на направление, касательное к выбранной окружности:

$$j_{\text{смл}} = \frac{\partial D_l}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_l}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0 n I_0 r \omega^2 \sin \omega t}{2}.$$

**Ответ:**  $j_{\text{смл}} = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0 n I_0 r \omega^2 \sin \omega t}{2}.$

**Задача 7.4.** Пространство между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых дисков, заполнено однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью  $\sigma$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Расстояние между обкладками равно  $d$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками на расстоянии  $r$  от их оси, если на конденсатор подано переменное напряжение  $U = U_m \cos \omega t$ .

**Решение.** Проекции векторов напряженности электрического поля и смещения между обкладками на ось конденсатора  $Ox$  равны

$$E_x = \frac{U}{d} = \frac{U_m \cos \omega t}{d}, \quad D_x = \varepsilon_0 \varepsilon E_x = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{U_m \cos \omega t}{d}.$$

Между обкладками возникают как ток проводимости, так и ток смещения, плотности которых равны

$$j_x = \sigma E_x = \frac{\sigma U_m \cos \omega t}{d}, \quad j_{\text{смх}} = \frac{\partial D_x}{\partial t} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{U_m \omega \sin \omega t}{d}.$$

Эти токи порождают магнитное поле, напряженность которого можно вычислить, воспользовавшись уравнением Максвелла:

$$\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = \int \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right).$$

В качестве вспомогательного замкнутого контура ( $L$ ), по которому выполняется интегрирование, выберем окружность радиусом  $r$ , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси конденсатора с центром на оси. В силу симметрии задачи напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  направлена по касательной к выбранной окружности и постоянна по величине. Тогда последнее выражение можно переписать:  $H_l 2\pi r = (j_x + j_{\text{смх}}) \pi r^2$ , где  $H_l$  – проекция напряженности магнитного поля на направление, касательное к выбранной окружности и выбранное в соответствии с правилом правого винта. Проекция напряженности магнитного поля равна

$$H_l = \frac{r U_m (\sigma \cos \omega t - \varepsilon_0 \varepsilon \omega \sin \omega t)}{2d}.$$

**Ответ:**  $H_l = \frac{r U_m (\sigma \cos \omega t - \varepsilon_0 \varepsilon \omega \sin \omega t)}{2d}.$

#### Задачи для самостоятельного решения

**7.5.** Точечный заряд  $q$  движется равномерно и прямолинейно с нерелятивистской скоростью  $v$ . Найти вектор плотности тока смещения в точке  $P$ , находящейся на расстоянии  $r$  от заряда:

- 1) на прямой, перпендикулярной траектории и проходящей через заряд;
- 2) на прямой, совпадающей с траекторией движения заряда.

**Ответ:** 1)  $\vec{j}_{\text{см}} = -\frac{q\vec{v}}{4\pi r^3}$ ; 2)  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{3q\vec{v}}{4\pi r^3}$ .

**7.6.** Плоский воздушный конденсатор, площадь каждой пластины которого  $S$ , включен последовательно в цепь переменного тока. Найти максимальную плотность тока смещения в конденсаторе, если амплитуда синусоидального тока в подводящих проводах равна  $I_0$ .

**Ответ:**  $j_{\text{смmax}} = I_0/S$ .

**7.7.** Ток, текущий по длинному прямому соленоиду, радиус сечения которого  $R$ , меняют так, что магнитное поле внутри соленоида возрастает со временем по закону  $B = \beta t^2$ . Найти плотность тока смещения как функцию расстояния  $r$  от оси соленоида.

**Ответ:**  $j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \beta r$  при  $r < R$ ;  $j_{\text{см}} = \frac{\varepsilon_0 \beta R^2}{r}$  при  $r > R$ ;  $j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \beta R$  при  $r = R$ .

**7.8.** По жесткому непроводящему тонкому круговому кольцу массой  $m$  равномерно распределен заряд  $q$ . Кольцо может свободно вращаться вокруг оси, совпадающей с осью симметрии кольца. Вначале кольцо покоится, а магнитное поле равно нулю. Затем включается однородное магнитное поле  $\vec{B}(t)$ , перпендикулярное плоскости кольца и произвольно меняющееся по величине во времени. Найти зависимость от времени угловой скорости кольца.

**Ответ:**  $\vec{\omega}(t) = -\frac{q\vec{B}(t)}{2m}$ .

**7.9.** В некоторой области инерциальной системы отсчета имеется вращающееся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  магнитное поле, модуль индукции которого равен  $B$ . Найти  $[\vec{\nabla}, \vec{E}]$  в этой области как функцию векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{\omega}$ .

**Ответ:**  $[\vec{\nabla}, \vec{E}] = -[\vec{\omega}, \vec{B}]$ .

## 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.

### ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Уравнения Максвелла, записанные в однородной изотропной среде без токов и зарядов,

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla}, \vec{E}] &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0; \\ [\vec{\nabla}, \vec{H}] &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (\vec{\nabla}, \vec{D}) = 0, \end{aligned}$$

приводят к *волновым уравнениям для полей*:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

где  $\vec{\nabla}^2$  – оператор Лапласа ( $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ).

Функции, которые являются их решениями, представляют собой уравнения волн для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .



Фазовая скорость их распространения, как следует из волновых уравнений, равна  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ , где  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость распространения света в вакууме.

Простейшим и одним из наиболее важных решений волнового уравнения является решение в виде *плоской волны, поляризованной линейно*:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \alpha); \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \alpha),$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор, задающий направление распространения плоской электромагнитной волны.

Модуль волнового вектора называется *волновым числом*. Оно связано с частотой  $\omega$  и фазовой скоростью  $v$ :  $k = |\vec{k}| \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина волны ( $\lambda = 2\pi v/\omega$ ).

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{k}$  взаимно ортогональны и образуют правовинтовую систему. Поворот вектора  $\vec{E}$  к вектору  $\vec{H}$  дает направление  $\vec{k}$ . Связав с направлениями  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  орты прямоугольной декартовой системы координат  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , соответственно, можно получить для ненулевых проекций векторов соотношение  $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E_y = \sqrt{\mu_0 \mu} H_z$ . Оно выполняется в любой момент времени в любой точке пространства, а также для амплитуд векторов. Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  совершают колебания в одной фазе.

Электромагнитная волна, как и другие волны, переносит энергию. **Плотность энергии электромагнитной волны** равна сумме плотностей энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{EH}{v}.$$

**Плотность потока энергии**  $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$  называют **вектором Пойнтинга**. На практике измеряется *интенсивность волны*, которая равна модулю среднего по времени значения плотности потока энергии:

$$I = \langle S \rangle = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon / \mu_0 \mu} E_0^2 / 2.$$

Наряду с энергией электромагнитная волна обладает импульсом. **Плотность импульса электромагнитной волны в вакууме** определяется следующим выражением:

$$\vec{p} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{c^2}.$$

При поглощении телом падающая на его поверхность электромагнитная волна передает телу импульс. В соответствии со вторым законом Ньютона на тело со стороны волны действует сила, равная скорости изменения импульса тела. Если волна падает перпендикулярно поверхности тела и происходит полное поглощение волны, то *давление на поверхность тела* равно

$$P = w.$$

### Примеры решения задач

**Задача 8.1.** Плоская электромагнитная волна с  $\vec{E} = E_0 \vec{j} \cos(\omega t + kx)$  распространяется в вакууме ( $\vec{j}$  – единичный вектор, задающий направление  $Oy$ ). Считая  $E_0$  и  $k$  известными, найти: 1) вектор  $\vec{H}$  как функцию времени и координат; 2) среднюю по времени плотность энергии волны; 3) средний по времени вектор Пойнтинга  $\langle \vec{S} \rangle$ .

**Решение.** 1) Из выражения для  $\vec{E}$  следует, что  $\omega = ck$ ,  $\vec{k} = -k\vec{i}$ ,  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{j}$ . Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{k}$  образуют правую тройку векторов. Следовательно,  $\vec{H}_0 = -H_0 \vec{k}$ .

Из  $\sqrt{\varepsilon_0} \varepsilon E_0 = \sqrt{\mu_0} \mu H_0$  следует, что  $H_0 = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_0$ . Напряженность магнитного поля в зависимости от времени и координат равна  $\vec{H} = -\sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_0 \vec{k} \cos(ckt + kx)$ .

2) Средняя по времени (за период) плотность энергии волны равна

$$\langle w \rangle = \frac{\langle EH \rangle}{c} = \left\langle \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E_0^2 \cos^2(ckt + kx)}{\sqrt{\mu_0} c} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}.$$

3) Средний по времени вектор Пойнтинга равен

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle [\vec{E}, \vec{H}] \rangle = \left\langle -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 [\vec{j}, \vec{k}] \cos^2(ckt + kx) \right\rangle = -\frac{\sqrt{\varepsilon_0} E_0^2}{2\sqrt{\mu_0}} \vec{i}.$$

Знак минус указывает на то, что волна распространяется в направлении, противоположном оси  $Ox$ .

**Ответ:**  $\vec{H} = -\sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_0 \vec{k} \cos(ckt + kx)$ ;  $\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ ;  $\langle \vec{S} \rangle = -\frac{\sqrt{\varepsilon_0} E_0^2}{2\sqrt{\mu_0}} \vec{i}$ .

**Задача 8.2.** В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, которая описывается уравнениями  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))$ . Исходя из уравнений Максвелла, выразить через заданные векторы  $\vec{E}_0$  и  $\vec{k}$  вектор  $\vec{H}_0$ .

**Решение.** Поля зависят только от фазы  $\varphi = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$ . Поэтому частные производные полевых величин по координатам можно представить следующим образом:  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d}{d\varphi} = -k_x \frac{d}{d\varphi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = -k_y \frac{d}{d\varphi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = -k_z \frac{d}{d\varphi}$ .

Подставим в уравнение Максвелла  $[\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  заданные выражения для полей. Учтем, что  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ . Ротор напряженности электрического поля вычислим через определитель, воспользовавшись его свойствами:

$$[\vec{\nabla}, \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} \cos\varphi & E_{0y} \cos\varphi & E_{0z} \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ k_z & k_y & k_x \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} \cdot \left( -\frac{d \cos \varphi}{d \varphi} \right) = [\vec{k}, \vec{E}_0] \sin \varphi.$$

Уравнение Максвелла сведется к алгебраическому уравнению  $[\vec{k}, \vec{E}_0] \sin \varphi = \mu_0 \omega \vec{H}_0 \sin \varphi$ .

В вакууме  $\omega = kc = k/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ . Из алгебраического уравнения находим выражение для  $\vec{H}_0$ :  $\vec{H}_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{k} [\vec{k}, \vec{E}_0]$ .

**Ответ:**  $\vec{H}_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{k} [\vec{k}, \vec{E}_0]$ .

**Задача 8.3.** Переменный ток  $I = I_0 \sin \omega t$  течет по обмотке прямого соленоида, радиус сечения которого  $R$ . Найти отношение амплитудных значений электрической и магнитной энергий внутри соленоида.

**Решение.** Напряженность магнитного поля в соленоиде равна  $H = nI = nI_0 \sin \omega t$ .

Изменяющееся со временем магнитное поле приводит к возникновению вихревого электрического поля. Напряженность электрического поля найдем, воспользовавшись уравнением Максвелла:

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int (\vec{B}, d\vec{S}) \Rightarrow E_l 2\pi r = -\pi \mu_0 r^2 n I_0 \omega \cos \omega t \Rightarrow \\ \Rightarrow E_l = -\frac{\mu_0 r n I_0 \omega \cos \omega t}{2}.$$

Замкнутый контур ( $L$ ) – окружность радиусом  $r$  с центром на оси соленоида и лежащая в плоскости, перпендикулярной этой оси.  $E_l$  – проекция  $\vec{E}$  на касательную (с учетом направления обхода) к ( $L$ ). В силу симметрии задачи  $E_l$  полностью определяет  $\vec{E}$ . Плотности электрической и магнитной энергий равны

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\mu_0 r n I_0 \omega \cos \omega t}{2} \right)^2, w_m = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu_0}{2} (n I_0 \sin \omega t)^2.$$

Плотность энергии магнитного поля постоянна по объему соленоида. Поэтому энергия магнитного поля во всем соленоиде в пренебрежении краевыми эффектами равна  $W_m = \frac{\mu_0}{2} (n I_0 \sin \omega t)^2 \pi R^2 L$ .

Плотность энергии электрического поля зависит от  $r$ . Поэтому для вычисления энергии разбиваем объем соленоида на коаксиальные с соленоидом полые цилиндры радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ ; вычисляем для них энергию и интегрируем:

$$W_e = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\mu_0 r n I_0 \omega \cos \omega t}{2} \right)^2 L 2\pi r dr = \frac{\varepsilon_0}{8} \left( \frac{\mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t}{2} \right)^2 L 2\pi R^4.$$

Отношение амплитудных значений электрической и магнитной энергий внутри соленоида равно  $\frac{W_e}{W_m} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 \omega^2}{8}$ .

**Ответ:**  $\frac{W_e}{W_m} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 \omega^2}{8}$ .

**Задача 8.4.** Плоский конденсатор с круглыми пластинами медленно заряжается до напряжения  $U_m$ . Расстояние между пластинами –  $d$ . Найти количество энергии, протекающей через воображаемую цилиндрическую поверхность радиусом  $r$ , коаксиальную с объемом, ограниченным пластинами, за время зарядки.

**Решение.** Напряженность электрического поля  $E = U/d$  в процессе зарядки конденсатора меняется. В конденсаторе возникает ток смещения  $j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} \frac{dU}{dt}$ .

Ток смещения приводит к возникновению магнитного поля. Напряженность магнитного поля вычислим, воспользовавшись уравнением Максвелла, выбрав контур ( $L$ ) в виде окружности радиусом  $r$ , лежащую на цилиндре:

$$\oint (\vec{H}, d\vec{l}) = \int (\vec{j}_{\text{см}}, d\vec{S}) \Rightarrow H_l 2\pi r = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} \frac{dU}{dt} \pi r^2 \Rightarrow H_l = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2d} \frac{dU}{dt} r.$$

Величина вектора Пойнтинга  $S = EH = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{2d^2} \frac{dU}{dt} r$ . Вектор направлен внутрь цилиндра перпендикулярно его поверхности. Следовательно, поток энергии, поступающей в выделенный цилиндрический объем, равен

$$\Phi_E = S 2\pi r d = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon U r^2}{d} \frac{dU}{dt}.$$

Энергия, поступившая в выделенный объем за время зарядки,

$$W = \int_0^{\tau} \Phi_E dt = \int_0^{\tau} \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon U r^2}{d} \frac{dU}{dt} dt = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon U_m^2 r^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_m^2}{2} \pi r^2 d,$$

совпадает с энергией электрического поля в цилиндре.

**Ответ:**  $W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_m^2}{2} \pi r^2 d$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**8.5.** Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного слоя толщиной  $l$  из немагнитного вещества, диэлектрическая проницаемость которого экспоненциально падает от значения  $\varepsilon_1$  на передней поверхности до  $\varepsilon_2$  на задней. Найти время распространения данной фазы волны через этот слой.

**Ответ:**  $t = 2l(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})/2 \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$ .

**8.6.** Плоская электромагнитная волна  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ , распространяющаяся в вакууме, наводит ЭДС индукции в квадратном контуре со стороной  $l$  (рис. 8.1). Найти зависимость от времени ЭДС индукции в контуре по заданным  $E_0$ ,  $\omega$ ,  $l$ .

**Ответ:**  $E_i = E_l(\cos \omega t - \cos(\omega t - \omega l/c))$ .

**8.7.** В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой  $\omega$ . Амплитуда напряженности электрического поля равна  $E_0$ . На пути распространения волны расположен шар радиусом  $R$ . Какая энергия падает на шар за время  $t \gg T$  периода колебаний волны?

**Ответ:**  $W_m = \pi \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} R^2 E_0^2 t/2$ .

**8.8.** Сила тока в очень длинном радиусом  $R$  соленоиде медленно увеличивается от 0 до  $I_0$ . Число витков соленоида на единицу длины равно  $n$ . Найти количество энергии, протекающей через замкнутый коаксиальный с соленоидом цилиндр длиной  $l$  и радиусом основания  $r$  за полное время возрастания тока. Сравнить полученное выражение с энергией магнитного поля внутри выделенного цилиндра.

**Ответ:**  $W = \mu_0 n^2 I_0^2 \pi r^2 l/2$ . Энергия совпадает с энергией магнитного поля в выделенном объеме.

**8.9.** Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиусом  $R$ , подключен к переменному синусоидальному напряжению частотой  $\omega$ . Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри конденсатора.

**Ответ:**  $W_{m\max}/W_{e\max} = \epsilon_0 \mu_0 R^2 \omega^2/8$ .

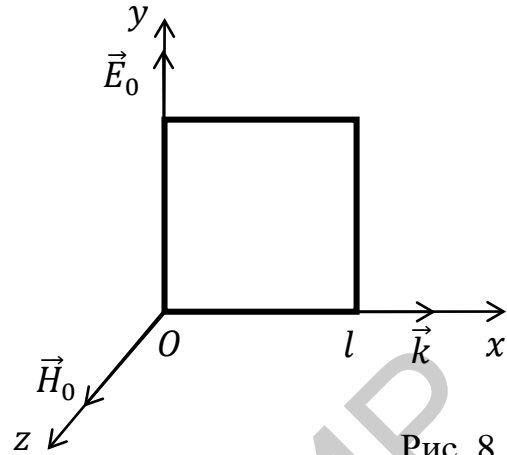


Рис. 8.1

## 9. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

### 9.1. Интерференция света

**Интерференция** – явление, возникающее при наложении когерентных волн, в результате которого происходит перераспределение интенсивности волн в пространстве: в одних местах возникают максимумы, в других минимумы интенсивности. Необходимым условием интерференции волн является их когерентность, т. е. согласованное протекание во времени и пространстве волновых процессов. Результирующее колебание в данной точке находится методом векторной диаграммы для сложения колебаний, соответствующих каждой из складывающихся волн.

Амплитуда результирующего колебания в этом случае определяется выражением  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ , где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды складываемых колебаний;  $\alpha_1 - \alpha_2 = \delta$  – разность фаз исходных колебаний в рассматриваемой точке пространства.

Квадрат амплитуды результирующего колебания зависит от разности фаз  $\delta$  исходных колебаний и изменения этих фаз во времени. Если волновые колебания распространяются в одной и той же однородной среде, то среднее во времени квадрата амплитуды  $\langle A^2 \rangle$  можно считать мерой интенсивности

света  $I$  ( $I \sim A^2$ ). Величина интенсивности результирующего колебания определяется выражением  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$ .

Интерференцию света от одного источника наблюдают по следующей схеме:

1) волну, излучаемую этим источником, разделяют на две волны, проходящие различные оптические пути  $n_2 s_2, n_1 s_1$ ;

2) затем с помощью устройств накладывают их друг на друга. В результате волны приобретают оптическую разность хода  $\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1$ , где  $n_2, n_1$  – показатели преломления сред;  $s_2, s_1$  – геометрические длины путей, проходимые волнами.

Длина световой волны в среде с показателем преломления  $n$  выражается соотношением  $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$ . Разность фаз волн в точке наблюдения определяется как  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ , где  $\lambda$  – длина волны света в вакууме.

Исследуя функцию интенсивности на экстремум, можно найти:

1) условие интерференционного максимума:

$$\delta = \pm 2m\pi, \Delta = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, \dots;$$

2) условие интерференционного минимума:

$$\delta = \pm (2m + 1)\pi, \Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Если световая волна не является строго монохроматической, т. е. имеет разброс длин волн в пределах от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , то интерференционная картина будет ограниченной в пространстве. Предельный порядок максимума интерференции определяется условием  $m_{\text{пред}} \sim \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ .

### **Опыт Юнга**

*Координаты максимумов интенсивности*, с учетом условия интерференционного максимума  $\Delta = \pm 2m \frac{\lambda}{2}$ , определяются выражением

$$y_{\text{max}} = \pm m \frac{l}{d} \lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

*Координаты минимумов интенсивности* имеют следующий вид:

$$y_{\text{min}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

*Ширина полосы интерференции* равна  $\Delta y = \frac{l}{d} \lambda$ , где  $l$  – расстояние между экранами;  $d$  – расстояние между щелями в первом экране, при этом  $l \gg d$ .

### **Кольца Ньютона**

Интерференционную картину, которая называется кольцами Ньютона, можно наблюдать на тонкой клиновидной воздушной прослойке между выпуклой линзой и плоской пластиной, на которой она расположена. Геометрическое место точек одинаковой геометрической толщины воздушной про-

слойки представляет собой боковую цилиндрическую поверхность. При нормальном падении света на линзу этому будет соответствовать постоянная разность оптических путей интерферирующих волн: максимумы и минимумы интерференции будут иметь вид концентрических окружностей с центром в точке соприкосновения линзы с пластиной (рис. 9.1).

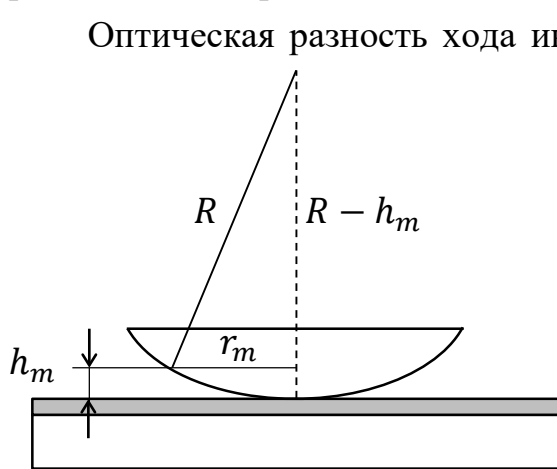


Рис. 9.1

$h_m \ll R$ , то  $h_m^2 \approx 0$  и  $2h_m R = r_m^2$ . Тогда радиус  $m$ -го темного кольца, которое соответствует минимуму интерференции, определяется выражением

$$r_m^{\text{тем}} = \sqrt{2h_m R} = \sqrt{m\lambda R}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Максимумы интенсивности будут наблюдаться при условии  $2h_m + \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{2}$ , где  $n = 1, 2, \dots$ ; соответствующий радиус  $n$ -го светлого кольца равен

$$r_m^{\text{свет}} = \sqrt{R\lambda \left(n - \frac{1}{2}\right)}, n = 1, 2, \dots$$

Чем больше номер кольца, тем меньше различие между радиусами соседних колец и тем более узкими будут кольца. Для минимума интерференции значению  $m = 0$  соответствует  $h_m = 0$ , т. е. точка в месте касания пластины и линзы. В реальных условиях этой точке соответствует темное пятно – минимум интенсивности.

### Примеры решения задач

**Задача 9.1.** В интерференционном опыте Юнга в воздухе найти углы  $\gamma_n$ , под которыми наблюдаются яркие полосы на экране. Наблюдатель расположен на линии источников, разность фаз излучения источников на местах их расположения постоянна и равна  $0,4\pi$ , расстояние между источниками в 2000 раз больше длины волны излучателей.

**Решение.** Разность фаз между волнами в произвольной точке на экране  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta + 0,4\pi$  или  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (s_2 - s_1) + 0,4\pi$ .

В соответствии со схемой опыта Юнга запишем  $\cos \gamma_n = \frac{s_2 - s_1}{d}$ . Тогда условие максимумов на экране имеет вид  $\frac{2\pi}{\lambda}(d \cos \gamma_n) + 0,4\pi = 2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Откуда получаем  $\cos \gamma_n = \frac{\lambda}{d}(n + 0,4\pi)$ .

Следовательно,  $\gamma_n = \arccos(5 \cdot 10^{-4}(n + 0,4\pi))$ .

**Ответ:**  $\gamma_n = \arccos(5 \cdot 10^{-4}(n + 0,4\pi))$ .

**Задача 9.2.** На какое расстояние в опыте Юнга сместятся интерференционные полосы, если второй источник излучения перекрыть прозрачной пластиной толщиной  $h = 25$  мкм, показатель преломления которой равен 1,3? Источники отстоят друг от друга на расстояние  $d = 3$  мм. Расстояние между экраном и диафрагмой  $l = 0,8$  м.

**Решение.** До перекрытия источника стеклянной пластиной условие максимума интенсивности дает координату этого максимума на экране:  $y_m = l \frac{\lambda}{d} m$ .

После перекрытия оптическая разность хода равна  $\Delta = (s_2 - h) + nh - s_1$ .

Соответственно, координата максимума равна  $y_m = l \frac{\lambda}{d} m + l \frac{h}{d} (n - 1)$ .

Величина смещения максимума интенсивности равна

$$\Delta y_m = l \frac{h}{d} (n - 1) = 0,8 \frac{0,025}{3} (1,3 - 1) = 0,02 \text{ м.}$$

**Ответ:**  $\Delta y_m = l \frac{h}{d} (n - 1) = 0,02 \text{ м.}$

**Задача 9.3.** Свет с длиной волны  $\lambda = 0,75$  мкм падает из воздуха нормально на поверхность стеклянного клина, который расположен на более плотной подложке. В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос, причем расстояние между соседними темными полосами  $\Delta x = 0,21$  мм. Определить угол между гранями клина.

**Решение.** При нормальном падении света оптическая разность хода равна  $\Delta = 2h_1 n$ , где  $h_1$  – толщина клина в том месте, где наблюдают максимум  $m$ -го порядка;  $n$  – показатель преломления стекла. Условия наблюдения максимумов для двух толщин  $m\lambda = 2h_1 n$ ,  $(m + 1)\lambda = 2h_2 n$ .

Угол  $\alpha$  между гранями клина определим из условия  $\text{tg } \alpha = \frac{h_2 - h_1}{\Delta x}$ . Для малых углов имеем  $\text{tg } \alpha \approx \alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x n} = \frac{75 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 1,5} = 0,5$  рад.

**Ответ:**  $\alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x n} = 0,5$  рад.

**Задача 9.4.** В интерференционном опыте кольца Ньютона используется плосковыпуклая линза с радиусом кривизны  $R = 66$  см. В зеленом свете с длиной волны  $\lambda = 553$  нм наблюдается только 7 ярких колец, радиус последнего такого кольца равен  $r_{\text{max}7} = 1,5$  мм. Оцените диапазон разброса длин волн  $\Delta \lambda$  в излучении, которое не является монохроматическим.



**Решение.** Максимумы интенсивности будут наблюдаться при следующей разности хода интерферирующих волн:  $2h_m + \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{2}$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . Соответствующий радиус  $n$ -го светлого кольца равен  $r_m^{\text{свет}} = \sqrt{R\lambda \left(n - \frac{1}{2}\right)}$ .

Интерференционная картина разрушается, если разность хода волн  $n \frac{\lambda}{2}$  превышает длину когерентности излучения  $l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ . В этом случае оценка предельного номера наблюдаемого максимума определяется как  $n_{7\text{пред}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ .

В результате получаем уравнение для величины диапазона разброса длин волн  $\Delta\lambda$ :  $r_{\text{max}_7} = \sqrt{R\lambda \left(n_{7\text{пред}} - \frac{1}{2}\right)}$ , или  $r_{\text{max}_7}^2 = R\lambda \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} - 0,5\right)$ , откуда  $\Delta\lambda = \frac{R\lambda^2}{r_{\text{max}_7}^2 + 0,5R\lambda} = \frac{66 \cdot 10^7 \cdot 553^2}{(1,5 \cdot 10^6)^2 + 0,5 \cdot 66 \cdot 10^7 \cdot 553} = 83 \text{ нм}$ .

**Ответ:**  $\Delta\lambda = \frac{R\lambda^2}{r_{\text{max}_7}^2 + 0,5R\lambda} = 83 \text{ нм}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**9.5.** На тонкую пленку с показателем преломления  $n$  под углом  $\alpha$  падает поток белого света. Толщина пленки –  $h$ . Определить длину волны света, для которого сформируется интерференционный максимум 1-го порядка в отраженном свете. Пленка окружена воздухом.

**Ответ:**  $\lambda = \frac{2h}{3} \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$ .

**9.6.** В опыте Юнга источники отстоят друг от друга на расстояние  $d$ . Расстояние между экраном и диафрагмой –  $l$ . Определить расстояние между соседними интерференционными минимумами на экране.

**Ответ:**  $\Delta y = \lambda \frac{l}{d}$ .

**9.7.** Свет с длиной волны  $\lambda$  падает нормально на поверхность тонкого клина с показателем преломления  $n$ , который окружен воздухом. Угол между гранями клина –  $\varphi$ . В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос. Определить количество интерференционных полос, которое помещается на расстоянии  $\Delta x$ .

**Ответ:**  $\frac{N}{\Delta x} = \frac{2n}{\lambda} \varphi$ .

**9.8.** На пути одного из лучей в двухлучевом интерферометре стоит трубка длиной  $s$ , которая заполнена воздухом. На экране наблюдается интерференционная картина. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины вверх на  $N$  полос. Наблюдения производятся со светом с длиной волны  $\lambda$ . Определить показатель преломления хлора  $n$ .

**Ответ:**  $n = \lambda \frac{N}{s} + 1$ .

**9.9.** Плосковыпуклая линза лежит на плоской пластине. Вследствие попадания пыли между линзой и пластиной нет контакта. Диаметры  $m$ -го и  $k$ -го темных колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, равны  $D_m$  и  $D_k$ , при этом  $D_m > D_k$ . Определить величину радиуса кривизны выпуклой поверхности линзы, если в опыте используется свет с длиной волны  $\lambda$ .

**Ответ:**  $R = \frac{D_m^2 - D_k^2}{4\lambda(m-k)}$ .

## 9.2. Дифракция света

**Дифракция** – совокупность явлений, наблюдаемых при распространении световой волны в среде с резко выраженными неоднородностями (размеры которых сравнимы с размерами волны), проявляющихся в перераспределении световой энергии в пространстве в результате суперпозиции волн.

Дифракция приводит к огибанию волнами препятствий и проникновению их в область геометрической тени (отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики).

Для наблюдения дифракции световых волн необходимы специальные условия, обусловленные малостью их длин волн. Обычно на пути световой волны помещают непрозрачную преграду, закрывающую часть световой волны. За преградой помещают экран, на котором при определенных условиях возникает дифракционная картина в виде той или иной системы чередования полос или пятен – максимумов и минимумов освещенности.

Различают два вида дифракции:

**1. Дифракция Френеля** – рассматриваются сферические волны. В этом случае источник и точка наблюдения находятся на конечном расстоянии от препятствия (дифракция в расходящихся световых пучках). Приближенный метод решения задач о распространении волн основана на принципе Гюйгенса – Френеля, согласно которому все элементы поверхности, через которую в данный момент времени проходит фронт волны, становятся источниками когерентных вторичных волн. Волновая поверхность в любой последующий момент времени является результатом интерференции (наложения) этих вторичных волн. Таким образом, между интерференцией и дифракцией нет принципиального различия. Исторически принято называть интерференцией суперпозицию волн от конечного числа дискретно расположенных когерентных источников волн, а дифракцией – от бесконечного числа непрерывно расположенных когерентных источников.

Для упрощения расчета интерференции вторичных волн Френель предложил мысленно разбить волновую поверхность в месте расположения преграды на кольцевые зоны по следующему правилу: расстояния от краев соседних зон до точки  $P$  должны отличаться на половину длины волны  $\frac{\lambda}{2}$  (рис. 9.2).

Площадь  $\Delta S_m = \lambda \frac{\pi ab}{a+b}$   $m$ -й зоны не зависит от номера зоны  $m$ , т. е. площади всех зон примерно одинаковы. Поэтому все зоны должны возбуждать в точке

$P$  колебания примерно одинаковой амплитуды. Однако это условие будет постепенно нарушаться с ростом угла  $\varphi$ . Также надо учесть, что направления колебаний от соседних зон в точке  $P$  будут противоположными, что соответствует сдвигу фаз между ними на  $\pi$ . Поэтому результирующая амплитуда будет равна половине амплитуды 1-й зоны. Из формулы для площади сферического сегмента следует соотношение  $\frac{m\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ , которое позволяет определить число зон Френеля в отверстии диафрагмы.

В случае дифракции на круглом отверстии, наблюдателю на оси  $SO$  будут доступны зоны с 1-й по  $n$ -ю. Поэтому результат будет зависеть от четности числа  $n$ :  $A_P = \frac{A_1 \pm A_n}{2}$ , знак «+» берется для нечетного  $n$ , а «-» – для четного числа  $n$ .

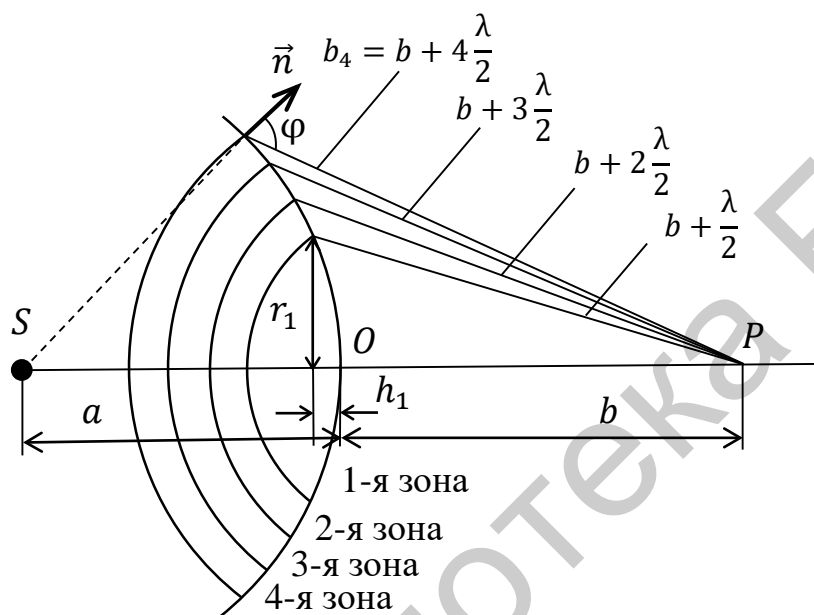


Рис. 9.2

Пусть сферическая волна падает на непрозрачный диск, который закрывает зоны Френеля, до некоторого номера  $n$ .

Результат дифракции будет определяться действием оставшихся открытыми зон. В итоге в точке  $P$  возникает максимум интенсивности с амплитудой  $A_P = \frac{A_n}{2}$ .

**2. Дифракция Фраунгофера** – рассматриваются плоские волны.

В этом случае источник и точка наблюдения находятся на бесконечном расстоянии (дифракция в параллельных пучках).

Практически дифракцию Фраунгофера на одной щели наблюдают в параллельных лучах, поместив за источником света и перед точкой наблюдения линзу так, чтобы источник света и точка наблюдения оказались в фокальной плоскости соответствующей линзы (рис. 9.3).

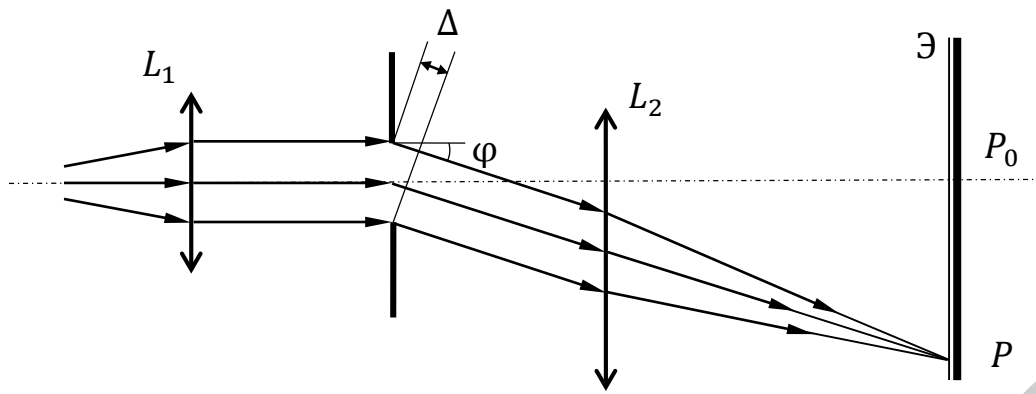


Рис. 9.3

Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, каждая точка щели становится источником вторичных волн, распространяющихся за щелью во всех направлениях. Вторичные волны интерферируют и создают на экране дифракционную картину, которая будет иметь вид ряда темных и светлых полос, параллельных щели. При перпендикулярном падении световой волны к плоскости щели полосы располагаются симметрично относительно центральной светлой полосы. Интенсивность света на экране обращается в нуль при определенных значениях угла дифракции  $\varphi$ , для которых выполняется условие  $b \sin \varphi = k\lambda$  ( $k = \pm 1, \pm 2 \dots$ ), где  $b$  – ширина щели;  $\lambda$  – длина волны. Данное уравнение выражает **условие минимумов дифракции на щели**.

Функция интенсивности света на экране имеет следующий вид:

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)^2},$$

где  $I_0$  – интенсивность света на экране напротив щели.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на периодической структуре в преломленном световом потоке (рис. 9.4).

**Дифракционной решеткой** называют периодическую структуру из большого числа регулярно расположенных щелей, на которых происходит дифракция света.

Каждая из щелей даст на экране картину, описанную выше. Вторым фактор, который влияет на рас-

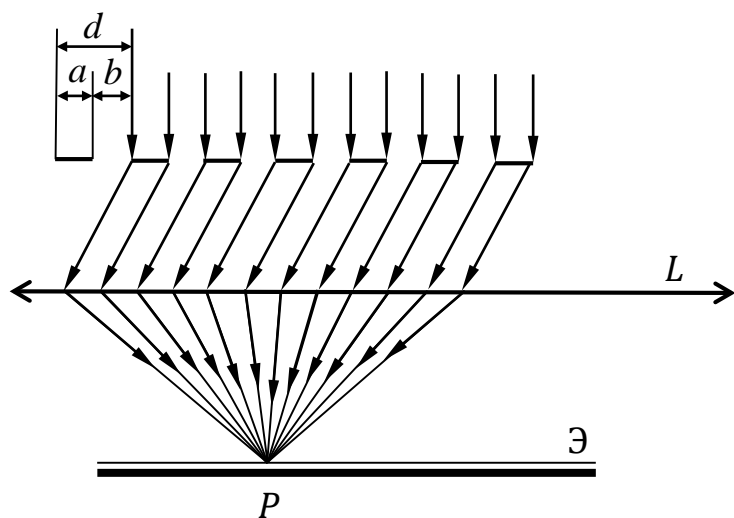


Рис. 9.4

пределение интенсивности на экране, – это интерференция световых потоков от каждой щели. Это происходит из-за того, что волны, исходящие от разных щелей, когерентны, поэтому они будут интерферировать.

**Положение минимумов** определяется, как и для одной щели, условием  $b \sin \varphi = k\lambda$  ( $k = \pm 1, \pm 2 \dots$ ).

**Положение главных максимумов при многолучевой интерференции** определяется условием  $d \sin \varphi = m\lambda$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ).

Число  $m$  дает порядок главного максимума и называется *порядком спектра*. Между главными максимумами в распределении интенсивности имеется  $N - 2$  побочных максимума, разделенных дополнительными минимумами, число которых  $N - 1$  ( $N$  – число щелей).

**Направления добавочных минимумов** определяются условием  $d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda$ , ( $k' = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1$ ), где  $k'$  принимает все целочисленные значения, за исключением  $0, N, 2N, \dots$ , т. е. тех, при которых данное условие переходит в условие главных максимумов.

Распределение интенсивности на экране в случае одной щели показано на рис. 9.5, а. Распределению интенсивностей в случае многолучевой интерференции от разных щелей соответствует рис. 9.5, б. Результирующее распределение интенсивности при прохождении света через дифракционную решетку представлено на рис. 9.5, в. Оно создается двумя независимыми явлениями: дифракцией света от каждой щели и многолучевой интерференцией когерентных вторичных волн, идущих от разных щелей.

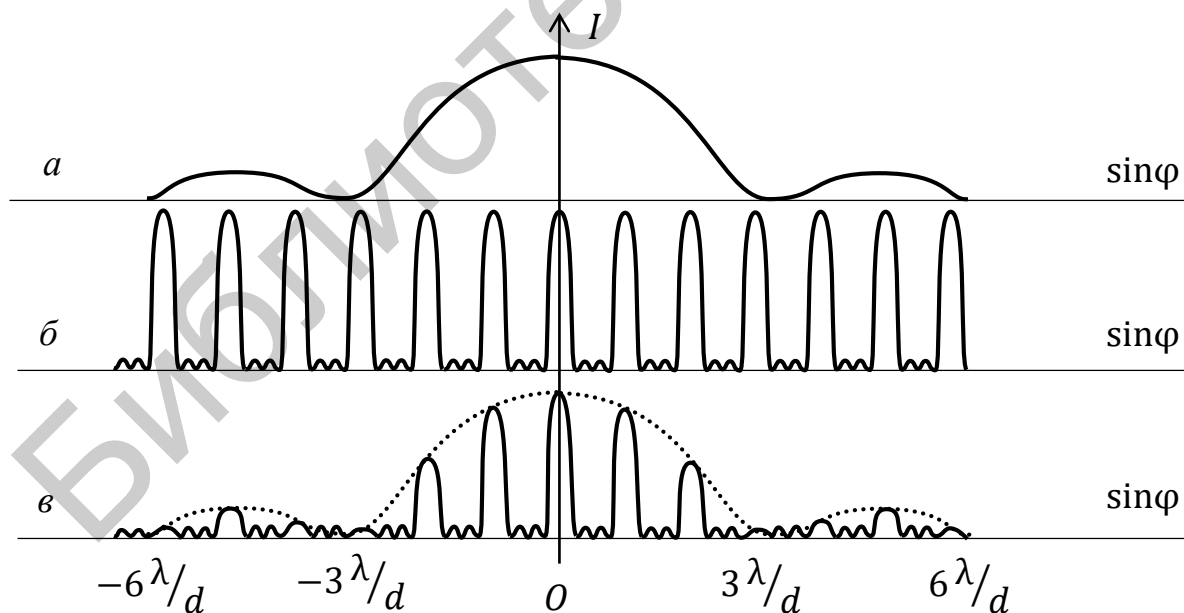


Рис. 9.5

### Примеры решения задач

**Задача 9.10.** Источник плоской монохроматической волны находится слева от диафрагмы с круглым отверстием. На экране в центре дифракционной картины наблюдается минимум интенсивности, если он установлен на расстоянии  $b_1 = 86,5$  см справа от диафрагмы. При уменьшении расстояния между диафрагмой и экраном до  $b_2 = 28,2$  см минимум интенсивности на экране сменяется максимумом. Найти диаметр диафрагмы, если длина волны света  $\lambda = 600$  нм.

**Решение.** В случае плоской волны известное соотношение  $\frac{m\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  примет новую форму:  $\frac{m\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$ .

Максимум интенсивности будет наблюдаться при следующем условии для диаметра отверстия:  $(0,5d)^2 = b_1 m \lambda$ . Здесь  $m$  – число зон Френеля, которое видно наблюдателю в отверстии диафрагмы, если он находится в точке  $P_0$  (см. рис. 9.4).

При уменьшении расстояния и переходе к максимуму интенсивности номер числа открытых зон в отверстии изменится на единицу. Условие наблюдения максимума:  $(0,5d)^2 = b_2 (m + 1) \lambda$ .

Решая систему уравнений, находим диаметр отверстия:

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{\lambda b_1 b_2}{b_1 - b_2}} = \frac{2}{10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{600 \cdot 10^{-9} \cdot 0,865 \cdot 0,282}{0,865 - 0,282}} = 1 \text{ мм.}$$

**Ответ:**  $d = 2 \cdot \sqrt{\frac{\lambda b_1 b_2}{b_1 - b_2}} = 1 \text{ мм.}$

**Задача 9.11.** Источник сферической монохроматической волны находится на расстоянии  $a = 100$  см слева от диафрагмы с круглым отверстием. На экране в центре дифракционной картины первый раз наблюдается максимум интенсивности, если он установлен на расстоянии  $b_1 = 86,5$  см справа от диафрагмы. Расстояние между диафрагмой и экраном уменьшают до  $b_2 = 28,2$  см, пока на экране не увидят следующий максимум интенсивности. Найти длину волны света, если диаметр отверстия диафрагмы  $d = 1$  мм.

**Решение.** В случае максимума интенсивности в точке регистрации число зон Френеля в отверстии должно быть четным:  $\frac{(2m+1)\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b_1}$ . Аналогично для максимума можно записать условие  $\frac{(2(m+1)+1)\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b_2}$ .

Решая систему уравнений, находим длину волны света:  $\lambda = r_m^2 \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2} =$   
 $= (0,74 \cdot 10^{-3})^2 \frac{0,87 - 0,44}{0,87 \cdot 0,44 \cdot 10^{-9}} \approx 615 \text{ нм.}$

**Ответ:**  $\lambda = r_m^2 \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2} = 615 \text{ нм.}$

**Задача 9.12.** Свет с длиной волны  $\lambda = 691$  нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 2,77$  мкм, содержащую  $N = 2500$  штрихов. Определить угловую ширину максимума интенсивности 4-го порядка.

**Решение.** Запишем условие двух минимумов, окружающих максимум  $m$ -го порядка:  $d \sin \varphi_1 = m\lambda - \frac{\lambda}{N}$ ,  $d \sin \varphi_2 = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$ . Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$d (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 2 \frac{\lambda}{N}, \text{ или } 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 2 \frac{\lambda}{Nd}.$$

Для больших  $N$  можно выполнить подстановки:  $\delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $\varphi = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$ , где  $\varphi$  – угол дифракции для  $m$ -го порядка, а  $\delta\varphi$  есть угловая ширина этого максимума.

После подстановки получаем  $\delta\varphi \cdot \cos\varphi = 2 \frac{\lambda}{Nd}$ . Исключая функцию  $\cos\varphi$ , с помощью условия максимума интенсивности  $d \sin\varphi = m\lambda$  находим угловую ширину этого максимума:

$$\delta\varphi = \frac{2\lambda}{Nd \sqrt{1 - \left(m \frac{\lambda}{d}\right)^2}} = \frac{2 \cdot 691 \cdot 10^{-9}}{2500 \cdot 2,77 \cdot 10^{-6} \sqrt{1 - \left(4 \frac{691 \cdot 10^{-9}}{2,77 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 3 \cdot 10^{-3}.$$

**Ответ:**  $\delta\varphi = \frac{2\lambda}{Nd \sqrt{1 - \left(m \frac{\lambda}{d}\right)^2}} = 3 \cdot 10^{-3}$  рад.

**Задача 9.13.** Источник ультразвука с частотой  $\nu = 5$  МГц, опущенный в сосуд с жидкостью, создает в ней стоячую волну. Плоская световая волна, проходя через объем, заполненный жидкостью, испытывает дифракцию. На экране, расположенном на расстоянии  $L = 8$  м, образуется  $N = 3$  ярких пятна. Расстояние между крайними пятнами  $a = 4,8$  см. Определить длину волны света в жидкости в нанометрах, если скорость звука в жидкости составляет 1500 м/с. Угол дифракции мал:  $\text{tg}\varphi = \sin\varphi$ .

**Решение.** Ультразвуковые волны образуют периодические сжатия и разрежения жидкости, сопровождающиеся соответствующими изменениями показателя преломления. Среда с периодически изменяющимся от точки к точке показателем преломления действует на световые волны как дифракционная решетка.

Чередование сжатий и разрежений соответствует чередованию прозрачных и непрозрачных участков в обычной решетке.

Расстояние между пучностями в стоячей волне равно половине длины волны звука  $\frac{\lambda_{зв}}{2} = \frac{v_{зв}}{2\nu}$ . Условие максимумов интенсивности:  $d \sin\varphi = m\lambda$ , постоянная решетки  $d = \frac{\lambda_{зв}}{2}$ , где  $\lambda$  – длина волны света в жидкости. Число максимумов интенсивности на экране равно  $N = 2m + 1$ . Тогда длина волны света в жидкости определится как  $\lambda = \frac{av_{зв}}{4m\nu L} = \frac{1500 \cdot 4,8 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 10^{-9}} = 450$  нм.

**Ответ:**  $\lambda = \frac{av_{зв}}{4m\nu L} = 450$  нм.

### Задачи для самостоятельного решения

**9.14.** Источник сферической монохроматической волны находится слева от диафрагмы с круглым отверстием на расстоянии  $a$ . На экране в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности, если он установлен на расстоянии  $b$  справа от диафрагмы. При увеличении радиуса диафрагмы от  $r_1$  до  $r_2$  наблюдается появление на экране следующего максимума интенсивности. Найти длину волны света  $\lambda$ .

**Ответ:**  $\lambda = (r_2^2 - r_1^2) \frac{a+b}{2ab}$ .

**9.15.** Источник сферической монохроматической волны находится на расстоянии  $a$  слева от диафрагмы с круглым отверстием. На экране в центре дифракционной картины первый раз наблюдается максимум интенсивности, если он установлен на расстоянии  $b_1$  справа от диафрагмы. Расстояние между диафрагмой и экраном уменьшают до  $b_2$ , пока на экране не увидят следующий максимум интенсивности. Найти число зон Френеля, которые помещаются в диафрагме в первом случае.

**Ответ:**  $N = 2 \left( \frac{b_1}{a} + 1 \right) \left( \frac{b_1}{b_2} - 1 \right)^{-1} + 1$ .

**9.16.** Постоянная дифракционной решетки в 5 раз превышает длину волны светового потока, дифрагирующего на ней:  $d = 5\lambda$ . Определить значения функции  $\sin\varphi$ , соответствующие первым трем наблюдаемым максимумам.

**Ответ:**  $\sin\varphi_1 = 0,1$ ,  $\sin\varphi_2 = 0,2$ ,  $\sin\varphi_3 = 0,3$ .

**9.17.** Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом  $d$ , если угол между максимумами первого и второго порядков спектра равен  $\delta\varphi$ .

**Ответ:**  $\lambda = \frac{d \cdot \sin\delta\varphi}{\sqrt{5-4 \cdot \cos\delta\varphi}}$ .

**9.18.** На щель шириной  $b$  падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Расположенная за щелью линза проектирует на экран дифракционную картину в виде чередующихся светлых и темных полос. Экран находится на расстоянии  $l$  от линзы. Ширина центральной светлой полосы на экране равна  $a$ . Определить длину волны падающего света.

**Ответ:**  $\lambda = \frac{ab}{2l}$ .



### Список использованных источников

1. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 5 кн. / И. В. Савельев. – М. : Астрель, АСТ, 2004.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. В 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, МФТИ, 2002–2005.
3. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике : учеб. пособие / И. В. Савельев. – М. : Астрель, АСТ, 2005.
4. Иродов, И. Е. Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. – М.-СПб. : Физматлит, Невский Диалект, Лаборатория базовых знаний, 2000.
5. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1988.
6. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 2002.
7. Электричество. Магнетизм. Электромагнитные волны. Оптика. Сборник задач : учеб.-метод. пособие / А. В. Березин [и др.]. – Минск : БГУИР, 2013.

*Учебное издание*

**Андрос** Елена Васильевна  
**Березин** Александр Васильевич  
**Григорьев** Александр Александрович

**ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.  
ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*  
Корректор *Е. Н. Батурчик*  
Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Касабуцкий*

Подписано в печать 05.09.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,53. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 200 экз. Заказ 91.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.  
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.  
220013, Минск, П. Бровки, 6