Теория функций комплексной переменной.

1. Ряд Лорана и его область сходимости.
2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
3. Изолированные особые точки регулярной функции и их классификация.

Тема 11

Функциональные комплексные ряды

Определение. Если $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n\geq N(\varepsilon)$ $\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}U_k(z)\right|<\varepsilon$

выполняется сразу $\forall z\in G$, то ряд называется ***равномерно сходящимся в области*** G**.**

Достаточным признаком равномерной сходимости ряда является *признак Вейерштрасса:* ***Если всюду в области*** G ***члены функционального ряда могут быть мажорированы членами некоторого абсолютно сходящегося числового ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ***, т.е.*** $|U_n(z)|\leq|a_n|$***,*** $\forall z\in G$***,***

то ряд сходится равномерно.

Степенные ряды. Теорема Абеля

Теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится

и в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$,

причем в круге $|z - z_0| < \rho$, радиусом ρ, меньшим $|z_1 - z_0|$,

ряд сходится равномерно.

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Можно ли функции, аналитической внутри некоторого круга, сопоставить степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции?

Теорема(Тейлора). *Функция* $f(z)$, *аналитическая внутри круга* $|z - z_0| < R$, *может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, *причем этот ряд определен однозначно.*

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Функция $f(z)$ аналитическая внутри круга $|z - z_0| < R$

разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд.

Коэффициенты разложения на основании формулы Коши

для производных аналитической функции имеет вид

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Ряд Лорана и его область сходимости.

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

где z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости, C_n- некоторые комплексные числа.

Этот ряд называется ***рядом Лорана*.**

Ряд Лорана и его область сходимости.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

называется ***правильной частью*** или ***регулярной частью*** ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

называется ***главной частью*** ряда Лорана.

Областью сходимости ряда Лорана является общая часть областей сходимости ***правильной части и главной части*** ряда.

Ряд Лорана и его область сходимости.

Областью сходимости правильной части ряда является круг с центром в точке z_0 некоторого радиуса ***R***, причем в частности, радиус может равняться нулю или бесконечности.

Внутри круга сходимости этот ряд сходится к некоторой аналитической функции комплексной переменной , т.е.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad |z - z_0| < R$$

Для определения области сходимости главной части ряда совершим замену переменной, положив

$$\varsigma = \frac{1}{(z - z_0)}$$

Ряд Лорана и его область сходимости.

Тогда этот ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\varsigma^{n}$

- обычный степенной ряд, сходящийся внутри своего круга сходимости к некоторой аналитической функции комплексной переменой $\varphi(\varsigma)$. Обозначим радиус сходимости полученного степенного ряда : $\frac{1}{r}$

Тогда

$$\varphi(\varsigma) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\varsigma^{n}, \quad |\varsigma| < \frac{1}{r}.$$

Или

$$f_2(z) = \varphi(\varsigma(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad |z - z_0| > r.$$

Ряд Лорана и его область сходимости.

Итак, каждый из степенных рядов – правильной и главной частей ряда Лорана сходится в своей области сходимости к соответствующей аналитической функции. Если $r < R$, то существует общая область сходимости этих рядов – ***кругового кольцо***

$$r < |z - z_0| < R,$$

в которой ряд Лорана сходится к аналитической функции:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Ряд Лорана и его область сходимости.

Можно ли аналитической в некотором круговом кольце функции сопоставить ряд Лорана, сходящийся к этой функции в данном кольце?

Теорема. *Функция* $f(z)$*, аналитическая в круговом кольце* $R_2 < |z - z_0| < R_1$*, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Ряд Лорана и его область сходимости.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты C_n для всех n определяются формулой:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\varsigma)\, d\varsigma}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Так как z - любая точка кольца $R_2 < |z - z_0| < R_1$, то отсюда

следует, что ряд сходится к $f(z)$ внутри данного кольца

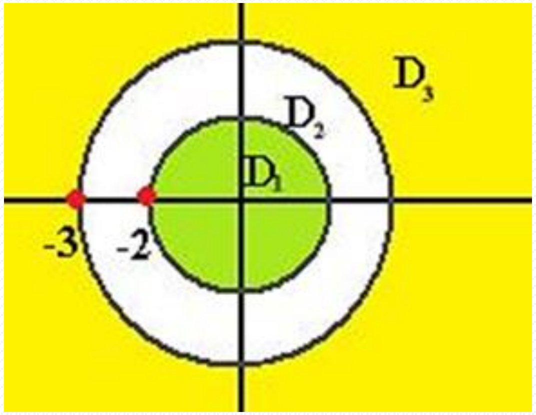
причем в замкнутом кольце $R_2 < \overline{R_2} \le |z - z_0| \le \overline{R_1} < R_1$

ряд сходится к $f(z)$ равномерно.

Ряд Лорана и его область сходимости.

Замечание. Областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $R_2 < |z - z_0| < R_1$, на границах которого имеется хотя бы по одной особой точке аналитической функции $f(z)$, к которой сходится ряд.

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)(z+2)}, z_0 = 0$$



Ряд Лорана и его область сходимости.

Замечание. Формула для определения коэффициентов разложения в ряд Лорана не всегда практически удобна. Поэтому часто прибегают к разложению рациональной дроби на простейшие с использованием геометрической прогрессии, а также используют разложение в ряд Тейлора элементарные функции.

Ряд Лорана и его область сходимости.

Пример. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана

в кольцах:

а) $0<|z|<1;$

б) $|z|>1;$

в) $0<|z-1|<1.$

Перепишем функцию в виде $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}.$

Ряд Лорана и его область сходимости.

а) Так как $|z| < 1$, то второе слагаемое есть сумма убывающей геометрической прогрессии. Поэтому

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Здесь главная часть состоит из одного слагаемого $\frac{1}{z}$.

Ряд Лорана и его область сходимости.

б) в этом случае $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, поэтому

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{z^n} - \ldots .$$

В этом разложении отсутствует регулярная часть.

Ряд Лорана и его область сходимости.

в) Для случая $0<|z-1|<1$ функцию $f(z)$ также надо привести к сходящейся геометрической прогрессии, но со знаменателем $z-1$:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+(z-1)}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots.$$

Заметим, что в главной части этого разложения присутствует одно слагаемое

Ряд Лорана и его область сходимости.

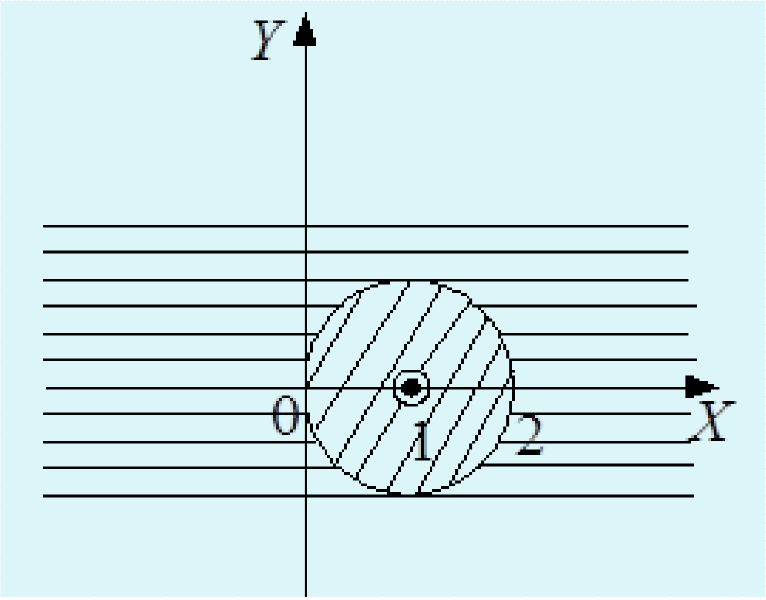
Пример. Разложить $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в окрестности

точки $z_0 = 1$ в ряд Лорана (т.е. по степеням $z-1$).

Построим два круговых кольца с центром в точке $z_0 = 1$:

а) круг «без центра» $0 < |z-1| < 1$;

б) внешность круга $|z-1| > 1$.



Ряд Лорана и его область сходимости.

а) $0<|z-1|<1;\quad \frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1};$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots+(z-1)^n+\ldots\right].$$

Этот ряд сходится, так как $|z-1|<1$. Так что

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-2)^2-\ldots-(z-1)^2-\ldots,$$

$C_n=-1\quad(n\geq 0),\ ;\ C_{-1}=-1,\ C_{-2}=C_{-3}=\ldots=C_{-n}=\ldots=0\,.$

Ряд Лорана и его область сходимости.

б) $|z-1|>1$. Здесь имеем

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-1)^n}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-1)^n}+\ldots$$ - сходящийся ряд, так как $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1.$

В итоге $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\ldots,$

т.е. $C_n=0 \quad n\geq 0,\ C_{-1}=0,\ C_{-2}=C_{-3}=\ldots\ldots=1.$

Ряд Лорана и его область сходимости.

Пример. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$

функцию $\sin\dfrac{z}{z-1}$.

Имеем:

$$\sin\frac{z}{z-1} = \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1} + \cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1} =$$

$$= \sin 1\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^4\cdot 4!}-\ldots\right)+\cos 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}-\frac{1}{5!(z-1)^5}+\ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}\right].$$

Изолированные особые точки регулярной функции.

Определение. Особая точка $z = z_0$ регулярной функции $f(z)$ называется ***изолированной,*** если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме самой точки $z = z_0$, т.е. если в некоторой окрестности ее $f(z)$ <u>аналитична</u>, кроме самой точки $z = z_0$.

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Определение. Точка z_0 называется *нулем аналитической функции* $f(z)$ $n-$*го порядка*, или *нулем кратности* n,

если $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = 0$, $C_n \neq 0$.

Тогда разложение имеет вид

$$f(z) = C_n (z - z_0)^n + C_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots \quad .$$

Если $n = 1$, то нуль называется *простым*.

Ряд Тейлора. Нули аналитических функций

Всякая аналитичная в точке z_0 *функция вида*

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z),$$

где $n \to 0$ - *целое,* $\varphi(z_0) \neq 0$

имеет в этой точке нуль порядка n.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Выясним, как связано поведение $f(z)$ в окрестности точки z_0 с разложением функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

а) Предположим сначала, что в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ ограничена, т.е. $\exists M > 0$, что в этой окрестности $|f(z)| < M$.

$$\left|C_{-n}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^{n-1} d\varsigma\right| \le \frac{1}{2\pi} M\rho^{n-1} 2\pi\rho = M\rho^n,$$

т.е. $\left|C_{-1}\right| \le M\rho$, $\left|C_{-2}\right| \le M\rho^2$ и т.д.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Так как в качестве C можно взять окружность сколь угодно малого радиуса ε с центром в z_0, то отсюда и следует, что $C_{-1}=0,\ C_{-2}=0,\ \ldots,\ C_{-n}=0$, т.е. что главная часть ряда отсутствует и разложение имеет вид регулярной части.

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots+(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n.$$

Поэтому, если под $f(z_0)$ понимать сумму ряда при $z=z_0$, т.е. положить $f(z_0)=C_0$, то z_0 станет устранимой особой точкой функции $f(z)$ или правильной точкой.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Пример.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5}+\ldots\Rightarrow$$

точка $z_0=0$ - правильная точка, $f(0)=1.$

Изолированные особые точки регулярной функции.

б) Пусть теперь $f(z)$ неограничена в окрестности изолированной особой точки z_0. В этом случае либо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, либо при $z \to z_0$ функция вообще не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

В первом случае точку z_0 называют ***полюсом*** функции $f(z)$, во втором – ***существенной особой точкой*** (с.о.т.).

Изолированные особые точки регулярной функции.

Если точка z_0 является полюсом функции $f(z)$,

то в достаточно малой окрестности ее $|f(z)| > M$, $\forall M > 0$

и поэтому $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0.

Функция $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ будет аналитичной в этой окрестности,

кроме $z = z_0$. По условию $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} F(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

Если точка z_0 является ***полюсом функции*** $f(z)$***,*** *то она*

является ***нулем функции*** $1/f(z)$**.**

Изолированные особые точки регулярной функции.

Определение. Точка z_0 называть ***полюсом порядка*** m функции $f(z)$, если эта точка есть нуль порядка m для функции $1/f(z)$.

При $m=1$ полюс называется *простым*.

Определение. *Точка* $z=z_0$ *является* ***полюсом порядка*** m *функции* $f(z)$*, если для* $f(z)$ *справедливо представление*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

Изолированные особые точки регулярной функции.

Разложим числитель $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m \varphi(z)} = \dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$

в окрестности точки $z = z_0$ в ряд Тейлора, получим

$$f(z) = \frac{C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots + C_m(z-z_0)^m + C_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots}{(z-z_0)^m},$$

где $C_0 = \psi(z_0) \neq 0$. Отсюда

$$f(z) = C_m + C_{m+1}(z-z_0) + C_{m+2}(z-z_0)^2 + \frac{C_{m-1}}{z-z_0} + \frac{C_{m-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{C_0}{(z-z_0)^m}$$

Изолированные особые точки регулярной функции.

Если точка z_0 - ***полюс порядка*** m ***функции*** $f(z)$, то главная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = z_0$ представляет собой не бесконечный ряд, а конечную сумму, причем порядок полюса равен наивысшему показателю степени выражения $(z - z_0)$ в знаменателях членов главной части разложения.

Изолированные особые точки регулярной функции.

<u>Главная часть разложения</u> функции в ряд Лорана тогда и только тогда содержит лишь конечное число членов, когда точка, в окрестности которой произведено разложение, является ***полюсом.***

<u>Главная часть ряда Лорана</u> в окрестности ***с.о.т.*** *содержит бесконечное множество членов, не равных нулю.*

Изолированные особые точки регулярной функции.

Теорема (Сохоцкого – Вейерштрасса). *Если* $z = z_0$ - *с.о.т. функции* $f(z)$, *то* $\forall A$, *конечного или бесконечного, существует последовательность* (z_n), *что* $\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n) = A.$

Это означает, что в достаточно малой окрестности некоторой функции она принимает значения, как угодно близкие к любому наперед заданному числу.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Примеры.

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+2)^3};\quad z_0=-2$$ - полюс третьего порядка;

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^2+4}\Rightarrow z_{1,2}=\pm 2i$$ - простые полюсы;

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}\Rightarrow z_0=0$$ - полюс 2-го порядка.

Изолированные особые точки регулярной функции.

Пример. *Для функции* $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, *точка* $z_0 = 0$ - *с.о.т.*,

поскольку ряд Лорана в окрестности этой точки

$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \ldots$ содержит бесконечное

число членов в главной своей части.