Темы:

Наименование раздела, темы	Всего аудиторных часов	Лекции, часы	Практические занятия, часы
1	2	3	4
Тема 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра	68	34	34
Тема 2. Введение в математический анализ	26	12	14
Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	36	19	17
Тема 4. Комплексные числа. Многочлены	6	3	3
Тема 5. Интегральное исчисление функций одной переменной	38	15	23
Тема 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	23	10	13
Тема 7. Интегральное исчисление функций многих переменных	30	13	17
Тема 8. Дифференциальные уравнения и системы	27	12	15
Тема 9. Числовые и функциональные ряды	32	12	20
Тема 10. Ряды Фурье. Интеграл Фурье	13	7	6
Тема 11. Теория функции комплексной переменной	**31**	**11**	**20**
Тема 12. Операционное исчисление	10	4	6

Теория функций комплексной переменной.

1. Понятие функции комплексной переменной.
2. Предел и непрерывность функций комплексной переменной.
3. Основные элементарные функции комплексной переменной.

Тема 11

Базовые сведения из теории комплексных чисел.

Комплексное число ***z*** - упорядоченная пара действительных чисел ***x***, ***y***, записанная в форме

$$z = x + i \cdot y$$

где ***i*** - "мнимая единица", для которой $i^2 = -1$

x - действительная часть числа ***z*** - $x = \operatorname{Re} z$,

y - мнимая часть числа ***z*** - $y = \operatorname{Im} z$.

Такая форма записи называется алгебраической формой комплексного числа.

Число $\bar{z} = x - i \cdot y$ называется числом, сопряжённым к числу $z = x + i \cdot y$.

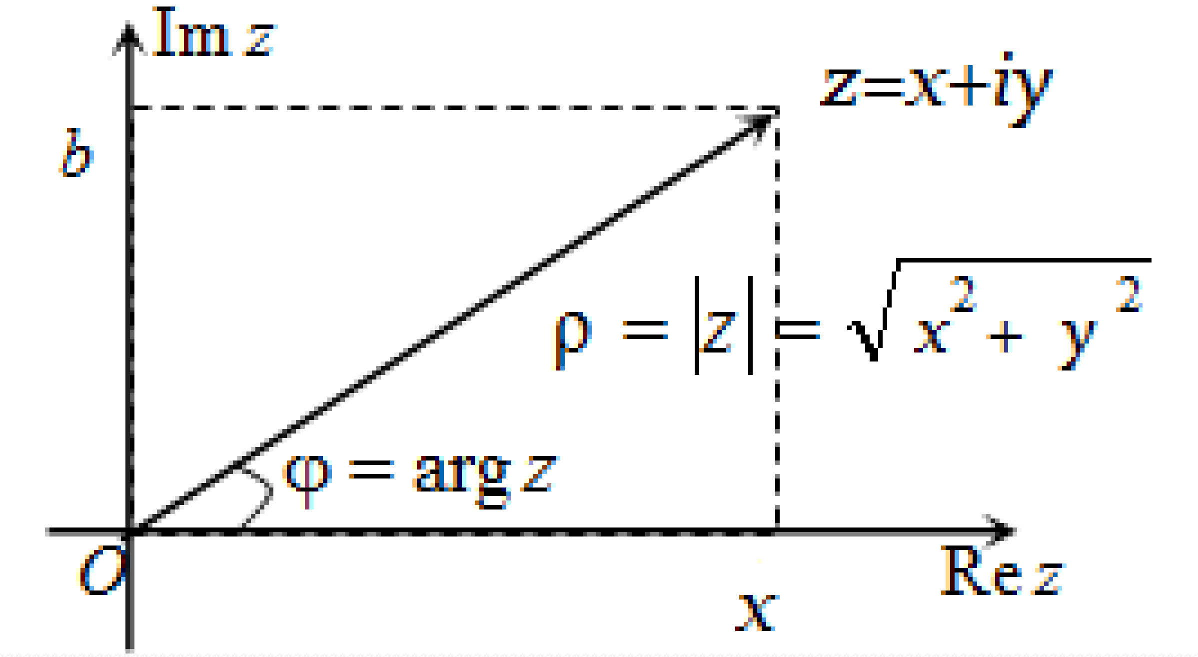
Базовые сведения из теории комплексных чисел

Множество комплексных чисел неупорядочено, т.е. для комплексных чисел не вводятся отношения "больше" или "меньше".

Геометрически комплексное число $z = x + i \cdot y$ изображается как точка с координатами (***x***, ***y***) на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью ***C***.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Число **z** изображают точкой на плоскости С:



Базовые сведения из теории комплексных чисел.

Переход от декартовых координат к полярным:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Действительное число $|z|$ называется модулем комплексного числа z , угол φ - главным аргументом комплексного числа z - $\arg z$:

$$-\pi < \arg z \le \pi$$

$$\varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, x > 0; \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, x < 0, y \ge 0; \\ \pi - arctg\,\dfrac{y}{x}, x < 0, y \ge 0; \end{cases}$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел.

Запись комплексного числа в виде

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется **тригонометрической формой комплексного числа.**

Аргумент комплексного числа определён неоднозначно (с точностью до слагаемых, кратных 2π):

$$\mathbf{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k.$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Формально запишем разложение в ряд Маклорена для функции

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \ldots + \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi 7}{7!} + \ldots\right)$$

Степени числа $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{i}^2 = -1$, $\boldsymbol{i}^3 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}^4 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i}^2 = 1$.

В круглых скобках стоят ряды для **cos** $\boldsymbol{\varphi}$ и **sin** $\boldsymbol{\varphi}$, которые сходятся для любого действительного $\boldsymbol{\varphi}$.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Теперь любое комплексное число **z** можно представить в показательной форме записи комплексного числа.

$$z = |z| \cdot e^{i\cdot\varphi} = |z| \cdot e^{i\cdot\arg z} =$$

$$= |z| \cdot e^{i\cdot Argz}$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Используя эту форму легко доказать **формулу Муавра:**

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n e^{in\varphi}$$

С помощью этой формулы легко вычислять степени комплексных чисел, выводить формулы для синусов и косинусов кратных углов и извлекать корни ***n***-ой степени из комплексных чисел^

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right)$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Все значения корня ***n***-ой степени комплексного числа **z** получаются при ***k*** = 0, 1, 2, …, ***n***–1 :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{Arg(z)}{n} + i \sin \frac{Arg(z)}{n} \right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right)$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\kappa + 2k\pi}{n} \right)$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Используем формулу Эйлера для <u>вывода комплексной форма ряда Фурье:</u>

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Складывая и вычитая эти формулы, получим выражения для синусов и косинусов:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Множество комплексных чисел неупорядочено, т.е. для комплексных чисел не вводятся отношения "больше" или "меньше".

Геометрически комплексное число $z = x + i \cdot y$ изображается как точка с координатами (***x***, ***y***) на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью ***C***.

Основные понятия функций комплексной переменной

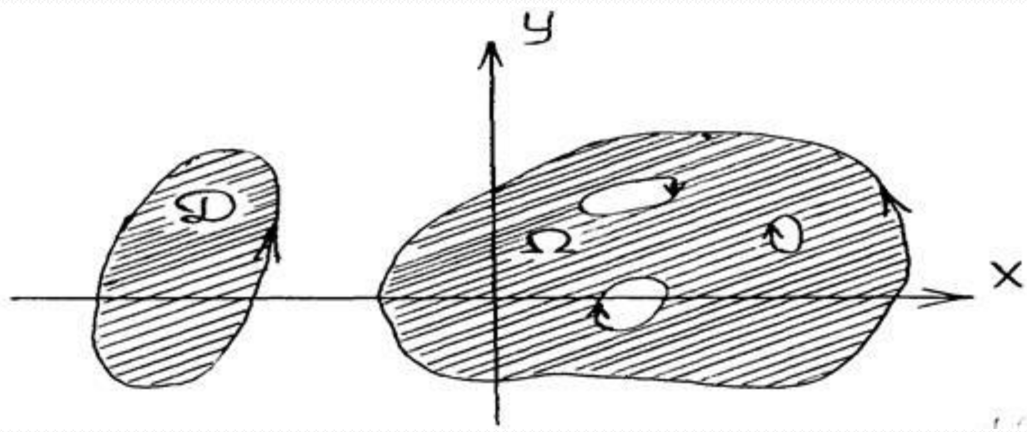
Определение. Говорят, что на некотором множестве G комплексной переменной задана функция

$$w = f(z)$$

если любому z из этого множества поставлено в соответствии одно (в случае однозначной функции) или большее число (в случае многозначной функции) значений w .

Основные понятия функций комплексной переменной

Будем рассматривать функции, заданные либо на всей плоскости, за исключением отдельных ее точек, либо на части плоскости, ограниченной одной (односвязная область) или несколькими (многосвязная область) гладкими или кусочно-гладкими кривыми.



Основные понятия функций комплексного переменного

Определение. Поскольку комплексным числам $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{w}$ соответствуют пары действительных чисел $(x;y)$ и $(u;v)$ соответственно: $z = x + i \cdot y,$ $w = u + i \cdot v$
то задание функции

$$w = f(z)$$

равносильно заданию двух функций

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

определяющих действительные величины u и v
как функции двух вещественных переменных x и y

Основные понятия функций комплексной переменной

Пример. Если $w = z^2$, то полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$,

легко получаем, что равенство $w = z^2$ равносильно

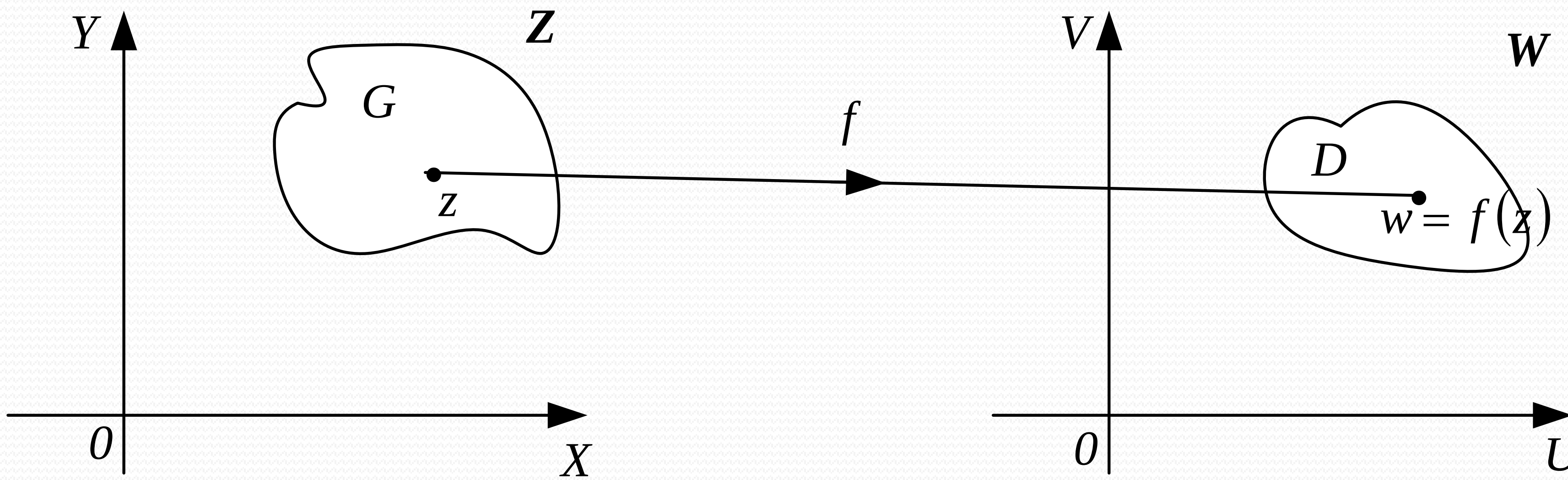
равенствам $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Функция $u(x, y)$ называются *действительной частью*,

а $v(x, y)$ – *мнимой частью* функции $w = f(z)$.

Основные понятия функций комплексной переменной

Заданием функции $w = f(z)$ устанавливается соответствие между точками области G плоскости $\boldsymbol{z}$ и области D комплексной плоскости $\boldsymbol{W}$:



Основные понятия функций комплексного переменного

Определение. Точки области ***D*** являются *образами* области ***G*** при отображении функцией $w = f(z)$, а точки области ***G*** являются *прообразами* соответствующих точек области ***D***.

В соответствии с определением это будет означать, что на множестве определена некоторая обратная функция $z = \varphi(w)$.

Основные понятия функций комплексного переменного

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* функцией в области G, если в различных точках этой области она принимает различные значения.

Из этого определения следует, что однолистная функция осуществляет взаимно-однозначное отображение.

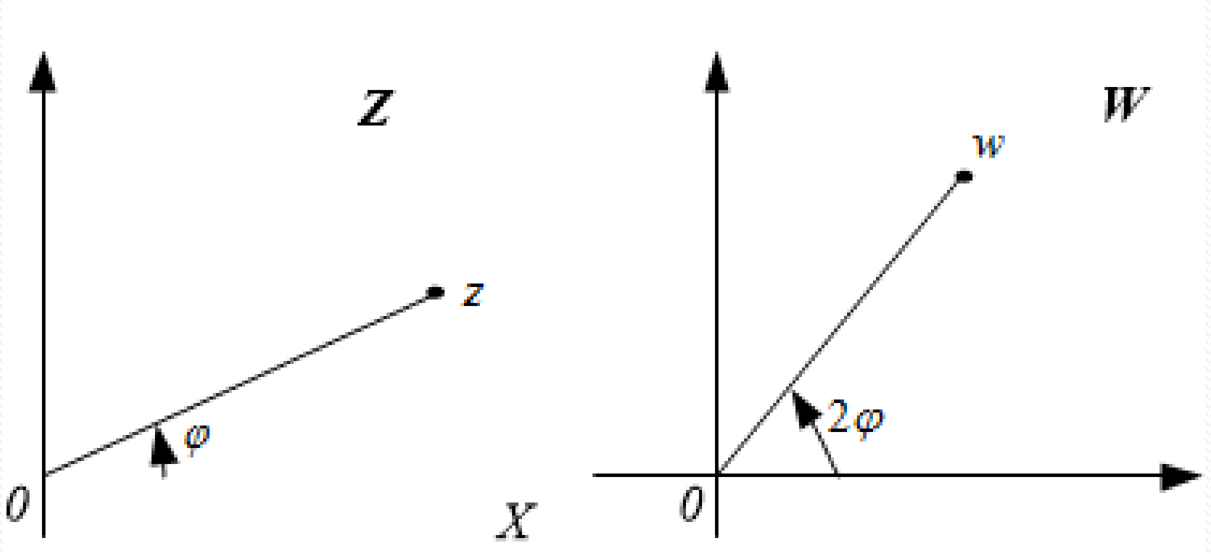
Основные понятия функций комплексной переменной

Пример. Функция $w = z^2$ является однозначной ф.к.п. на полной плоскости . Используем показательную форму записи комплексных чисел:

$$w = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^2 = |z|^2 e^{i2\varphi}$$

Отсюда следует, что точки плоскости ***Z***, лежащие на луче, составляющим угол φ с положительным направлением оси , переходит в точки плоскости , лежащие на луче под углом 2φ к оси.

Основные понятия функций комплексной переменной



Поэтому точкам z и $-z$ полуоси, аргументы которых отличаются на π, а модули одинаковые, соответствует одно и то же значение $\boldsymbol{w}$:

$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

Основные понятия функций комплексной переменной

Верхняя полуплоскость Z вместе с действительной частью переходит в полную плоскость W. Пусть для определенности

$$0 < \arg z = \varphi < 2\pi$$

Тогда различным точкам области $0 < \varphi < \pi$ соответствуют различные значения w.

Такая область изменения независимой переменной, различным точкам которой соответствуют различные значения функции, называется *областью однолистности функции*.

Основные понятия функций комплексной переменной

В рассматриваемом случае граница области однолистности

– лучи $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ –переходят в одну и ту же границу

– положительную часть действительной оси U плоскости $\boldsymbol{w}$.

Легко показать, что функция $w = z^2$ производит отображение

и нижней полуплоскости $\boldsymbol{z}$ вместе с положительной осью

на всю плоскость.

Основные понятия функций комплексной переменной

Тем самым обратная функция $z = \sqrt{w}$,

определенная на полной плоскости w,

уже не является однозначной – одной и

той же точке плоскости w соответствуют

две различные точки плоскости z:

одна в верхней, другая в нижней полуплоскости.

Основные понятия функций комплексной переменной

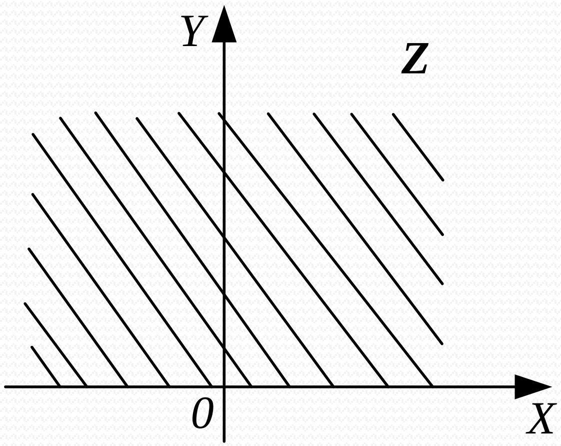


Рис. 6

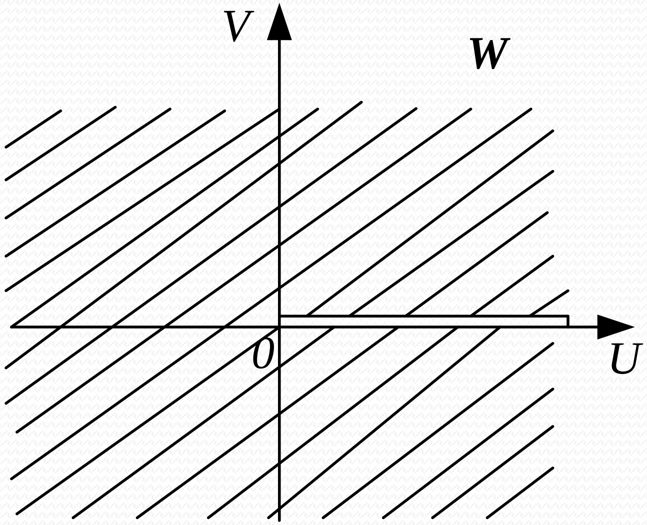


Рис. 7

Для того, чтобы отображение было однозначным не только внутри угла $0 < \varphi < \pi$, но и на его сторонах, следует в плоскости w произвести «разрез» по положительной части действительной оси и условиться считать, что луч $\varphi = 0$ отображается на верхней, а луч $\varphi = \pi$ – на нижней «берег» этого разреза

Основные понятия функций комплексной переменной

(если луч $\varphi = \alpha$, вращаясь против часовой стрелки, приближается к лучу $\varphi = \pi$, то соответствующий луч в плоскости W приближается к действительной части полуоси снизу).

Итак, отображение $w = z^2$ отображает полуплоскость $0 \le \varphi \le \pi$ на всю плоскость W с разрезом вдоль положительной полуоси U. Это отображение взаимнооднозначно. (рис. 7).

Основные понятия функций комплексного переменного

Определение. Функция $f(z)$, заданная на множестве E,

называется ***непрерывной*** в точке $z_0 \in E$, если

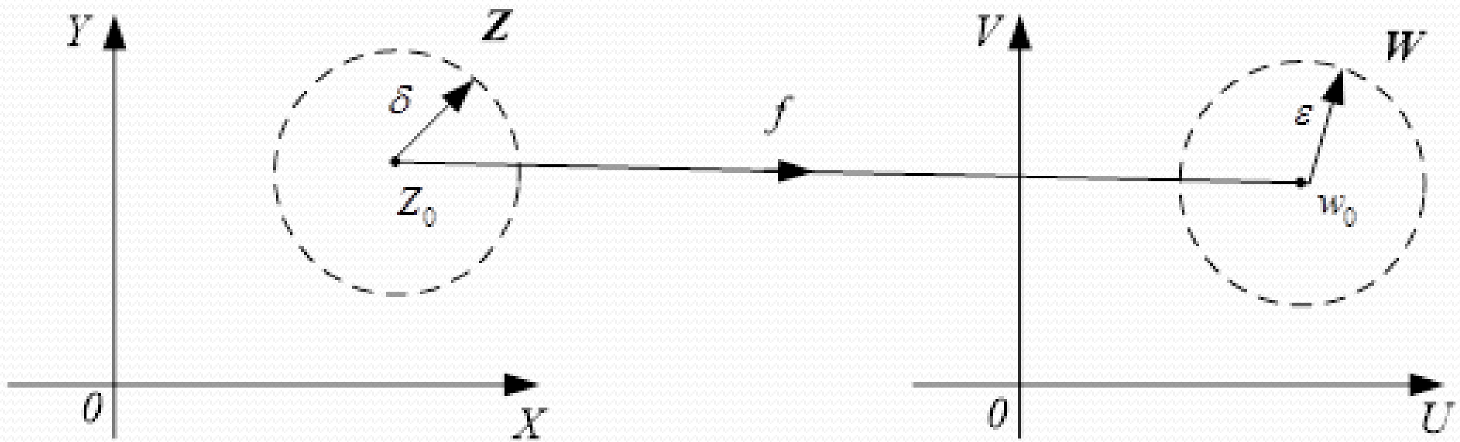
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Напомним, что **число** w_0 называется **пределом функции** $f(z)$ **в точке** z_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in E, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon .$$

Основные понятия функций комплексной переменной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in E, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$



Как только точки z попадают в δ - окрестность точки z_0,

соответствующие точки $f(z) = w$ попадает

в ε -окрестность точки w_0.

Основные элементарные функций комплексной переменной

Элементарные функции комплексной переменной как суммы следующих степенных рядов комплексной переменной: (причем эти ряды сходятся абсолютно)

$$e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\ldots+\frac{z^{n}}{n!}+\ldots.;$$

$$\sin z=z-z+\frac{z^{3}}{3!}+\ldots+\left(-1\right)^{n}\frac{z^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}+\ldots.;$$

$$\cos z=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\ldots+\left(-1\right)^{n}\frac{z^{2n}}{\left(2n\right)!}+\ldots.$$