Теория функций комплексной переменной.

1. Интеграл от функции комплексной переменной.
2. Теорема Коши. Неопределенный интеграл от функций комплексной переменной.
3. Интегральная формула Коши.

Тема 11

Основные понятия функций комплексного переменного

Определение. Поскольку комплексным числам $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{w}$ соответствуют пары действительных чисел $(x; y)$ и $(u; v)$ соответственно: $z = x + i \cdot y,$ $w = u + i \cdot v$

то задание функции

$$w = f(z)$$

равносильно заданию двух функций

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

определяющих действительные величины u и v как функции двух вещественных переменных x и y

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Определение. Пусть в области G комплексной плоскости z задана функция $f(z)$. Если для точки $z_0 \in G$ существует при $\Delta z \to 0$ предел разностного отношения

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z},$$

то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ *по комплексной переменной* z *в точке* z_0

и обозначается $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Функция $f(z)$ в этом случае называется *дифференцируемой в точке* z_0. Подчеркнем еще раз, что, если существует предел, то он не зависит от способа приближения точки $z = z_0 + \Delta z$ к точке z_0

(для ф.д.п. $y = \varphi(x)$ было только два направления стремления $\Delta x \to 0$: слева (при $\Delta x < 0$) и справа ($\Delta x > 0$) при определении предела $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$)

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Определение. Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется ***аналитической*** в данной точке.

Определение. Функция аналитическая во всех точках некоторой области называется ***аналитической или голоморфной в этой области***.

Понятие аналитической функции является основным понятием теории ф.к.п. в силу особой роли, которую играет класс аналитических функций при решении многочисленных математических проблем и их приложениях.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Необходимым и достаточным условием *аналитичности функции*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в области является существование в этой области непрерывных частных производных функций

$u(x, y)$ и $v(x, y)$,

связанных соотношениями Коши-Римана.

Точки области, в которых функция не является аналитической, называются *особыми точками*.

Дифференцируемость функций комплексной переменной

Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

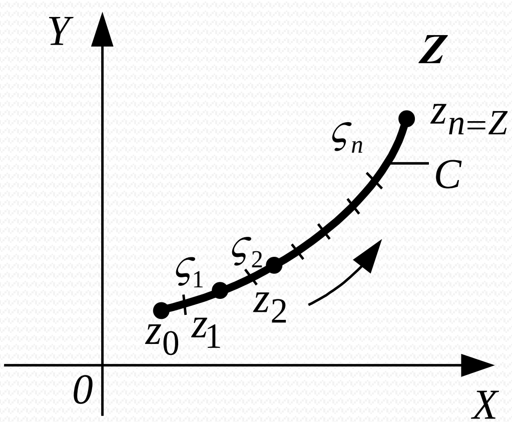
$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть на плоскости z дана незамкнутая плоская кривая C

и установим на ней положительное направление от z_0 до $Z_n = Z$

и пусть функция $f(z)$ непрерывна во всех точках этой кривой.



Произведем обычное разбиение этой кривой на элементарные участки $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, выберем произвольным образом точки ζ_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ и составим сумму

$$f(\zeta_1)\cdot\Delta z_1 + f(\zeta_2)\Delta z_2 + \ldots + f(\zeta_n)\Delta z_n .$$

$$\zeta_k = \chi_k + i\eta_k$$

Интеграл от функции комплексной переменной

Предел этой суммы, вычисленный при $n \to \infty$ и $\max|\Delta z_k| \to 0$, называется ***интегралом от функции*** $f(z)$ ***по дуге*** C и обозначается

$$\int_C f(z)\ dz = \lim_{\max|\Delta z_k|} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k .$$

Из определения этого интеграла непосредственно вытекают линейные свойства его, свойство аддитивности, перемена знака интеграла при перемене направления, а также свойство:

если $|f(z)| \le M$, $\forall z \in C$, и длина C равна l, то $\left|\int_C f(z)\ dz\right| \le M \cdot$

Интеграл от функции комплексной переменной

Вычисление интеграла сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ действительных переменных x и y.

Для сведения интеграла от ф.к.п. к вычислению обычных криволинейных интегралов надо подынтегральную функцию $f(z)$ *представить в виде* $f(z)=u+iv$ *и умножить ее на* $dz=dx+idy$*, при этом подынтегральное выражение преобразуется к виду*:

$$f(z)\cdot dz=(u+iv)(dx+idy)=udx-vdy+i(vdx+udy).$$

Интеграл от функции комплексной переменной

Т.к. $f(\zeta_k)=u(\chi_k,\eta_k)+iv(\chi_k,\eta_k)$, то $f(\zeta_k)\Delta z_k=[u(\chi_k,\eta_k)+iv(\chi_k,\eta_k)](\Delta x_k,\Delta y_k)=$

$=[u(\chi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k-v(\chi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k]+i[v(\chi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k-u(\chi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k]$.

Следовательно,

$$\int\limits_C f(z)dz=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[u(\chi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\chi_k,\eta_k)\Delta y_k]+$$

$$+i\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[v(\chi_k,\eta_k)\Delta x_k-u(\chi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

Тогда

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\int\limits_C u(x,y)\,dx-v(x,y)\,dy+i\int\limits_C v(x,y)\,dx+u(x,y)\,dy.$$

Интеграл от функции комплексной переменной

В соответствии с определением криволинейного интеграла имеем:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy,$$

а существование криволинейных интегралов исходит из гладкости кривой C и непрерывности вдоль нее $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Если дуга C задана в параметрической форме

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t_0 \le t \le T,$$

то интегралы сведутся к определенным интегралам от t в пределах от t_0 до T, т. е.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_0}^{T} f[z(t)]\,z'(t)\,dt.$$

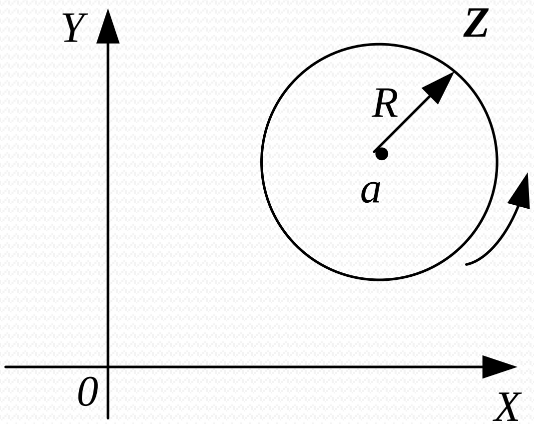
Интеграл от функции комплексной переменной

Пример. Вычислить интеграл по комплексной переменной

$$I = \oint_{C_R} \frac{dz}{z-a}$$

где C_R - окружность радиусом R с центром в точке $z = a$,

обходимая в положительном направлении.



Интеграл от функции комплексной переменной

Запишем уравнения окружности в параметрической форме:

$$z-a=R\,e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \Rightarrow dz=iR\,e^{i\varphi}d\varphi.$$

Тогда

$$\int\limits_{C_R}\frac{dz}{z-a}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{iR\,e^{i\varphi}d\varphi}{R\,e^{i\varphi}}=i\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i.$$

Отсюда следует, **что интеграл не зависит ни от** R**, ни от** a**.**

Интеграл от функции комплексной переменной

В дальнейшем мы будем рассматривать интегралы от аналитических функций в некоторой ограниченной области в случае кусочно-гладкой кривой, не имеющей самопересечений. Такую кривую будем называть *замкнутым контуром*. Интеграл по замкнутому контуру часто называют *контурным интегралом* и обозначают:

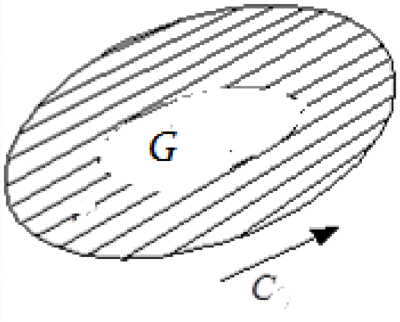
$$\oint\limits_C f(z)dz$$

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Теорема Коши устанавливает одно из основных свойств аналитических функции комплексной переменной:

Теорема (Коши) *Если функция* $f(z)$ - *аналитическая в односвязной области* G, *ограниченной замкнутым контуром* C, *а также в точках этого контура*, *то*

$$\oint\limits_C f(z)dz = 0$$



односвязная область G

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Поскольку

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_C udx - vdy + i\oint\limits_C vdx + udy,$$

то в силу аналитичности $f(z)$ внутри C, функции

$u(x,y)$ и $v(x,y)$ обладают непрерывными

Частными производными первого порядка.

Поэтому к криволинейным интегралам, стоящим в правой части, можно применить формулу Грина.

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Тогда с учетом условий Коши-Римана получим

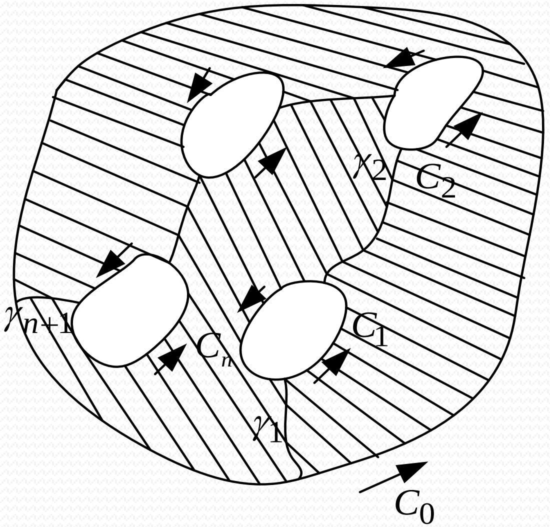
$$\oint\limits_C udx - vdy = \iint\limits_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

$$\oint\limits_C vdx - udy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

что доказывает утверждение теоремы Коши.

Интеграл от функции комплексной переменной

Рассмотрим теперь многосвязную область G, ограниченную внешним контуром C_0 и внутренними контурами $C_1, C_2, \ldots C_n$, и предположим, что $f(z)$ является аналитической как в этой многосвязной области, так и на контурах $C_0, C_1, \ldots C_n$.



Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Пусть $\oint\limits_{C_k} f(z)dz = 0$, $k = \overline{0,n}$,

где C_k обходится против часовой стрелки.

Соединим контуры $C_0, C_1, \ldots C_n$ дугами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{n+1}$,

при этом область G становится разбитой на две односвязные области. Контуры ограничивающие эти образы обозначим соответственно Γ' и Γ''.

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

В силу аналитичности $f(z)$ на этих контурах, так и в области, ограниченных ими, по теореме Коши будем иметь

$$\oint_{\Gamma'} f(z)dz = 0, \quad \oint_{\Gamma''} f(z)dz = 0,$$

а, следовательно, и $\oint_{\Gamma'} f(z)dz + \oint_{\Gamma''} f(z)dz = 0$.

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Если на каждом из контуров Γ' и Γ'' считать положительным то направление, при котором область, ограниченная этим контуром, остается слева, то

$$\oint_{\Gamma'} + \oint_{\Gamma''} = \oint_{C_0} - \oint_{C_1} - \oint_{C_2} - \ldots - \oint_{C_n} = 0$$

(интегралы по $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{n+1}$ уничтожаются, т.к. интегрирование по ним производится дважды в противоположных направлениях),

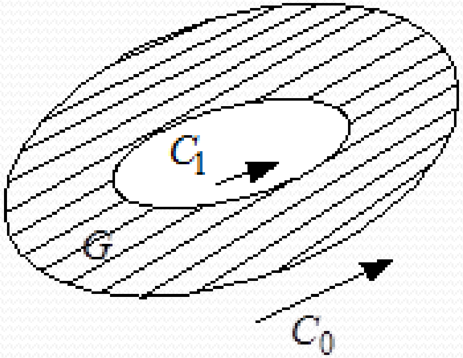
отсюда
$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{C_n} f(z)dz$$

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

В частности, для двухмерной области G (при $n=1$)

$$\oint\limits_{C_0} f(z)dz = \oint\limits_{C_1} f(z)dz.$$

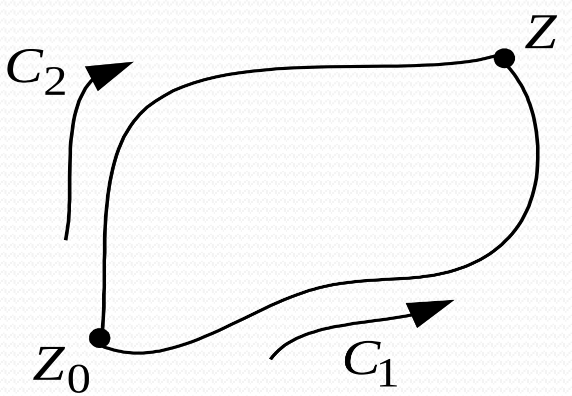
Равенство называется ***теоремой Коши для составного контура***



Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Важным следствием теоремы Коши является следующее:

Пусть функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области G.



Тогда

$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0,$$

т.е. $$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Это означает, что интеграл

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$$

не зависит от пути интегрирования в области G

и является однозначной функцией z .

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Теорема. *Пусть функция* $f(z)$ *определена и непрерывна в некоторой односвязной области* G, *а интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в данной области, равен нулю. Тогда функция*

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma, \quad z, z_0 \in G,$$

является аналитической функцией в области G *и* $\Phi'(z) = f(z)$

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Доказанная теорема позволяет ввести понятие неопределенного интеграла от ф.к.п.

Определение. Аналитическая функция $\Phi(z)$ называется ***первообразной*** функцией $f(z)$ в области G, если $\Phi'(z) = f(z)$.

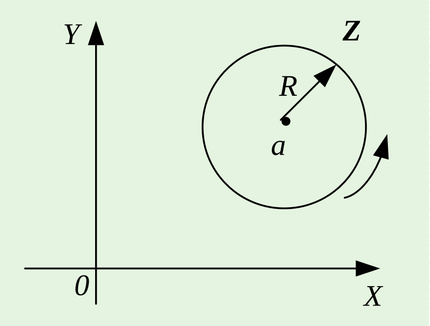
Очевидно, функция $f(z)$ имеет множество различных первообразных, которые различаются меж собой на постоянную.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(z)$.

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Пример. Рассмотрим снова интеграл $\int \frac{dz}{z-a}$.

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$



Подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точки $z=a$, и поэтому в любой односвязной области, не содержащей точки $z=a$, интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$ не зависит от пути интегрирования,

а зависит только от начальной точки z_1 и конечной точки z_2 дуги.

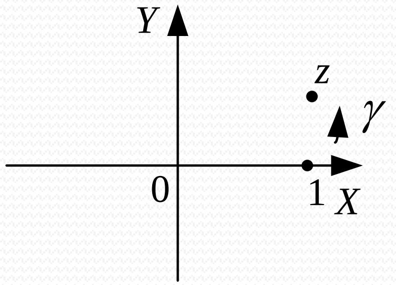
Для неопределенного интеграла имеем

$$\int \frac{dz}{z-a} = \ln(z-a) + C.$$

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

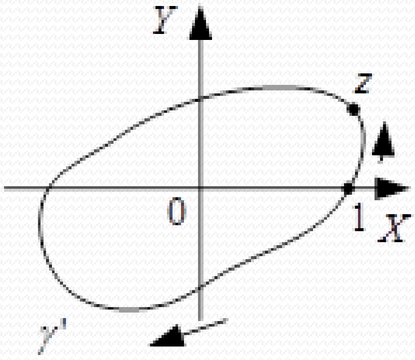
Пусть $a=0$ и пусть $z_1=1$ и $z_2=z$ и пусть γ не проходит через точку $z=0$. Тогда можно дугу γ можно включить в односвязную область, не содержащую точку $z=0$ и точек отрицательной части действительной оси. В такой области функция $\ln z$ будет непрерывной и аналитической. При этих условиях независимо от формы дуги γ будем иметь

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \ln z - \ln 1 = \ln z.$$



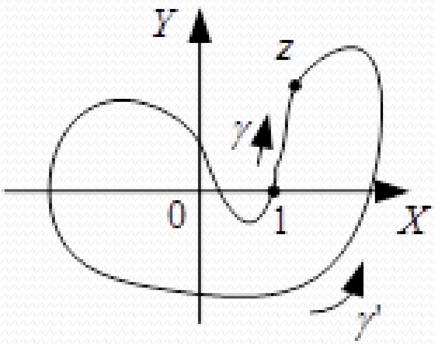
Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Если теперь соединить точку 1 с точкой z дугой γ', так, чтобы дуги γ и γ' образовывали замкнутый контур l, один раз окружающий точку $z=0$, то в силу равенства



$$\oint_l \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad \text{получим} \quad \oint_l \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

если направление на контуре l выбрано против часовой стрелки. Но так как



$$\oint \frac{dz}{z} = \pm\left(\int_\gamma \frac{dz}{z} - \int_{\gamma'} \frac{dz}{z}\right), \text{ то } \int_{\gamma'} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2\pi i.$$

Теорема Коши. Неопределенный интеграл от ф.к.п.

Если дуга γ' такова, что замкнутый контур образованный ею и дугой γ , k раз обходит точку $z = 0$, то получим

$$\int\limits_{\gamma'} \frac{dz}{z} = \ln z \pm 2k\pi i .$$

Интегральная формула Коши.

Интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)\, d\varsigma}{\varsigma - z}.$$

Величина, стоящая в правой части, называется *интегралом Коши*.

Интегральная формула Коши.

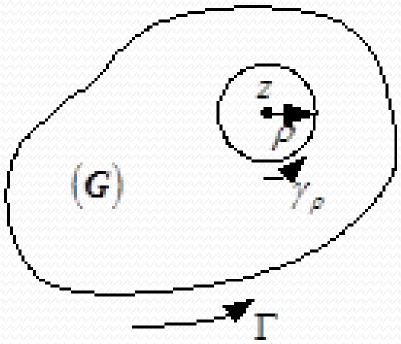
Для вычисления интеграла Коши нужно знать значение функции $f(z)$ только на контуре Γ и интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области G, если известны значения этой функции на контуре Γ, ограничивающем область G.

Если точка z лежит вне области G, то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши.

Интегральная формула Коши.

Пусть функция $f(\varsigma)$ - аналитическая в односвязной области G плоскости ς, а также на контуре Γ, ограничивающем эту область. Пусть z - любая внутренняя точка этой области.

Опишем около точки z окружность γ_ρ радиусом ρ так, чтобы она целиком лежала в G. Тогда,



$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}$$