1. Сходимость рядов Фурье.

2. Разложение в ряд Фурье непериодических функций и функций, заданных на отрезке [a ; b].

Тема 10

Сходимость рядов Фурье.

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для функции с периодом $T = 2l$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы:

а) ряд Фурье, составленный для этой функции по вышеприведенным формулам, сходился;

б) суммой ряда Фурье являлась эта же функция $f(x)$?

Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Все функции основной тригонометрической системы

$$\left\{1; \cos\frac{\pi x}{l}; \sin\frac{\pi x}{l}; \cos\frac{2\pi x}{l}; \sin\frac{2\pi x}{l}; \ldots\ldots;\right\}$$

являются периодическими функциями с периодом $T = 2l$

Поэтому и любая частичная сумма ряда Фурье периодична с тем же периодом.

Отсюда следует, что если ряд Фурье сходится на отрезке длиною $2l$, то он сходится на всей числовой прямой и его сумма, будучи пределом последовательности периодических частичных сумм, является периодической функцией с периодом $T = 2l$.

Виды сходимости функционального ряда

Виды сходимости функционального ряда:

Поточечная сходимость:

если при $n \to \infty$ $|S(x) - S_n(x)| \to 0$ для $x \in [a,b]$;

Равномерная сходимость:

если при $n \to \infty$ $\max\limits_{x \in [a,b]} |S(x) - S_n(x)| \to 0$;

Сходимость в среднем квадратичном:

если при $n \to \infty$ $\int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|^2 dx \to 0$.

Виды сходимости функционального ряда

Число, равное $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|S(x)-S_n(x)\right|$

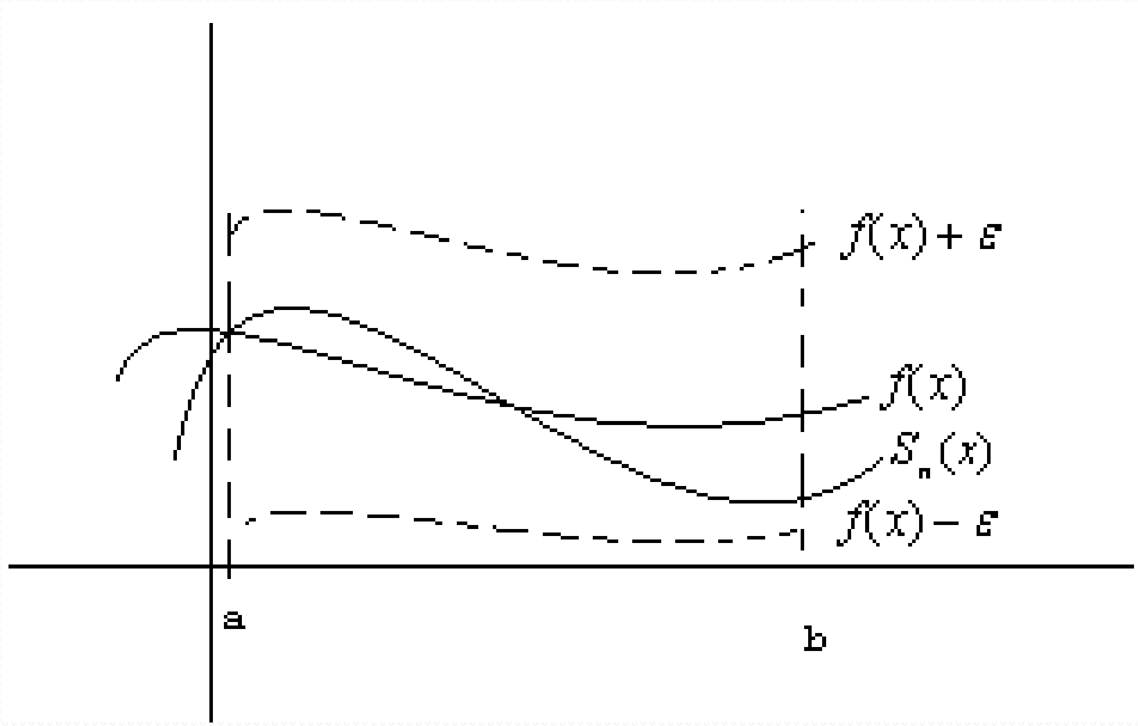
называется **равномерным уклонением функции** $f(x)$ **на** $[a;b]$**.**

Число, равное $\sqrt{\int\limits_a^b\left|S(x)-S_n(x)^2\right|dx}$

называется **среднеквадратичным уклонением функции на [a,b].**

Если функции имеют малое равномерное уклонение,
то и их среднеквадратичное уклонение мало.

Виды сходимости функционального ряда: ***равномерная сходимость***



Виды сходимости функционального ряда: ***сходимость в среднем квадратичном***

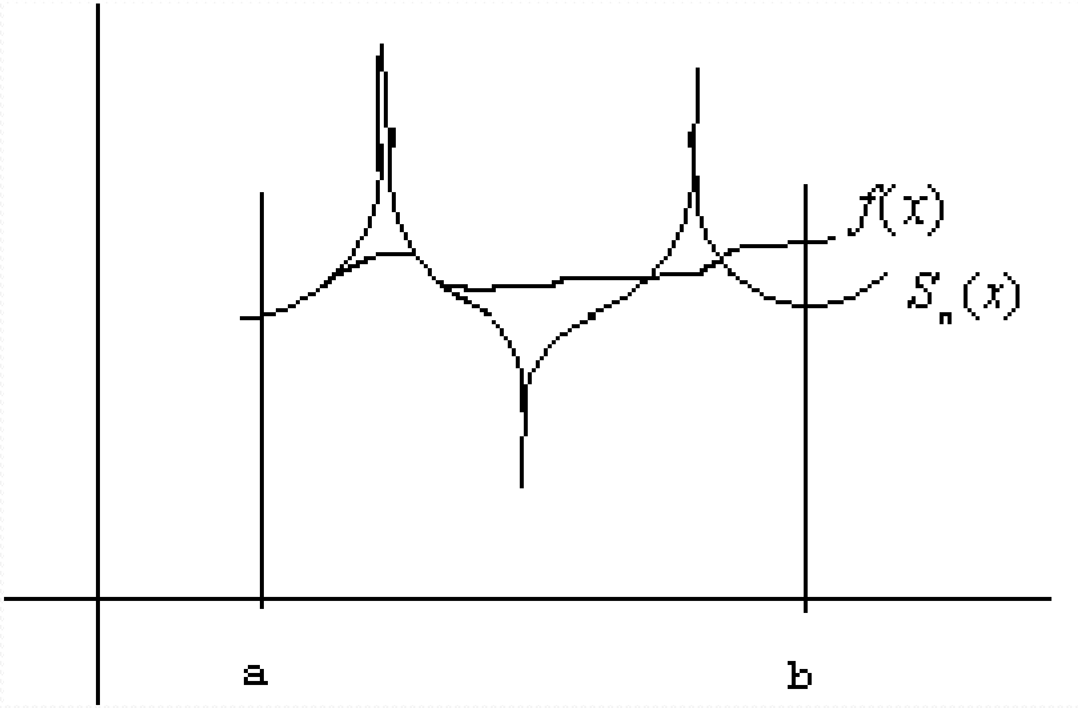


График функции $Sn(x)$ может иметь узкие всплески, которые незначительно влияют на среднеквадратичное уклонение, но сильно увеличивают их равномерное уклонение.

Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Теорема (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ -кусочно-гладкая на отрезке $[-l, l]$, тогда её тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда Фурье справедливы следующие соотношения:

1. сумма ряда $S(x)=f(x)$, если x –точка непрерывности $f(x)$;

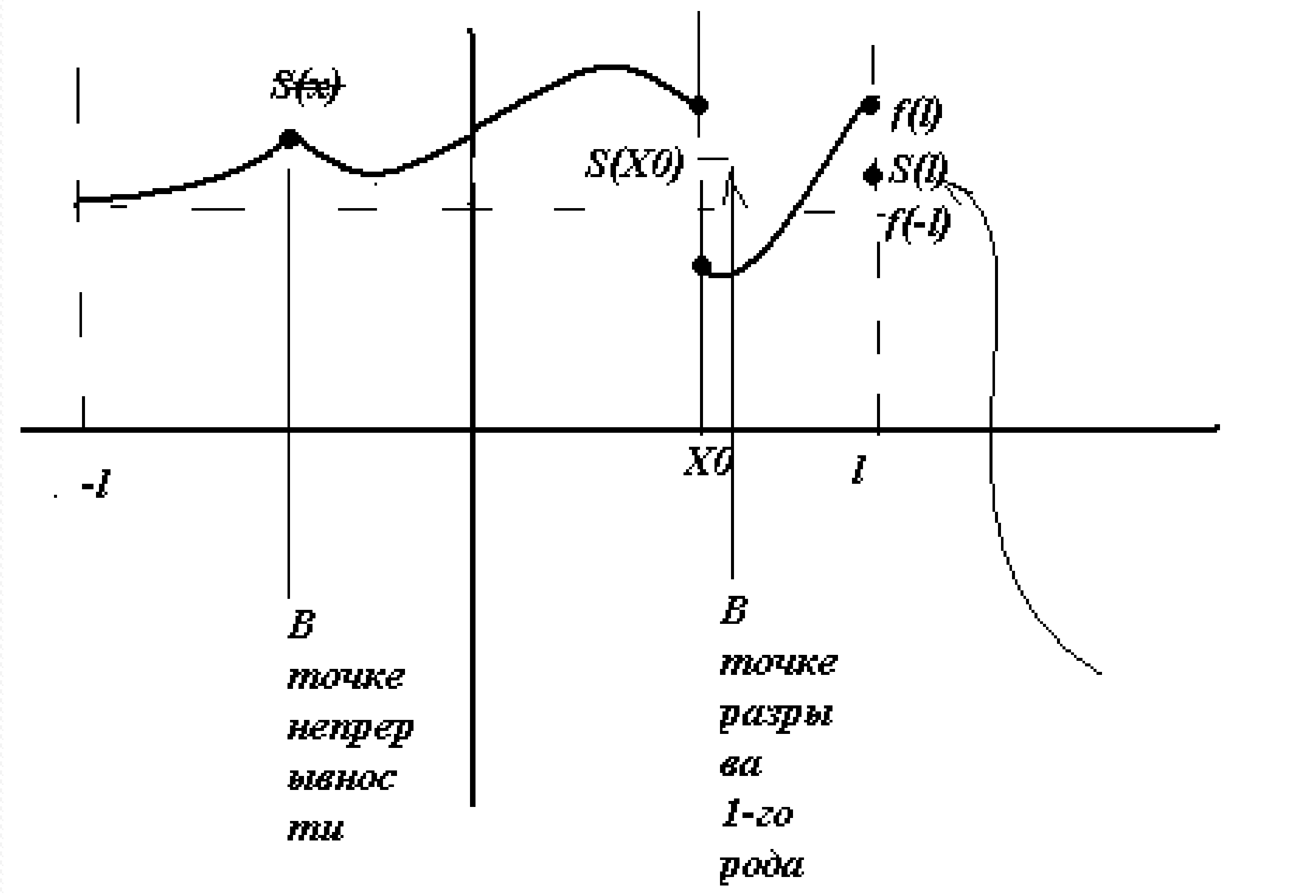
2. в каждой точке x_0 разрыва первого рода функции сумма ряда равна

$$S(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

3. На концах отрезка $[-l, l]$ сумма ряда равна

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l + 0) + f(l - 0)}{2}.$$

Сходимость тригонометрических рядов Фурье



Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Теорема Если $f(x)$ -кусочно-непрерывна на $\left[-l,l\right]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к ней в среднем квадратичном.

Сходимость тригонометрических рядов Фурье

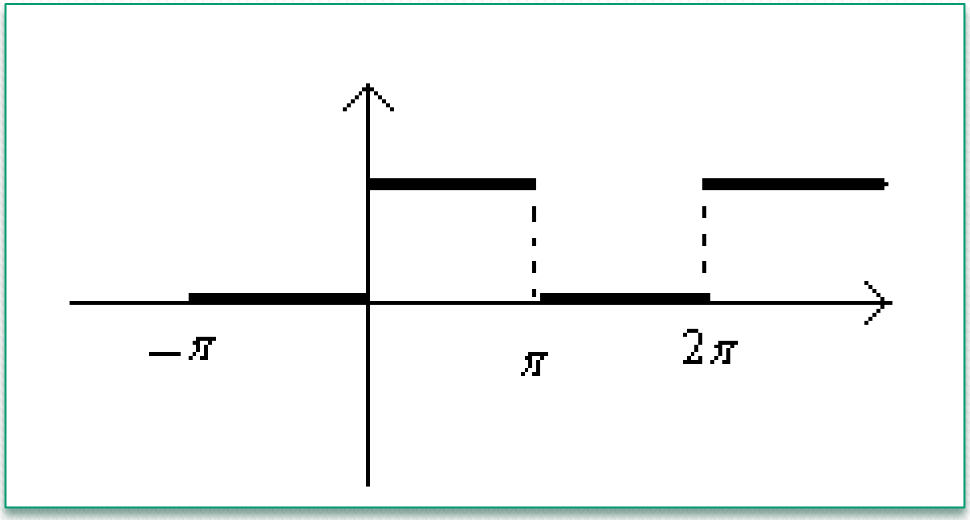
Теорема Если $f(x)$ является кусочно-гладкой и непрерывной на $[-l,l]$, а на концах отрезка удовлетворяет равенству $f(-l)=f(l)$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ **равномерно** на $[-l,l]$.

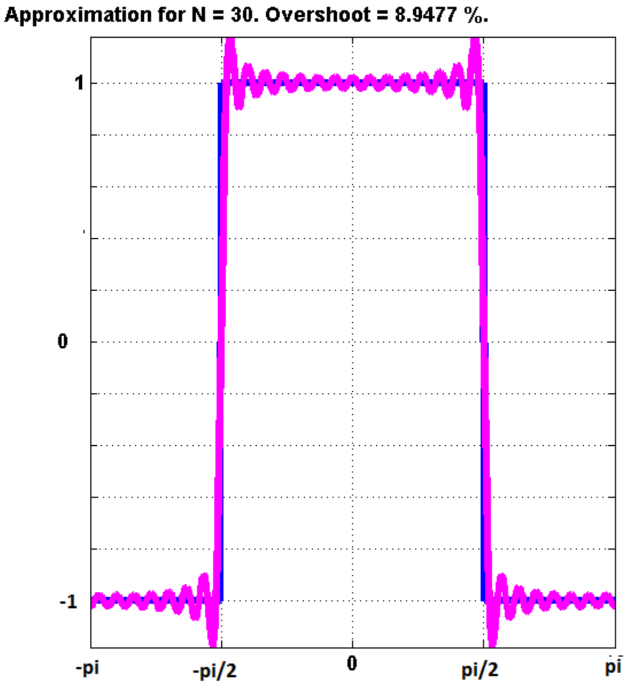
Вывод: Чем лучше свойства функции, тем лучше и сходимость ряда Фурье.

Тригонометрические ряды Фурье

Пример 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую кусочно-непрерывную функцию с периодом $T = 2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ 0 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$





Тригонометрические ряды Фурье

Ряд имеет вид:

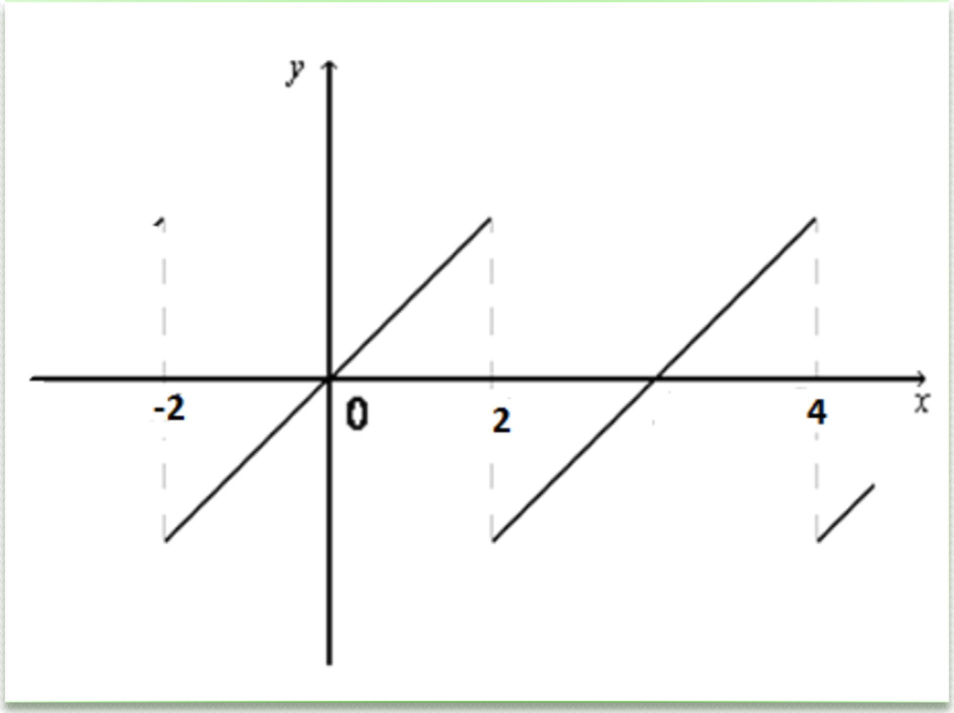
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

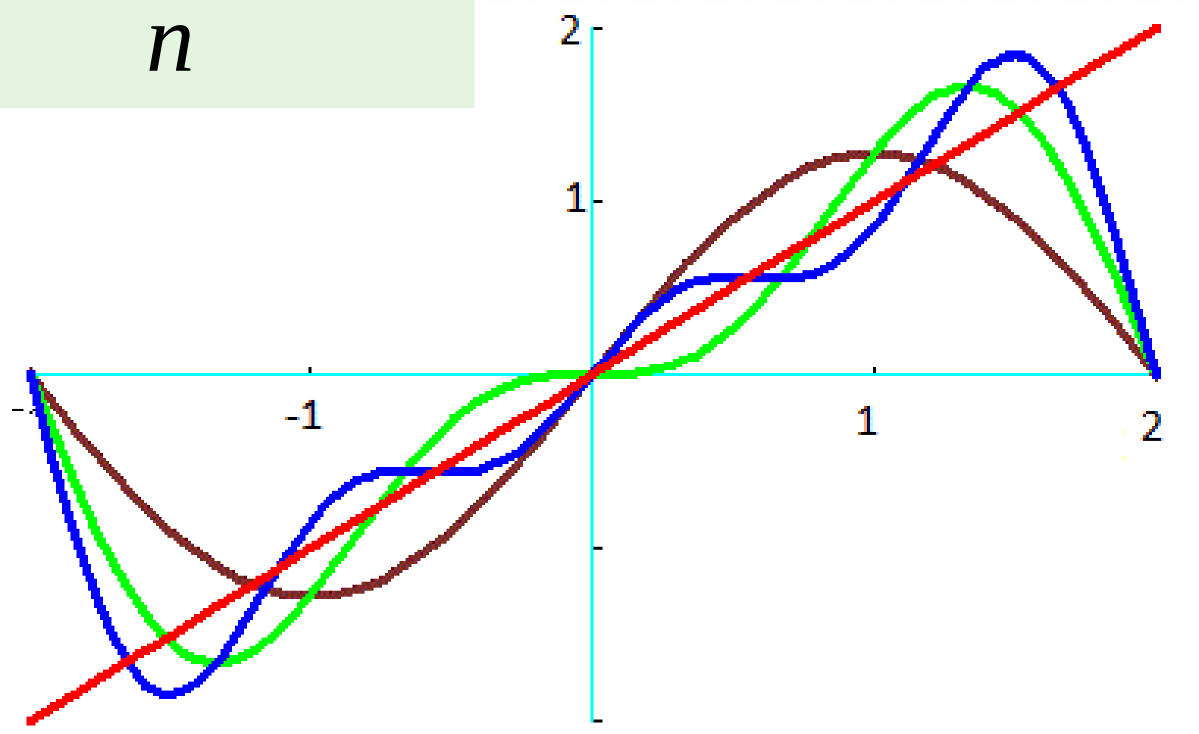
Пример 2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье нечётную периодическую кусочно-непрерывную функцию с периодом $T = 4$:

$$f(x) = x, \quad x \in [-2; 2]$$



Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

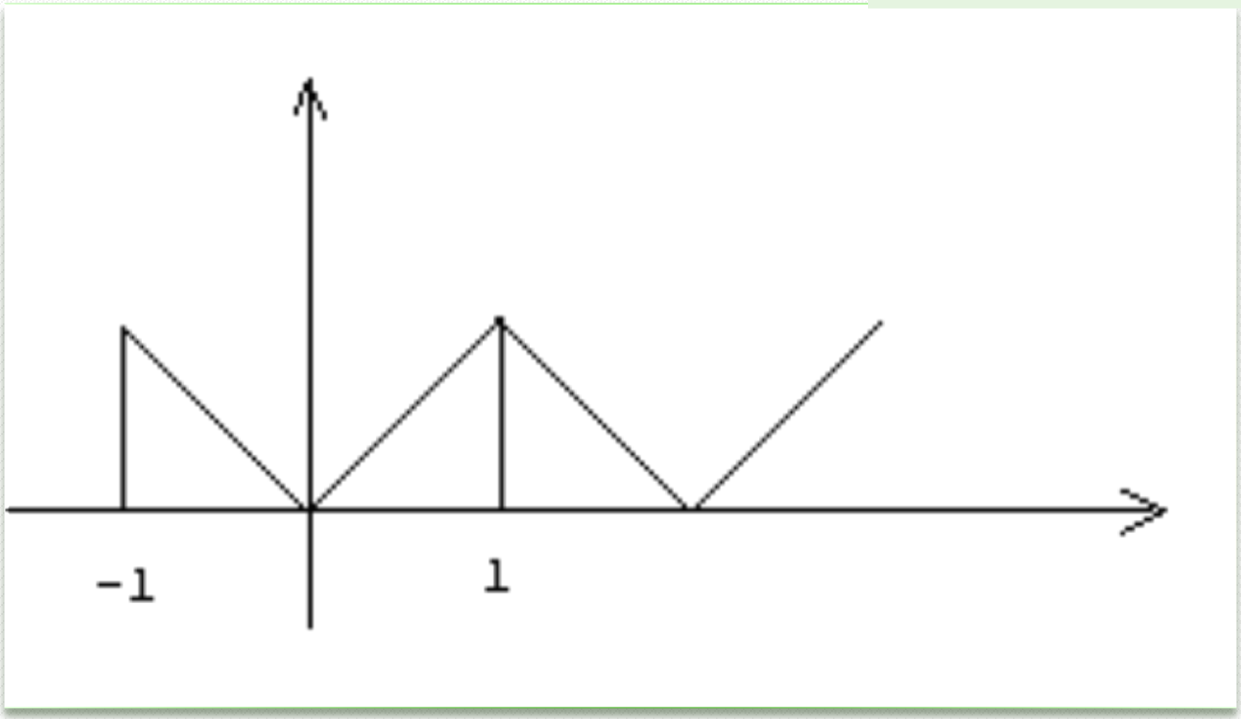
$$f(x) == \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\dfrac{n\pi x}{2}}{n}$$



Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

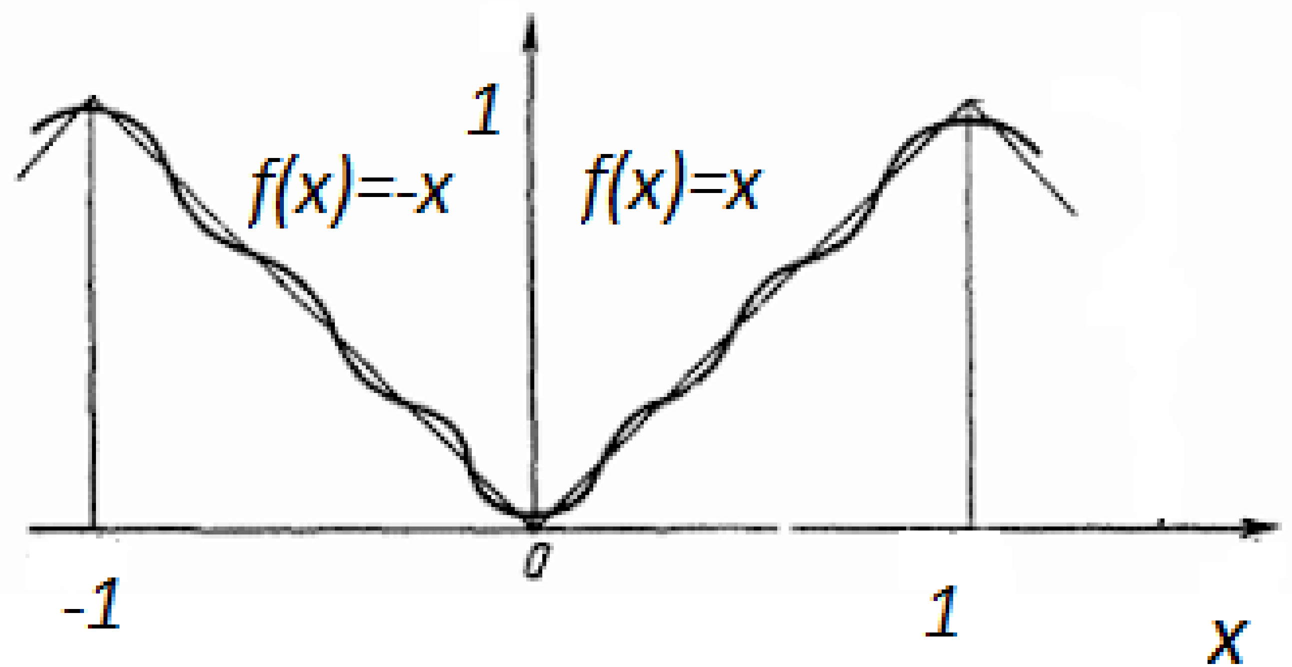
Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую чётную кусочно-гладкую функцию с периодом Т=**2**:

$$y = |x|, x \in [-1,1]$$

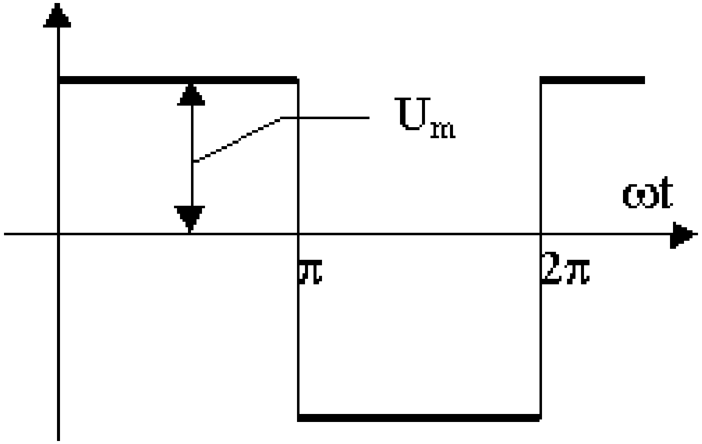


Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

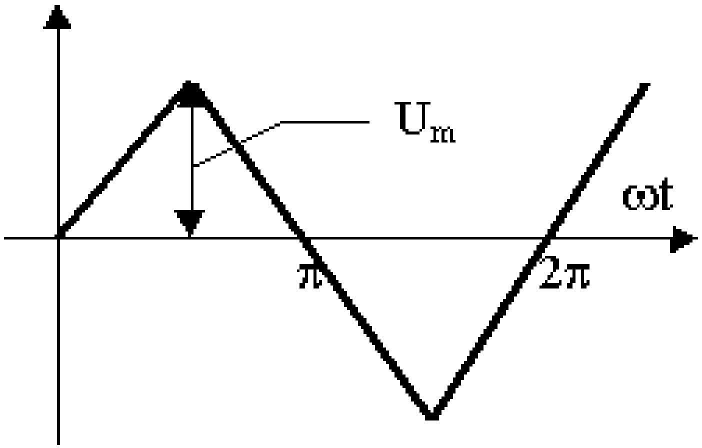
$$\left|x\right| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$$



Влияние гладкости функции на скорость убывания коэффициентов ряда : а) со скоростью $O\left(\frac{1}{n}\right)$; б) со скоростью $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.



$$f(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \ldots\right)$$

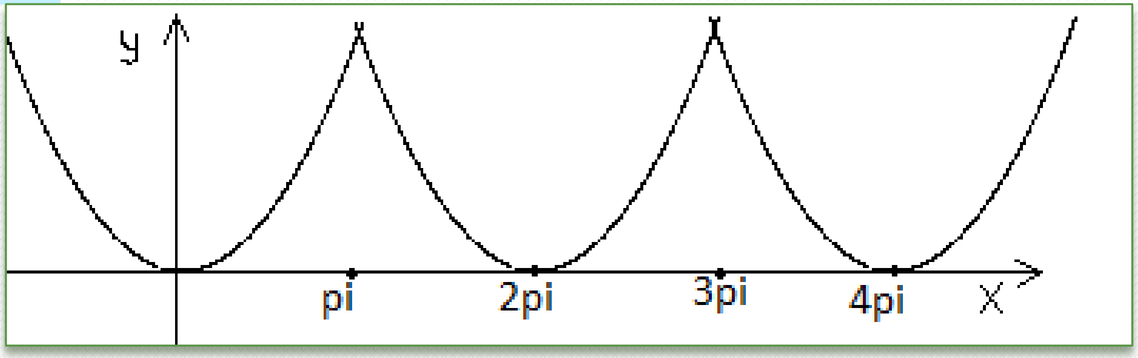


$$f(\omega t) = \frac{8U_m}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t - \frac{1}{49}\sin 7\omega t + \ldots\right)$$

Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Пример 4. Разложить периодическую кусочно-гладкую функцию с периодом $T = 2\pi$ в ряд Фурье:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-\pi; \pi]$$

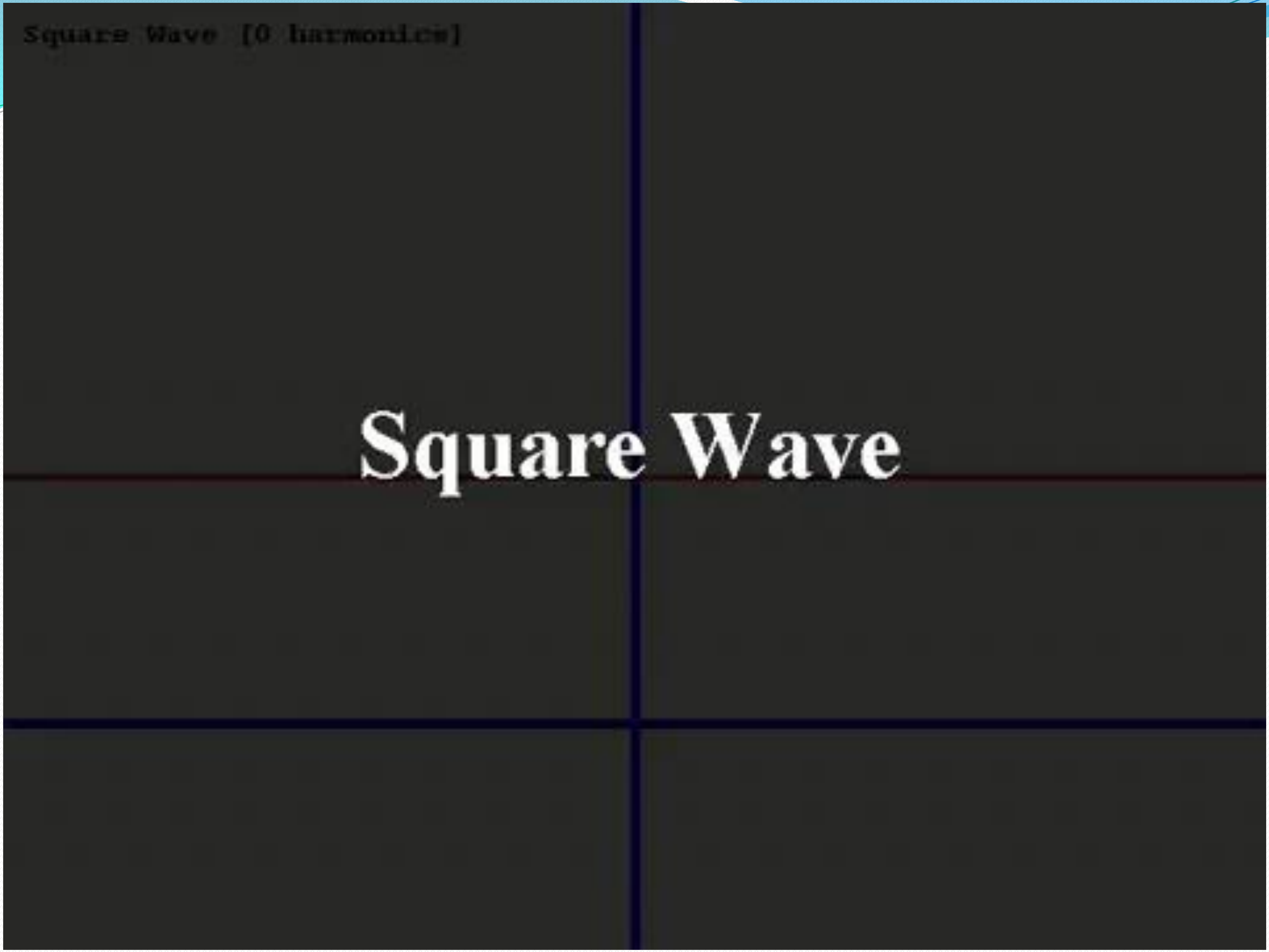


$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Если *f(x)* имеет точку разрыва первого рода в x_0, то частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье, являясь непрерывными функциями, в окрестности этой точки делают «разгон» и имеют «выбросы», которые стремятся к вертикальной прямой $x = x_0$. Величина «выброса» превышает на **18%** значение функции в этой окрестности.

Такое поведение называется **явлением Гиббса.**


Square Wave [0 harmonics]
Square Wave

Разложение в ряд Фурье непериодических функций и функций, заданных на отрезке [a ; b].

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

В приложениях часто приходится иметь дело с функцией $f(x)$, заданной на $\left[-l, l\right]$,т.к. эта функция не является периодической, то применить сразу теорию рядов Фурье невозможно. Тогда поступают следующим образом: вводят вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-l, l) \\ \dfrac{f(-l) + f(l)}{2}, & x = \pm l. \end{cases}$$

и строят периодическим продолжением функции $\varphi(x)$, совпадающей с $f(x)$ на (-l; l) .

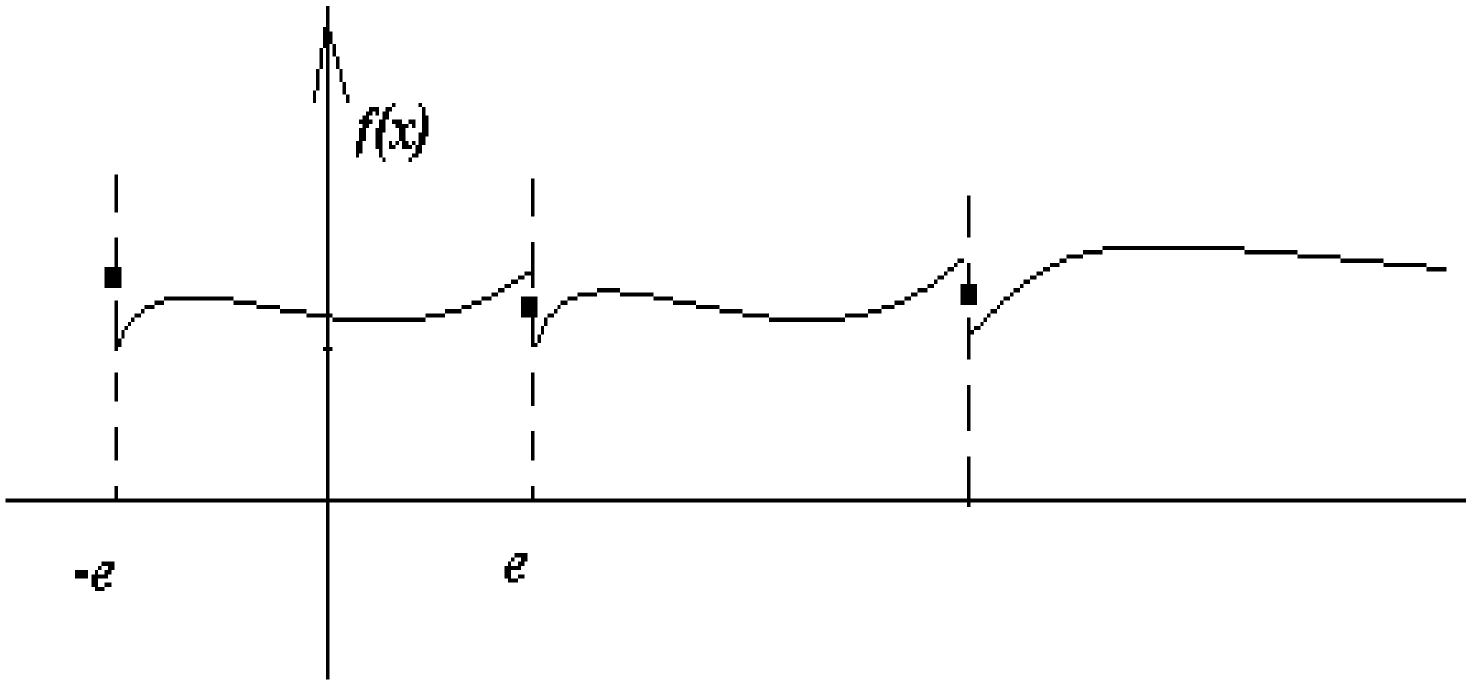
Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Определение Функция $F(x)$, определённая на всей числовой прямой и периодическая с периодом $T = 2l$, называется периодическим продолжением функции $\varphi(x)$, заданной на отрезке $[-l, l]$ длиною $2l$, если на этом отрезке выполняется равенство

$$F(x) = \varphi(x)$$

Если на отрезке $[-l, l]$ ряд Фурье сходится к функции $\varphi(x)$, то на всей числовой прямой он сходится к её периодическому продолжению.

Разложение в ряд Фурье непериодических функций



Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Полученную функцию φ (x) можно разложить в тригонометрический ряд Фурье, который и будет представлять исходную функцию *f (x)* на (-*l*; *l*), где $\varphi(x) = f(x)$. В граничных точках –*l* и *l* ряд может не сходиться к *f (-l)* и *f (l)*.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

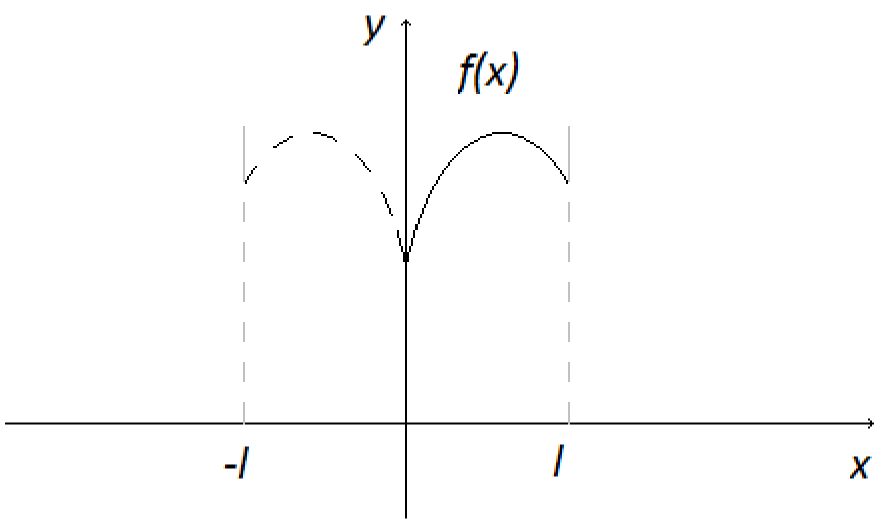
Коэффициенты ряда вычисляются по формулам для функции с периодом $2l$:

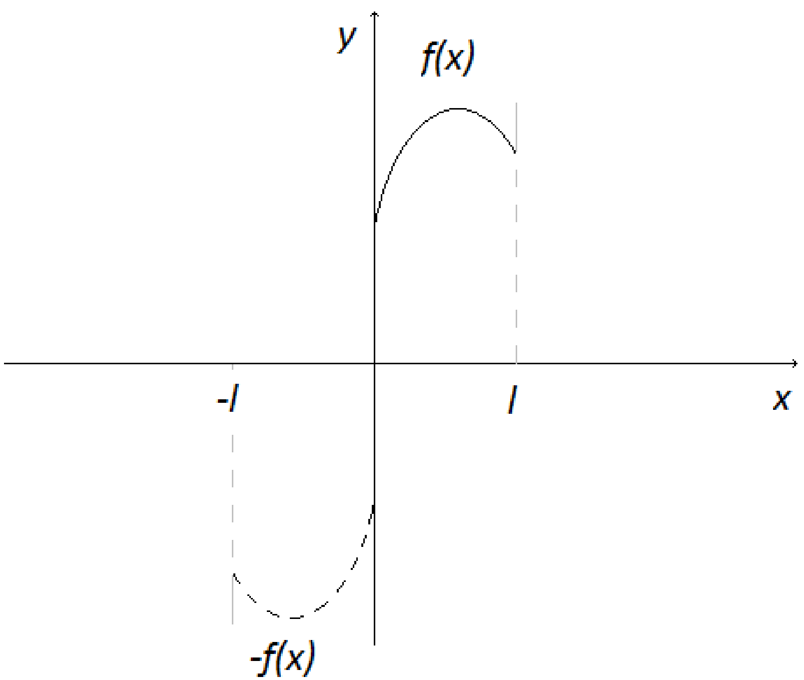
$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

Чётное и нечётное периодическое продолжение функции

Если $f(x)$ задана на $[0;l]$, то ее можно, продолжить периодически с периодом $T = 2l$.При этом продолжение на [-l,0) может быть или четным или нечетным и , соответственно, ряд будет содержать или косинусы, или синусы.





Чётное периодическое продолжение функции

Тригонометрические ряды Фурье для чётно продолженных функций с периодом $T = 2l$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Нечётное периодическое продолжение функции

Тригонометрические ряды Фурье для нечётно продолженных функций с периодом $T = 2l$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

Чётное и нечётное периодическое продолжение функции

Чётное периодическое продолжением функции $f(x)$ непрерывно, является кусочно-гладкой функцией, на концах отрезка удовлетворяет равенству $f(-l) = f(l)$, следовательно, её тригонометрический ряд Фурье **сходится к $f(x)$ равномерно**.

Поэтому при чётном продолжении сходимость будет лучше, так как убывание коэффициентов ряда по косинусам будет со скоростью $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, а по синусам лишь со скоростью $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Разложение в ряд Фурье непериодических функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

Так как функция задана на произвольном отрезке $[a;b]$, то также строится вспомогательная функция φ (x) , периодическая с периодом $T = b - a = 2l, l = \dfrac{b-a}{2}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), x \in (a;b) \\ \dfrac{f(a) + f(b)}{2} \qquad x = a, x = b \end{cases}$$

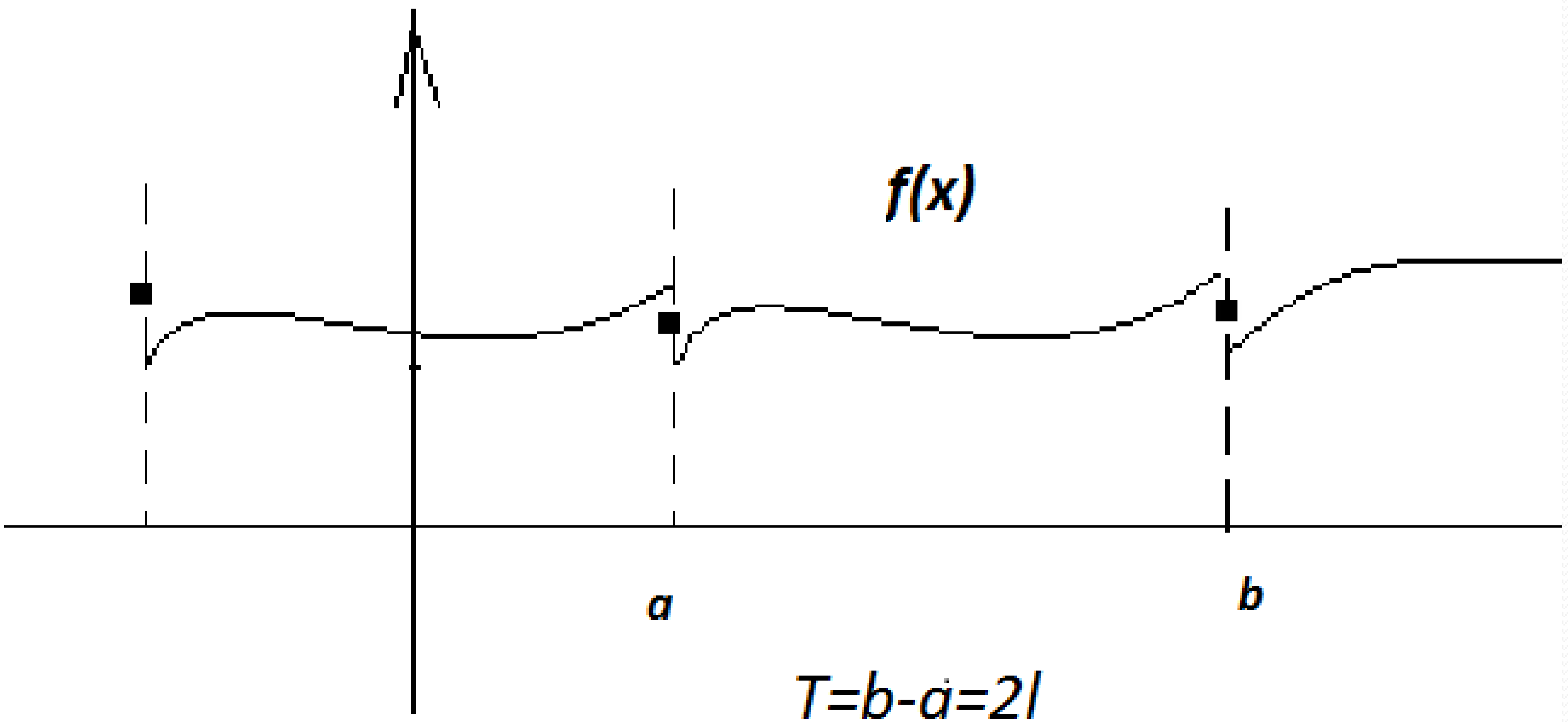
Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Определение Функция $F(x)$, определённая на всей числовой прямой и периодическая с периодом $T = 2l$, называется **периодическим продолжением функции** $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ длиною $2l = b - a$, если на этом отрезке выполняется равенство

$$F(x) = f(x)$$

Если на отрезке $[a,b]$ ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, то он сходится на всей числовой прямой к её периодическому продолжению.

Сходимость тригонометрических рядов Фурье



Разложение в ряд Фурье непериодических функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{b-a}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{b-a}\right)$$

$$T=b-a=2l,\quad l=\frac{b-a}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{b-a}dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b-a}dx$$

Чётное периодическое продолжение функции, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

Тригонометрические ряды Фурье для чётно продолженных функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$, $l=b-a$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{b-a}$$

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi nx}{b-a}\,dx,$$

Нечётное периодическое продолжение функции, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$

Тригонометрические ряды Фурье для нечётно продолженных функций, заданных на произвольном отрезке $[a;b]$, $l = b - a$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{b-a}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n x}{b-a} dx,$$