ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. Признаки сходимости числовых рядов.

Тема 9

Числовые ряды

- Пусть дана числовая последовательность

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_n ...\}.$$

- <u>Определение</u>
- ***Числовым рядом*** называется выражение
- следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Упрощенно : ряд – это «бесконечная» сумма.

Числовые ряды

- Вместе с последовательностью $\{a_n\}$ будем рассматривать числовую последовательность $\{S_n\}$, которая строится следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1, \\
&S_2 = a_1 + a_2, \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\
&\ldots \\
&S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

- Эта последовательность называется ***последовательностью частичных сумм ряда***

Числовые ряды

- Если предел последовательности $\{S_n\}$ существует и конечен, то он называется ***суммой ряда***:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

- В оставшихся двух ситуациях - когда предел бесконечен или вообще не существует, ряд называется ***расходящимся***.
- Понятие суммы для расходящегося ряда не определяется.

Числовые ряды

- 1. Геометрическая прогрессия $\{a_n\} = \{bq^{n-1}\}$, где $b \neq 0$
- и $q \neq 0$
- Если ***q=1***, то частичная сумма равна ***nb***, т.е.
- неограничена и ряд расходится.
- Если ***q=-1***, то частичная сумма равна 0 или ***b***,
- т.е. предел не существует и ряд расходится.
- Если $|q| \neq 1$, тогда

$$S_n = b + bq + \ldots + bq^{n-1} = \frac{b \cdot (1-q^n)}{1-q}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \begin{cases} \infty, & \textit{если} \quad |q|>1 \quad \Rightarrow \quad \textit{ряд расходится}, \\ \dfrac{b}{1-q}, & \textit{если} \quad |q|<1 \quad \Rightarrow \quad \textit{ряд сходится}. \end{cases}$$

Числовые ряды

- Можно ли, не составляя последовательности частичных сумм , исследовать сходимость числового ряда ?
- Это можно сделать, используя различные признаки сходимости и сравнения рядов.
- Главный их них – называется ***необходимым условием сходимости:***
- $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Числовые ряды

- Если для числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или такого предела вообще не существует, то ряд расходится.
- В такой формулировке ***необходимое условие сходимости ряда***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- равносильно ***достаточному условию расходимости ряда.***

Числовые ряды

- **Простейшие свойства числовых рядов.**
- 1. *Суммой (разностью) рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$.
- Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам A и B
- соответственно, то сумма и разность этих рядов тоже сходится к суммам $A \pm B$ соответственно.
- 2. Ряд $C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ по определению совпадает с рядом
- $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$,т.е. при умножении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на константу,
- не равную нулю, сходимость (расходимость) не нарушается.

Числовые ряды

- **Простейшие свойства числовых рядов.**
- 3. Если в ряде отбросить конечное число членов (добавить конечное число членов), то ни сходимость, ни расходимость ряда при этом не нарушится.
- 4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме A , то члены
- этого ряда можно произвольно сгруппировать, не
- меняя порядка следования. При этом полученный
- в результате ряд сходится к той же сумме.

Числовые ряды

- **Признак сравнения в форме неравенства.**
- Пусть даны два знакоположительных ряда
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
- причем для любого номера $n \in N$ и n-ые члены рядов связаны неравенством $0 < a_n \leq b_n$.
- Тогда из сходимости «большего» ряда следует сходимость «меньшего» ряда , а из расходимости «меньшего» ряда следует расходимость «большего» ряда.

Числовые ряды

- **Признак сравнения в форме неравенства.**
- «Больший ряд» называется *мажорирующим* рядом, а «меньший» – *мажорируемым*.
- Поэтому признак может быть сформулирован как:
- Из сходимости мажорирующего ряда следует
- сходимость мажорируемого ряда, и, наоборот,
- из расходимости мажорируемого ряда следует
- расходимость мажорирующего ряда.

Числовые ряды

- **<u>Пример 1.</u>**
- 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.
- Сравним данный ряд с гармоническим рядом . Очевидно, что $\ln n < n$ для любого $n \geq 2$.
- Значит $$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$
- Так как гармонический ряд расходится, то, по признаку сравнения, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ тоже расходится.

Числовые ряды

- **Признак сравнения в предельной форме.**
- Пусть даны два знакоположительных ряда
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l > 0$,
- то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.
- В частности, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

- , т.е. $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то в смысле сходимости оба ряда ведут себя одинаково.

Числовые ряды

- **Пример 2.**
- 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \frac{5n^3 - 6n + 4}{\sqrt{n^8 + 7n^2 + 15}}$$

- Так как

$$a_n = \frac{5n^3 - 6n + 4}{\sqrt{n^8 + 7n^2 + 15}} \sim \frac{5n^3}{\sqrt{n^8}} = \frac{5n^3}{n^4} = \frac{5}{n}$$

- т.е. сравниваем данный ряд с гармоническим рядом и ряд расходится.

Числовые ряды

- **Пример 3.**
- 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \frac{arctg(n^3 \cdot 2^n \cdot (n-1)!)}{n + \ln 10n + 3 \cdot 7^{n+1}}$$

- Так как

$$a_n = \frac{arctg(n^3 \cdot 2^n \cdot (n-1)!)}{n + \ln 10n + 3 \cdot 7^{n+1}} \sim \frac{\pi / 2}{3 \cdot 7^{n+1}} = \frac{\pi}{2 \cdot 3 \cdot 7} \cdot (\frac{1}{7})^n = b_1 q^n$$

- т.е. сравниваем данный ряд с геометрической прогрессией с знаменателем 1/7, т.е. ряд сходится.

Числовые ряды

- **Признак Д'Аламбера**
- Пусть для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сущест-
- вует предел
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$
- Тогда:
- 1) если $l > 1$, ряд расходится;
- 2) если $l < 1$, ряд сходится.
- В случае $l = 1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда .

Числовые ряды

<u>Доказательство.</u> Предположим, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$. По определению предела это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такой номер m, что для всех членов последовательности $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ с номерами $n>m$, выполняется неравенство:

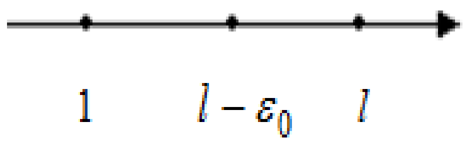
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-l<\varepsilon \Leftrightarrow l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\varepsilon+l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (l-\varepsilon)a_n<a_{n+1}<(l+\varepsilon)a_n.$$

Числовые ряды

$$a_{n+1} > (l - \varepsilon)a_n.$$

Так как $l > 1$, то число ε_0 можно выбрать таким, что $l - \varepsilon_0 > 1$.



Следовательно,

$$a_{n+1} > \underbrace{(l - \varepsilon_0)}_{>1}a_n > a_n,$$

т.е. члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно возрастают. Поскольку, к тому же, $a_n > 0$, то

$\lim a_n \neq 0$, а значит, ряд $\sum^{\infty} a_n$ расходится.

Числовые ряды

Пусть $l<1$. Рассмотрим правую часть неравенства (**): $a_{n+1}<(l+\varepsilon)a_n$. Так как $l<1$, то ε_1 можно взять таким, чтобы выполнялось неравенство $l+\varepsilon_1<1$. Обозначим $l+\varepsilon_1=q$, $q<1$. Тогда

$$a_{n+1}<q\cdot a_n,$$

$$a_{n+2}<q\cdot a_{n+1}<q^2\cdot a_n,$$

$$\ldots$$

$$a_{n+k}<q^k\cdot a_n,$$

$$\ldots$$

что означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$ мажорируется сходящейся прогрессией $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n\cdot q^k$. Следовательно, по теореме 2.1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$ сходится. Из этого в силу свойства 3° рядов (§1) следует, что и первоначальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится.

Числовые ряды

- **Радикальный признак Коши**
- Пусть для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сущест-
- вует предел
- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$
- Тогда:
- 1) если $l > 1$, ряд расходится;
- 2) если $l < 1$, ряд сходится.
- В случае $l = 1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда .

Числовые ряды

- **<u>Замечания.</u>**
- Из теории последовательностей известно, что если для последовательности $\{a_n\}$ существует предел
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$
- Поэтому, если в результате применения признака Даламбера окажется, что предел равен 1, то и предел из признака Коши тоже равен 1.
- Однако, в определенном смысле признак Коши сильнее признака Даламбера.

Числовые ряды

Пример.

$$a_n = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^n, \quad \textit{если } n - \textit{нечетно}; \\ (\frac{2}{3})^n, \quad \textit{если } n - \textit{четно}. \end{array}\right.$$

Пусть n – нечетно $\Rightarrow$ $n+1$ – четно, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^n} = \frac{4}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{n-\text{неч}.} \frac{4}{3}.$$

Пусть n – четно $\Rightarrow$ $n+1$ – нечетно, тогда

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^{n+1}}{(\frac{2}{3})^n} = \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{n-\text{чет}.} \frac{1}{3}$. Следовательно, не существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, а значит, признак Даламбера неприменим.

Попытаемся применить к этому ряду признак Коши.

Если n – нечетно, то $\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^n} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$.

Если n – четно, то $\sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n} = \frac{2}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$.

Числовые ряды

- **Интегральный признак сходимости Коши-Маклорена**
- Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует такая неотрицательная, непрерывная, монотонно убывающая функция $f(x)$, определенная на промежутке $[1,+\infty)$, для которой
- $f(n) = a_n$ для любого $n \in N$, то исследуемый ряд сходится в том и только том случае, когда сходится несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Числовые ряды

С помощью интегрального признака получается новая серия эталонны рядов:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in R$, – обобщенные гармонические ряды (ряды Дирихле).

Исследуем, при каких α эти ряды сходятся.

Пусть $\alpha < 0$, тогда $-\alpha > 0$, следовательно $a_n = n^{-\alpha}$, а значит,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ – в этом случае ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходятся.

Аналогично, для $\alpha = 0$ $a_n = \frac{1}{n^0} = 1$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, а значит, ряд расходится.

1

Числовые ряды

Аналогично, для $\alpha = 0$ $a_n = \frac{1}{n^0} = 1$, следовательно $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, а значит, ряд расходится.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Ведем функцию $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 2.5, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится в том и только том случае, когда несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to 0} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha > 1, \\ \infty, & \text{если} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом,