ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Тема 9

Числовые ряды

- Определение **Числовым рядом** называется выражение следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если предел последовательности последовательностью *частичных сумм ряда.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

- ***Необходимое условие сходимости:***
-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Функциональные ряды

- Пусть $\{u_n(x)\}$ – некоторая функциональная последовательность, определенная на множестве X
- <u>Определение</u> Выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

- называют ***функциональным рядом*** с областью определения X .

Функциональные ряды

- Пусть точка x_0 – точка из области определения ряда, тогда при подстановки этой точки ряд превращается в обычный числовой ряд, который может либо сходиться, либо расходиться.
- Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то x_0
- точка называется точкой сходимости функционального ряда, а множество всех таких точек образует ***область сходимости*** ряда D.
- Очевидно, что D является подмножеством области определения ряда X

Функциональные ряды

- Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$
- сходится в области $D \in X$, то для любого $x_0 \in D$
- определена функция $S(x)$, называемая ***суммой***
- ***функционального ряда:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

Функциональные ряды

- По аналогии с числовыми рядами функциональный ряд можно представить в виде:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

- где – $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$

- ***частичная сумма ряда***, а

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ..$$

- ***частичный остаток ряда.***

Функциональные ряды

- Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в
- некоторой области, то он сходится к функции :
- $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$$

Но тогда можно рассмотреть обратную задачу:

найти ряд, суммой которого является заданная функция:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Функциональные ряды

- **Определение.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится в
-
- некоторой области $D_a \subseteq D$,
- то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *абсолютно*
- *сходящимся* в этой области, а сама область $D_a \subseteq D$
- называется *областью абсолютной сходимости*
- *ряда.*

Функциональные ряды

- Примеры:
- 1. $$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}},\quad X=R\setminus\{0\}$$
- 2. $$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx,\quad X=R$$
- 3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n\cdot\sin x}}$$

Функциональные ряды

- 1. $$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}, \qquad X=R\setminus\{0\}$$
- Это ряд, составленный из членов геометрической
- прогрессии со знаменателем $q(x)=-\dfrac{1}{x}$.
- Поэтому ряд сходится, если $|q(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ или $|x|>1$
- и область сходимости ряда - $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Функциональные ряды

- 2.

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin n x + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n x, \quad X = R$$

- Пусть $x_k = \pi k, \quad k \in Z$, тогда $u_n(x_k) = \sin n \pi k = 0$,
- т.е. в точках $x_k = \pi k$ ряд сходится.
- В любой другой точке ряд расходится.
- Область сходимости : $D = \{ \pi k \mid k \in Z \}$
-

Функциональные ряды

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n \cdot \sin x}}$
- . Исследуем ряд на сходимость,
- используя признак Коши: $|u_n(x)| = \frac{1}{e^{n \cdot \sin x}}$
- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\sin x}} = \frac{1}{e^{\sin x}} = l(x)$$

Для определения <u>области абсолютной сходимости</u> решим неравенство:

$$e^{-\sin x} = 1$$

- $$-\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Функциональные ряды

- 3. Решим уравнение: $e^{-\sin x} = 1 \quad \Leftrightarrow$

$-\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi k,\ k \in Z$

При подстановке $x_k = \pi k$ в исходный ряд, получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, который, как известно,

является расходящимся.

Таким образом, область абсолютной сходимости совпадает с областью сходимости:

$$D_a = D = \bigcup_{n \in Z} (2\pi n; \pi + 2\pi n)$$

Функциональные ряды

- Из курса математического анализа известно, что если функции непрерывны в точке (дифференцируемы в точке , интегрируемы на отрезке), то их сумма тоже непрерывна в точке (дифференцируема в точке , интегрируема на отрезке).
- В теории рядов естественно возникает вопрос: переносятся ли свойства ***n***- ого члена функционального ряда на его сумму ?

Функциональные ряды

- **<u>Пример.</u>** Рассмотрим функциональный ряд,
- где $u_n(x) = x^n - x^{n-1}.$
- Очевидно, что функция $u_n(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ Покажем, что сумма этого ряда определена на отрезке , но не является непрерывной. Составим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = (x-1) + (x^2 - x) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) = x^n - 1$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - 1) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

- Очевидно, что полученная сумма ряда разрывна на отрезке.

Функциональные ряды

- Основным условием, которое позволяет «передать» свойства члена ряда сумме ряда, является свойство *равномерной сходимости этого ряда.*
- Нам известно, что если функциональный ряд поточечно сходится на промежутке (т.е. сходится в каждой точке x_0 этого промежутка), то для любого сколь угодно малого **ε** (заданная точность вычислений) найдется такой номер *N*, зависящий от точности и числа x_0, что все частичные суммы , номера которых больше *N*, приближают сумму ряда с заданной точностью , т.е. $|S_n(x_o) - S(x_o)| < \varepsilon$

Функциональные ряды

- Если взять другое x_0, то описанного в предыдущих рассуждениях числа N может не хватить для обеспечения заданной точности в точке x_0.
- Это и означает, что сходимость ряда на промежутке является неравномерной по x, то есть она зависит от конкретной точки x_0 из множества .
- Ряд равномерно сходится к своей сумме $S(x)$ на промежутке ***D***, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$
- можно указать такой номер N (не зависящий от x из множества D), что для всех частичных сумм , номера которых больше N , неравенство
- $$| S_n(x) - S(x) | < \varepsilon$$
- выполняется для всех из множества D одновременно.

Функциональные ряды

- **Равномерная сходимость функционального ряда.**
- **<u>Определение.</u>** Ряд называется равномерно сходящимся к сумме $S(x)$ на множестве D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, <u>зависящий только от **ε** </u>и не зависящий от x , что для любого остатка ряда, номер которого больше N, выполняется неравенство

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

- для всех x из D одновременно.

Функциональные ряды

- Для исследования равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

- удобно использовать достаточный **признак Вейерштрасса** равномерной сходимости ряда.
-

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad |u_n(x)| \leq a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(x) \right|$$

Функциональные ряды

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

- Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ на множестве
- D существует мажорирующий сходящийся числовой
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$
- сходится на множестве D равномерно (т.е. формально: из неравенства

$$| u_n(x) | \leq a_n$$

- для любого ***n*** и любого ***x*** и сходимости числового ряда следует равномерная сходимость функционального ряда на D).

Функциональные ряды

- **<u>Пример.</u>** Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов на промежутке D .
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}, \quad D = R$$
- Так как $|\sin nx| \le 1$ для любого x, а $\sqrt[3]{n^4 + x^2} \ge \sqrt[3]{n^4 + 0}$
- то $$|u_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}, \quad \alpha = \frac{4}{3} > 1$$
-
- следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ сходится.
- Из сходимости мажорирующего ряда в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость.

Функциональные ряды

- **Свойства равномерно сходящихся рядов**

- **Теорема о почленном переходе к пределу.**

- **Теорема о почленном интегрировании ряда.**

- **Теорема о почленном дифференцировании ряда.**