МАТЕМАТИКА

Третий семестр

Лектор: Князева Людмила Павловна

Темы:

Наименование раздела, темы	Всего аудиторных часов	Лекции, часы	Практические занятия, часы
1	2	3	4
Тема 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра	68	34	34
Тема 2. Введение в математический анализ	26	12	14
Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	36	19	17
Тема 4. Комплексные числа. Многочлены	6	3	3
Тема 5. Интегральное исчисление функций одной переменной	38	15	23
Тема 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	23	10	13
Тема 7. Интегральное исчисление функций многих переменных	30	13	17
Тема 8. Дифференциальные уравнения и системы	27	12	15
Тема 9. Числовые и функциональные ряды	32	12	20
Тема 10. Ряды Фурье. Интеграл Фурье	13	7	6
Тема 11. Функции комплексной переменной	31	11	20
Тема 12. Операционное исчисление	10	4	6

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Основные определения и понятия числовых рядов.

Тема 9

Числовые и функциональные ряды

- 9.1. Числовой ряд и его сумма. Действия над рядами. Простейшие свойства числовых рядов. Необходимое условие сходимости ряда.
- 9.2. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: интегральный признак. признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость.
- 9.3. Функциональные ряды, область сходимости и сумма ряда. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о непрерывности суммы, о почленном дифференцировании и почленном интегрировании.
- 9.4. Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.
- 9.5. Ряды Тейлора. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора. Разложение основных функций в ряд Маклорена. Применение рядов Тейлора в приближенных вычислениях. Приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений и вычислению определенных интегралов.

Числовые ряды

- Пусть дана числовая последовательность

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}.$$

- <u>Определение</u>
- ***Числовым рядом*** называется выражение
- следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Упрощенно : ряд – это «бесконечная» сумма.

Числовые ряды

- Приведем примеры рядов, известные из элементарной математики.
- 1. Бесконечная периодическая дробь 0.(7) – это ряд вида

$$0{,}7+0{,}07+0{,}007+0{,}0007+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}7\cdot 10^{-n}$$

- 2. Для произвольных, отличных от нуля чисел ***b*** и ***q*** выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_1q^{n-1}=b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3+\ldots+b_1q^{n-1}+\ldots.$$

– это ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии.

Числовые ряды

- Ряды используются для представления, исследования и приближенного вычисления чисел и функций.
- В теории рядов рассматриваются следующие основные вопросы: какие свойства конечных сумм чисел и функций (коммутативность, ассоциативность, почленный переход к пределу, почленное дифференцирование, почленное интегрирование и т.д.) и при каких условиях переносятся на случай «бесконечных» сумм, т.е. рядов?

Числовые ряды

- Вместе с последовательностью $\{a_n\}$ будем рассматривать числовую последовательность $\{S_n\}$, которая строится следующим образом:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$\ldots$$

- Эта последовательность называется ***последовательностью частичных сумм ряда***

Числовые ряды

- Как и всякая другая числовая последовательность, последовательность $\{S_n\}$ может:
  - иметь конечный предел при $n \to \infty$;
  - быть бесконечно большой предел(то есть $\lim S_n = \infty$);
  - не иметь никакого предела – ни конечного, ни бесконечного.
- Если предел последовательности существует и конечен, то он называется ***суммой ряда***:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

- В оставшихся двух ситуациях - когда предел бесконечен или вообще не существует, ряд называется ***расходящимся***.
- Понятие суммы для расходящегося ряда не определяется.

Числовые ряды

- Примеры.
- **1.** $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-..$$
- Составим для него последовательность частичных сумм:

$$S_1=1,$$
$$S_2=1-1=0,$$
$$S_3=1-1+1=1,$$
$$\ldots$$
$$S_n=\begin{cases}1,\ \textit{если}\quad n-\textit{нечетное число},\\ 0,\ \textit{если}\quad n-\textit{четное число}.\end{cases}$$

- $\{S_n\}=\{1,0,1,0,\ldots\}$ - колеблющаяся последовательность и не имеет предела. Значит, исходный числовой ряд является расходящимся.

Числовые ряды

- **2.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \ldots + n + \ldots .$$

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 + 2 = 3,$$

$$\ldots$$

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)\cdot n}{2} = \infty$$

- Значит, последовательность частичных сумм – бесконечно большая последовательность, то есть ряд расходится.

Числовые ряды

- 3. Геометрическая прогрессия $\{a_n\} = \{bq^{n-1}\}$, где $b \neq 0$
- и $q \neq 0$
- Если ***q=1*** , то частичная сумма равна ***nb***, т.е.
- неограничена и ряд расходится.
- Если ***q=-1*** , то частичная сумма равна 0 или ***b***,
- т.е. предел не существует и ряд расходится.
- Если $|q| \neq 1$, тогда $S_n = b + b\,q + \ldots + b\,q^{n-1} = \dfrac{b \cdot (1-q^n)}{1-q}.$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \begin{cases} \infty, & \text{если } |q|>1 \Rightarrow \text{ ряд расходится}, \\ \dfrac{b}{1-q}, & \text{если } |q|<1 \Rightarrow \text{ ряд сходится}. \end{cases}$$

Числовые ряды

- Зададимся вопросом, можно ли, <u>не составляя</u> последовательности частичных сумм , исследовать сходимость числового ряда ?
- Это можно сделать, используя различные признаки сходимости и сравнения рядов.
- Главный их них – называется ***необходимым условием сходимости:***
- $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Числовые ряды

- Если для числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или такого предела вообще не существует, то ряд расходится.
- В такой формулировке ***необходимое условие сходимости ряда***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- равносильно ***достаточному условию расходимости ряда.***

Числовые ряды

- **Простейшие свойства числовых рядов.**
- *1. Суммой (разностью) рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$.
- Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам A и B
- соответственно, то сумма и разность этих рядов тоже сходится к суммам $A \pm B$ соответственно.
- 2. Ряд $C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ по определению совпадает с рядом
- $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$,т.е. при умножении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на константу,
- не равную нулю, сходимость (расходимость) не нарушается.

Числовые ряды

- **Простейшие свойства числовых рядов.**
- 3. Если в ряде отбросить конечное число членов (добавить конечное число членов), то ни сходимость, ни расходимость ряда при этом не нарушится.
- 4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме A , то члены
- этого ряда можно произвольно сгруппировать, не
- меняя порядка следования. При этом полученный
- в результате ряд сходится к той же сумме.