СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ, ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Тема 9

Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ c_n (x - x_0)^n + \ldots$$

при этом числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \in R$ называются ***коэффициентами ряда***, а точка x_0 ***центром разложения ряда.***

Степенные ряды

Общий член степенного ряда является простейшим многочленом:

$$u_n(x) = c_n(x - x_0)^n$$

Частичная сумма степенного ряда является многочленом степени ***n*** :

$$S_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$$

Степенные ряды

Область сходимости степенных рядов имеет очень простую структуру (согласно теореме Абеля):

- Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ либо сходится на
- всей числовой прямой, либо существует такое число $R \geq 0$, что в интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$ ряд сходится, а вне интервала – расходится.

Число ***R*** в этом случае называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда, а интервал называется ***интервалом сходимости*** этого ряда.

Степенные ряды

Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$,

<u>все коэффициенты которого отличны от нуля</u>

$$c_n \neq 0, n \in N.$$

Тогда

- 1. Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$,
- то он совпадает с <u>радиусом сходимости степенного ряда</u> $\boldsymbol{R}$.

Степенные ряды

- 2. Если же существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, то

- радиус сходимости – $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$

(формула Коши – Адамара).

Степенные ряды

Теорема (Свойства суммы степенного ряда)

Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится в интервале $X = (x_0 - R, x_0 + R)$, где $R \neq 0$.

Тогда сумма ряда $S(x)$:

- 1. непрерывна на интервале X,
- 2. интегрируема на любом отрезке , целиком лежащем в X,
- 3. дифференцируема любое число раз на интервале X.

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $\boldsymbol{x}$, сходится в интервале $X = (-1,1)$.

По формуле для суммы прогрессии находим сумму ряда:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 2. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Ряд является результатом почленного дифференцирования предыдущего ряда:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Поэтому по свойству суммы степенного ряда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Нахождение суммы степенных рядов, используя свойства

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$.

Преобразуем ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = xS(x)$$

$$\left(S(x)\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln(1-x) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = -x\ln(1-x)$$

Разложение функции в степенной ряд.

Пусть на интервале *X* функция $f(x)$ является суммой некоторого степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = f(x)$$

Тогда говорят, что на **интервале *X* функция** $f(x)$ **разлагается в степенной ряд с центром в точке** x_0 **(или по степеням** $x - x_0$).

Вопрос о разложении функции в степенной ряд является одним из важных прикладных вопросов теории степенных рядов.

Необходимые условия разложимости функции в степенной ряд.

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

в некоторой окрестности X точки x_0, то его коэффициенты находятся по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

- Т.е. $f(x)$ должна быть бесконечно дифференцируема в точке x_0.

Ряд Тейлора

Определение. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ с

коэффициентами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0, независимо от того, сходится ли он вообще или сходится ли он к данной функции $f(x)$. Коэффициенты c_n

называются коэффициентами Тэйлора.

Достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка ***n***, которые равномерно ограничены в этой окрестности, т.е. существует такое число $M>0$, при котором $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$

для любого натурального ***n*** в любой точке $x \in X$. Тогда в этой окрестности функция разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Единственность разложения функции в ряд Тейлора.

Если функция $f(x)$ в разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Ряд Маклорена

Определение. Если $x_0 = 0$ и коэффициенты

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

называется **рядом Маклорена** для функции $f(x)$.

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

2. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

3. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty;+\infty)$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

4. $$arctg\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1;1]$$

5. $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;1]$$

6. $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad x \in (-1;1)$$

Разложение в ряд Маклорена

Пример 4. Зная разложение в степенной ряд элементарных функций, разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1. $f(x) = x\sin x$

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots$$

2. $f(x) = \cos x^3$

$$\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена

3. $f(x) = \sin^2 x$

-можно найти коэффициенты ряда по определению, продифференцировав функцию ***n+1*** раз;

-можно использовать равенство

$$f(x) = \sin^2 x = 1/2(1 - \cos 2x),$$

затем ряд для $\cos 2x$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 \_ \ldots$$

Разложение в ряд Маклорена

4. $f(x) = arctgx$

-можно найти коэффициенты ряда по определению, продифференцировав функцию ***n+1*** раз;

-можно использовать свойство суммы степенного ряда $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$

$$f(x) = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Приложения степенных рядов

Степенные ряды используются для:

- 1) представления неэлементарных функций (например, неберущихся интегралов);
- 2) приближённого вычисления чисел, значений функций и определённых интегралов;
- 3) приближённого решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений.

Приложения степенных рядов

- **Пример 5.** Представить в виде суммы ряда неэлементарную функцию

$$Si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

- Рассмотрим функцию

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},\ t\in(-\infty;+\infty)$$

- тогда

$$\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Приложения степенных рядов

- $$Si(x)=\int\limits_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\Big)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int\limits_0^x(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}dt}{(2n+1)!}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int\limits_0^x t^{2n}dt\Big)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}\Big|_0^x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},\ x\in(-\infty;+\infty)$$

Приложения степенных рядов

- **Пример 6.**
- Вычислить приближённо число ***e*** с точностью 10^{-3}.
- Используем ряд Маклорена для e^x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in (-\infty; +\infty)$$

- Откуда при x=1 получаем $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} + r_k,$
- Найдём такой номер ***k***, что $r_k < 10^{-3}$ для этого оценим остаток

$$r_k = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \ldots =$$

$$\frac{1}{(k+1)!}\left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{\underbrace{(k+2)(k+3)}_{>(k+2)^2}} + \ldots\right.$$

Приложения степенных рядов

Искомый номер находим, решая неравенство:

$$r_k < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+1} < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{(k+1)!(k+1)}{k+2} > 1000$$

при ***k*=6**

$$\frac{7!\cdot 7}{8} = \frac{720 \cdot 49}{8} > 1000$$

$$e \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$$

Приложения степенных рядов

Пример 7. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' + xy = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи $y = y(x)$ может быть найдено в виде степенного ряда: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Т.к. $y(0) = 1$, то $1 = c_0 + c_1 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 + \ldots \Rightarrow c_0 = 1$

Т.к. $y'(0) = 0$, то $0 = c_1 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 + \ldots \Rightarrow c_1 = 0$

Приложения степенных рядов

Тогда $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) x^{n-2}$$

Подставим выражения для и в исходное уравнение:

$$y'' + xy = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) x^{n-2} + x\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot x^n\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) x^{n-2} + x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot x^{n+1} = 0$$

Приложения степенных рядов

Определим коэффициенты полученного уравнения, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях:

$$2\cdot 1\cdot c_2+0=0\Rightarrow c_2=0$$

$$3\cdot 2\cdot c_3+1=0\Rightarrow c_3=-\frac{1}{2\cdot 3}=-\frac{1}{3!}$$

$$4\cdot 3\cdot c_4=0\Rightarrow c_4=0$$

Приложения степенных рядов

$$c_5 = 0,$$

$$c_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{4}{6!}, \ldots,$$

$$c_{3k} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(3k)!},$$

$$c_n = 0,\ n \neq 3k.$$

Приложения степенных рядов

Таким образом, искомое решение задачи Коши является суммой следующего степенного ряда:

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!} \cdot x^{3n}$$