МАТЕМАТИКА

Третий семестр

Лектор: Князева Людмила Павловна

Темы:

Наименование раздела, темы	Всего аудиторных часов	Лекции, часы	Практические занятия, часы
1	2	3	4
Тема 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра	68	34	34
Тема 2. Введение в математический анализ	26	12	14
Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	36	19	17
Тема 4. Комплексные числа. Многочлены	6	3	3
Тема 5. Интегральное исчисление функций одной переменной	38	15	23
Тема 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	23	10	13
Тема 7. Интегральное исчисление функций многих переменных	30	13	17
Тема 8. Дифференциальные уравнения и системы	27	12	15
Тема 9. Числовые и функциональные ряды	32	12	20
Тема 10. Ряды Фурье. Интеграл Фурье	**13**	**7**	**6**
Тема 11. Функции комплексной переменной	31	11	20
Тема 12. Операционное исчисление	10	4	6

Функциональные ряды для периодических функций. Ряды Фурье.

Тема 10

Функциональные ряды для периодических функций

Ряды используются для представления, исследования и приближенного вычисления чисел и функций.

В теории рядов рассматриваются следующие основные вопросы: какие свойства конечных сумм чисел и функций и при каких условиях переносятся на случай «бесконечных» сумм, т.е. рядов?

Периодические функции описывают периодические процессы, очень часто встречающиеся как в природе (времена года, смена дня и ночи), так и в технике (механические и электромагнитные колебания и волны).

Функциональные ряды для периодических функций

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **периодической**, если существует число $T>0$, для которого выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$ при любом x из области определения этой функции. Наименьшее значение T называется периодом.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **кусочно-непрерывной**, если она имеет конечное число точек разрыва первого рода.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется **кусочно-гладкой** на $[a;b]$, если её первая производная имеет конечное число точек разрыва первого рода, причём в точке a существует правая, а в точке b - левая производная этой функции.

Функциональные ряды для периодических функций

Свойства периодических функций:

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода ***T*** есть периодические функции того же периода ***T***.

2. Если $f(x)$ имеет период T, то период функции $f(\alpha \cdot x)$ равен $\dfrac{T}{|\alpha|}, \alpha \neq 0.$

3. Для определенного интеграла от периодической функции с периодом T имеет место равенство:

$$\int_{x}^{x+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

Функциональные ряды для периодических функций

Если функциональный ряд $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x)$$

сходится в некоторой области к функции $f(x)$, то можно сказать, что функция представима рядом или разлагается в ряд по системе функций $\{\varphi_n(x)\}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x)$$

Функциональные ряды для периодических функций

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ представляет собой разложение

функции по системе $\{\varphi_n(x)\} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$

Имеются и другие системы функций, используемые для

представления в виде рядов:

$$\{1; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x, \ldots\}$$

или более общая- основная тригонометрическая система функций

$$\left\{1; \cos\frac{\pi x}{l}; \sin\frac{\pi x}{l}; \cos\frac{2\pi x}{l}; \sin\frac{2\pi x}{l}; \ldots\ldots; \right\}$$

Ортогональные системы функций

.

Определение 4. Скалярным произведением $(\varphi;\psi)$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на $[a;b]$ называется число

$$(\varphi;\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Ортогональные системы функций

На множестве кусочно-непрерывных функций с учетом свойств определенного интеграла введенное число $(\varphi;\psi)$ будет удовлетворять всем аксиомам скалярного произведения.

1) $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$

2) $(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)$,

3) $(\lambda\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi)$ при $\lambda\in R$

4) $(\varphi,\varphi)\geq 0$. $(\varphi,\varphi)=0$ $\Leftrightarrow \varphi=0$

Ортогональные системы функций

.

Определение 5. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на $[a;b]$, если

$$(\varphi;\psi) = 0 \quad \text{для} \quad x \in [a;b] .$$

Определение 6. Неотрицательное число

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f, f)}$$

называется нормой функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Функция называется нормированной для $x \in [a;b]$, если её норма равна 1.

Ортогональные системы функций

Определение 7. Система функций $(\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots)$ называется **ортогональной** на $[a;b]$, если все функции системы попарно ортогональны.

Определение 8. Ортогональная система функций называется **ортонормированной**, если норма каждой функции равна единице, т.е. $\|\varphi_i(x)\| = 1.$

Любую ортогональную систему функций можно привести к ортонормированной, разделив каждую функцию системы на её норму.

Ортогональные системы функций

Теорема 1. Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$ (например на $[-l;l]$).

Норма функции $\varphi_1 = 1$ равна $\sqrt{2l}$, а любой другой функции этой системы равна $\sqrt{l}$.

Ортогональные системы функций

Для доказательства ортогональности системы покажем, что скалярные произведения функций равны нулю:

$$\left(1, \sin\frac{\pi n x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} 1 \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right)\frac{l}{\pi n}\Bigg|_{-l}^{l} = 0$$

$$\left(1, \cos\frac{\pi n x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0,$$

$$\forall n \in N$$

Ортогональные системы функций

$m \neq n$ ….

$$\left(\cos\frac{\pi nx}{l}, \cos\frac{\pi mx}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx = 0.$$

$$\left(\sin\frac{\pi nx}{l}, \sin\frac{\pi mx}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(n-m)\pi x}{l} + \sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx = 0.$$

Ортогональные системы функций

Найдём нормы функций системы:

$$\|1\|^2 = \int_{-l}^{l} 1 \cdot dx = 2l \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2l};$$

$$\left\|\cos\frac{\pi n x}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi n x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{l}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} = l$$

аналогично $\left\|\sin\frac{\pi n x}{l}\right\|^2 = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2\pi n x}{l}\right)dx = l$

Ортогональные системы функций

Определение 9. Выражение вида

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ - ортогональная система функций, называется обобщенным рядом Фурье по данной системе функций, а числа c_n - коэффициентами Фурье.

Ортогональные системы функций

Что бы найти коэффициенты c_i предположим, что разложение

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$$

имеет место и ряд сходится к $f(x) \in L_2[a;b]$.

Умножим скалярно левую и правую часть данного равенства на $\varphi_k(x)$:

$$\left(f, \varphi_k(x)\right) = c_0(\varphi_0, \varphi_k) + c_1(\varphi_1, \varphi_k) + \ldots + c_k(\varphi_k, \varphi_k) + \ldots$$

В силу ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ получаем $\left(f, \varphi_k(x)\right) = c_k(\varphi_k, \varphi_k) \Rightarrow$

Ортогональные системы функций

Коэффициенты Фурье для ортогональной системы функций:

$$C_k = \frac{\left(f, \varphi_k(x)\right)}{\left\|\varphi_k\right\|^2}$$

Коэффициенты Фурье для ортонормированной системы функций:

$$c_k = \left(f(x), \varphi_k(x)\right)$$

Тригонометрические ряды Фурье

Рассмотрим основную тригонометрическую систему функций, ортогональную на любом отрезке длиной $T = 2l$ например $[-l, l]$

Ряд Фурье для функции $f(x)$ с периодом ***T*** будет иметь вид

$$f(x) = c_0 + c_1 \cos\frac{\pi x}{l} + c_2 \sin\frac{\pi x}{l} + c_3 \cos\frac{2\pi x}{l} + c_4 \sin\frac{2\pi x}{l} + ... =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos\frac{n\pi x}{l} + c_{n+1} \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

Тригонометрические ряды Фурье

Для удобства записи принято обозначать коэффициенты при косинусах через a_n, при синусах через b_n, начальный коэффициент c_o обозначают через $a_o/2$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots$$

$$+a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$$

Тригонометрические ряды Фурье

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \\ a_n = \dfrac{\left(f, \cos\dfrac{\pi n x}{l}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi n x}{l}, \cos\dfrac{\pi n x}{l}\right)} = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{\pi n x}{l}\,dx; \\ b_n = \dfrac{\left(f, \sin\dfrac{\pi n x}{l}\right)}{\left(\sin\dfrac{\pi n x}{l}, \sin\dfrac{\pi n x}{l}\right)} = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{\pi n x}{l}\,dx. \end{cases}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T = 2\pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad n \in N \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \end{cases}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Все функции основной тригонометрической системы

$$\left\{1; \cos\frac{\pi x}{l}; \sin\frac{\pi x}{l}; \cos\frac{2\pi x}{l}; \sin\frac{2\pi x}{l}; \ldots ;\right\}$$

являются периодическими функциями с периодом $T = 2l$, т.е. *каждый член тригонометрического ряда Фурье является периодической функцией* с периодом $T = 2l$.

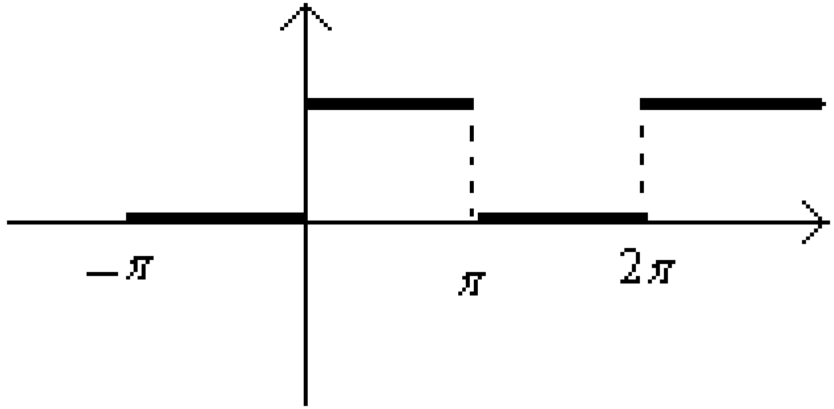
Поэтому и любая частичная сумма ряда Фурье периодична.

Тригонометрические ряды Фурье

Пример. Разложить периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\pi\\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$$

с периодом $T=2\pi$ в тригонометрический ряд Фурье.



Тригонометрические ряды Фурье

Вычислим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot dx\right) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n\cdot\pi}\sin nx \ \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx = \frac{-1}{n\cdot\pi}\cos nx \ \Big|_0^{\pi} = \frac{-((-1)^n - 1)}{n\cdot\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}, n = 2k+1 \\ 0, n = 2k \end{cases}$$

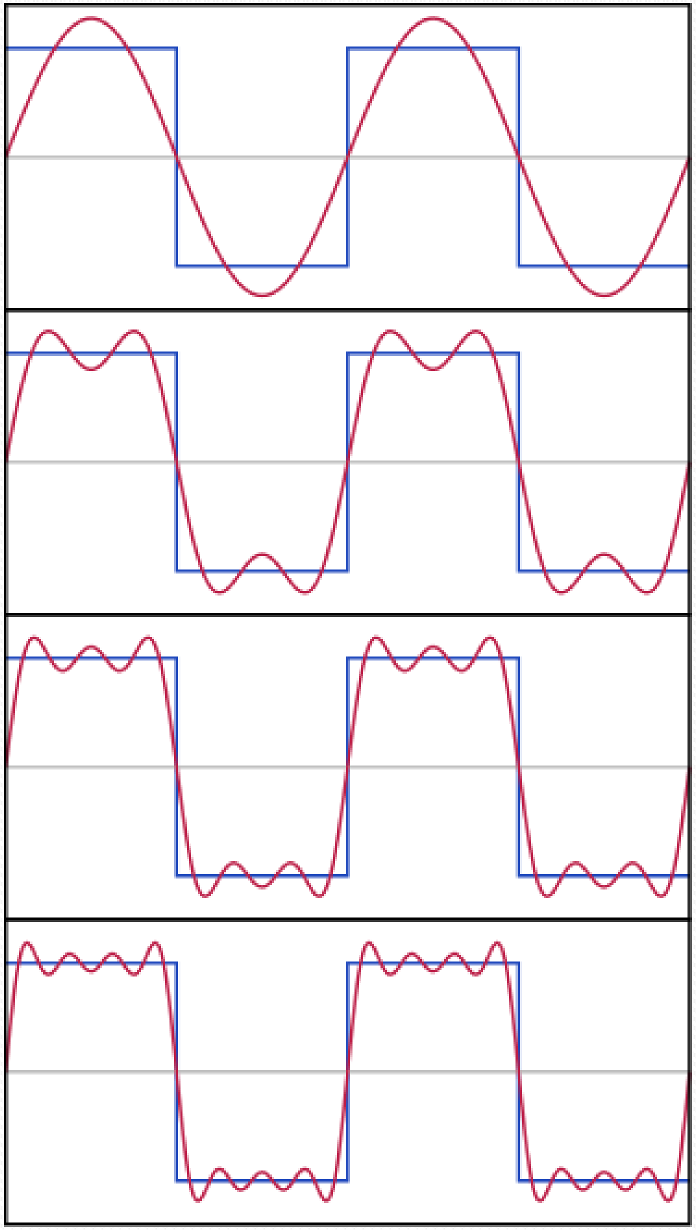
Тригонометрические ряды Фурье

- Ряд имеет вид:

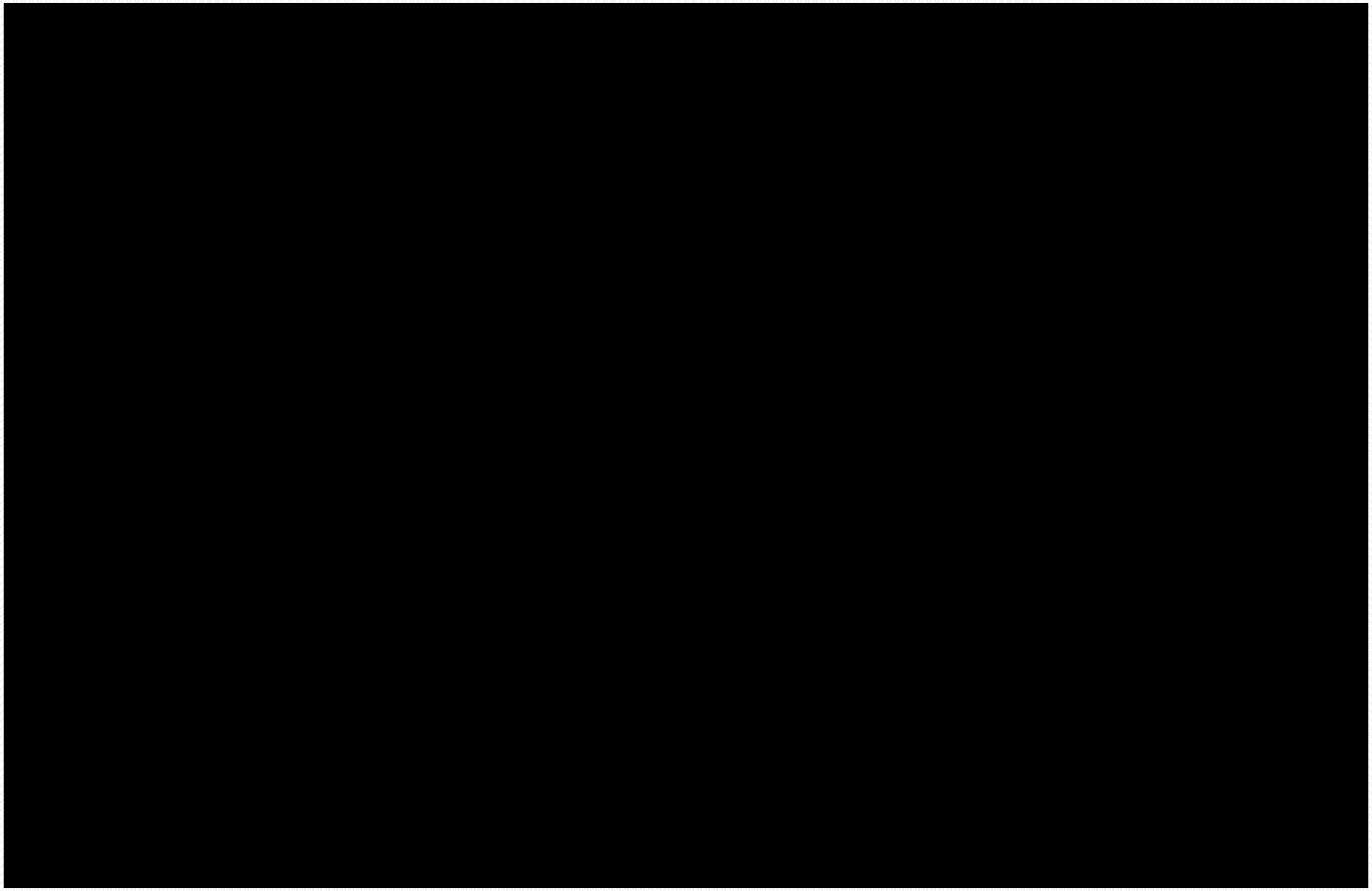
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot \sin x}{\pi} + \frac{2 \cdot \sin 3x}{3} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

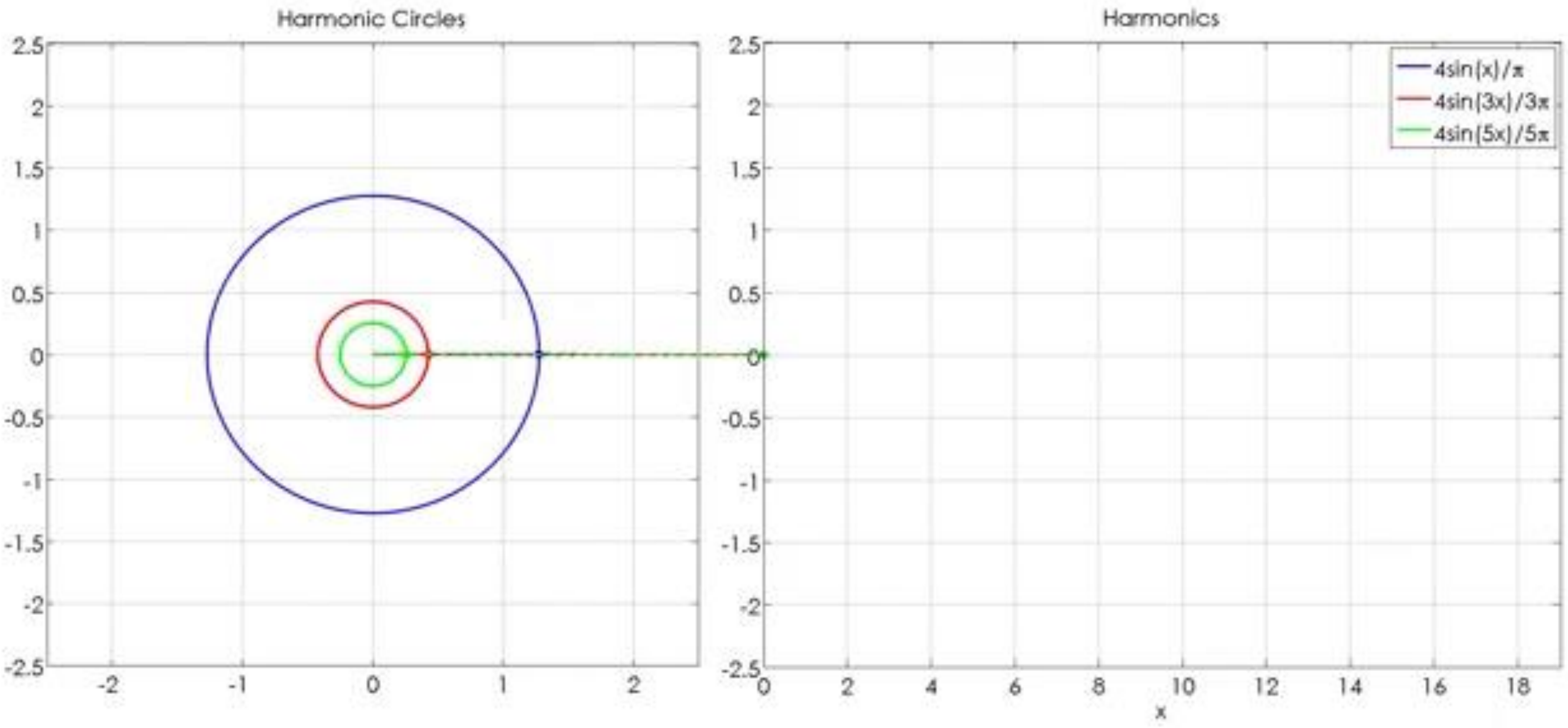
- Если построить графики слагаемых ряда, а затем последовательно их сложить, то можно проследить как графики частичных сумм с ростом ***n*** приближаются к графику функции.

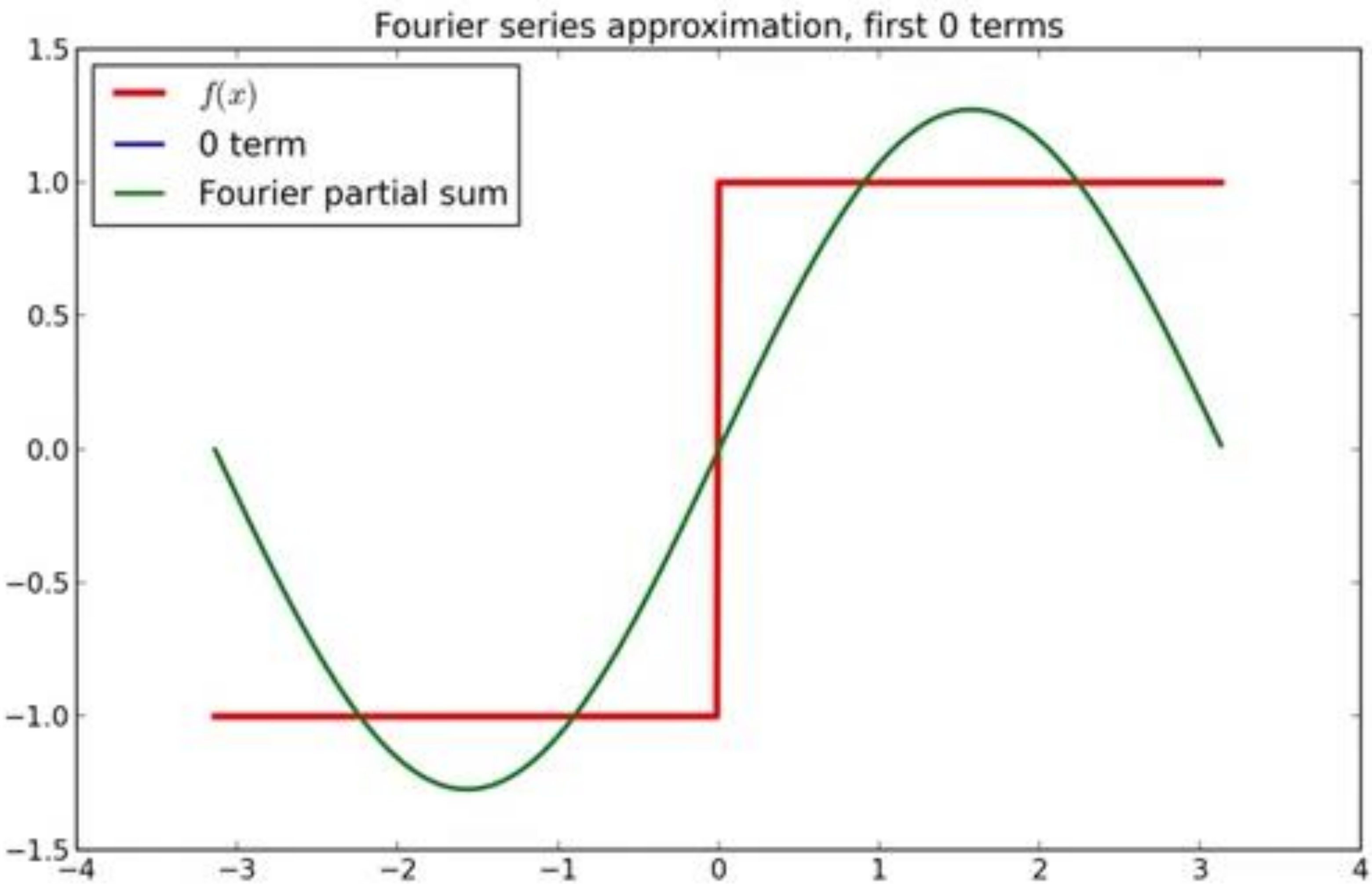


Видео 1



Видео 2




Fourier series approximation, first 0 terms
$f(x)$
0 term
Fourier partial sum
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4