Ряды Фурье для чётных и нечётных периодических функций.

Тема 10

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для функции с периодом $T = 2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T = 2\pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

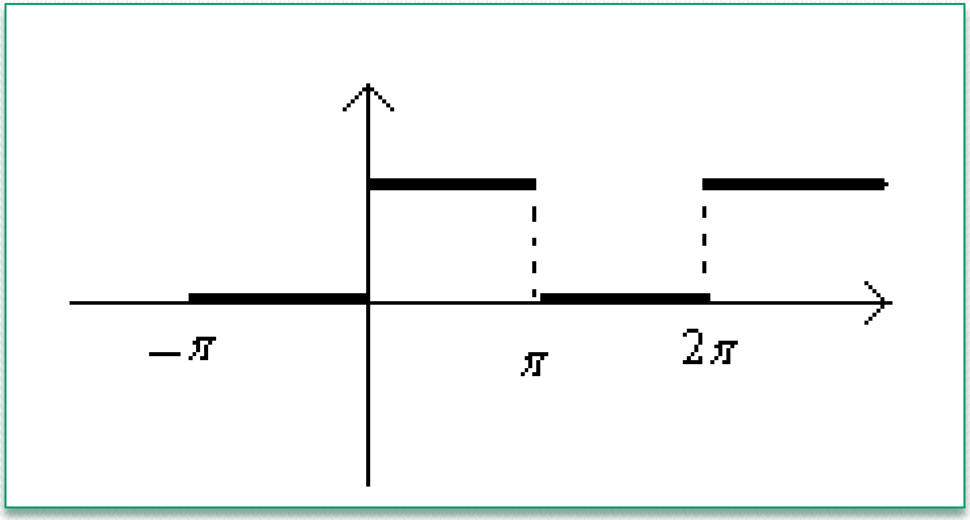
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad n \in N \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \end{cases}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Пример 1. Разложить периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ 0 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

с периодом $T = 2\pi$ в тригонометрический ряд Фурье.



Тригонометрические ряды Фурье

Вычислим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot dx\right) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n\cdot\pi}\sin nx \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx = \frac{-1}{n\cdot\pi}\cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{-((-1)^n - 1)}{n\cdot\pi} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, n = 2k+1, k = 0,1,\ldots \\ 0, n = 2k \end{cases}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2\cdot\sin x}{\pi}+\frac{2\cdot\sin 3x}{\pi\cdot 3}+\frac{2\cdot\sin 5x}{\pi\cdot 5}\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Пример 1а. Разложить периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & 0\le x<\pi \\ -1/2 & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

с периодом $T = 2\pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

График этой функции может быть получен смещением вниз по оси Оу на 0.5 единиц графика функции примера 1 и является графиком **нечётной функции**:

$$f_{1a}(x)= f_1(x)-\frac{1}{2}$$

Тригонометрические ряды Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}dx\right) =$$

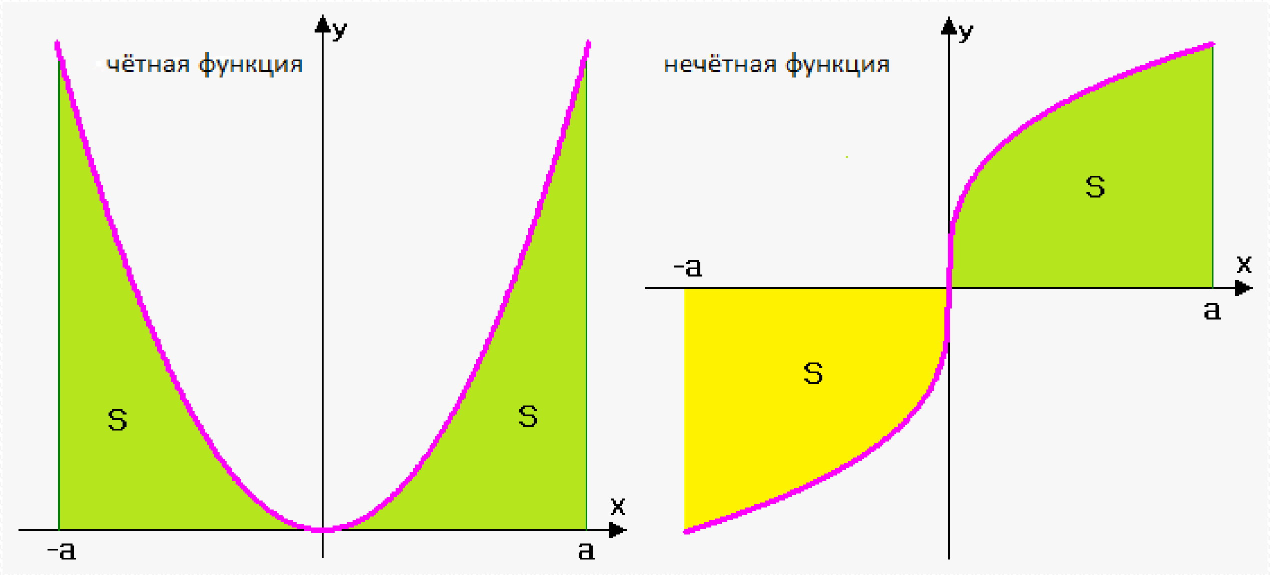
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{2}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{x}{2}\bigg|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2n\cdot\pi}\left(-\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = 0,$$

Коэффициенты $\{a_n\} = 0$, т.к. являются интегралами от нечётной функции в симметричных пределах.

Интегралы от чётных и нечётных функций в симметричных пределах интегрирования



1. Интеграл от нечётной функции в симметричных пределах равен нулю.

2. Интеграл от чётной функции в симметричных пределах равен удвоенному значению, вычисленному по половине интервала.

Тригонометрические ряды Фурье

Вычислим коэффициенты ряда $\{b_n\}$, применяя свойство интеграла от чётной функции в симметричных пределах:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

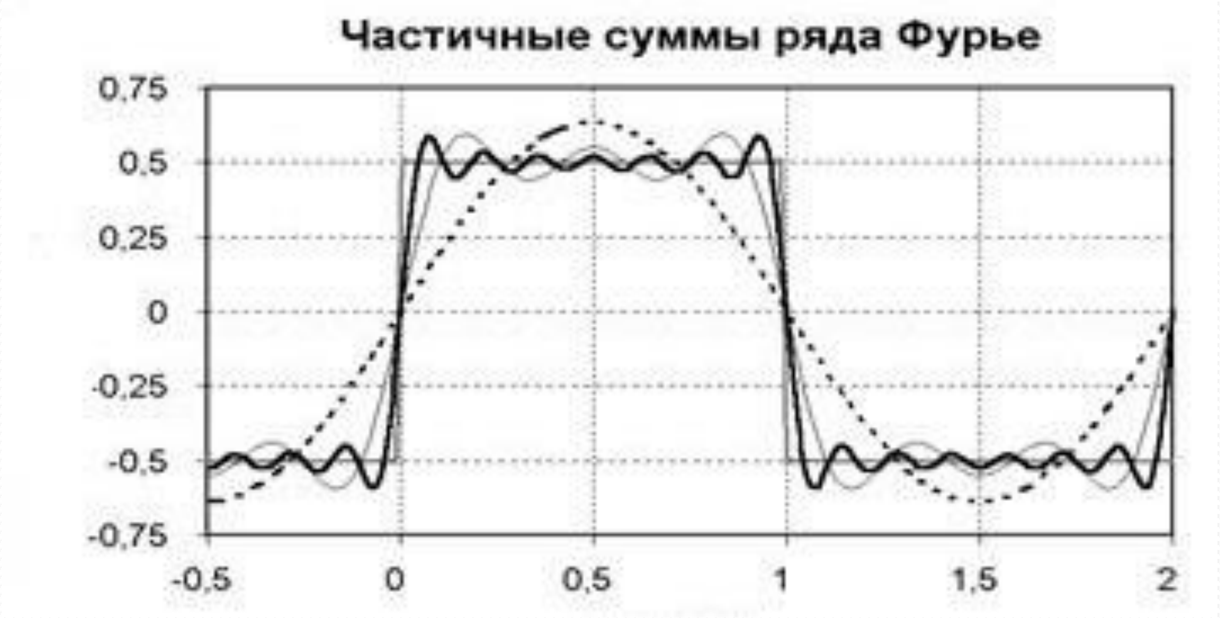
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{n\cdot\pi}\left(-cosnx\Big|_0^{\pi}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}, n = 2k+1 \\ 0, n = 2k \end{cases}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд имеет вид:

$$f_{1a}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) =$$

$$= \frac{2\cdot\sin x}{\pi} + \frac{2\cdot\sin 3x}{\pi\cdot 3} + \frac{2\cdot\sin 5x}{\pi\cdot 5} \ldots = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$



Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций с периодом $T = 2l$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

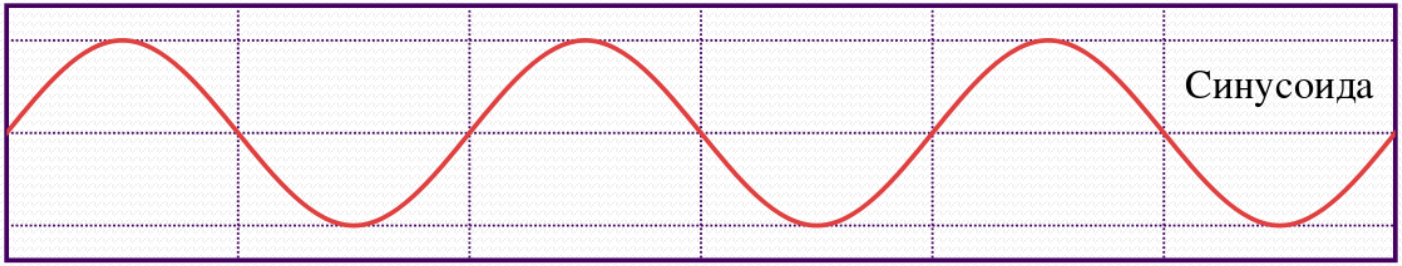
Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

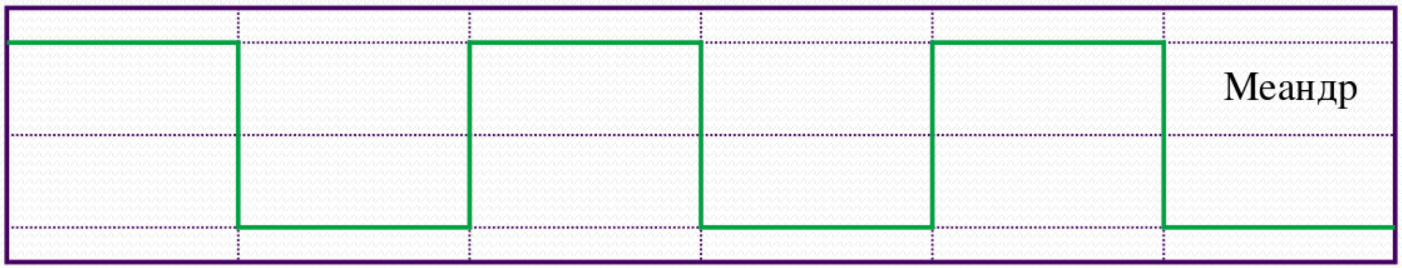
Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций с периодом $T = 2l$

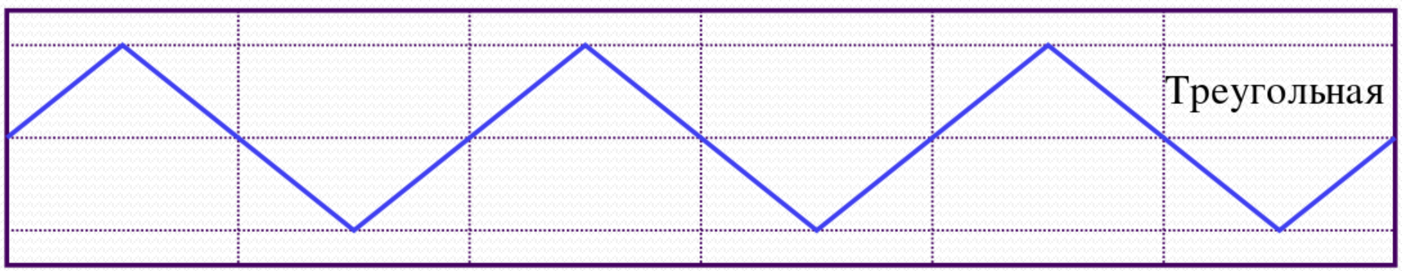
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$$

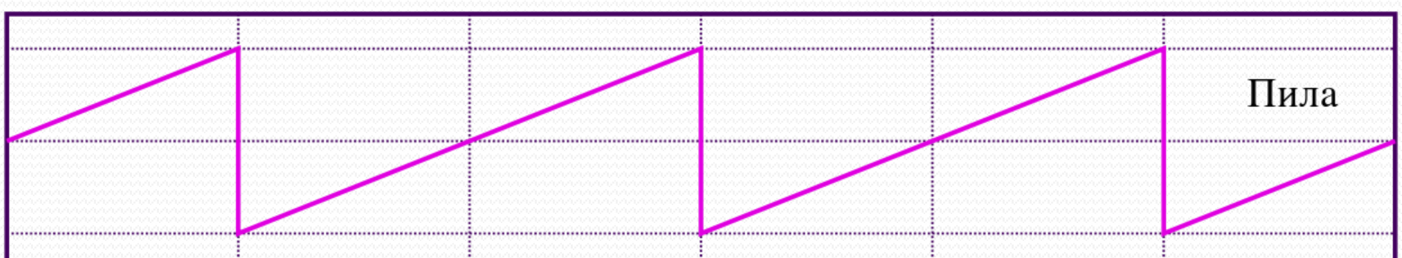
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

Нечётные и чётные функции









Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Пример 1б. Разложить периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ -1 & -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2} \quad и \quad \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

с периодом $T = 2\pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

График этой функции может быть получен сдвигом влево вдоль оси Ox на $\dfrac{\pi}{2}$ единиц графика функции $f_{1a}(x)$ и является графиком чётной функции:

$$f_{1б}(x) = 2 f_{1a}(x + \frac{\pi}{2})$$

Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Коэффициенты $\{b_n\} = 0$, а коэффициенты $\{a_n\}$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\cdot\pi}\left(\sin nx\Big|_0^{\pi/2}\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n}, n = 2k+1 \\ 0, n = 2k \end{cases}$$

Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

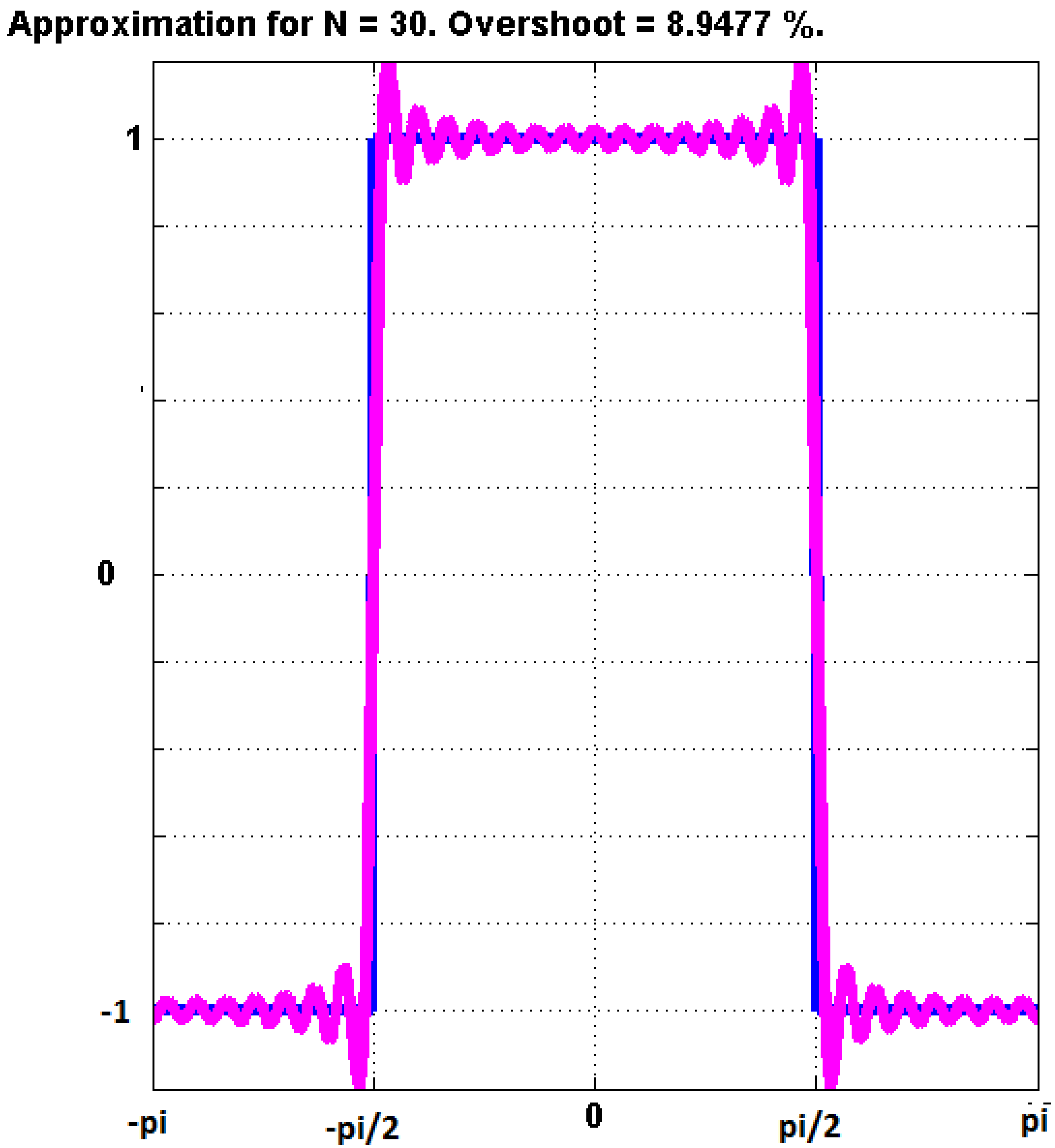
- Ряд имеет вид:

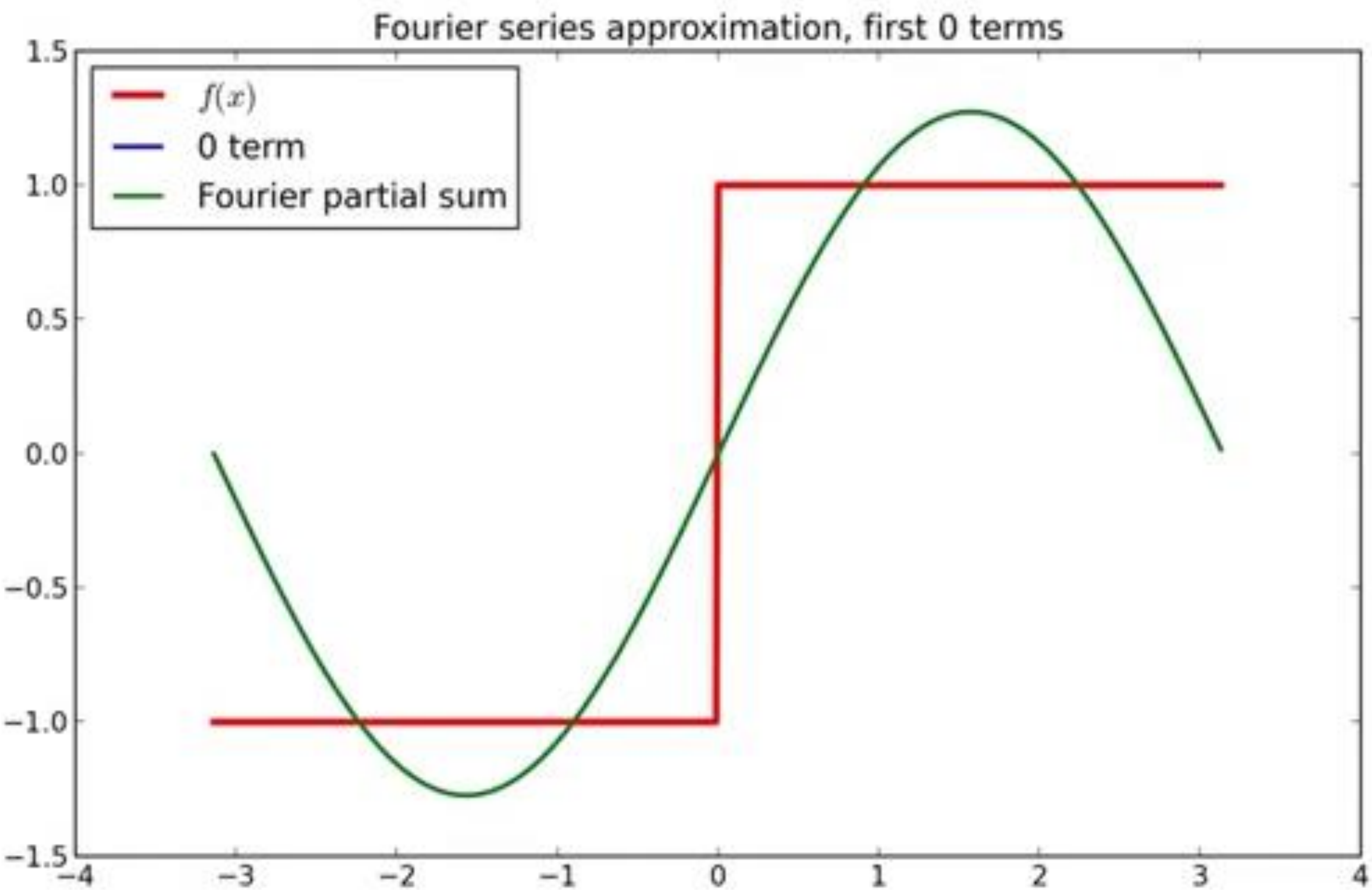
$$f_{1б}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx =$$

$$= \frac{4\cdot\cos x}{\pi} + \frac{4\cdot\cos 3x}{\pi\cdot 3} + \frac{4\cdot\cos 5x}{\pi\cdot 5} \ldots = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}$$

- Если построить графики слагаемых ряда, а затем последовательно их сложить, то можно проследить как графики частичных сумм с ростом ***n*** приближаются к графику кусочно-непрерывной функции.

Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

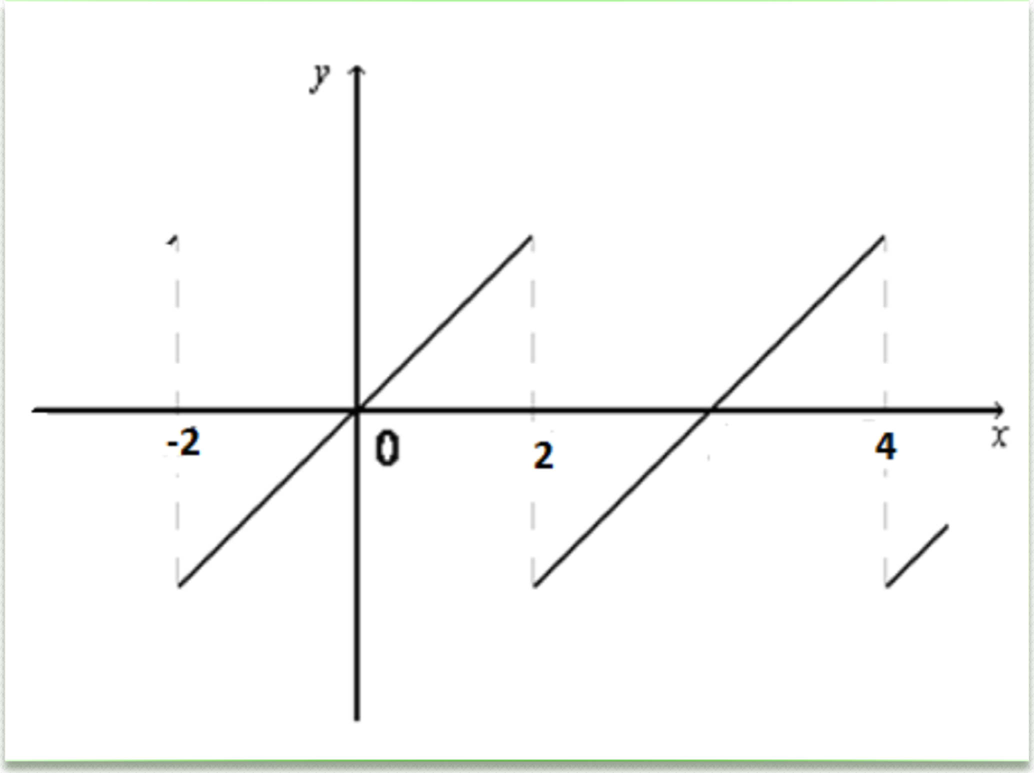



Fourier series approximation, first 0 terms
$f(x)$
0 term
Fourier partial sum
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

Пример 2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье нечётную периодическую кусочно-непрерывную функцию с периодом $T = 4$:

$$f(x) = x, \quad x \in [-2;2]$$



Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

Вычислим коэффициенты ряда $\{b_n\}$:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx = (\text{по частям}) =$$

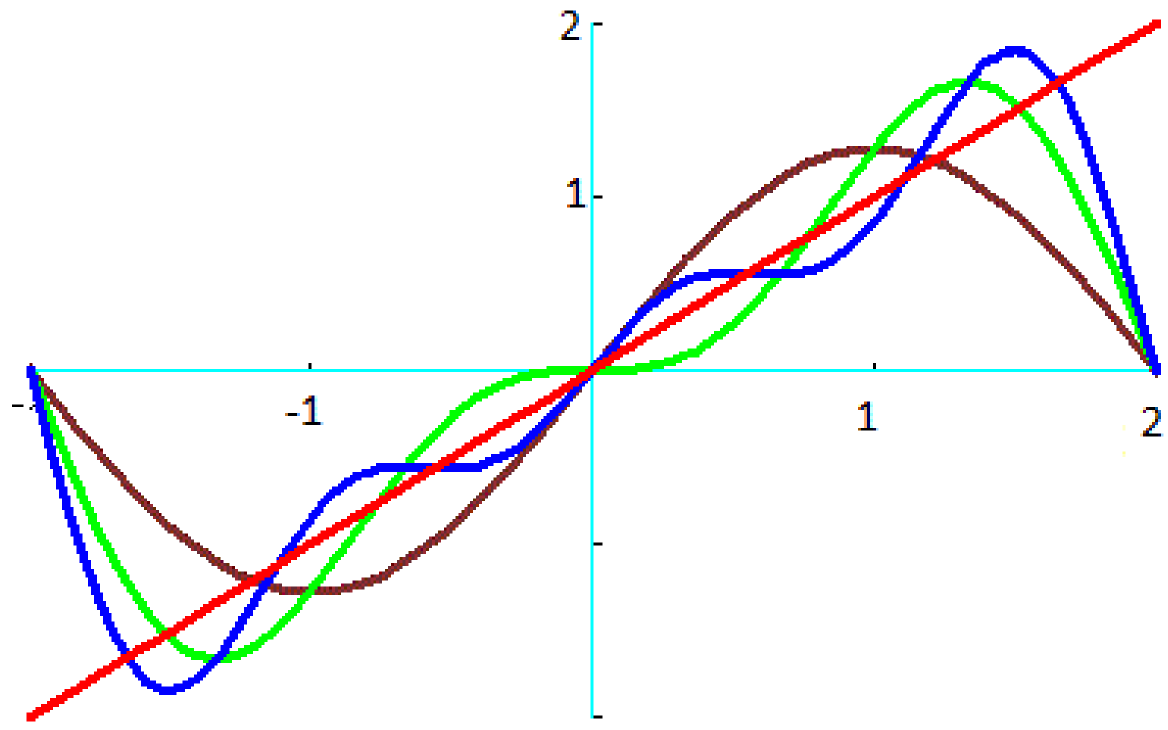
$$= \frac{2}{\pi n}\left(\left(-x\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_0^2 + \int_0^2 \cos\frac{\pi nx}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(-2(-1)^n + \frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_0^2\right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

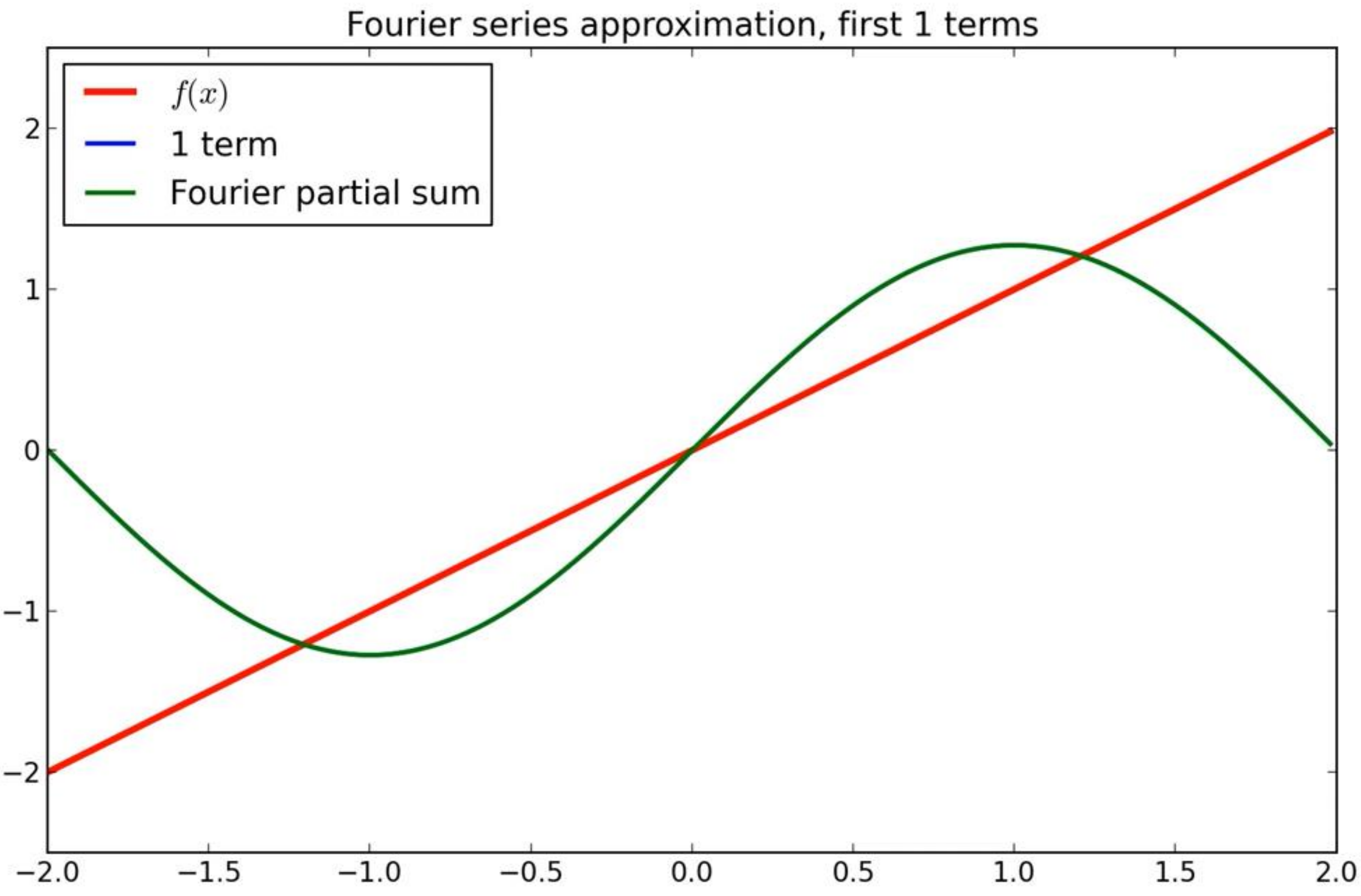
Тригонометрические ряды Фурье для нечётных функций

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{2}=\frac{4\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi}-\frac{4\cdot\sin\frac{2\pi x}{2}}{\pi\cdot 2}+\frac{4\cdot\sin\frac{3\pi x}{2}}{\pi\cdot 3}-\ldots=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}}{n}$$



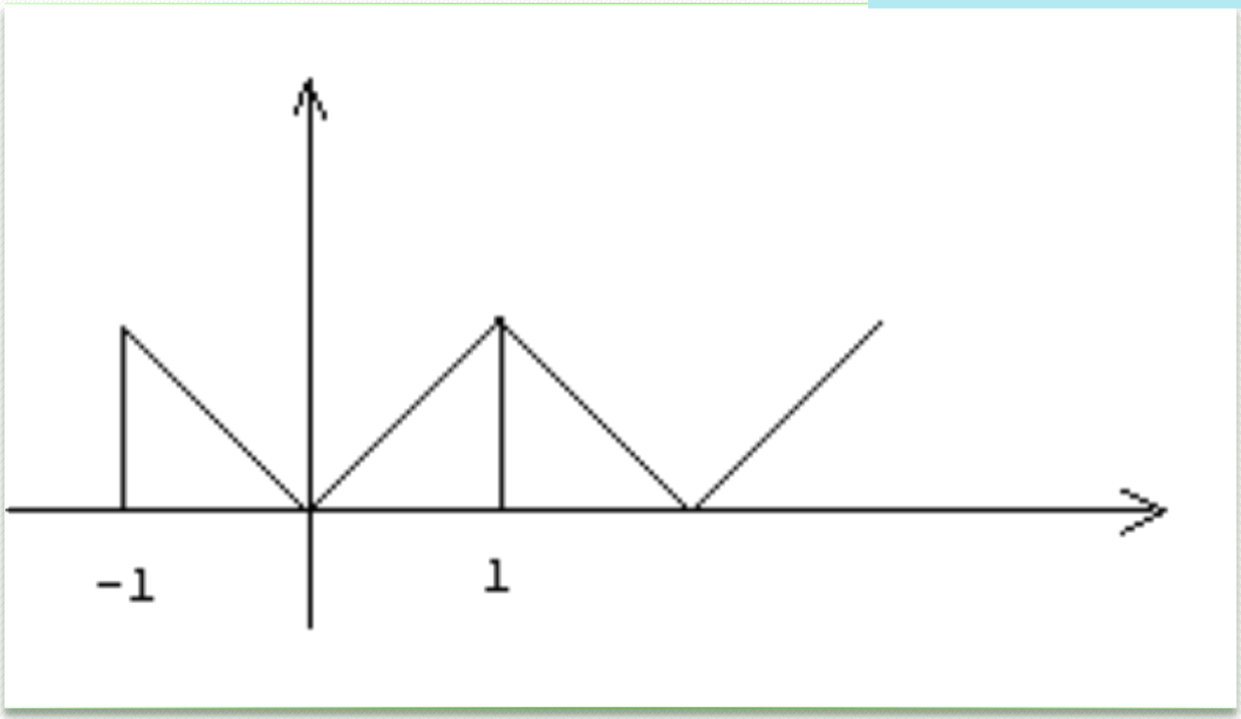
Видео 6


Fourier series approximation, first 1 terms
$f(x)$
1 term
Fourier partial sum
2
1
0
−1
−2
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую чётную кусочно-гладкую функцию с периодом Т=**2**:

$$y = |x|, x \in [-1,1]$$



Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}|x|dx = \frac{2}{1}\int_{0}^{1} xdx = x^2\Big|_0^1 = 1, \qquad b_n = 0,$$

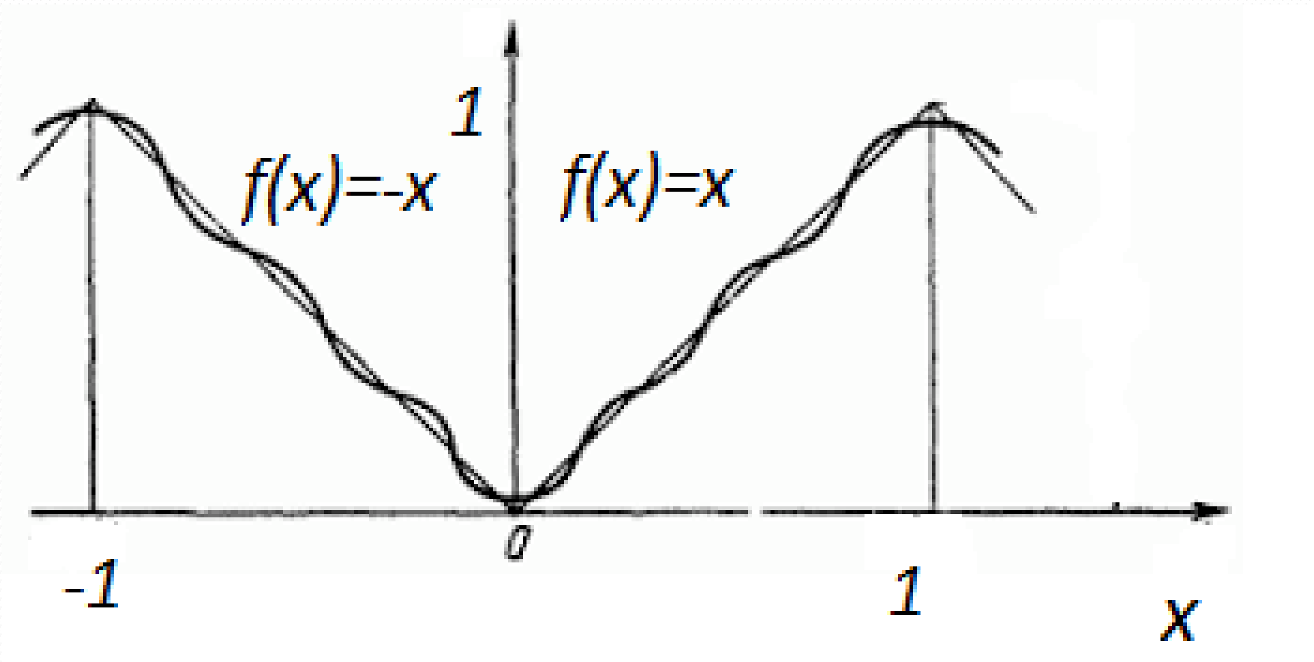
$$a_n = 2\int_0^1 x\cos\frac{\pi nx}{1}dx = 2\int_0^1 x\cos\pi nxdx = (\text{по частям}) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\left(x\sin\pi nx\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \sin\pi nxdx\right) = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\pi nxdx =$$

$$= -\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\left(\cos\pi nx\right)\Big|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{-4}{n^2\pi^2}, n = 2k-1 \\ 0, n = 2k \end{cases}.$$

Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

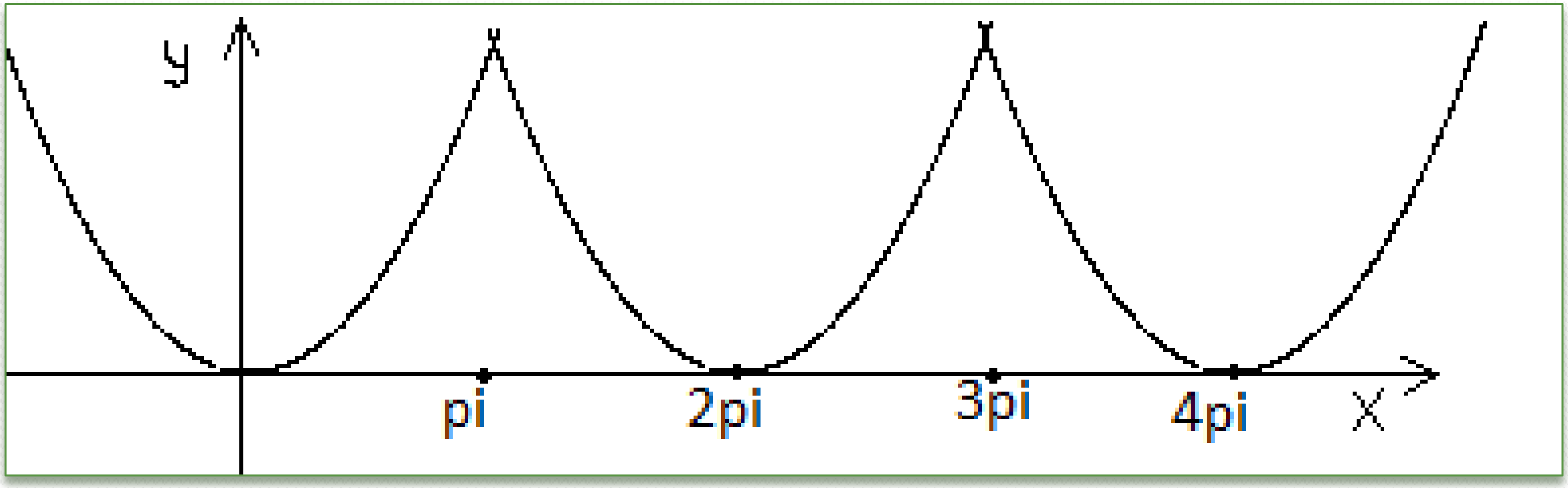
$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$$



Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

Пример 4. Разложить периодическую кусочно-гладкую функцию с периодом $T = 2\pi$ в ряд Фурье:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-\pi; \pi]$$



Тригонометрические ряды Фурье для чётных функций

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2\Bigg|, \qquad b_n = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (\textit{дважды по частям}) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\left(x^2 \sin nx\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin nx dx\right) = \frac{4}{\pi n^2}\left(\left(x \cos nx\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2\pi}.$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Сходимость тригонометрических рядов Фурье

Какими свойствами должна обладать функция *f(x)*, чтобы ее ряд Фурье сходился и имел своей суммой эту же функцию *f(x)*?

Решением данной проблемы занимались французские математики ещё в 18 веке.

В 1829г. Дирихле впервые доказал, что ряд Фурье действительно сходится к порождающей его функции если:

- а) она имеет конечное число экстремумов на заданном интервале;
- б) является кусочно-непрерывной на этом же интервале (т.е. ограничена).