ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. Знакопеременные ряды.

Тема 9

Числовые ряды

- Определение **Числовым рядом** называется выражение следующего вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если предел последовательности *последовательностью частичных сумм ряда.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

- ***Необходимое условие сходимости:***
- $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Числовые ряды

- **Признак сравнения в форме неравенства.**
- Пусть даны два знакоположительных ряда
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
- причем для любого номера $n \in N$ и n-ые члены рядов связаны неравенством $0 < a_n \le b_n$.
- Тогда из сходимости «большего» ряда следует сходимость «меньшего» ряда, а из расходимости «меньшего» ряда следует расходимость «большего» ряда.

Числовые ряды

- **Признак сравнения в форме неравенства.**
- «Больший ряд» называется *мажорирующим* рядом, а «меньший» – *мажорируемым*.
- Поэтому признак может быть сформулирован как:
- Из сходимости мажорирующего ряда следует
- сходимость мажорируемого ряда, и, наоборот,
- из расходимости мажорируемого ряда следует
- расходимость мажорирующего ряда.

Числовые ряды

- **Признак сравнения в предельной форме.**
- Пусть даны два знакоположительных ряда
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$,
- то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.
- В частности, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

- , т.е. $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то в смысле сходимости оба ряда ведут себя одинаково.

Числовые ряды

- **Признак Д'Аламбера**
- Пусть для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сущест-
- вует предел
- $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$
- Тогда:
- 1) если $l>1$, ряд расходится;
- 2) если $l<1$, ряд сходится.
- В случае $l=1$ возможна как сходимость, так и расходимость ряда .

Числовые ряды

- **Знакопеременные ряды.**
- **Абсолютная и условная сходимость**
- **Определение.** Числовой ряд называется *знакопеременным,* если в нем присутствует бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Числовые ряды

- **Знакопеременные ряды.**
- **Абсолютная и условная сходимость**
- **Определение.** *Знакочередующимися рядами* называются такие ряды, два соседних члена которых имеют разные знаки.
- Знакочередующиеся ряды принято записывать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$$

- где предполагается, что $a_n > 0$

Числовые ряды

Признак Лейбница

- Пусть знакочередующийся ряд удовлетворяет двум следующим условиям:
- 1. члены ряда $\{a_n\}$ монотонно убывают,
- 2. выполняется необходимое условие сходимости

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- Тогда исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ сходится.

Числовые ряды

Ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, называются *рядами Лейбница*.

Следствие признака Лейбница

- Для ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ выполняются
- следующие неравенства:
-
- $S \le a_1$ и $|r_n| \le |a_{n+1}|$.

Числовые ряды

Признак Лейбница

- Пусть знакочередующийся ряд удовлетворяет двум следующим условиям:
- 1. члены ряда $\{a_n\}$ монотонно убывают,
- 2. выполняется необходимое условие сходимости

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- Тогда исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ сходится.

Числовые ряды

Ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, называются *рядами Лейбница*.

Следствие признака Лейбница

- Для ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ выполняются
- следующие неравенства:
-
- $S \le a_1$ и $|r_n| \le |a_{n+1}|$.

Числовые ряды

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1.

2. Для любого абсолютно сходящегося ряда допустима произвольная перестановка и произвольная группировка членов ряда. При этом новый ряд будет по-прежнему абсолютно сходящимся к той же сумме.

3. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов по Коши

Числовые ряды

Свойство условно сходящегося ряда (теорема Римана)

Если ряд – условно сходящийся, то можно указать такую перестановку его членов, что либо полученный в результате перестановки ряд будет сходиться к любому наперёд заданному числу, либо будет вообще расходиться.

Замечание. Для исследования условной сходимости нельзя применять признаки сравнения знакоположительных рядов.

Функциональные ряды

- Пусть $\{u_n(x)\}$ – некоторая функциональная последовательность, определенная на множестве X
- <u>Определение</u> Выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

- называют ***функциональным рядом*** с областью определения X .

Функциональные ряды

- Пусть точка x_0 – точка из области определения ряда, тогда при подстановки этой точки ряд превращается в обычный числовой ряд, который может либо сходиться, либо расходиться.
- Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то x_0
- точка называется точкой сходимости функционального ряда, а множество всех таких точек образует ***область сходимости*** ряда D.
- Очевидно, что D является подмножеством области определения ряда X

Функциональные ряды

- Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$
- сходится в области $D \in X$, то для любого $x_0 \in D$
- определена функция $S(x)$, называемая ***суммой***
- ***функционального ряда:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

Функциональные ряды

- По аналогии с числовыми рядами функциональный ряд можно представить в виде:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

- где – $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$

- ***частичная сумма ряда***, а

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ..$$

- ***частичный остаток ряда.***

Функциональные ряды

- **<u>Определение.</u>** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится в
-
- некоторой области $D_a \subseteq D$,
- то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *абсолютно*
- *сходящимся* в этой области, а сама область $D_a \subseteq D$
- называется *областью абсолютной сходимости*
- *ряда.*

Функциональные ряды

- Примеры:
- 1. $$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}},\quad X=R\setminus\{0\}$$
- 2. $$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx,\quad X=R$$
- 3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n\cdot\sin x}}$$

Функциональные ряды

- **1.** $$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}}, \qquad X=R\setminus\{0\}$$
- Это ряд, составленный из членов геометрической
- прогрессии со знаменателем $q(x)=-\frac{1}{x}$.
- Поэтому ряд сходится, если $|q(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$ или $|x|>1$
- и область сходимости ряда - $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Функциональные ряды

- 2.

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx,\qquad X=R$$

- Пусть $x_k=\pi k,\quad k\in Z$, тогда $u_n(x_k)=\sin n\pi k=0$,
- т.е. в точках $x_k=\pi k$ ряд сходится.
- В любой другой точке ряд расходится.
- Область сходимости : $D=\{\pi k\mid k\in Z\}$
-

Функциональные ряды

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n \cdot \sin x}}$
- . Исследуем ряд на сходимость,
- используя признак Коши: $|u_n(x)| = \frac{1}{e^{n \cdot \sin x}}$
- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\sin x}} = \frac{1}{e^{\sin x}} = l(x)$$

Для определения <u>области абсолютной сходимости</u> решим неравенство:

$$e^{-\sin x} = 1$$

- $$-\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Функциональные ряды

- Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в
- некоторой области, то он сходится к функции :
- $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$$

Но тогда можно рассмотреть <u>обратную</u> задачу:

найти ряд, суммой которого является заданная функция:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$