Формы записи тригонометрического ряда Фурье

1. Ряд Фурье как сумма гармоник.
2. Комплексная форма ряда Фурье.

Тема 10

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T = 2\pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad n \in N \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \end{cases}$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье для функции с периодом $T = 2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

Тригонометрические ряды Фурье

Выражение

$$a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

называется ***гармоникой n*-го *порядка***.

Обозначим $\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T}$, тогда ряд можно записать в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\right)$$

Тригонометрические ряды Фурье

где :

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x dx$$

Обозначим

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n, \qquad \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\varphi_n, \qquad -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin\varphi_n$$

Тригонометрические ряды Фурье

Тогда на основании простейших тригонометрических преобразований можно записать *n*-ю гармонику в виде:

$$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x =$$

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos n\omega x + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin n\omega x\right) =$$

$$= A_n(\cos\varphi_n \cos n\omega x - \sin\varphi_n \sin n\omega x) =$$

$$= A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$$

Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье можно записать в эквивалентной форме – в виде суммы простых периодических функций-гармоник:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n x + \varphi_n)$$

или же:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n x + \tilde{\varphi}_n)$$

где A_n - амплитуда, φ_n - начальная фаза, $\omega_n = n\omega$ - частота n-ой гармоники.

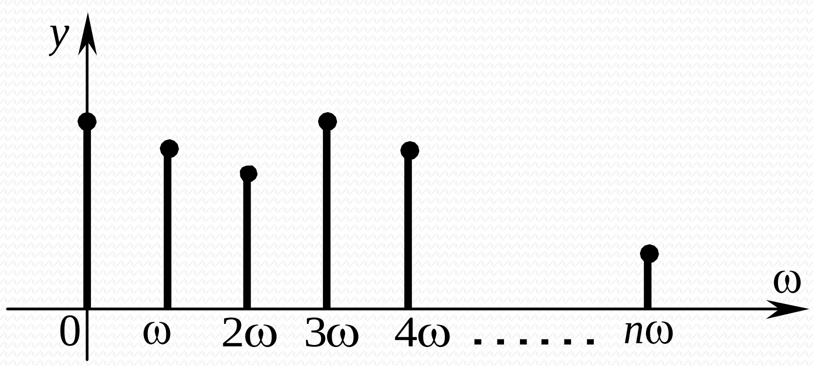
Амплитудный и фазовый спектры

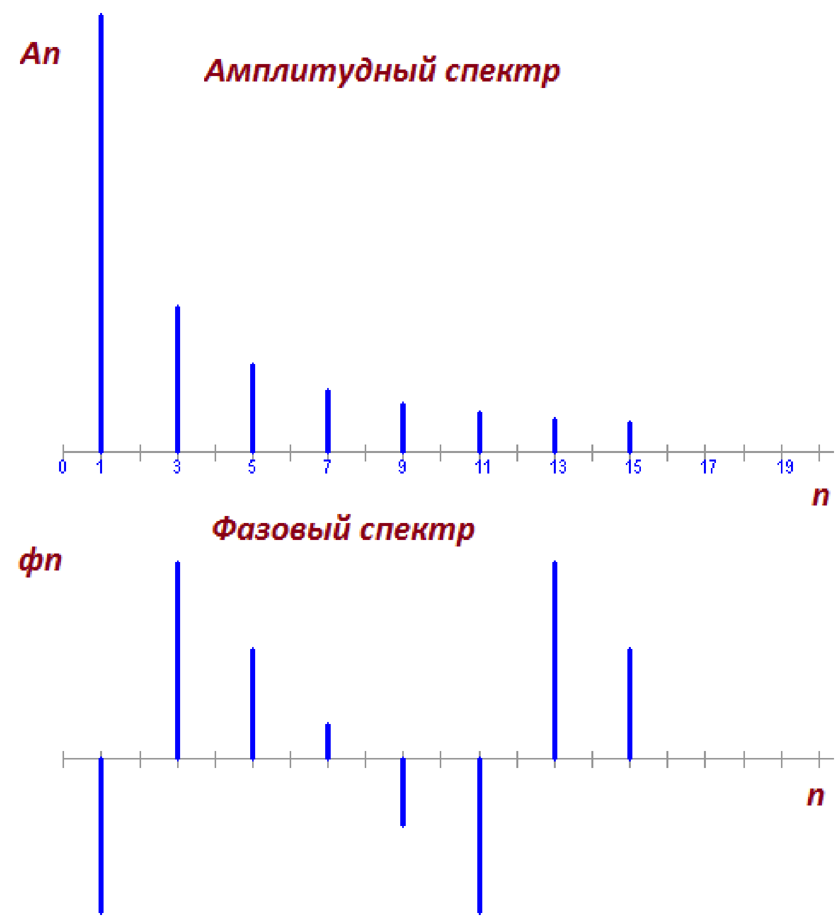
Совокупность величин A_n называется **амплитудным спектром**, а совокупность начальных фаз φ_n - **фазовым спектром.**

Спектр амплитуд периодической функции можно изобразить на координатной плоскости, если по оси *OY* откладывать амплитуды $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, по оси *OX* – частоты $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, n\omega, \ldots$. При этом считаем, что постоянной составляющей периодического колебания A_0 соответствует частота $\omega = 0$.

Амплитудный и фазовый спектры

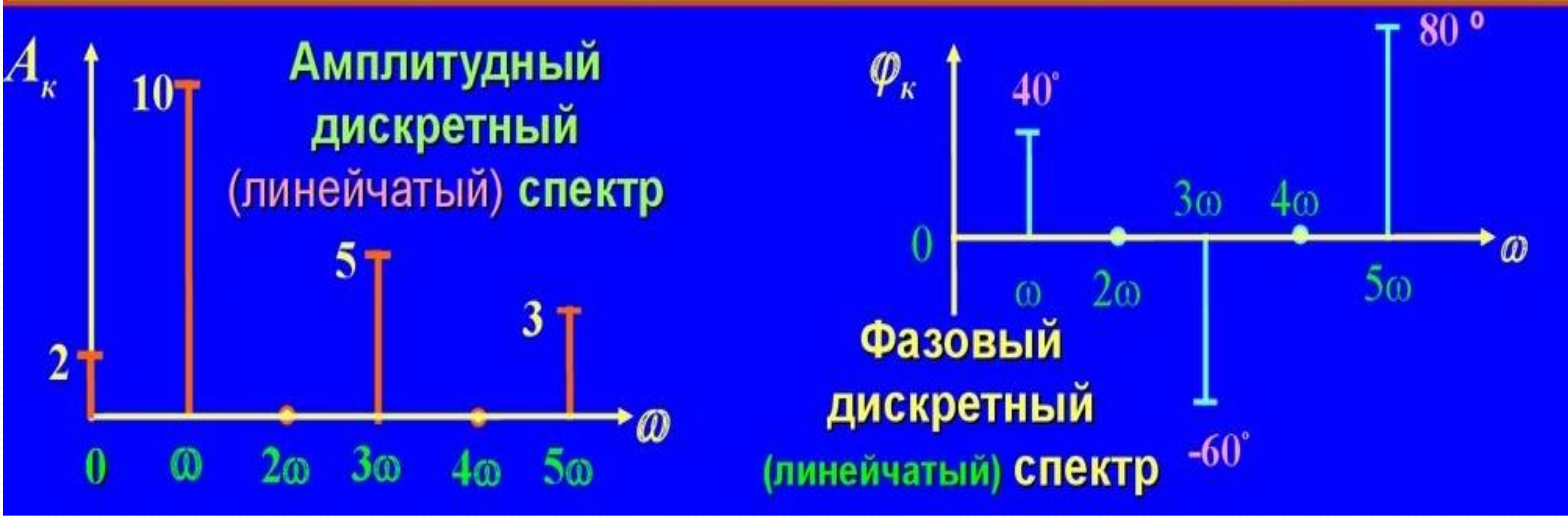
На плоскости получают совокупность дискретных точек, что неудобно, поэтому амплитуды отдельных гармоник изображают вертикальными отрезками длины *An* .





Амплитудный и фазовый спектры

$$u(t) = 2 + 10\sin(\omega t + 40^\circ) + 5\sin(3\omega t - 60^\circ) + 3\sin(5\omega t + 80^\circ)$$



Тригонометрические ряды Фурье

Амплитудный спектр несет информацию об энергии сигнала и показывает как она распределена по частотам. Так как частоты находятся в кратном отношении , то спектр состоит из равноотстоящих спектральных линий, поэтому спектр периодической функции называют еще *линейчатым спектром*.

Нахождение спектра периодического процесса (т.е. нахождение коэффициентов в ряде Фурье) называют **гармоническим анализом.**

Тригонометрические ряды Фурье

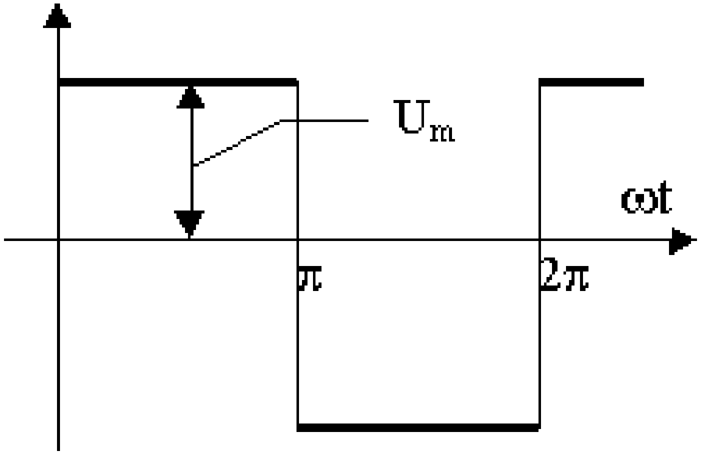
Ранее полученный ряд Фурье для прямоугольного сигнала имеет вид:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_{2k-1}x}{2k-1}=\frac{4\cdot\sin\omega x}{\pi}+\frac{4\cdot\sin 3\omega x}{\pi\cdot 3}+\frac{4\cdot\sin 5\omega x}{\pi\cdot 5}+\ldots$$

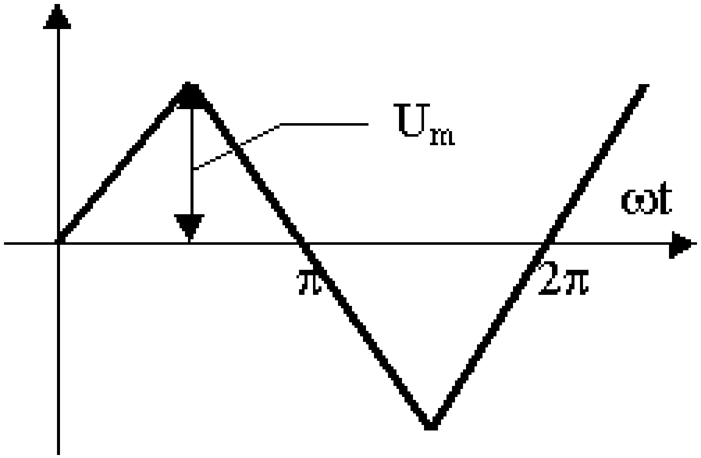
Для треугольного -

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\omega_{2k-1}x}{(2k-1)^2}=\frac{8\cdot\sin\omega x}{\pi}-\frac{8\cdot\sin 3\omega x}{\pi\cdot 3^2}+\frac{8\cdot\sin 5\omega x}{\pi\cdot 5^2}-\ldots$$

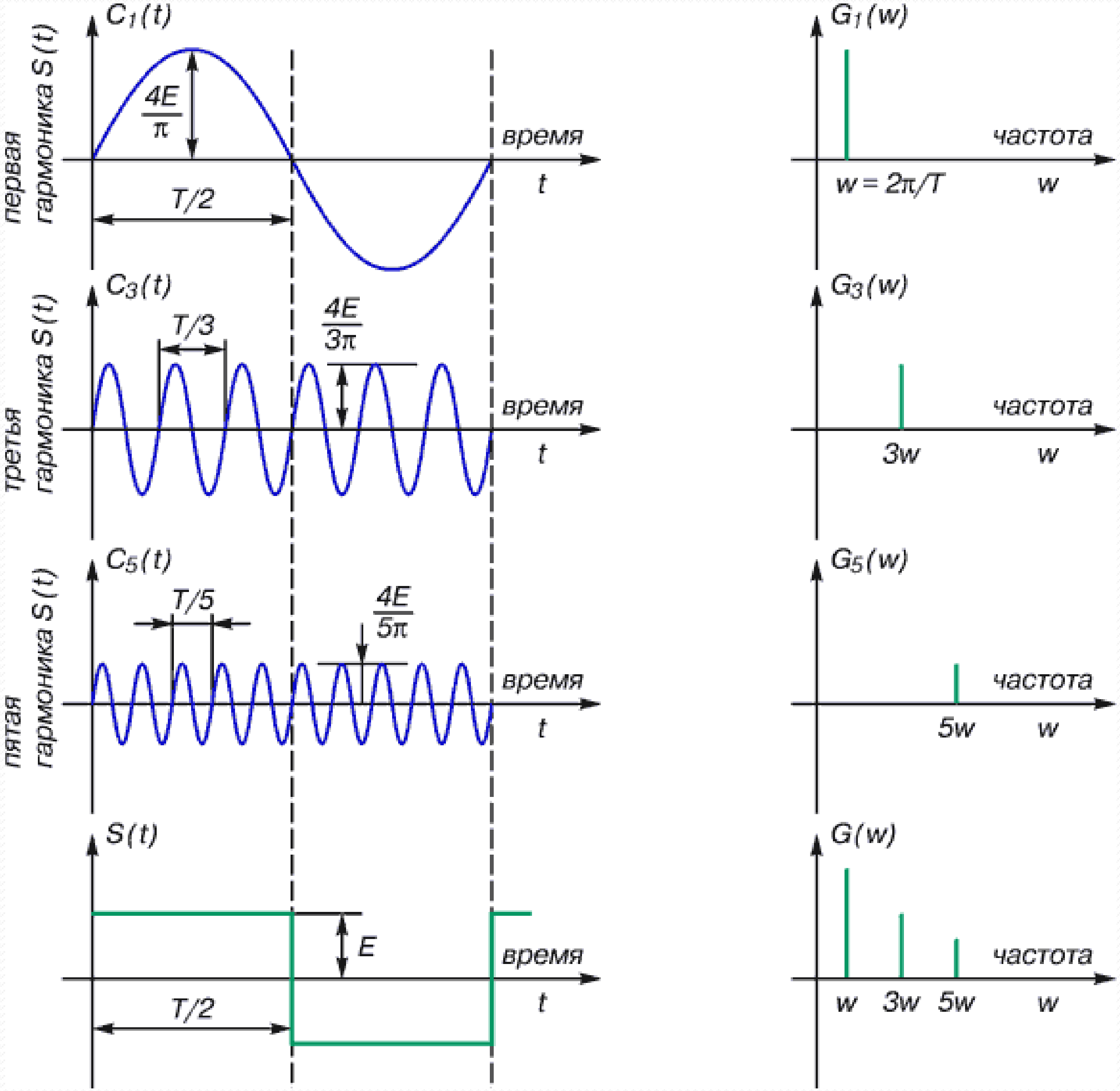
Для этих сигналов все фазы равны нулю.



$$f(\omega t)=\frac{4U_m}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\frac{1}{7}\sin 7\omega t+\ldots\right)$$

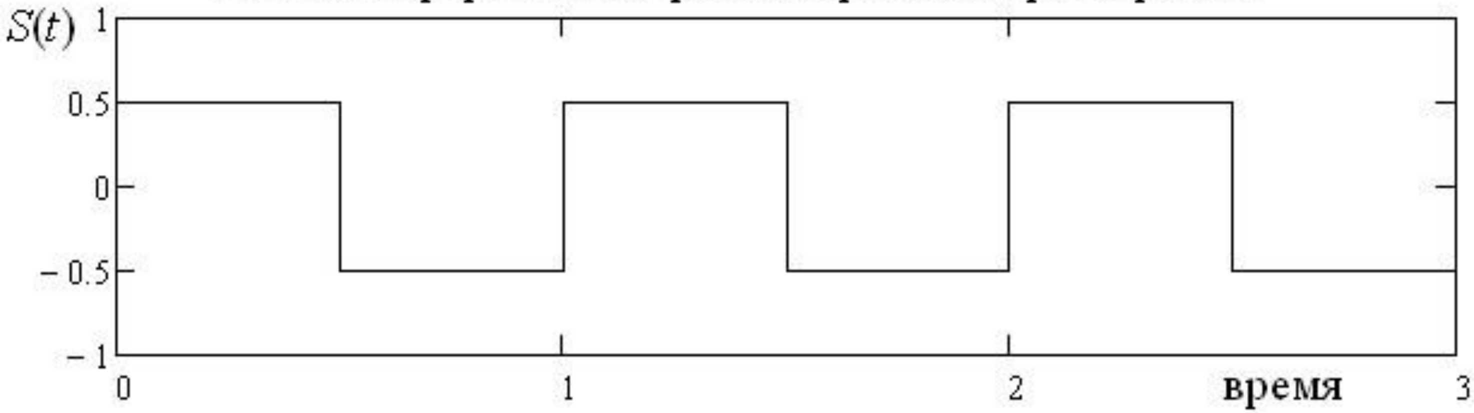


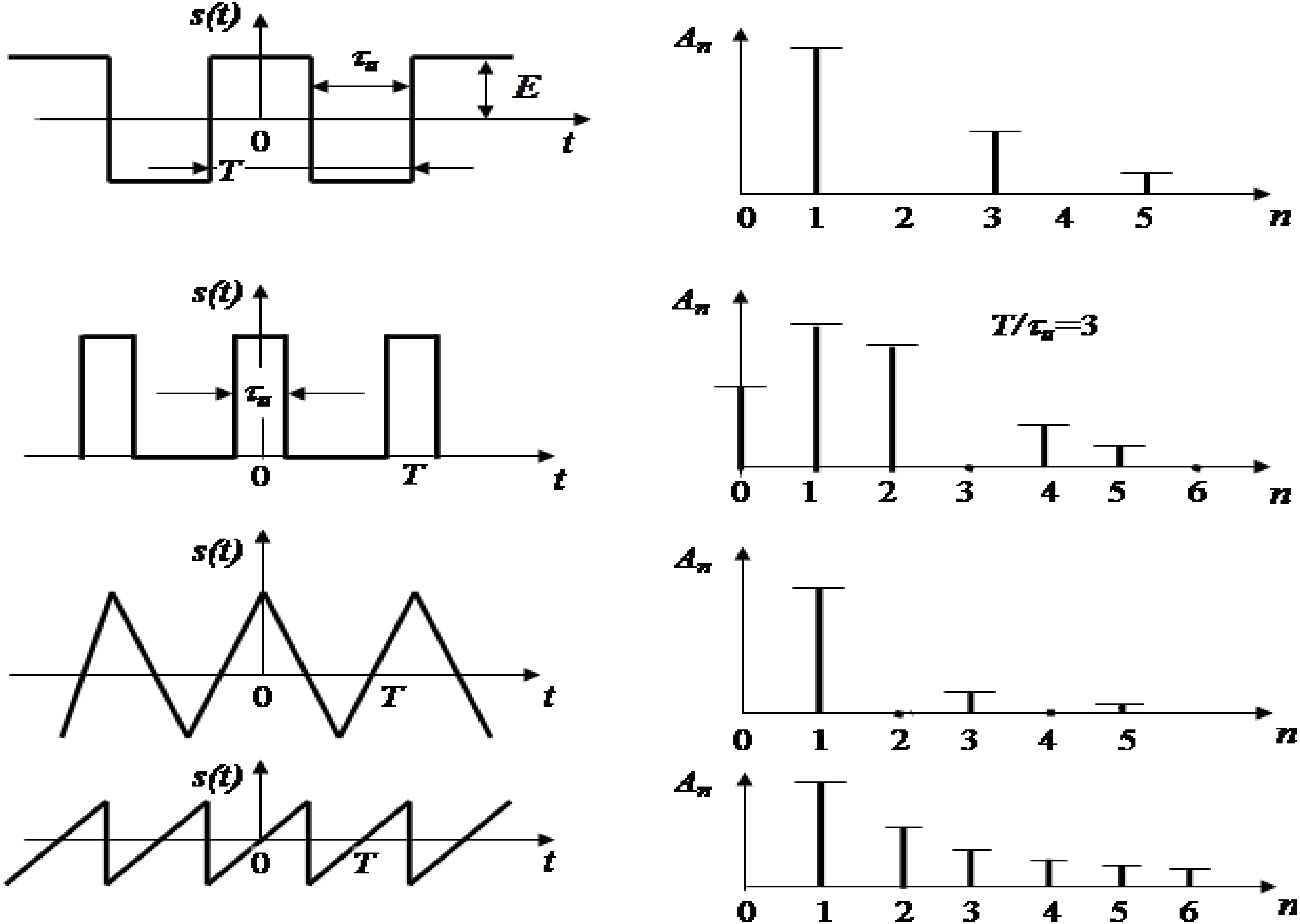
$$f(\omega t)=\frac{8U_m}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\frac{1}{49}\sin 7\omega t+\ldots\right)$$



$C_1(t)$
первая гармоника S(t)
$\frac{4E}{\pi}$
T/2
время
t
$G_1(w)$
частота
$w = 2\pi/T$
w
$C_3(t)$
третья гармоника S(t)
T/3
$\frac{4E}{3\pi}$
время
t
$G_3(w)$
частота
3w
w
$C_5(t)$
пятая гармоника S(t)
T/5
$\frac{4E}{5\pi}$
время
t
$G_5(w)$
частота
5w
w
S(t)
E
T/2
время
t
G(w)
частота
w 3w 5w
w

Сигнал в форме меандра. Изображены три периода.





Спектры некоторых сигналов

Амплитуды и фазы гармоник

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) =$$

гармоника ряда Фурье

$$= \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}}\cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}}\sin(n\omega t)\right) = \boxed{A_n}\cos(n\omega t + \boxed{\varphi_n})$$

амплитуда и фаза гармоники

Связь с коэффициентами Фурье

$$\boxed{\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \sin(\varphi_n) = -\dfrac{b_n}{A_n}, \quad \cos(\varphi_n) = \dfrac{a_n}{A_n} \end{cases}}$$

Эквивалентная форма ряда Фурье

$$\boxed{s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Базовые сведения из теории комплексных чисел:

Комплексным числом z будем называть упорядоченную пару действительных чисел x, y, записанную в форме $z = x + i \cdot y$, где i - "мнимая единица", для которой при вычислениях полагаем $i^2 = -1$.

Первая компонента комплексного числа z, действительное число x, называется действительной частью числа z, это обозначается так: $x = Re(z)$;

вторая компонента, действительное число y, называется мнимой частью числа z: $y = Im(z)$.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, определяемое соотношением $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, т.е.

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2), \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2).$$

Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, определяемое соотношением $z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, т.е.

$$\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2),$$

$$\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Im}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2).$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Множество комплексных чисел неупорядочено, т.е. для комплексных чисел не вводятся отношения "больше" или "меньше".

Геометрически комплексное число $z = x + i \cdot y$ изображается как точка с координатами (***x***, ***y***) на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью ***C***.

Число $\bar{z} = x - i \cdot y$ называется числом, сопряжённым к числу $z = x + i \cdot y$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Для нахождения частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

z_1 и z_2 домножим числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю:

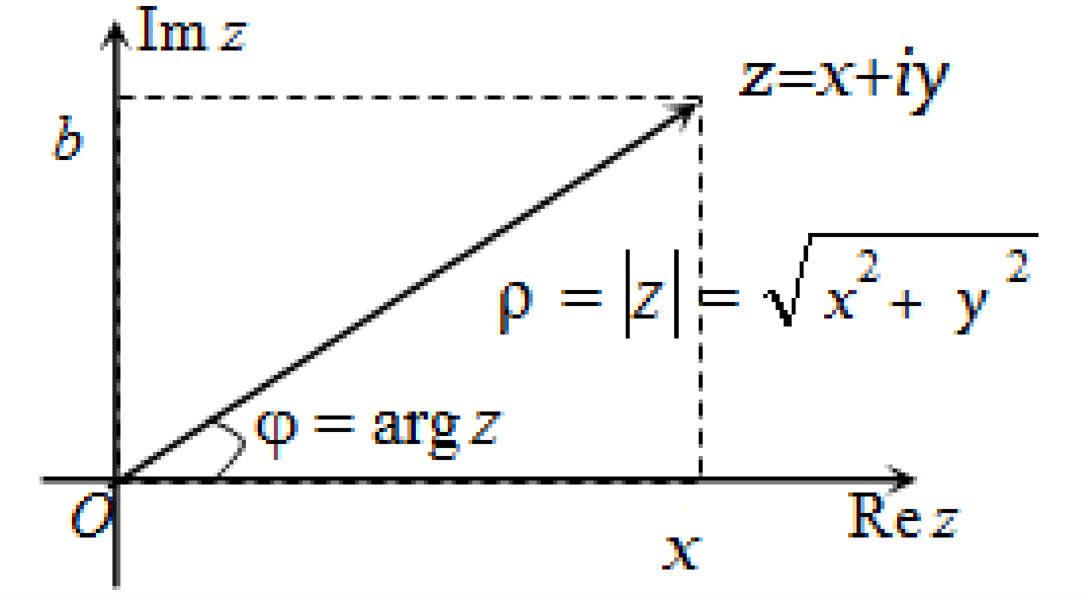
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i$$

Запись комплексного числа в виде $z=x+i\cdot y$

называется алгебраической формой комплексного числа.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Изобразим число **z** как точку на плоскости C:



Действительное число $|z|$ называется <u>модулем комплексного числа **z**</u> , угол φ из промежутка $[-\pi;\pi]$ называется <u>главным аргументом комплексного числа **z**</u> и обозначается ***arg z :*** $-\pi < \arg z \le \pi$

Базовые сведения из теории комплексных чисел.

Если теперь перейти к полярным координатам **(ρ, φ)**, то

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

поэтому $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Запись комплексного числа в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

называется тригонометрической формой комплексного числа.

Аргумент комплексного числа определён неоднозначно (с точностью до слагаемых, кратных 2π) :

$$\boldsymbol{Arg\, z = arg\, z + 2\pi k.}$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Формально запишем разложение в ряд Маклорена для функции

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \ldots + \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi 7}{7!} + \ldots\right)$$

Степени числа $\boldsymbol{i}$: $\boldsymbol{i}^2 = -1$, $\boldsymbol{i}^3 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}^4 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i}^2 = 1$.

В круглых скобках стоят ряды для **cos** $\boldsymbol{\varphi}$ и **sin** $\boldsymbol{\varphi}$, которые сходятся для любого действительного $\boldsymbol{\varphi}$.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Получаем **формулу Эйлера**.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Теперь любое комплексное число **z** можно представить как

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot Argz} = |z| \cdot e^{i \cdot \arg z} = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Эта форма записи называется показательная форма комплексного числа.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Используя эту форму легко доказать **формулу Муавра:**

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n e^{in\varphi}$$

С помощью этой формулы легко вычислять степени комплексных чисел, выводить формулы для синусов и косинусов кратных углов и извлекать корни ***n***-ой степени из комплексных чисел.

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Все значения корня ***n***-ой степени комплексного числа **z** получаются при ***k*** = 0, 1, 2, …, ***n***–1 :

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{Arg(z)}{n} + i \sin \frac{Arg(z)}{n} \right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right)$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\kappa + 2k\pi}{n} \right)$$

Базовые сведения из теории комплексных чисел

Используем формулу Эйлера для **вывода комплексной формa ряда Фурье:**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Складывая и вычитая эти формулы, получим выражения для синусов и косинусов:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Комплексная форма ряда Фурье.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Перепишем данный ряд в виде:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{\frac{i\pi nx}{l}}+e^{-\frac{i\pi nx}{l}}}{2}+b_n\frac{e^{\frac{i\pi nx}{l}}-e^{-\frac{i\pi nx}{l}}}{2i}\right).=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)e^{\frac{i\pi nx}{l}}+\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right)e^{-\frac{i\pi nx}{l}}$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Обозначим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) = \frac{a_n - ib_n}{2},$$

$$c_{-n} = \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} + c_{-n} e^{-\frac{i\pi nx}{l}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}}$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Полученный ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}}$ является комплексной формой ряда Фурье функции $f(x)$ с комплексными коэффициентами Фурье c_n, определяемые по формулам:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2l}\left(\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{\pi n x}{l} - ib_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)dx\right) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\, dx;$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{i\pi n x}{l}}$$ или сокращенно

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\, dx,$$ где $n = 0; \pm 1; \pm 2$.

Комплексная форма ряда Фурье.

Комплексная форма ряда:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n x}, \text{ где } C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\omega_n x} dx$$

$e^{\frac{i\pi n x}{l}} = e^{i\omega_n x}$ - комплексная гармоника, $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ - её частота,

По комплексной форме ряда Фурье можно записать её ряд Фурье в тригонометрической форме.

Связь между коэффициентами рядов выражается формулами:

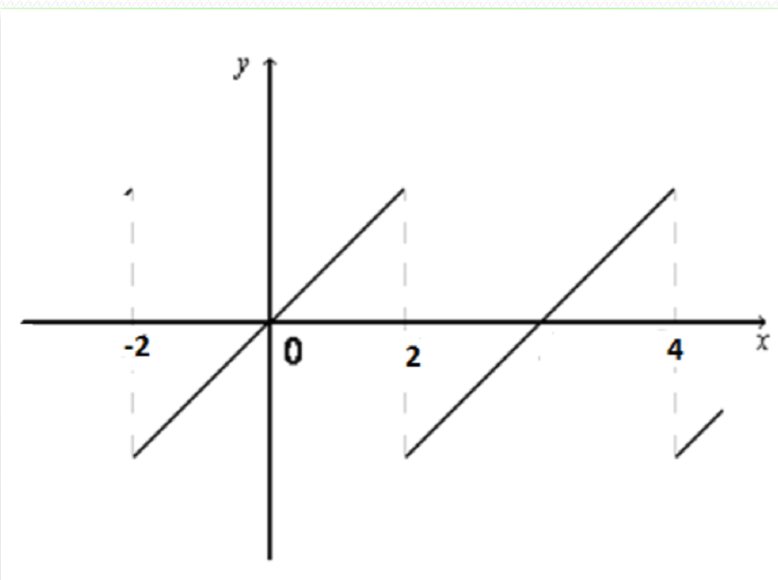
$$a_n = \operatorname{Re} 2C_n; \quad b_n = -\operatorname{Im} 2C_n; \quad \frac{a_0}{2} = C_0.$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Пример. Записать ряд Фурье в комплексной форме для функции

$$y = x \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T = 2\pi.$$

Ранее получен ряд для:



$$x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Найдем

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}[x\frac{e^{-inx}}{-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{\pi e^{-in\pi} - (-\pi)e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{in(-in)}] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{\pi i(e^{-in\pi} + e^{in\pi})}{n} - \frac{(e^{in\pi} - e^{-in\pi})}{n^2}] =$$

$$= \frac{i\cos\pi n}{n} - \frac{i\sin\pi n}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n i}{n}$$

Таким образом $x = \sum_{-\infty}^{\infty} i(-1)^n \frac{e^{inx}}{n}.$

Комплексная форма ряда Фурье.

Найдем значения для действительных коэффициентов ряда Фурье

$$a_n = \operatorname{Re} 2c_n = 0, \quad b_n = -\operatorname{Im} 2c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Тогда ряд будет иметь вид

$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$, что совпадает с

Полученным ранее результатом.

$$x = 2\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$$