

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра высшей математики

***ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ***

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия для практических занятий по математике
для специальностей, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2015

УДК 517.3(076)
ББК 22.161.1я73
Д50

Авторы:
В. В. Цегельник, Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец,
Л. А. Конюх, Е. Н. Конюх

Рецензенты:
кафедра высшей математики №1 Белорусского национального технического университета
(протокол №2 от 25.09.2014 г.);
заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий учреждения образования «Частный институт управления и предпринимательства», кандидат физико-математических наук, доцент
Ю. В. Минченков

Д50 Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Теория поля: пособие / В. В. Цегельник [и др.] – Минск : БГУИР, 2015. – 97 с.: ил.
ISBN 978-985-543-131-3.

Приводятся задачи по темам: дифференциальные уравнения, кратные интегралы, теория поля – разделам курса высшей математики, изучаемым в высших технических учебных заведениях в первом семестре.

Предлагаются задачи для самостоятельного решения и контрольные работы. Пособие входит в состав методического комплекса вместе со сборниками задач в десяти частях.

УДК 517.3 (076)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-985-543-131-3

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2015

Учебное издание

Цегельник Владимир Владимирович
Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович и др.

***ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ***

ПОСОБИЕ

Редактор *Е.И. Герман*

Корректор *Е.Н. Батурчик*

Компьютерная правка, оригинал-макет

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 300 экз. Заказ 467

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6

Содержание

Занятие 1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными	3
Занятия 2–3. Дифференциальные уравнения первого порядка	9
Занятия 4–5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.....	17
Самостоятельная работа к занятиям 4–5.....	24
Занятия 6–7. Линейные уравнения высших порядков	26
Занятия 8–9. Системы дифференциальных уравнений	36
Занятие 10. Контрольная работа	46
Занятия 11–12. Кратные интегралы	48
Занятие 13. Приложения кратных интегралов	61
Занятие 14. Контрольная работа. Кратные интегралы	68
Занятия 15–16. Криволинейные и поверхностные интегралы	70
Самостоятельная работа к занятиям 15–16.....	81
Занятия 17–18. Поток векторного поля. Дивергенция. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Потенциальные поля ...	85
Литература	97

Занятие 1
Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
Уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1

Покажите, что данная функция является решением (интегралом) заданного дифференциального уравнения:

а) $y = 3 \sin x - 4 \cos x, \quad y'' + y = 0;$

б) $y = x \left(1 + \int \frac{e^x}{x} dx \right), \quad x \frac{dy}{dx} - y = x e^x;$

в) $y = \operatorname{arctg}(x + y), \quad (x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 1;$

г) $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases}, \quad y' + \frac{b^2 x}{a^2 y} = 0.$

(а) последовательно находим:

$$y' = 3 \cos x + 4 \sin x,$$

$$y'' = -3 \sin x + 4 \cos x.$$

Подставляя в заданное уравнение y и y' , получим

$$-3 \sin x + 4 \cos x + 3 \sin x - 4 \cos x \equiv 0.$$

Таким образом, эта функция обращает заданное уравнение в тождество, т. е. является его решением;

б) вычислим производную данной функции:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \int \frac{e^x}{x} dx + x \cdot \frac{e^x}{x} = 1 + e^x + \int \frac{e^x}{x} dx.$$

$$\text{Имеем } x \frac{dy}{dx} - y = x \left(1 + e^x + \int \frac{e^x}{x} dx \right) - x \left(1 + \int \frac{e^x}{x} dx \right) = x e^x.$$

Данная функция обращает исходное уравнение в тождество и, следовательно, является решением этого уравнения;

в) применяя к данному соотношению правило дифференцирования неяв-

ной функции, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{1 + (x + y)^2}$. Отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + y)^2}$.

Подставляя найденное значение $\frac{dy}{dx}$ в данное дифференциальное уравнение, получим тождество;

г) предполагаемое решение задано параметрическими уравнениями. По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, получим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t.$$

Подставляя в исходное уравнение x, y, y'_x , получим

$$-\frac{b}{a} \operatorname{tg} t + \frac{b^2 a \sin t}{a^2 b \cos t} \equiv 0. \quad]$$

Пример 2

Составьте дифференциальные уравнения семейства кривых:

а) $x^2 + y^2 - cx = 0$;

б) $y = \sin x + c \cos x$.

[а) рассматривая в данном соотношении y как неявную функцию от x и дифференцируя по x , имеем $2x + 2y \frac{dy}{dx} - c = 0$. Отсюда $c = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$.

Подставляя в исходное соотношение вместо c последнее выражение, получим

$$2xy \frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0;$$

б) дифференцируя данное равенство по x , имеем $\frac{dy}{dx} = \cos x - c \sin x$.

Умножим обе части исходного уравнения на $\sin x$, а последнего – на $\cos x$ и, сложив почленно, получим $\frac{dy}{dx} \cos x + y \sin x - 1 = 0$.]

Пример 3

С помощью изоклин постройте приближенно интегральные кривые уравнения $x \frac{dy}{dx} = 2y$.

[Очевидно, ось абсцисс является интегральной кривой данного уравнения. Интегральные кривые расположены симметрично относительно оси абсцисс и относительно оси ординат (при замене x на $-x$ или y на $-y$ уравнение не изменяется). Поэтому исследуем поведение интегральных кривых только в I четверти.

Семейство изоклин определяется уравнением $k = \frac{2y}{x}$, $y = \frac{k}{2}x$. Для любого $k > 0$ касательные к интегральным кривым данного уравнения, проведенные в точках прямой $y = \frac{k}{2}x$, образуют с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} k$.

Нарисовав несколько изоклин и поле направлений, построим приближенно интегральные кривые уравнения (рис. 1).

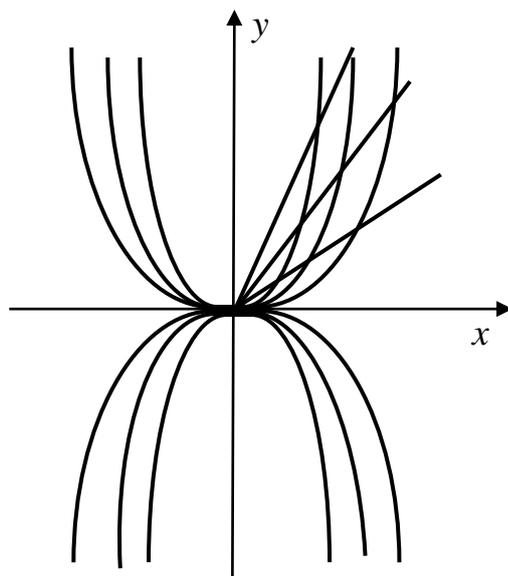


Рис. 1

Пример 4

Решите уравнение $ydx - x^2 dy = 0$.

Очевидно, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем, разделив переменные в уравнении и проинтегрировав его

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\frac{1}{x} + \ln|c|, \quad (c \neq 0).$$

$$y = ce^{-1/x}.$$

Решение $y = 0$ можно получить из последнего соотношения при $c = 0$. Таким образом, $y = 0$ является частным решением.

Решение $x = 0$ не может быть получено из общего решения. Это особое решение.

Ответ: $y = ce^{-1/x}, (c \in R), x = 0.$

Пример 5

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$.

Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = xy(y + 2)$.

Функции $x = 0$ и $y = -2$ являются решениями уравнения. Остальные решения найдем разделив переменные и проинтегрировав его:

$$\frac{dy}{y(y+2)} - xdx = 0, \quad \int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = 0, \quad \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} \right) dy - \int xdx = 0,$$

$$\ln|y| - \ln|y+2| - x^2 = \ln c_1, \quad \frac{|y|}{|y+2|} = c_1 e^{x^2}, \quad c_1 > 0,$$

$$\frac{y}{y+2} = c e^{x^2}, \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \text{или} \quad y = \frac{2c e^{x^2}}{1 - c e^{x^2}}.$$

Решения $y=0$ и $y=-2$ могут быть получены из общего решения при $c=0$ и $c=\infty$.

Ответ: $y = \frac{2c e^{x^2}}{1 - c e^{x^2}}. \int$

Пример 6

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = k \frac{y}{x}$ и постройте интегральные кривые этого уравнения.

Правая часть заданного уравнения определена во всей плоскости xOy , за исключением точек прямой $x=0$. Очевидно, функция $y=0$ при $x < 0$ и при $x > 0$ является решением данного уравнения. Остальные решения определим из соотношения $\int \frac{dy}{y} = k \int \frac{dx}{x}$.

$$\text{Отсюда } \ln|y| = k \ln|x| + k \ln c_1, \quad |y| = c_1 |x|^k, \quad c_1 > 0.$$

Присоединяя к этим функциям решение $y=0$, все решения можно записать формулой $y = c|x|^k$, $c \in \mathbb{R}$. Интегральные кривые в зависимости от параметра k изображены на рис. 2.

Пример 7

Решите задачу Коши $\frac{dy}{dx} + y = 2x + 1, \quad y(0) = 0$.

Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить $y - 2x - 1 = z$.

$$\text{Имеем } \frac{dy}{dx} - 2 = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = -z - 2, \quad z \neq -2, \quad \text{так как } y(0) = 0.$$

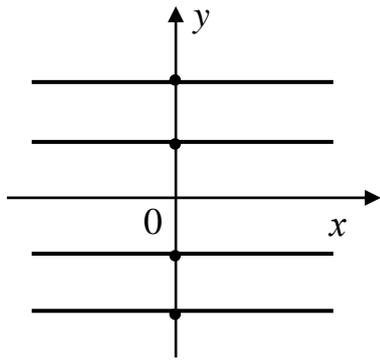
Разделив переменные, интегрируем уравнение:

$$\frac{dz}{z+2} = -dx, \quad \ln|z+2| = -x + \ln c, \quad |z+2| = c e^{-x}, \quad z = -2 + c e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{или}$$

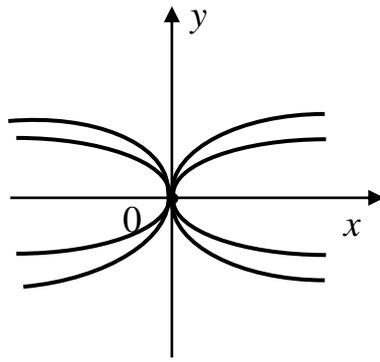
$$y = 2x - 1 + c e^{-x}.$$

Подставив в последнее соотношение $x=0, y=0$, получим $c=1$.

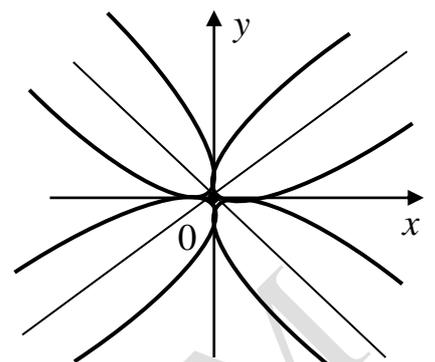
Ответ: $y = 2x - 1 + e^{-x}. \int$



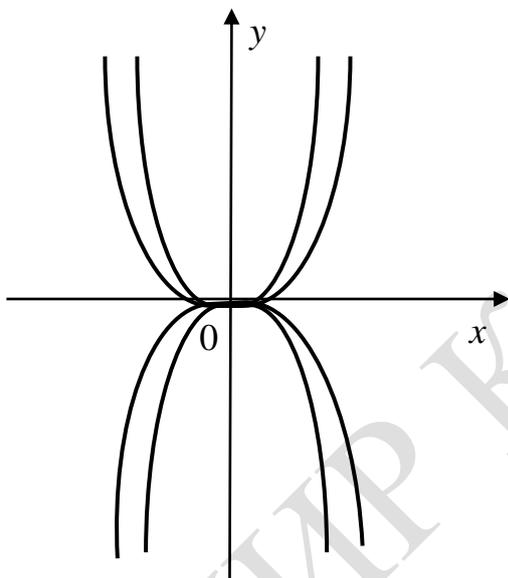
$k = 0$



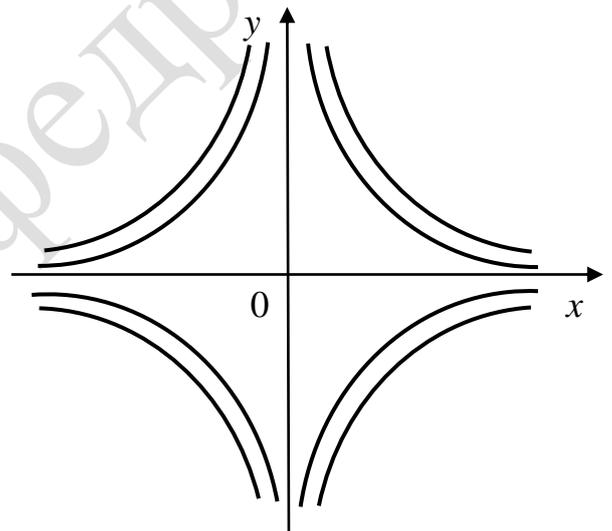
$0 < k < 1$



$k = 1$



$k > 1$



$k < 1$

Рис. 2

∫

Дополнительные задачи

1. Покажите, что для данных дифференциальных уравнений указанные соотношения являются интегралами:

а) $(x - 2y)y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = c^2;$

б) $(x - y + 1)y' = 1, \quad y = x + ce^y.$

2. Составьте дифференциальное уравнение семейства окружностей с общим центром $A(0; 1)$.

Ответ: $(y - 1)\frac{dy}{dx} + x = 0.$

3. Составьте дифференциальное уравнение семейства парабол, которые проходят через начало координат и для которых ось абсцисс является осью симметрии.

Ответ: $2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$

4. Решите уравнение $(xy - x)dx + (xy + x - y - 1)dy = 0.$

Ответ: $x + \ln|x - 1| + y + 2\ln|y - 1| = c.$

5. Решите задачу Коши $(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1.$

Ответ: $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1 + e^x).$

6. Решите уравнение $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$

Ответ: $x + 2y + 3\ln|2x + 3y - 7| = c.$

Занятия 2–3

Дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 1

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

┌ Правая часть уравнения – однородная функция нулевой степени, поэтому данное уравнение однородное.

Положим $y = ux$. Тогда $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} \quad \text{или} \quad xdu = \frac{1-u^2}{2u} dx.$$

Функции $u = \pm 1$ являются решениями. Пусть $u \neq \pm 1$. Разделим переменные $\frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, найдем $-\ln|1-u^2| = \ln|x| - \ln|c|$ или

$$x(1-u^2) = c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \text{Так как } u = \frac{y}{x}, \text{ окончательно получаем } y^2 = x^2 - cx.$$

Решения $u = \pm 1$, т. е. $y = \pm x$ являются частными решениями. ┘

Пример 2

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.

┌ Это однородное уравнение. Положим $y = ux$. Тогда $\frac{du}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ и после подстановки получим $x \frac{du}{dx} = \text{sign } x \sqrt{1-u^2}$, $x \neq 0$.

Очевидно, функции $u = \pm 1$ или $y = \pm x$ являются решениями полученного уравнения. Другие решения найдем разделяя переменные. Имеем

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\text{sign } x}{x} dx, \quad \arcsin u = \text{sign } x \ln|x| + c. \quad \text{Заменяя } u \text{ на } \frac{y}{x}, \text{ получим}$$

$$\arcsin \frac{y}{x} = \text{sign } x \ln|x| + c, \quad y = x, \quad y = -x. \quad \text{┘}$$

Пример 3

Решите уравнение $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

Из всех решений выделите то, которое удовлетворяет условию $y(1) = 1$.

∫ Данное уравнение приводится к однородному. Произведем замену переменных $x = t + \alpha$, $y = s + \beta$. Получим

$$(2t + 2\alpha - s - \beta + 1)dt + (2s + 2\beta - t - \alpha - 1)ds = 0.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} 2\alpha - \beta + 1 = 0 \\ -\alpha + 2\beta - 1 = 0 \end{cases}$ находим $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. полу-

чим однородное уравнение $(2t - s)dt + (2s - t)ds = 0$.

В последнем уравнении положим $s = ut$.

$$\text{Имеем } (2t - ut)dt + (2ut - t)(udt + tdu)du = 0,$$

$$(2t - ut + 2u^2t - ut)dt + (2ut^2 - t^2)du = 0, \quad (2u^2 - 2u + 2)dt + (2u - 1)tdu, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2u - 1}{u^2 - u + 1} du = -\frac{dt}{t}, \quad \ln(u^2 - u + 1) + \ln t^2 = \ln c, \quad \left(\frac{s^2}{t^2} - \frac{s}{t} + 1\right)t^2 = c,$$

$$s^2 - st + t^2 = c.$$

Возвращаясь к переменным x и y , получим

$$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = c, \quad x^2 + y^2 - xy + x - y = c_1.$$

Это общий интеграл уравнения. Положив $x = 1$, $y = 1$, находим $c_1 = 1$.

Ответ: $x^2 + y^2 - xy + x - y = 1$. ∫

Пример 4

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}$.

∫ Решим соответствующее линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0.$$

Функция $y = 0$ является решением этого уравнения. Другие его решения найдем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\cos x, \quad \ln|y| = -\sin x + \ln|c|, \quad y = ce^{-\sin x}, \quad c \neq 0.$$

Решение $y = 0$ можно получить из последней формулы при $c = 0$, поэтому все решения однородного уравнения выражаются формулой $y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$, $c \in R$.

Решение исходного уравнения ищем в виде $y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$. Подставив это выражение в заданное уравнение, получим

$$\frac{dc(x)}{dx} e^{-\sin x} - \cos x e^{-\sin x} c(x) + c(x) e^{-\sin x} \cos x = e^{-\sin x},$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = 1, \quad c(x) = x + c.$$

$$\text{Ответ: } y = (x + c)e^{-\sin x}. \quad \int$$

Пример 5

Проинтегрируйте уравнение $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$ методом Бернулли, решите задачу Коши при начальном условии $y(1) = 1$.

$$\int \text{ Сделав подстановку Бернулли, получим}$$
$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = \frac{2}{x^3}, \quad u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = \frac{2}{x^3}.$$

Находим частное решение уравнения $v' + \frac{3}{x}v = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{3}{x}dx, \quad \ln|v| = -3\ln|x| + c.$$

В качестве частного решения можно взять $v = \frac{1}{x^3}$, тогда для отыскания u получим уравнение $u' \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$. Отсюда находим $u = 2x + c$.

Общее решение исходного уравнения: $y = (2x + c) \frac{1}{x^3}$. Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$: $1 = (2 + c) - 1$, откуда $c = -1$. Подставляя $c = -1$ в общее решение, получаем частное решение

$$y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}. \quad \int$$

Пример 6

Найдите общее решение уравнения $2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0$.

\int Это уравнение приводится к линейному с неизвестной функцией x :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{y}{2}, \quad (y \neq 0).$$

Решим его методом подстановки Бернулли:

$$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = -\frac{y}{2}, \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{y}v\right) = -\frac{y}{2}.$$

Находим частное решение уравнения $\frac{dv}{dy} - \frac{1}{y}v = 0$. Разделив переменные,

получим $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$, $v = y$.

Для отыскания u получим уравнение $\frac{du}{dy}y = -\frac{y}{2}$. Отсюда находим

$$u = -\frac{1}{2}y + c.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения $x = cy - \frac{y^2}{2}$. \int

Пример 7

Приведите уравнение Бернулли $y' - 2xy = 2x^3y^2$ к линейному уравнению.

\int Разделим обе части уравнения на y^2 : $y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3$. Положим $y^{-1} = z$, тогда $-y^{-2}y' = z'$. Умножив обе части уравнения на -1 и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение $z' + 2xz = -2x^3$. \int

Пример 8

Решите уравнение $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.

\int Разделив обе части уравнения на $x^2y^2 \neq 0$, получим уравнение Бернулли $y' + \frac{y}{x} = y^{-2} \frac{1}{x^2}$. Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, получим

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2u^2v^2} \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Находим частное решение уравнения $\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0$. Разделив переменные,

получим $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $\ln|v| = -\ln|x|$, $v = \frac{1}{x}$.

Для отыскания u получим уравнение $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 \cdot x^2}{x^2u^2}$, $\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{3}$,

$$u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = uv = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{c}{x^3}}$. \int

Пример 9

Решите уравнение $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$.

Для того чтобы уравнение $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x; y)}{\partial x}.$$

В данном случае $M(x; y) = 2xy + 3y^2$, $N(x; y) = x^2 + 6xy - 3y^2$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y.$$

Таким образом, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, т. е. левая часть данного уравнения действительно является полным дифференциалом некоторой функции $u(x; y)$.

Для искомой функции $u(x; y)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Из первого уравнения получаем

$$u(x; y) = \int (2xy + 3y^2)dx = x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируем последнее равенство по y :

$$x^2 + 6xy + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\varphi}{dy} = -3y^2.$$

Отсюда $\varphi(y) = -y^3 + c_1$. Поэтому $u(x; y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + c_1$.

Решение уравнения запишется в виде $x^2 y + 3xy^2 - y^3 = c$. \int

Пример 10

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy = 0.$$

Так как $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + \cos y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \cos y$, т. е. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то данное

уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах можно найти по одной из формул:

$$\int_{x_0}^x M(x; y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x_0; y)dy = c,$$

$$\int_{x_0}^x M(x; y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x_0; y) dy = c.$$

Подставив в первую формулу для простоты $x_0 = y_0 = 0$, получим

$$\int_0^x e^x dx + \int_0^y (e^y + x + x \cos y) dy = c,$$

$$e^x - 1 + (e^y + xy + x \sin y) \Big|_{y=0}^{y=y} = c,$$

$$e^x - 1 + e^y + xy + x \sin y - 1 = c, \quad e^x + e^y + xy + x \sin y = c_1. \quad \int$$

Пример 11

Решите уравнение $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Если левая часть уравнения $M(x; y)dx + N(x; y)dy$ не является полным дифференциалом и выполнены все условия теоремы Коши, то существует такая функция $\mu(x; y)$, называемая интегральным множителем, что $\mu(Mdx + Ndy) = du$.

Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях:

$$1) \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = F(x), \text{ тогда } \mu = \mu(x);$$

$$2) \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = F_1(y), \text{ тогда } \mu = \mu(y).$$

$$\text{В нашем случае } \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 2y + 2y = 4y,$$

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = F(x).$$

Следовательно, $\mu = \mu(x)$.

$$\text{Так как } \frac{\partial}{\partial y} (\mu(x)(x + y^2)) = \frac{\partial}{\partial x} (-2\mu(x)xy) \text{ или}$$

$$\mu(x)2y = -2 \frac{d\mu}{dx} (xy) - 2\mu(x)y, \text{ то } \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{x} dx \text{ и } \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая уравнение на $\mu = \frac{1}{x^2}$, получим

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy = 0 - \text{уравнение в полных дифференциалах.}$$

Общий интеграл уравнения найдем по формуле

$$\int_{x_0}^x M(x; y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x; y) dy = c, \quad (x_0 = 1, y_0 = 0),$$

$$\int_1^x \frac{1}{x} dx - \int_0^y \frac{2y}{x} dy = c, \quad \ln|x| - \frac{1}{x} y^2 = c. \quad \int$$

БГУИР Кафедра ВМ

Дополнительные задачи

1. Решите задачу Коши $ydx + (\sqrt{xy} - x)dy = 0$, $y(1) = 1$.

Ответ: $2 - \ln|y| = 2\sqrt{\frac{y}{x}}$.

2. Решите уравнение $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$.

Ответ: $\frac{x^2}{2} + y^2 - xy + y = c$.

3. Решите задачу Коши $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(\pi) = 5$.

Ответ: $y = -5 \cos x + \sin x$.

4. Решите уравнение $y^3 dx - (2xy + 3)dy = 0$.

Ответ: $x = cy^2 - \frac{1}{y}$.

5. Решите задачу Коши $y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y^2}{x-3}$, $y(-1) = -2$.

Ответ: $y = \frac{x-3}{1-x}$.

6. Решите уравнение $(2x + e^{x/y})dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}dy = 0$.

Ответ: $x^2 + ye^{x/y} = c$.

7. Решите уравнение $xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

Ответ: $x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = c$.

8. Решите уравнение $y(1 + xy)dx - xdy = 0$, если известно, что оно имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

Ответ: $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$.

Занятия 4–5

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Пример 1.

Докажите существование и единственность решения задачи Коши

$$y'' = y^2 + \frac{y'^2}{y} + 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Правая часть уравнения – функция $F(x, y, y') = y^2 + \frac{y'^2}{y} + 3x$ – непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_{y'} = 2y - \frac{y'^2}{y^2}$, $F'_{y'} = \frac{2y'}{y}$ в окрестности точки $(0; 1; 2)$. Поэтому в силу теоремы существования и единственности искомое решение существует и единственно. \int

Пример 2

Покажите, что функция $y = y(x)$, неявно заданная уравнением $x = y^2 + y$, является решением уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

Находим y', y'', y''' . Имеем $y' = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y+1}$, так как $\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$.

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2y+1} \right) \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2y+1)^3};$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dy} \left(-\frac{2}{(2y+1)^3} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{12}{(2y+1)^5}.$$

Подставив y', y'', y''' в левую часть уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$, получим

$$\frac{1}{2y+1} \cdot \frac{12}{(2y+1)^3} - 3 \frac{4}{(2y+1)^5} \equiv 0. \quad \int$$

Пример 3

Найдите общее решение уравнения $y'' = xe^{-x}$ и выделите решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 4, y' = 0$ при $x = 0$.

Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y' = \int xe^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} x = u, \quad du = dx \\ e^{-x} dx = dv, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1,$$

$$y = -\int x e^{-x} dx - \int e^{-x} dx + c_1 x = x e^{-x} + 2e^{-x} + c_1 x + c_2.$$

Воспользуемся начальными условиями $\begin{cases} -1 + c_1 = 0 \\ 2 + c_2 = 4 \end{cases}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

Следовательно, частное решение имеет вид $y = (x + 2)e^{-x} + x + 2$. \int

Пример 4

Решите уравнение $(x - 3)y'' + y' = 0$.

\int Полагая $y' = z$, получим уравнение первого порядка

$$(x - 3) \frac{dz}{dx} + z = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x - 3}$;

$$\ln|z| + \ln|x - 3| = \ln|c|, \quad c \neq 0; \quad z(x - 3) = c, \quad \frac{du}{dx}(x - 3) = c; \quad y = c \ln|x - 3| + c.$$

Функция $z = 0$ ($y = c$) является решением.

Поэтому $y = c \ln|x - 3| + c_1$, $c, c_1 \in \mathbb{R}$. \int

Пример 5

Найдите общее решение уравнения $y'' + 2xy' = 0$.

\int Полагая $y' = z$, получим $\frac{dz}{dx} = -2xz$; $\frac{dz}{z} = -2x dx$; $z = c_1 e^{-x^2}$. Реше-

ние $z = 0$ не потеряно. Следовательно, $y = c_1 \int e^{-x^2} dx + c_2$. \int

Пример 6

Решите задачу Коши $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$, $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ при $x = 1$.

\int Полагая $y' = z$, получим $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \left(1 + \ln \frac{z}{x}\right)$. Это однородное уравнение.

Проинтегрируем его с помощью подстановки $z = ux$. Имеем

$$\frac{du}{dx} x + u = u(1 + \ln u); \quad \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \ln|\ln u| = \ln|cx|; \quad u = e^{cx}; \quad z = x e^{cx}.$$

Полагая $x = 1$, находим $c = 0$. Согласно произведенной замене

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad y = \frac{1}{2} x^2 + c_1.$$

Полагая $x = 0$, находим $c_1 = 0$. Окончательно имеем $y = \frac{1}{2} x^2$. \int

Пример 7

Решите уравнение $2(y')^2 = (y-1)y''$.

┌ Положим $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p \frac{dp}{dy}$. Уравнение примет вид

$$p \left(2p - (y-1) \frac{dp}{dy} \right) = 0. \text{ Функция } p = 0 \text{ (} y = c \text{) является решением.}$$

Пусть $p \neq 0$, тогда $\frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y-1}$ или $\frac{1}{2} \ln|p| = \ln|y-1| + \ln|c_1|$, откуда

$$p = c_1^2 (y-1)^2. \text{ Но } p = \frac{dy}{dx}. \text{ Следовательно, } \frac{dy}{dx} = c_1^2 (y-1)^2 \text{ или}$$

$$\int \frac{dy}{c_1^2 (y-1)^2} = \int dx + c_2, \text{ откуда } \frac{-1}{c_1^2} = (x + c_2)(y-1).$$

└ Функция $y = c$ является особым решением. ┘

Пример 8

Найдите решение задачи Коши $y'' = -\frac{y'^2 + y'^4}{2y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

предварительно убедившись, что искомое решение существует и единственно.

┌ Функция $F(x; y; z) = -\frac{y'^2 + y'^4}{2y}$ непрерывна и имеет ограниченные

частные производные $F'_y = \frac{y'^2 + y'^4}{2y^2}$, $F'_{y'} = \frac{-(y' + 2y'^3)}{y}$ в окрестности точки

$(0; 1; 2)$. Поэтому в силу теоремы существования и единственности, искомое решение существует и единственно. Положим $y' = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция.

Тогда $y'' = p \frac{dp}{dy}$. Относительно $p = p(y)$ мы получим уравнение

$$p \frac{dp}{dy} = -\frac{p^2 + p^4}{2y}.$$

Для искомого решения $p \neq 0$. Разделяя переменные, получим

$$-\frac{d(p)^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{dy}{y} \text{ или } \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} - \frac{d(p^2)}{p^2} = \frac{dy}{y}, \text{ откуда}$$

$$\ln \frac{p^2+1}{p^2} = \ln c|y| \text{ (} c > 0 \text{), } \frac{p^2+1}{p^2} = c_1 y \text{ (} c_1 \neq 0 \text{).}$$

Используя начальные условия находим $c_1 = \frac{5}{4}$.

$$\text{Имеем } \frac{p^2 + 1}{p^2} = \frac{5}{4}y, \quad p^2 + 1 = \frac{5}{4}p^2y, \quad p = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y - 1}}.$$

Согласно произведенной замене, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}y - 1}}, \quad \sqrt{\frac{5}{4}y - 1} dy = dx, \quad \frac{8}{15} \left(\frac{5}{4}y - 1 \right)^{3/2} = x + c_2.$$

Учитывая начальные условия, найдем $c_2 = \frac{1}{15}$.

$$\text{Поэтому } y = \frac{1}{15} (15x + 1)^{2/3} + \frac{4}{5}. \quad \int$$

Пример 9

Найдите кривую, проходящую через точку $(1; 1)$, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

(В точке $M(x; y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 3).

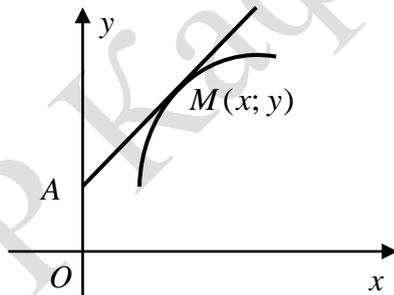


Рис. 3

$$Y - y = y'(X - x).$$

Полагая $X = 0$, находим ординату точки A : $Y = y - y'x$. Получаем дифференциальное уравнение $Y - y'x = x$, или $y' - \frac{1}{x}y = -1$. Это линейное уравнение.

Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим

$$u''v + u \left(v' - \frac{1}{x}v \right) = -1.$$

Находим частное решение уравнения: $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$

$$\ln v = \ln x, \quad v = x.$$

Далее ищем общее решение уравнения: $\frac{du}{dx}x = -1$.

Имеем $du = -\frac{dx}{x}$, $u = \ln c_1 - \ln|x| = \ln \frac{c_1}{|x|}$.

Искомое общее решение принимает вид $y = x \cdot \ln \frac{c}{x}$.

Используя начальное условие, получим $1 = \ln c$, $c = e$.

Уравнение кривой будет $y = x \ln \frac{e}{x} = x(\ln e - \ln x) = x(1 - \ln x)$.

Пример 10

Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба снижается от 100°C до 60°C за 20 мин. Температура воздуха 25°C . Через какой промежуток времени (от начала охлаждения) температура хлеба понизится до 30°C ?

Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет

$$\frac{dT}{d\tau} = k(T - t),$$

где T – температура хлеба;

t – температура окружающего воздуха;

k – коэффициент пропорциональности;

$\frac{dT}{d\tau}$ – скорость охлаждения хлеба.

Пусть τ – искомое время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим $\frac{dT}{T - t} = kd\tau$.

Для условий задачи $\frac{dT}{T - 25} = kd\tau$. Интегрируя, получаем

$$\int \frac{d(T - 25)}{T - 25} = k \int d\tau, \ln(T - 25) = k\tau + \ln c, T - 25 = ce^{k\tau}.$$

Произвольную постоянную c определяем из начального условия: при $\tau = 0$ $T = 100^\circ\text{C}$. Отсюда $c = 100 - 25 = 75$. Подставив в полученное уравнение

$$T = 60 \text{ и } \tau = 20, \text{ получим } e^k = \left(\frac{35}{75}\right)^{1/20} = \left(\frac{7}{15}\right)^{1/20}.$$

Уравнение охлаждения хлеба примет вид $T = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\tau/20} + 25$.

Отсюда $5 = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\tau/20}$, или $\tau = \frac{-20 \ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx 71$ мин. \int

Пример 11

Найдите форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

\int Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которого параллельна направлению падающих лучей. Примем эту ось за ось Ox и найдем уравнение кривой, вращением которой образуется искомая поверхность (рис. 4).

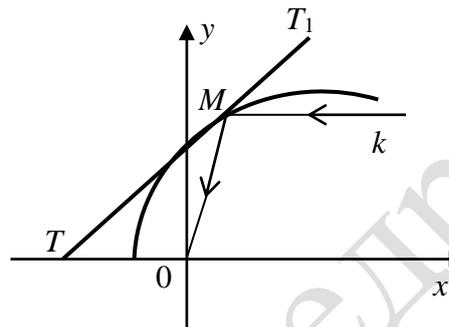


Рис. 4

Пусть kM – падающий луч, MO – отраженный луч. В точке M проведем касательную TT_1 к искомой кривой. Так как $\angle T_1MK = \angle TM_0 = \angle MTO$, то треугольник MTO является равнобедренным. Следовательно, $|OM| = |OT|$, но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|OT|$ найдем из уравнения касательной.

$$Y - y = y'(X - x), \text{ полагая } Y = 0, \text{ имеем } X = x - \frac{y}{y'}.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'}$, или $(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy - ydx = 0$. Это однородное уравнение. Здесь более целесообразно считать x функцией, а y – аргументом. Применим подстановку $\frac{x}{y} = t$. Тогда получим $(\sqrt{t^2 y^2 + y^2} + ty)dy - y(tdy + ydt) = 0$,

или $\sqrt{t^2 + 1}dy - ydt = 0$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \ln y = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \ln c_1 \quad (y > 0).$$

Возвращаясь к переменным x и y , имеем

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{c} \quad \text{или} \quad y^2 = 2c \left(x + \frac{c}{2} \right).$$

Искомая кривая является параболой, а зеркало имеет форму параболоида вращения $y^2 + z^2 = 2c \left(x + \frac{c}{2} \right)$. \int

Пример 12

Среднее геометрическое координат точки касания кривой равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (1; 1).

\int В точке $M(x; y)$ проведем касательную к искомой кривой (рис. 5).

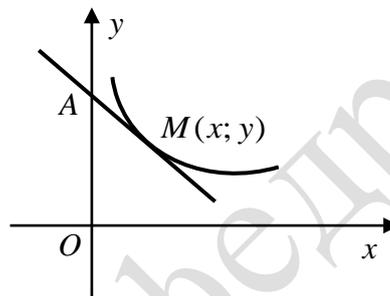


Рис. 5

$$Y - y = y'(X - x).$$

Полагая $X = 0$, находим ординату точки A : $Y = y - y'x$.

Получаем дифференциальное уравнение

$$\sqrt{xy} = \frac{y - y'x}{2y}, \quad \text{или} \quad y' - \frac{1}{x}y = 2x^{-1/2}y^{3/2}. \quad \text{Это уравнение Бернулли.}$$

Сделав подстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = 2x^{-1/2}u^{3/2}v^{3/2}, \quad u'v + u \left(v' - \frac{1}{x}v \right) = 2x^{-1/2}u^{3/2}v^{3/2}.$$

Находим частное решение уравнения $v' - \frac{1}{x}v = 0$, $v = x$.

Находим общее решение уравнения

$$u'x = 2x^{-1/2}u^{3/2}x^{3/2}, \quad \frac{1}{2} du \cdot u^{-3/2} = dx, \quad u = \frac{1}{(x+c)^2}.$$

Искомое общее решение принимает вид $y = uv = \frac{x}{(x+c)^2}$.

Используя начальное условие $y(1) = 1$, получаем две интегральные кривые

$$xy = 1 \quad \text{и} \quad x - y(x-2)^2 = 0. \quad \int$$

Самостоятельная работа к занятиям 4–5

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$.

Ответ: $y(\ln y - 1) = \frac{1}{2}e^{2x} + c$.

2. $y' = \frac{y(x+y)}{x^2}$.

Ответ: $y = \frac{-x}{\ln|cx|}$.

3. $y' + \frac{1}{x}y = e^{-x^2}$, $y(1) = \frac{1}{2e}$.

Ответ: $y = \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

4. $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x \cos y)dy = 0$. Ответ: $x^3 + 3y + 3x \sin y = c$.

5. $y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{x^3}$.

Ответ: $y = c_1 \ln x + \frac{1}{x} + c_2$.

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $(1 + e^x)y \cdot y' = e^x$.

Ответ: $y^2 = 2 \ln|c(e^x + 1)|$.

2. $y' = \frac{y^2 + 2x^2}{xy}$.

Ответ: $y^2 = 4x^2 \ln|cx|$.

3. $y' - 3x^2y = x^2e^{x^3}$, $y(0) = 0$. Ответ: $y = \frac{1}{3}x^3e^{x^3}$.

4. $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0$. Ответ:
 $x^2 + y^2 + 2e^x \sin y = 0$.

5. $y'' - \frac{1}{x}y' = x$.

Ответ: $y = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$.

Дополнительные задачи

1. Решите уравнение $y''' = x \ln x$.

Ответ: $y = \frac{x^4}{24} \ln x - \frac{13}{288} x^4 + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$.

2. Решите уравнение $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

Ответ: $y = c_1 \ln x + \frac{1}{x} + c_2$.

3. Решите уравнение $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

Ответ: $y = -\sin x - c_1 \cos x + c_2 x + c_3$.

4. Решите задачу Коши: $y'' = \frac{1}{y^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $x = y^2 - 1$.

5. Запишите уравнение линии, проходящей через точку $A(1; 0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной в любой точке этой линии на оси Oy , равен расстоянию от точки касания до начала координат.

Ответ: $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

Занятия 6–7

Линейные уравнения высших порядков

Пример 1

Найдите определитель Вронского систем функций:

а) e^x, xe^x, x^2e^x ; $J = (-\infty; +\infty)$;

б) $3, \cos^2 x, \sin^2 x$; $J = (-\infty; +\infty)$;

в) $x^2, x \cdot |x|$; $J = (-\infty; +\infty)$.

Исследовать данные функции на линейную зависимость.

$$\begin{aligned} \text{а) находим } W(x) &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = \\ &= e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = 2e^{3x}. \end{aligned}$$

Поскольку $W(x) \neq 0$, данные функции линейно независимы на J ;

$$\text{б) } W(x) = \begin{vmatrix} 3 & \cos^2 x & \sin^2 x \\ 0 & -\sin 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Но так как $\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin^2 x \equiv 0$ при $\alpha_1 = -\frac{1}{3}, \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, данные функции являются линейно зависимыми на J ;

в) для функции $f(x) = x \cdot |x|$ при $x > 0$ $f'(x) = 2x = 2|x|$, при $x < 0$ $f'(x) = -2x = 2|x|$, при $x = 0$ $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot |x| - 0}{x} = 0 = 2|x| \Big|_{x=0}$.

Таким образом, $(x \cdot |x|)' = 2x, x \in J$.

$$\text{Находим } W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x \cdot |x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0.$$

Вывод о линейной зависимости данных функций по их определителю Вронского сделать нельзя. Данные функции линейно независимы на J , так как

тождество $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \cdot |x| \equiv 0 \quad (x \in J)$ выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Действительно, при $x = 1$ получаем $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; при $x = -1$ имеем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0.$$

Эта система имеет решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. \int

Пример 2

Покажите, что функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения второго порядка, и найдите решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

$$\int \text{Находим определитель Вронского } W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 3x^6.$$

Следовательно, функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^5$ образуют фундаментальную систему решений некоторого однородного линейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого являются непрерывными функциями при $x \neq 0$.

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = c_1 x^2 + c_2 x^5$, где c_1 и c_2 произвольные постоянные.

Для решения поставленной задачи Коши необходимо определить значения постоянных c_1 и c_2 так, чтобы выполнялись заданные начальные условия.

$$\text{Имеем } \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 5c_2 = -2 \end{cases}, \text{ откуда } c_1 = \frac{7}{3}, c_2 = -\frac{4}{3}.$$

Поэтому решение данной задачи Коши имеет вид

$$y = \frac{7}{3} x^2 - \frac{4}{3} x^5. \int$$

Пример 3

Покажите, что функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка. Составьте это уравнение.

\int Найдем $W(y_1; y_2; y_3)$:

$$W(y_1; y_2; y_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, данные функции образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка с коэффициентами непрерывными на $(-\infty; +\infty)$.

Это уравнение имеет вид: $W(y; y_1; y_2; y_3) = 0$.

$$W(y; y_1; y_2; y_3) = \begin{vmatrix} y & 1 & x & e^x \\ y' & 0 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = -e^x \begin{vmatrix} y' & 1 & 1 \\ y'' & 0 & 1 \\ y''' & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} y'' & 1 \\ y''' & 1 \end{vmatrix} = e^x (y'' - y''').$$

Искомое уравнение имеет вид $e^x (y'' - y''') = 0$, или $y''' - y'' = 0$. \int

Пример 4

Найдите общие решения уравнений:

а) $y'' + 5y' + 6y = 0$;

б) $y'' - 6y' = 0$;

в) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

г) $y'' + 2y' + 7y = 0$.

\int а) корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ – числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. Фундаментальную систему решений образуют функции e^{-2x} , e^{-3x} .

Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$;

б) корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda = 0$ – числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 6$. Фундаментальную систему решений образуют функции 1 и e^{6x} . Общее решение имеет вид $y = c_1 + c_2 e^{6x}$;

в) корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ – числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Фундаментальную систему решений образуют функции e^{-2x} и $x e^{-2x}$. Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$;

г) корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0$ – числа $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{6}$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-x} \cos \sqrt{6}x$ и $e^{-x} \sin \sqrt{6}x$. Общее решение имеет вид

$$y = e^{-x} (c_1 \cos \sqrt{6}x + c_2 \sin \sqrt{6}x). \quad \int$$

Пример 5

Найдите общие решения уравнений:

а) $y^{(4)} - 6y''' + 11y'' - 6y' = 0$;

б) $y''' + 8y = 0$;

в) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$;

г) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;

д) $y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 4y' - 4y = 0$.

\int а) находим корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) &= \lambda(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6) = \\ &= \lambda(\lambda^2(\lambda - 1) - 5\lambda(\lambda - 1) + 6(\lambda - 1)) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0. \end{aligned}$$

Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 3$. Фундаментальную систему решений образуют функции $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$. Общее решение имеет вид

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x};$$

б) находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 + 8 = 0$. Имеем $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$. Откуда $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^{-2x}, e^x \cos \sqrt{3}x, e^x \sin \sqrt{3}x$. Общее решение имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + e^x (c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x)$;

в) находим корни характеристического уравнения $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$. Имеем $\lambda^2(\lambda - 1)^3 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4,5} = 1$. Фундаментальную систему решений образуют функции $1, x, e^x, x e^x, x^2 e^x$. Общее решение имеет вид $y = c_1 + c_2 x + e^x (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)$;

г) находим корни характеристического уравнения $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$. Имеем $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. Фундаментальную систему решений образуют функции $\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$. Общее решение имеет вид

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x;$$

д) находим корни характеристического уравнения $\lambda^5 - \lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$.

Имеем $\lambda^4(\lambda - 1) + 4\lambda^2(\lambda - 1) + 4(\lambda - 1) = 0$, $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2)^2 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{2}i$, $\lambda_{4,5} = -\sqrt{2}i$. Фундаментальную систему решений образуют функции $e^x, \cos \sqrt{2}x, \sin \sqrt{2}x, x \cos \sqrt{2}x, x \sin \sqrt{2}x$. Общее решение имеет вид $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) \cos \sqrt{2}x + (c_4 + c_5 x) \sin \sqrt{2}x$.]

Пример 6

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решите уравнение

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

[Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$. Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. фундаментальную систему решений образуют функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$. Общее

решение однородного уравнения имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Общее решение имеет вид $y = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-x}$.

Составим систему
$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = \frac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

Решая ее, находим $c_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^x + 1}$, $c_2'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

Интегрируя, имеем $c_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \left| e^x = t \right| =$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + c_1;$
 $c_2(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} de^x = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + c_2.$

Общее решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2} ((x - \ln(e^x + 1))e^x + (-1 + \ln(e^x + 1))e^{-x}) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Пример 7

Укажите вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x};$

б) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x};$

в) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x;$

г) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + x e^{2x};$

д) $y''' + 6y'' + 10y' = x e^{-3x} \cos x + x;$ е) $y''' - 4y' = 3 + e^{2x} + e^{2x} \sin 2x.$

а) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = x(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^{2x};$$

б) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x + A_3 x^2 e^{2x};$$

в) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Частное решение имеет вид

$$y^* = e^x (A_1 \sin x + A_2 \cos x);$$

г) находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Частное решение имеет вид

$$y^* = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x + x(A_4 x + A_5) e^{2x};$$

д) находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -3 \pm i$. Частное решение имеет вид

$$y^* = xe^{-3x}((A_1x + A_2)\cos x + (A_3x + A_4)\sin x) + x(A_5x + A_6);$$

е) находим корни характеристического уравнения $\lambda^3 - 4\lambda = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Частное решение имеет вид

$$y^* = A_1x + A_2xe^{2x} + e^{2x}(A_4\sin 2x + A_5\cos 2x). \quad]$$

Пример 8

Найдите общее решение уравнения $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 5$.

∫ Так как характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$, то общим решением соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ является функция $Y_{o.o} = c_1 + c_2x + c_3e^x$. Частное решение уравнения определяется формулой

$$y^* = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$$

Находим

$$y^{*'} = 4A_1x^3 + 3A_2x^2 + 2A_3x;$$

$$y^{*''} = 12A_1x^2 + 6A_2x + 2A_3;$$

$$y^{*'''} = 24A_1x + 6A_2.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$$24A_1x + 6A_2 - 12A_1x^2 - 6A_2x - 2A_3 \equiv 3x^2 - 2x + 5 \quad \text{или}$$

$$(3 + 12A_1)x^2 + (6A_2 - 24A_1 - 2)x + (5 + 2A_3 - 6A_2) \equiv 0,$$

откуда
$$\begin{cases} 3 + 12A_1 = 0, \\ 6A_2 - 24A_1 - 2 = 0, \\ 5 + 2A_3 - 6A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = -\frac{2}{3}$, $A_3 = -\frac{9}{2}$.

Общее решение имеет вид $Y_{o.n} = c_1 + c_2x + c_3e^x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2$.]

Пример 9

Решите уравнение $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$.

∫ Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $Y_{o.o} = e^x(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$. Частное решение уравнения

определяется формулой $y^* = A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x$. Подставляя функцию y^* и ее производные $y^{*'} = -3A_1 \sin 3x + 3A_2 \cos 3x$, $y^{*''} = -9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x$ в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(A_1 - 6A_2) \cos 3x + (6A_1 + A_2) \sin 3x = 37 \cos 3x,$$

откуда
$$\begin{cases} A_1 - 6A_2 = 37, \\ 6A_1 + A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A_1 = 1$, $A_2 = -6$.

Следовательно, $Y_{o.n} = e^x (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6 \sin 3x$. \int

Пример 10

Решите уравнение $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

\int Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm i$, поэтому общее решение однородного уравнения: $Y_{o.o} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Пользуясь принципом суперпозиции (наложения), частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^* = y_1^* + y_2^* = (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}$.

Итак,

$$\begin{cases} 1 & y^* = (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}, \\ + 0 & y^{*'} = A_1 e^x + (A_1 x + A_2)e^x - A_3 e^{-x}, \\ 1 & y^{*''} = 2A_1 e^x + (A_1 x + A_2)e^x + A_3 e^{-x}, \end{cases}$$

$$y^{*''} + y^* = 2A_1 x e^x + (2A_1 + 2A_2)e^x + 2A_3 e^{-x} \equiv x e^x + 2e^{-x}.$$

Отсюда
$$\begin{cases} 2A_1 = 1, \\ 2A_1 + 2A_2 = 0, & A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{2}, \quad A_3 = 1. \\ 2A_3 = 2, \end{cases}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$Y_{o.n} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}. \quad \int$$

Пример 11

Решите уравнение $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

\int Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $Y_{o.o} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. Так как число 2 является двукратным корнем характери-

стического уравнения, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y^* = x^2(A_1x + A_2)e^x = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{2x}$.

Находим

$$y^{*'} = (2A_1x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2x)e^{2x},$$

$$y^{*''} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} 4 & y^* = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{2x}, \\ -1 & y^{*'} = (2A_1x^3 + (3A_1 + 2A_2)x^2 + 2A_2x)e^{2x}, \\ 1 & y^{*''} = (4A_1x^3 + (12A_1 + 4A_2)x^2 + (6A_1 + 8A_2)x + 2A_2)e^{2x}, \end{cases}$$

$$y^{*''} - 4y^{*' } + 4y^* = 6A_1xe^{2x} + 2A_2e^{2x} \equiv xe^{2x}.$$

Отсюда $A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = 0$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$Y_{o.n} = e^{2x}(c_1 + c_2x) + \frac{x^3}{6}e^{2x}. \quad \int$$

Пример 12

Решите задачу Коши $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1, y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) = 1$.

⌈ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, поэтому общее решение однородного уравнения: $Y_{o.o} = c_1 + c_2e^{2x}$.

Пользуясь принципом суперпозиции, частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^* = y_1^* + y_2^* = A_1xe^{2x} + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x$.

Подставляя функцию y^* и ее производные

$$y^{*'} = 2A_1e^{2x} + 2A_1xe^{2x} + 3A_2x^2 + 2A_3x + A_4,$$

$$y^{*''} = 6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x^2 + 2A_3$$

в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$6A_1e^{2x} + 4A_1xe^{2x} + 6A_2x^2 + 2A_3 - 4A_1e^{2x} - 4A_1xe^{2x} - 6A_2x^2 - 4A_3x - 2A_4 \equiv$$

$$\equiv e^{2x} + x^2 - 1, \text{ откуда } \begin{cases} 2A_1 = 1, \\ -6A_2 = 1, \\ -6A_2 - 4A_3 = 0, \\ 2A_3 - 2A_4 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = -\frac{1}{6}, A_3 = -\frac{1}{4}, A_4 = \frac{1}{4}$.

Следовательно, $Y_{o.n} = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x$.

Для того чтобы решить задачу Коши находим

$$Y'_{o.n} = 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + x e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}.$$

Используя начальные условия, получаем систему для определения c_1 и c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{8} \\ 2c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \end{cases}, \text{ откуда находим } c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид $y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x$. \int

Дополнительные задачи

1. Решите уравнения:

а) $y'' - y' + y = 0$; б) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$; в) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$.

Ответ: а) $y = e^{x/2} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$;

б) $y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$;

в) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$.

2. Решите уравнение методом вариации произвольных постоянных:

а) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$; б) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

Ответ: а) $y = \left(\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + c_1 \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x + c_1 \right) \sin 2x$;

б) $y = c_1 + c_2 e^x - \cos(e^x)$.

3. Определите вид частного решения:

а) $y'' + y = x \cos x$; б) $y''' + 2y'' + y' = (2x + 1) \sin x + (x^2 - 4x) \cos x$;

в) $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2$.

Ответ: а) $y = x((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$;

б) $y = (Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex + F) \sin x$;

в) $y = e^x (A \cos x + B \sin x) + x(Cx^2 + Dx + F)$.

4. Решите уравнения:

а) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$; б) $y''' - y'' = -3x + 1$; в) $y'' - y = \cos^2 x$.

Ответ: а) $y = \frac{1}{3} x e^{3x} + 3x^2 + 2x + c_1 + c_2 e^{3x}$;

б) $y = \frac{1}{2} x^3 + x^2 + c_1 e^x + c_2 + c_3 x$;

в) $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cos 2x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Занятия 8–9

Системы дифференциальных уравнений

Пример 1

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x e^{\cos t}. \end{cases}$$

∫ Первое уравнение решаем независимо от второго. Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x} = \sin t dt, \quad \ln|x| = c - \cos t, \quad x = c_1 e^{-\cos t} \quad (c_1 \in R).$$

Подставляем найденное значение $x(t)$ во второе уравнение $\frac{dy}{dt} = c_1$.

Отсюда $y = c_1 t + c_2$. ∫

Пример 2

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t}, \end{cases} \quad t > 0.$$

∫ Сложив почленно данные уравнения, получим

$$\frac{d}{dt}(x + y) = -\frac{1}{t}(x + y), \quad \text{откуда} \quad x + y = \frac{c_1}{t}.$$

Вычитая почленно исходные уравнения, имеем

$$\frac{d}{dt}(x - y) = \frac{1}{t}(x - y), \quad \text{откуда} \quad x - y = c_2 t.$$

Из системы уравнений
$$\begin{cases} x + y = \frac{c_1}{t}, \\ x - y = c_2 t, \end{cases}$$
 находим

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{t} + c_2 t \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{t} - c_2 t \right). \quad \int$$

Пример 3

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - xy^2. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения на y , а второго – на x и сложив почленно полученные уравнения, имеем $y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = \frac{xy}{t}$ или

$$d(xy) = \frac{xy}{t} dt.$$

Отсюда $xy = c_1 t$.

Заменяя в первом уравнении данной системы xy на $c_1 t$, получим $\frac{dx}{dt} = c_1 t x$.

Интегрируя это уравнение, находим $x = c_2 e^{c_1 \frac{t^2}{2}}$. Если $c_2 \neq 0$, то $y = \frac{c_1 t}{x} = \frac{c_1}{c_2} t e^{-c_1 \frac{t^2}{2}}$.

Если $c_2 = 0$, т. е. $x = 0$, то $y = ct$; если $y = 0$, то $x = c$.

Пример 4

Найдите общее решение системы
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y - 4z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + y - 3z = 3x^2 \end{cases}$$
 и частное ее решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -7, z(0) = -1 \frac{3}{4}$.

Дифференцируем по x первое уравнение $y'' + 2y' - 4z' = 0$. Подставим в это уравнение $z' = 3x^2 - y + 3z$, а затем $z = \frac{1}{4}(y' + 2y)$. В результате получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y : $y'' - y' - 2y = 12x^2$.

Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

$$Y_{o.o} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}; Y_{ч.н} = A_1 x^2 + A_2 x + A_3; Y'_{ч.н} = 2A_1 x + A_2; Y''_{ч.н} = 2A_1.$$

Находим неизвестные коэффициенты A_1, A_2, A_3 :

$$2A_1 - 2A_1 x - A_2 - 2A_1 x^2 - 2A_2 x - 2A_3 \equiv 12x^2, A_1 = -6, A_2 = 6, A_3 = -9.$$

Следовательно, $Y_{o.n} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9$,

$$Z_{o.n} = \frac{y' + 2y}{4} = \frac{1}{4} c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 3x^2 - 3.$$

Подставив в полученные соотношения $x = 0, y = -7, z = -1\frac{3}{4}$, получим

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 9 = -7, \\ \frac{1}{4}c_1 + c_2 - 3 = -1\frac{3}{4}, \end{cases} \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1.$$

Частное решение имеет вид
$$\begin{cases} y = e^{-x} + e^{2x} - 6x^2 + 6x - 9, \\ z = \frac{1}{4}e^{-x} + e^{2x} - 3x^2 - 3. \end{cases}$$

Пример 5

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z, \end{cases}$$
 найдите ее частные решения,

удовлетворяющее начальным условиям: $y = -1, z = 2$ при $x = 0$.

Частные решения этой системы ищем в виде $y = \alpha e^{\lambda x}, z = \beta e^{\lambda x}$.

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0. \quad \text{Оно имеет корни } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2. \quad \text{При}$$

$\lambda = \lambda_1 = 1$ система уравнений для нахождения α и β имеет вид

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Она эквивалентна уравнению $\alpha + \beta = 0$, одно из решений которого: $\alpha = 1, \beta = -1$. Поэтому характеристическому числу $\lambda = 1$ соответствует частное решение $y_1 = e^x, z_1 = -e^x$.

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{cases} -3\alpha - 2\beta = 0, \\ 3\alpha + 2\beta = 0. \end{cases}$$

Одно из решений этой системы: $\alpha = 2, \beta = -3$.

Таким образом, $y_2 = 2e^{2x}, z_2 = -3e^{2x}$.

Общим решением системы уравнений будет
$$\begin{cases} y = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \\ z = -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}. \end{cases}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Полагая в общем решении $x = 0, y = -1, z = 2$, имеем
$$\begin{cases} -1 = c_1 + 2c_2, \\ 2 = -c_1 - 3c_2. \end{cases}$$
 откуда $c_1 = 1, c_2 = -1$.

Поэтому частным решением будет
$$\begin{cases} y = e^x - 2e^{2x}, \\ z = -e^x + 3e^{2x}. \end{cases}$$

Пример 6

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

† Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Так как характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 2$ кратностью два, частные решения системы ищем в виде $x = (\alpha + \gamma t)e^{2t}, y = (\beta + \delta t)e^{2t}$. Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим

$$\begin{cases} \gamma + 2(\alpha + \gamma t) = 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t, \\ \delta + 2(\beta + \delta t) = -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha - \gamma + \beta = 0, \\ \gamma + \delta = 0. \end{cases}$$

Полученная алгебраическая система имеет два линейно-независимых решения, так как она содержит четыре неизвестных и ранг матрицы системы не равен нулю.

Очевидно, что в качестве таких решений можно взять, например, $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = \delta = 0$ и $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -1$. Следовательно, найдены два линейно-независимых решения исходных уравнений:

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1(t) = -e^{2t} \quad \text{и} \quad x_2 = (1+t)e^{2t}, \quad y_2(t) = -te^{2t}.$$

Все решения начальной системы уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 (1+t) e^{2t}, \\ y = -c_1 e^{2t} - c_2 t e^{2t}. \end{cases}$$

Пример 7

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

∫ Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $y = \alpha e^{(2+i)x}$, $z = \beta e^{(2+i)x}$, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 2 \pm i$. Числа α и β определяем из уравнения $-i\alpha - \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, находим $\beta = -i$, так что

$$\begin{cases} y = e^{(2+i)x} = e^{2x} (\cos x + i \sin x) \\ z = -i e^{(2+i)x} = e^{2x} (\sin x - i \cos x). \end{cases}$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем два вещественных линейно независимых частных решения

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x} \cos x, \\ z_1 = e^{2x} \sin x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2 = e^{2x} \sin x, \\ z_2 = -e^{2x} \cos x. \end{cases}$$

Общим решением системы будет
$$\begin{cases} y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x), \\ z = e^{2x} (c_1 \sin x - c_2 \cos x). \end{cases}$$

Пример 8

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1 - 2x_3. \end{cases}$$

∫ Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda(\lambda^2 - 1) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Частные решения системы будем искать в виде $x_1 = \alpha e^{\lambda t}$, $x_2 = \beta e^{\lambda t}$, $x_3 = \gamma e^{\lambda t}$.

Корню $\lambda_1 = 0$ соответствует система из двух уравнений (третье есть следствие первых двух):

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0, \\ \beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Одно из решений: $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = -1$.

Отсюда получаем одно решение исходной системы:

$$x_1^{(1)} = 2e^{0t} = 2, \quad x_2^{(1)} = -4e^{0t} = -4, \quad x_3^{(1)} = -1e^{0t} = -1.$$

Корню $\lambda_2 = 1$ соответствует система

$$\begin{cases} 2\gamma = 0, \\ -\alpha - 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Одно из решений: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

Получаем второе решение исходной системы:

$$x_1^{(2)} = 0, \quad x_2^{(2)} = e^t, \quad x_3^{(2)} = 0.$$

Корню $\lambda = -1$ соответствует система

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\gamma = 0, \\ 2\beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Одно из решений: $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -1$.

Отсюда получаем третье решение исходной системы:

$$x_1^{(3)} = e^{-t}, \quad x_2^{(3)} = -2e^{-t}, \quad x_3^{(3)} = -e^{-t}.$$

Общее решение имеет вид

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 2c_1 + c_3 e^{-t}, \\ x_2 = -4c_1 + c_2 e^t - 2c_3 e^{-t}, \\ x_3 = -c_1 - c_3 e^{-t}. \end{cases}$$

Пример 9

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$$

- а) методом вариации произвольных постоянных;
б) методом неопределенных коэффициентов.

$$\text{а) рассмотрим однородную систему } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Ее решение ищем в виде $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$,

где λ – корень уравнения $\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

Соответствующие корню $\lambda_1 = 1$ значения α и β определяем из уравнения $2\alpha + 2\beta = 0$. Одно из решений этого уравнения есть $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Поэтому $x_1 = e^t$, $y_1 = -e^t$ – решение однородной системы. Значения α и β , соответствующие второму корню $\lambda = 4$, определяются из уравнения $-\alpha + 2\beta = 0$. Числа $\alpha = 2$, $\beta = 1$ удовлетворяют этому уравнению, поэтому $x_2 = 2e^{4t}$, $y_2 = e^{4t}$ – решение однородной системы. Общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Решение исходной неоднородной системы ищем в виде

$$\begin{cases} x = c_1(t) e^t + 2c_2(t) e^{4t}, \\ y = -c_1(t) e^t + c_2(t) e^{4t}. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в начальную систему уравнений, получим

$$\begin{cases} c_1'(t) e^t + 2c_2'(t) e^{4t} = 3e^{2t}, \\ c_1'(t) e^t + c_2'(t) e^{4t} = e^{2t}. \end{cases} \quad \text{Отсюда } c_1'(t) = \frac{1}{3} e^t, \quad c_2'(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \quad \text{или}$$

$$c_1(t) = \frac{1}{3} e^t + c_1, \quad c_2(t) = -\frac{2}{3} e^{-2t} + c_2.$$

Подставляем найденные значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в решение неоднородной системы. Окончательно получим

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t}, \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t}; \end{cases}$$

б) общее решение линейной неоднородной системы имеет вид

$$X_{o.n} = X_{o.o} + X_{ч.н}.$$

Найдем $X_{ч.н} = \begin{pmatrix} x_{ч.н} \\ y_{ч.н} \end{pmatrix}$.

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, частное решение системы ищем в виде: $x = \alpha e^{2t}$, $y = \beta e^{2t}$.

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов α и β :

$$\begin{cases} 2\alpha = 3\alpha + 2\beta + 3, \\ 2\beta = \alpha + 2\beta + 1, \end{cases} \quad \alpha = -1, \quad \beta = -1.$$

Таким образом, искомое частное решение есть $x_{ч.н} = -e^{2x}$, $y_{ч.н} = -e^{2x}$, а общее решение системы имеет вид $\int \begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^{2t} \\ y = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} - e^{2t} \end{cases}$

Пример 10

Для системы неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

запишите структуру его частного решения.

∫ Находим корни характеристического уравнения соответствующей однородной системы:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Так как число 1 является простым корнем характеристического уравнения, а число 4 не является корнем характеристического уравнения, частное решение данной системы имеет вид

$$x_{ч.н} = (A_1 + A_2 t)e^t + A_3 e^{4t}, \quad y_{ч.н} = (B_1 + B_2 t)e^t + B_3 e^{4t}. \quad \int$$

Пример 11

Решите систему уравнений $\int \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

∫ Найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Построим комплексное решение вида $x = \alpha e^{it}$, $y = \beta e^{it}$. Числа α и β определяем из уравнения $i\alpha + \beta = 0$. Полагая $\alpha = 1$, находим $\beta = i$.

Таким образом, $x = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $y = ie^{it} = -\sin t + i \cos t$.

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases} x_1 = \cos t, & x_2 = \sin t, \\ y_1 = -\sin t, & y_2 = \cos t. \end{cases}$$

Общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$$

Решение неоднородной системы ищем в виде

$$\begin{cases} x = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \\ y = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Отсюда $c_1'(t) = -\cos t$, $c_2'(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}$.

Интегрируя, находим $c_1(t) = -\int \cos t dt = c_1 - \sin t$,

$$c_2(t) = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = -\int \frac{(1 - \cos^2 t) d \cos t}{\cos^2 t} = c_2 + \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

Поэтому $\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2 \end{cases}$.

Дополнительные задачи

1. Решите систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ сведением к дифференциальному урав-

нению высшего порядка.

Ответ: $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $y = \frac{1}{2}(c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t$.

2. Решите систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ с помощью характеристического урав-

нения.

Ответ: $x = c_1 e^{5t} + c_2 e^t$, $y = 3c_1 e^{5t} - c_2 e^t$.

3. Найдите общее решение системы $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$ методом вари-

ации постоянных.

Ответ: $y = -2e^{-x} + c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$, $z = e^{-x} - c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}$.

4. Найдите общее решение системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \frac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

Ответ: $x = 2c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}$, $y = 3c_1 - 2c_3 e^{2t}$, $z = c_1 + c_2 e^t + 2c_3 e^{2t}$.

Занятие 10
Контрольная работа
Вариант 1

1. Решите задачу Коши

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{8}xe^{2x}.$

2. Найдите общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:

$$y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x.$$

Ответ: $y = 2 \sin 2x \ln |\operatorname{tg} x| + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$

3. Определите вид частного решения:

а) $y'' + 4y' + 5y = 3xe^{-2x} \cos x;$

б) $y''' - 4y' = e^{2x} \cos 2x - 4x.$

Ответ: а) $y = e^{-2x} ((Ax^2 + Bx) \cos x + (Dx^2 + Kx) \sin x);$

б) $y = e^{2x} (A \cos 2x + B \sin 2x) + (Dx^2 + Kx).$

4. Найдите общее решение уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$$

Ответ: $y = c_1 e^{6x} + c_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x}.$

5. Решите задачу Коши

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Ответ: $y = e^{-x} (\cos x + 3 \sin x) + x^2 + 2x.$

6. Решите систему методом исключения:
$$\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$$

Ответ: $y = 2e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad z = 9e^{2x} + 3c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$

7. Решите систему методом Эйлера:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 2z. \end{cases}$$

Ответ: $y = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \quad z = e^{2x} (c_1 \sin 3x - c_2 \cos 3x).$

Вариант 2

1. Решите задачу Коши

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -14.$$

Ответ: $y = e^x - 3xe^x - e^{-3x}$.

2. Найдите общее решение уравнения, используя метод Лагранжа:

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

Ответ: $y = \sin \frac{x}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right| + c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2}$.

3. Определите вид частного решения:

а) $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x \sin 2x$;

б) $y''' - 2y'' = e^{2x} \sin 2x + 3x$.

Ответ: а) $y = e^x((Ax^2 + Bx) \cos 2x + (Dx^2 + Kx) \sin 2x)$;

б) $y = e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + (Dx^3 + Kx^2)$.

4. Найдите общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}.$$

Ответ: $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 3x^2 e^{-x}$.

5. Решите задачу Коши

$$y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

Ответ: $y = e^{3x}(2 \cos 4x - 3 \sin 4x) + \sin 4x$.

6. Решите систему методом исключения:
$$\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x, \\ z' = 3y - 2z + 4e^x. \end{cases}$$

Ответ: $y = xe^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $z = (x+1)e^x + c_1 e^x + 3c_2 e^{-x}$.

7. Решите систему методом Эйлера:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Ответ: $x = e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$, $y = e^t(c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t)$.

Занятия 11–12

Кратные интегралы

Пример 1

Пользуясь определением двойного интеграла, вычислите $I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} xy^2 dx dy$.

Разобьем область интегрирования на элементарные ячейки соответственно прямыми $x = \frac{k}{n}$, $y = \frac{2l}{n}$ ($k, l = 1, 2, \dots, n-1$). При таком разбиении площади всех элементарных ячеек равны между собой и составляют $\frac{2}{n^2}$. При составлении интегральной суммы значения функции xy^2 будем брать в правой верхней вершине прямоугольника. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{2}{n^2} \cdot \frac{4kl^2}{n^3} = \frac{8}{n^5} \sum_{k=1}^n k \sum_{l=1}^n l^2$$

Как известно,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Отсюда, } I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2(n+1)^2(2n+1)}{6 \cdot 2n^5} = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Оцените интеграл $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 100} \frac{dx dy}{100 + \cos x + \sin^2 x}$.

Определим наибольшее и наименьшее значения функции в области интегрирования:

$$M = \max \left(\frac{1}{100 + \cos x + \sin^2 y} \right) = \frac{1}{99};$$

$$m = \min \left(\frac{1}{100 + \cos x + \sin^2 y} \right) = \frac{1}{102}.$$

Площадь интегрирования $S = 100\pi$.

$$\text{Поэтому } \frac{100\pi}{102} \leq I \leq \frac{100\pi}{99}, \quad 3,08 \leq I \leq 3,17.$$

Пример 3

Вычислите повторные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y) dy;$$

$$\text{б) } \int_0^{\sin^2} du \int_0^u \frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}} dv.$$

$$\begin{aligned} \int \text{а) } \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y) dy &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y) d(x+y) = \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \sin x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_0^{\sin^2} du \int_0^u \frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}} dv &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sin^2} u du \int_0^u (u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}} d(u^2-v^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\sin^2} u \sqrt{u^2-v^2} \Big|_{v=0}^{v=u} du = -\int_0^{\sin^2} (-u|u|) du = \int_0^{\sin^2} u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^{\sin^2} = \frac{1}{3} \sin^3 2. \end{aligned}$$

Пример 4

Вычислите двойной интеграл $I = \iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ по прямоугольной

области $D: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$.

С целью упрощения вычислений здесь целесообразно записать внутренний интеграл по переменной x :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-3/2} d(1+x^2+y^2) = \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} \right) dy = \ln \left| \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{y+\sqrt{y^2+2}} \right| \Big|_0^1 = \\ &= \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Пример 5

Измените порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

$$\text{а) } I = \int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x;y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x;y) dy;$$

$$\text{б) } I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x; y) dy.$$

а) в первом интеграле x изменяется от 0 до 1, а y от прямой $y = 0$ до кривой $y = 1 - \sqrt{4x - x^2} - 3$.

Область интегрирования изобразим на чертеже (рис. 6).

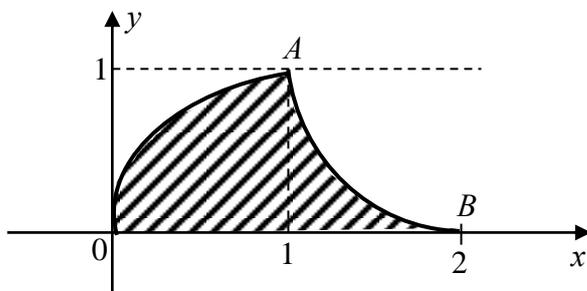


Рис. 6

Разрешим уравнения кривых OA и AB относительно переменной x :

$$y = x^{2/3} \Rightarrow x = y^{3/2};$$

$$y = 1 - \sqrt{4x - x^2} - 3 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2y - y^2}.$$

Следовательно,
$$I = \int_0^1 dy \int_{y^{3/2}}^{2 - \sqrt{2y - y^2}} f(x; y) dx;$$

б) изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 7).

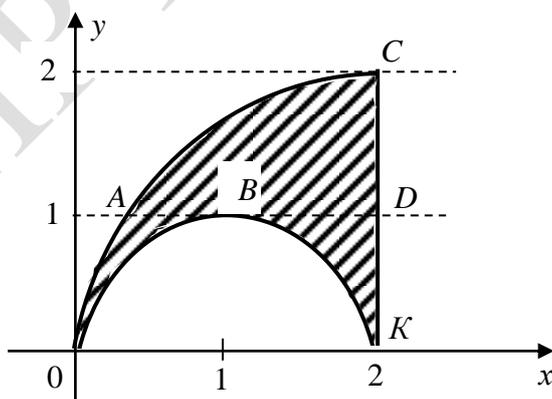


Рис. 7

Если к полуокружности $y = \sqrt{2x - x^2}$ провести касательную, параллельную оси Ox , то она разобьет данную область на три части: OAB , BDK и ACD .

Разрешим уравнения кривых OA , AC и BK относительно переменной x :

$$OA \text{ и } AC: y = \sqrt{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2;$$

$$OB: y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1 - y^2} \quad (x \leq 1);$$

$$BK: y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y^2} \quad (x \geq 1).$$

Уравнение прямой KC имеет вид $x = 2$. В областях OAB и BDK y изменяется от 0 до 1, а в области ACD – от 1 до 2.

Таким образом,

$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x; y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x; y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x; y) dx.$$

Пример 6

Вычислите $I = \int_D xy dx dy$, если $D: y = x - 4, y^2 = 2x$.

┌ Построим данные линии и найдем их точки пересечения (рис. 8)

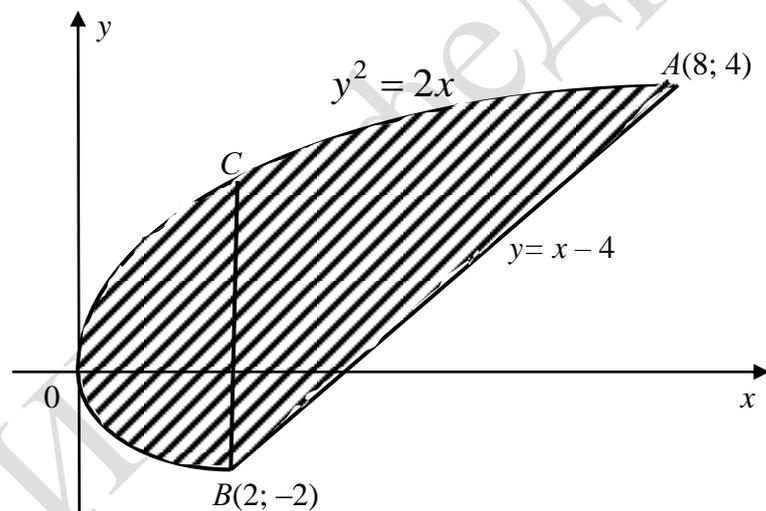


Рис. 8

Если внутренний интеграл записать по переменной x , то двойной интеграл по области D выразится одним двукратным интегралом:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{xy} dx dy = \int_{-2}^4 y dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} x dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 yx^2 \Big|_{x=\frac{1}{2}y^2}^{x=y+4} dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left((y+4)^2 - \frac{y^4}{4} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24} \right) \Big|_{-2}^4 = 90. \end{aligned}$$

Если интегрировать в другом порядке – сначала по y , а затем по x , то нужно было бы область D предварительно разбить прямой BC на две части.

$$\text{В этом случае } I = \int_0^2 x dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy + \int_2^8 x dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} y dx.$$

Вычислив сумму этих двух интегралов, можно убедиться, что результат не зависит от порядка интегрирования. \int

Пример 7

Вычислите $I = \iint_D (\sin x - 2y) dx dy$, если $D: y = x^2, y = 2x + x^2, x = 0,$

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

\int Начертим область интегрирования (рис. 9).

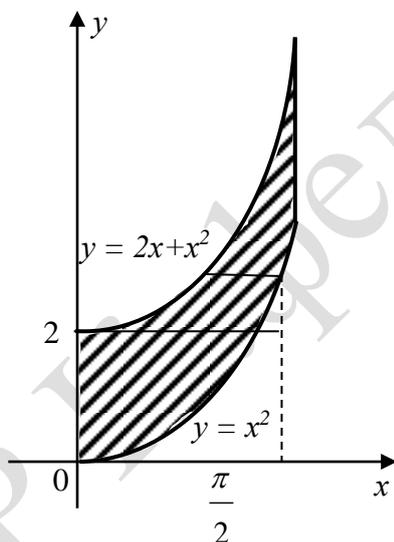


Рис. 9

Если интегрировать вначале по переменной x , то придется область D предварительно разбить прямыми, параллельными оси Ox , на три части. Поэтому целесообразно внутренний интеграл записать по переменной y .

Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (\sin x - 2y) dx dy = \int_0^{\pi/2} dx \int_{x^2}^{2+x^2} (\sin x - 2y) dy = \int_0^{\pi/2} (y \sin x - y^2) dx \Big|_{y=x^2}^{y=2+x^2} = \\ &= \int_0^{\pi/2} ((2+x^2) \sin x - x^2 \sin x - (2+x^2)^2 + x^4) dx = \int_0^{\pi/2} (2 \sin x - 4x^2 - 4) dx = \\ &= 2(1 - \pi) - \frac{\pi^3}{6}. \quad \int \end{aligned}$$

Пример 8

Вычислите $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$, если $D: xy = 1, xy = 3, y = x, y = 2x, x > 0, y > 0$.

┌ Изобразим область интегрирования на чертеже (рис. 10).

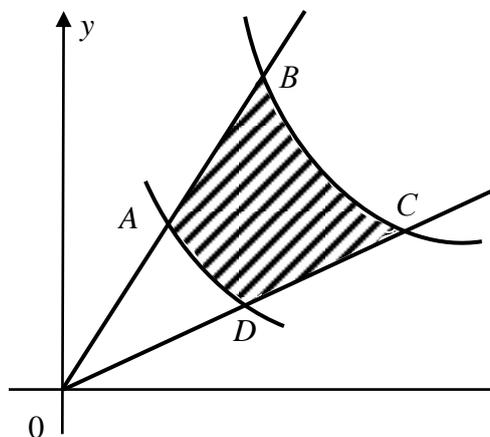


Рис. 10

Для вычисления этого интеграла в декартовой системе координат область $ABCD$ необходимо разбить прямыми, параллельными одной из координатных осей на три части. Затем вычислить интеграл по каждой частичной области и полученные результаты просуммировать. Однако существует более короткий путь вычисления этого интеграла. Осуществим переход к криволинейным координатам по формулам $xy = u, (1 \leq u \leq 3), y = vx, (1 \leq v \leq 2)$.

Отсюда $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$.

При этом, изображением области D является прямоугольник $D_1: 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 2$ (рис. 11).

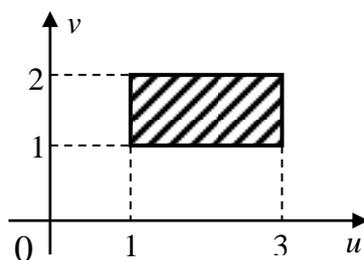


Рис. 11

Определяем якобиан преобразования:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Таким образом,

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy = \iint_{D'} \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_1^2 dv = 1.$$

Пример 9

Переходя к полярным координатам, вычислите

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

Изобразим область интегрирования (рис. 12).

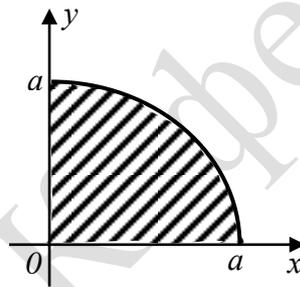


Рис. 12

Перейдем к полярным координатам:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad I(r; \varphi) = r, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Следовательно,

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \varphi \left| \frac{r^3}{3} \right|_0^a = \frac{1}{6} \pi a^3.$$

Пример 10

Вычислите $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, если $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Из аналитического выражения подынтегральной функции и уравнения границы области D следует, что для решения этой задачи целесообразно пе-

рейти к обобщенным полярным координатам. Положив $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, получим

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - r^2}, \quad I(r; \varphi) = abr, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r = 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy &= ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = ab \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 (1 - r^2)^{1/2} d(1 - r^2) = \\ &= ab \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} (1 - r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \pi ab. \end{aligned}$$

Пример 11

Приведите тройной интеграл $\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz$ к трехкратному, если область интегрирования V ограничена поверхностями

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad z = 2 - x^2 - y^2.$$

Очевидно, что тело ограничено снизу параболоидом $z = x^2 + y^2$ и сверху $z = 2 - x^2 - y^2$.

Найдем проекцию тела на плоскость xOy (рис. 13):

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

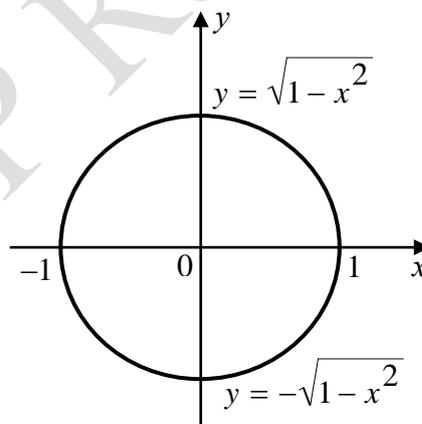


Рис. 13

Следовательно,

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x; y; z) dz.$$

Пример 12

Вычислите $\iiint_V \frac{dx dy dz}{1-x-y}$, если $V: x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$.

┌ Построим данные плоскости. Ограничения или область V есть тетраэдр $OABC$ (рис. 14).

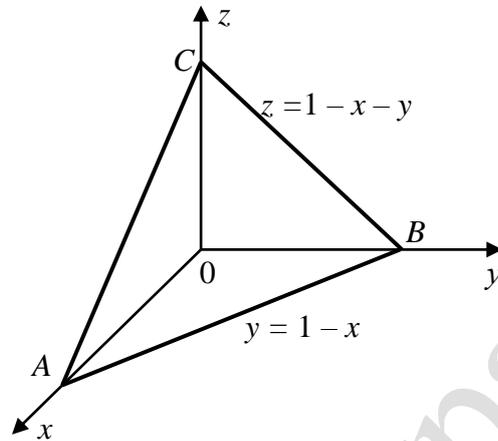


Рис. 14

Любая прямая, проходящая внутри этого тетраэдра параллельно оси Oz пересекает его границу в двух точках. Уравнения плоскостей AOB и ACB имеют вид $z=0$ и $z=1-x-y$ соответственно.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{1-x-y} &= \iint_{AOB} \frac{dx dy}{1-x-y} \int_0^{1-x-y} dz = \iint_{AOB} \frac{dx dy}{1-x-y} \left(z \Big|_0^{1-x-y} \right) = \\ &= \iint_{AOB} dx dy = S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 13

Вычислите $\iiint_V xyz dx dy dz$, если область V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскостями $x=0, y=0, z=0$ (первый октант).

┌ Область V ограничена снизу плоскостью $z=0$ и сверху – поверхностью $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Изобразим проекцию области V на плоскость xOy (рис. 15).

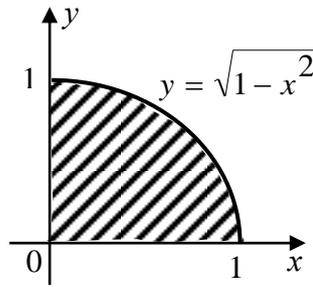


Рис. 15

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y - x^2 y - y^3) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 (2x - 2x^3 - 2x^3 + 2x^5 - x + 2x^3 - x^5) dx = \frac{1}{8} \int_0^1 (x - 2x^3 + x^5) dx = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

Пример 14

Вычислите $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, если $V : x^2 + y^2 = 2x, z = 0, z = 3$.

Проекция области V на плоскость xOy есть круг $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рис. 16).

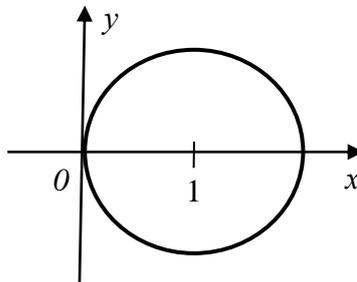


Рис. 16

Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2x$ в этих координатах имеет вид

$$r = 2 \cos \varphi, \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Якобиан преобразования

$$J(r, \varphi) = r, \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr \int_0^3 z dz = \frac{9}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 12 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = 24 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = 24 \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= 24 \cdot \frac{2}{3} = 16. \quad \int \end{aligned}$$

Пример 15

Вычислите $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, если $V: x^2 + y^2 = z^2, z = 1$.

Перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$

$$I(r, \varphi) = r, \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Область V снизу ограничена поверхностью $z = r$ (поверхностью конуса), сверху – плоскостью $z = 1$.

Проекцией области V на плоскость xOy является круг $r \leq 1$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 2\pi \int_0^1 r^2 (1 - r) dr = \\ &= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \quad \int \end{aligned}$$

Пример 16

Вычислите $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, если $V: x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Каноническое уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = z$ имеет вид

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Изобразим сферу (рис. 17) и ее проекцию на плоскость xOy (рис. 18).

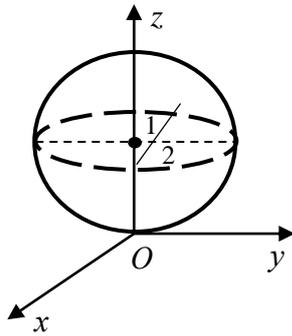


Рис. 17

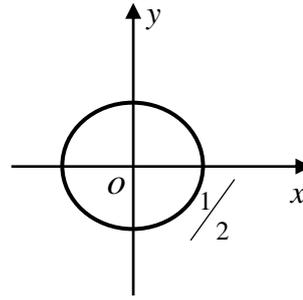


Рис. 18

Перейдем к сферическим координатам:

$$x = r \cos \varphi \sin Q,$$

$$y = r \sin \varphi \sin Q, \quad z = r \cos Q, \quad I = r^2 \sin Q, \quad x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \cos Q, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r.$$

В области V сферические координаты изменяются так:

$$0 \leq r \leq \cos Q, \quad 0 \leq Q \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \int_0^{\pi/2} \sin Q dQ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos Q} r^3 dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 Q \sin Q dQ = \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 Q d \cos Q = -\frac{\pi}{10} \cos^5 Q \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Дополнительные задачи

1. Вычислите повторные интегралы, изменив порядок интегрирования:

$$а) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2} dy;$$

$$б) \int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ответ: а) $\frac{8}{15}$; б) 2.

2. Вычислите двойные интегралы:

$$а) \iint_D (x+2y) dx dy, \quad D: y=x, y=2x, x=2, x=3;$$

$$б) \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1}, \quad D: \{9 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Ответ: а) $\frac{76}{3}$; б) $\pi \ln 3$.

3. Вычислите $\iiint_V (x+2y+3z) dx dy dz$, где V – призма, ограниченная плос-

костями $y=0, z=0, z=2, x+y=2, 2x-y+2=0$.

Ответ: 28.

4. Вычислите $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, перейдя к цилиндрическим координа-

там, если $D = \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2 \right\}$.

Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

5. Вычислите $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, перейдя к сферическим координа-

там, если $D = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8\}$.

Ответ: 63π .

Занятие 13

Приложения кратных интегралов

Пример 1

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = 2x - 1$.

┌ Построим фигуру (рис. 19)

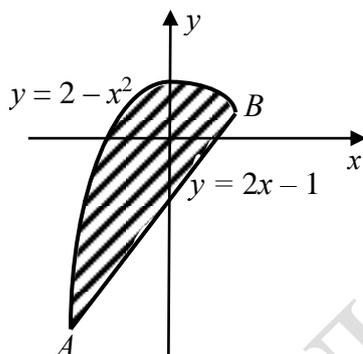


Рис. 19

Решив уравнение $y = 2 - x^2 = 2x - 1$, найдем абсциссы точек A и B : $x_A = -3$, $x_B = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Находим } S &= \iint_D dx dy = \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} dy = \int_{-3}^1 y \Big|_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int_{-3}^1 (2 - x^2 - 2x + 1) dx = \\ &= \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-3}^1 = \left(3 - \frac{1}{3} - 1 \right) - (-9 + 9 - 9) = 10 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2

Найдите площадь, ограниченную линией $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$.

┌ Ввиду симметрии площадь всей фигуры $S = 4S_1$, где S_1 – площадь части фигуры, расположенной в первой четверти. Перейдем к обобщенным полярным координатам: $x = 2r \cos \varphi$, $y = 3r \sin \varphi$, $I = 6r$.

Найдем уравнение линии в обобщенной полярной системе:

$$\left(\frac{4r^2 \cos^2 \varphi}{4} + \frac{9r^2 \sin^2 \varphi}{9} \right)^2 = \frac{4r^2 \cos^2 \varphi}{4} - \frac{9r^2 \sin^2 \varphi}{9};$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Отсюда следует, что в первой четверти полярные координаты изменяются

так: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Таким образом,

$$S = 4 \iint_{D_1} dx dy = 4 \cdot 6 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr = 24 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = 6 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 6.$$

Пример 3

Найдите объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x + z = 6, \quad z = 0.$$

Снизу тело ограничено плоскостью $z = 0$, сверху — плоскостью $z = 6 - x$. Изобразим проекцию тела на плоскость xOy (рис. 20).

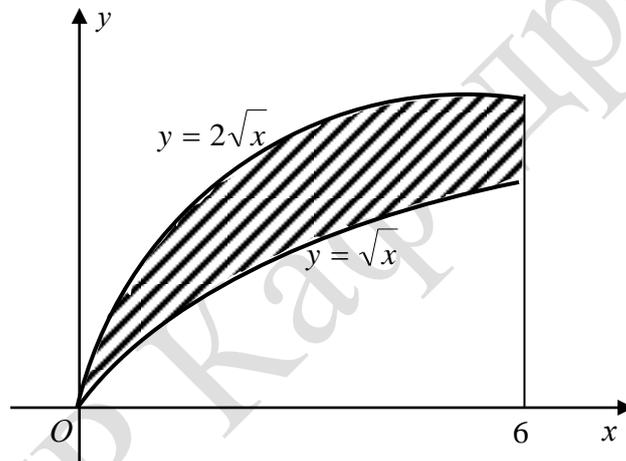


Рис. 20

Следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x) dy = \int_0^6 (6y - xy) \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^6 ((12\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}) - \\ &- (6\sqrt{x} - x\sqrt{x})) dx = \int_0^6 (6x^{1/2} - x^{3/2}) dx = \left(\frac{2}{3} \cdot 6x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_0^6 = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 6^{5/2} - \frac{2}{5} \cdot 6^{5/2} = \frac{4}{15} \cdot 6^{5/2} = \frac{48}{5} \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Пример 4

Вычислите площадь поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

Проекцией поверхности на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

Из уравнения конуса имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Тогда

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \\ = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} S = \sqrt{2} \cdot \pi = \sqrt{2} \pi.$$

Пример 5

Вычислите массу неоднородной пластины D , ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu = 3x + 2y + 6$.

Построим область, ограниченную кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис. 21).

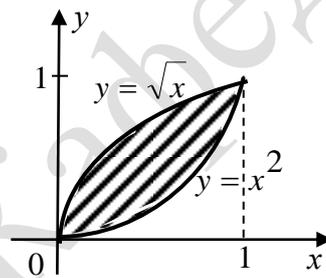


Рис. 21

Из физического смысла двойного интеграла следует, что искомая масса

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3x + 2y + 6) dy = \int_0^1 (3xy + y^2 + 6y) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \\ = \int_0^1 (3x^{3/2} + x + 6x^{1/2} - 3x^3 - x^4 - 6x^2) dx = \\ = \left(\frac{2}{5} 3x^{5/2} + \frac{x^2}{2} + 6 \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - 2x^3 \right) \Big|_0^1 = \\ = \frac{6}{5} + \frac{1}{2} + 4 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5} - 2 = \frac{11}{4}.$$

Пример 6

Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y = 2x^2 - 3$, $y = -7x^2 + 6$, $z = 1 - 5x^2 - 6y^2$, $z = -3 - 5x^2 - 6y^2$.

† Изобразим проекцию тела на плоскость Oxy (рис. 22).

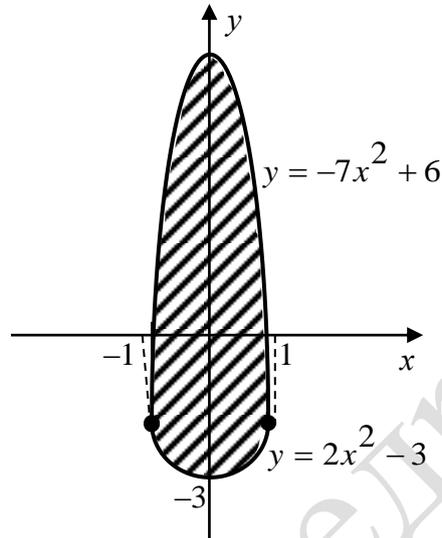


Рис. 22

Ввиду симметрии

$$V = 2 \int_0^1 dx \int_{2x^2-3}^{-7x^2+6} dy \int_{-3-5x^2-6y^2}^{1-5x^2-6y^2} dz = 8 \int_0^1 dx \int_{2x^2-3}^{-7x^2+6} dy = 8 \int_0^1 (-7x^2 + 6 - 2x^2 + 3) dx = 8 \int_0^1 (9 - 3x^2) dx = 8(9x - 3x^3) \Big|_0^1 = 48.$$

Пример 7

Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3, \quad z = 16x + 19.$$

† Снизу тело ограничено параболоидом $z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3$, сверху – плоскостью $z = 16x + 19$.

Найдем проекцию тела на плоскость Oxy :

$$8((x+1)^2 + y^2) + 3 = 16x + 19 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Это окружность радиусом 1 с центром в начале координат. Введем цилиндрические координаты: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $|I| = r$.

$$\text{Тогда } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 8r^2 + 16r \cos \varphi + 11 \leq z \leq 16r \cos \varphi + 19.$$

Имеем

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{8r^2+16r\cos\varphi+11}^{16r\cos\varphi+19} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (8r - 8r^3) dr =$$

$$= 2\pi(4r^2 - 2r^4) \Big|_0^1 = 4\pi.$$

Пример 8

Вычислите объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и конусом $z^2 = x^2 + y^2$, внешнего по отношению к конусу.

┌ По заданным уравнениям поверхностей строим область V (рис. 23).

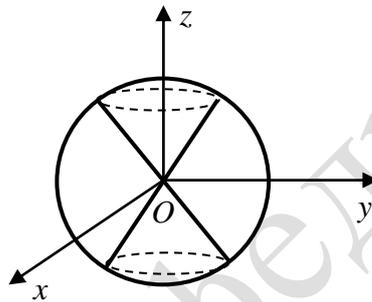


Рис. 23

Тело симметрично относительно плоскости Oxy . Поэтому $V=2V_1$, где V_1 – объем верхней половины тела.

Перейдем к сферическим координатам:

$$x = r \sin Q \cos \varphi, \quad y = r \sin Q \sin \varphi, \quad z = r \cos Q, \quad |I| = r^2 \sin Q.$$

В области V_1 сферические координаты изменяются так:

$$0 \leq r \leq a, \quad \frac{\pi}{4} \leq Q \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Следовательно,

$$V = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin Q \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr = -2 \cos Q \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Пример 9

Вычислите координаты центра масс однородного тела, занимающего область V , ограниченную поверхностями $x = 6(y^2 + z^2)$, $y^2 + z^2 = 3$, $x = 0$.

┌ Строим тело, ограниченное данными поверхностями (рис. 24).

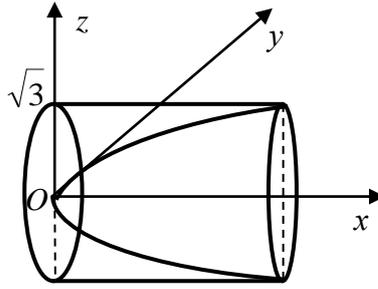


Рис. 24

Его проекция на плоскость Oyz представляет круг, ограниченный окружностью $y^2 + z^2 = 3$ радиусом $\sqrt{3}$. Вычислим вначале массу тела в цилиндрических координатах, считая, что его плотность $\delta = 1$:

$$m = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{6r^2} dx = 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 6r^3 dr = 3\pi r^4 \Big|_0^{\sqrt{3}} = 27\pi.$$

Тогда

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_V x dx dy dz = \frac{1}{27\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{6r^2} x dx = \frac{2}{27} \int_0^{\sqrt{3}} 18r^5 dr =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 27 = 6.$$

Так как тело однородное и симметрично относительно оси Ox , то $y_c = x_c = 0$. \int

Дополнительные задачи

1. Найдите площадь области, ограниченной кривыми:

а) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = 9 - 6x$;

б) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

Ответ: а) $\frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{15}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.

2. Найдите объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

б) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z(x^2 + y^2)$.

Ответ: а) $\frac{45\pi}{32}$; б) $\frac{\pi}{60}$.

3. Найдите координаты центра масс однородного тела

$$\frac{1}{4}(y^2 + 2z^2) \leq x \leq 2.$$

Ответ: $x_c = \frac{4}{3}$, $y_c = z_c = 0$.

Занятие 14

Контрольная работа. Кратные интегралы

Вариант 1

1. Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ к повторному двумя способами, если D – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2;4)$, $B(2;6)$.

$$\text{Ответ: } \iint_D f(x; y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{2x}^{3x} f(x; y) dy = \int_0^4 dy \int_{y/2}^{y/3} f(x; y) dx + \int_4^6 dy \int_{y/3}^{2} f(x; y) dx.$$

2. Вычислите $\iint_D x dx dy$, где D – область, ограниченная кривыми $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$.

$$\text{Ответ: } -\frac{27}{4}.$$

3. Вычислите площадь фигуры $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + y^2$ (перейти к полярным координатам).

$$\text{Ответ: } \frac{5\pi}{2}.$$

4. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 = 1 - y$, $x + y + z = 3$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$\text{Ответ: } \frac{52}{15}.$$

5. Вычислите $\iiint_V y dx dy dz$, если V – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$.

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}.$$

6. Вычислите $\iiint_V y dx dy dz$, $V : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, $y \leq \sqrt{3}x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ с помощью сферических координат.

$$\text{Ответ: } \frac{15\pi}{2}.$$

7. Вычислите координаты центра масс однородного тела, занимающего область V , ограниченную поверхностями $x^2 + z^2 = 4y$, $y = 9$.

$$\text{Ответ: } (0; 6; 0).$$

Вариант 2

1. Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ к повторному двумя способами, если D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1;-1)$, $B(1;4)$.

$$\text{Ответ: } \iint_D f(x; y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{4x} f(x; y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 f(x; y) dx + \\ + \int_0^4 dy \int_{y/4}^1 f(x; y) dx.$$

2. Вычислите $\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy$, $D = \{0 < x, x^3 \leq y \leq x^2\}$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{15}.$$

3. Вычислите площадь фигуры $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ (перейти к полярным координатам).

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{8}.$$

4. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2$, $x + y = 6$, $y = 2x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$\text{Ответ: } 4.$$

5. Вычислите $\iiint_V x dx dy dz$, если V – пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x - y + z = 1$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{24}.$$

6. Вычислите $\iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $V : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $y \leq x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ с помощью сферических координат.

$$\text{Ответ: } \frac{13\sqrt{2}\pi}{12}.$$

7. Вычислите координаты центра масс однородного тела, занимающего область V , ограниченную поверхностями $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$, $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3}{2}; 0; 0\right).$$

Занятия 15–16

Криволинейные и поверхностные интегралы.

Пример 1

Вычислите криволинейный интеграл $I = \int_C \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где C – отрезок

прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

Уравнение прямой OA имеет вид $y = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$). Находим $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx$.

Следовательно,

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{x^2 + 4x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{5}{5}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{5} + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{\frac{4}{5} + x^2} \right) \Big|_0^1 = \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$

Пример 2

Вычислите $I = \int_C (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$ между точками $A(-1;0)$ и $B(0;1)$ по дуге астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Находим $x' = -3\cos^2 t \sin t$, $y' = 3\sin^2 t \cos t$,

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 3|\sin t \cos t| dt = -3\sin t \cos t dt, \text{ так как } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

Следовательно,

$$I = - \int_{\pi/2}^{\pi} (4\cos t - 3\sqrt{\sin^3 t}) 3\sin t \cos t dt = -12 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 t \sin t dt + 9 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{5/2} t \cos t dt = \frac{12}{3} \cos^3 t \Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{18}{7} \sin^{7/2} t \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{46}{7}.$$

Пример 3

Вычислите $I = \int_C xy dl$, где C – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

Запишем параметрическое уравнение эллипса:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Находим $x' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$, $dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} a \cos t b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\
 &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_0^{\pi/2} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} d(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} (a^3 - b^3) = \\
 &= \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}. \quad \int
 \end{aligned}$$

Пример 4

Вычислите $I = \int_C (x + z) dl$, где C – дуга кривой $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$,

$$z = t^3 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Находим $x' = 1$, $y' = \frac{6t}{\sqrt{2}}$, $z' = 3t^2$, $dl = \sqrt{1 + 18t^2 + 9t^4} dt$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 (t + t^3) \sqrt{1 + 18t^2 + 9t^4} dt = \frac{1}{36} \int_0^1 (1 + 18t^2 + 9t^4)^{1/2} d(1 + 18t^2 + 9t^4) = \\
 &= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} (1 + 18t^2 + 9t^4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{54} (56\sqrt{7} - 1). \quad \int
 \end{aligned}$$

Пример 5

Найдите координаты x_0, y_0, z_0 центра тяжести первого полувитка винтовой линии C , заданного уравнениями $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq \pi$, если ее линейная плотность постоянная и равна ρ .

$$\int_C \text{Масса } m = \int_C \rho dl.$$

Так как

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt,$$

то $m = \rho dl$.

Значения x_0, y_0, z_0 находим по формулам

$$x_0 = \frac{\rho}{m_C} \int x dl, \quad y_0 = \frac{\rho}{m_C} \int y dl, \quad z_0 = \frac{\rho}{m_C} \int z dl.$$

Таким образом,

$$x_0 = \frac{\rho}{m_0} \int_0^\pi a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0,$$

$$y_0 = \frac{\rho}{m_0} \int_0^\pi a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{2a}{\pi},$$

$$z_0 = \frac{\rho}{m_0} \int_0^\pi b t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{b\pi}{2}.$$

Пример 6

Вычислите $I = \int_{AB} (4x + y)dx + (x + 4y)dy$, где кривая AB задана уравне-

нием $y = x^4$, $A(1; 1)$, $B(-1; 1)$.

Учитывая, что $y = x^4$, $dy = 4x^3 dx$ и x изменяется от 1 до -1 , получаем

$$I = \int_{+1}^{-1} (4x + x^4 + (x + 4x^4) \cdot 4x^3) dx = \int_{+1}^{-1} (16x^7 + 5x^4 + 4x) dx =$$

$$= (2x^8 + x^5 + 2x^2) \Big|_{+1}^{-1} = -2.$$

Пример 7

Вычислите $I = \int_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2 dz$, где C – кривая $x = t$, $y = t^2$,

$z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

Так как $dx = dt$, $dy = 2t dt$, $dz = 3t^2 dt$, то

$$I = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2) dt = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4) dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \left(\frac{3}{7} t^7 - \frac{2}{5} t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{35}.$$

Пример 8

Найдите работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точ-

ка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в первом квадранте.

┌ Запишем параметрическое уравнение кривой: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Точка движется под действием силы $\vec{F} = k(-a \cos t \vec{i} - b \sin t \vec{j})$. Находим $dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$.

Работа силы \vec{F} по пути AB вычисляется по формуле

$$A = \int_{AB} F_x dx + F_y dy = k \int_0^{\pi/2} (a^2 \sin t \cos t + b^2 \sin t \cos t) dt =$$

$$= -k \frac{(b^2 - a^2)}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{k(b^2 - a^2)}{4} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{k(a^2 - b^2)}{2}.$$

Пример 9

Применяя формулу Грина, вычислите

$I_1 = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy$, где C – окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против часовой стрелки.

┌ Находим

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Следовательно,

$$I_1 = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |I| = r, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Пример 10

Вычислите площадь S фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

┌ Пользуясь формулой $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$, находим

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3ab \cos^4 t \sin^2 t + 3ab \sin^4 t \cos^2 t) dt = \frac{3}{2} ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{16} ab \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3ab\pi}{8}.$$

Пример 11

Докажите, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислите интеграл

$$I = \int_{AB} (x^2 + 4xy^3) dx + (6x^2 y^2 - 5y^4) dy,$$

где $A(-2; -1)$, $B(3; 0)$.

$$\int \text{Здесь } P = x^2 + 4xy^3, \quad Q = 6x^2 y^2 - 5y^4, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2.$$

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, выражение $Pdx + Qdy$ явля-

ется полным дифференциалом, а криволинейный интеграл $I = \int_{AB} Pdx + Qdy$ не

зависит от пути интегрирования. Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную AMB (рис. 25).

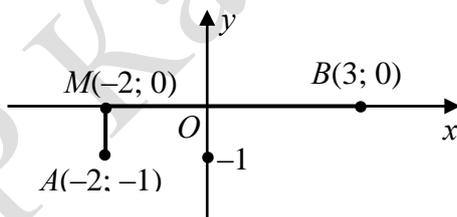


Рис. 25

Вдоль отрезка AM и $x = -2$, $dx = 0$, $-1 \leq y \leq 0$, поэтому

$$\int_{AM} Pdx + Qdy = \int_{-1}^0 (24y^2 - 5y^4) dy = (8y^3 - y^5) \Big|_{-1}^0 = 7.$$

Вдоль отрезка MB имеем $y = 0$, $dy = 0$, $-2 \leq x \leq 3$. Поэтому

$$\int_{MB} Pdx + Qdy = \int_{-2}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \frac{35}{3}.$$

Искомый интеграл равен сумме вычисленных интегралов, т. е. $\frac{56}{3}$.

Пример 12

Покажите, что дифференциальное выражение

$$du = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции и найдите эту функцию.

┌ Так как

$$P(x; y) = x^2 + 2xy - y^2, \quad Q(x; y) = x^2 - 2xy - y^2,$$

$$\text{то } \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$$

Значит во всех точках плоскости Oxy данное дифференциальное выражение будет полным дифференциалом. Для нахождения функции $u(x; y)$ воспользуемся формулой

$$u(x; y) = \int_{x_0}^x P(x; y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x; y)dy + C,$$

где можно взять $x_0 = y_0 = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} u(x; y) &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)dy + C = \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + (x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3}) \Big|_{y=0}^{y=y} + C = \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Пример 13

Вычислите поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint_S (6x + 4y + 3z)dS,$$

где S – часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в первом октанте.

┌ Поверхность S однозначно проецируется на плоскость Oxy (рис. 26).

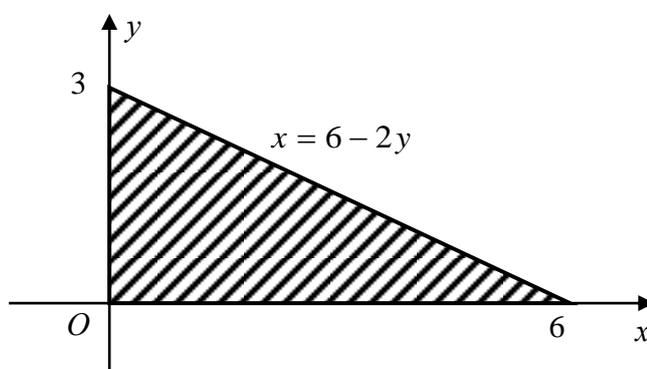


Рис. 26

Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностный интеграл в двойной:

$$z = \frac{1}{3}(6 - 2x - 2y), \quad dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy,$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_{D_{xy}} (5x + 2y + 6) dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (5x + 2y + 6) dx = \\ &= \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 \left(\frac{5}{2} x^2 + 2xy + 6x \right) \Big|_{x=0}^{x=6-2y} dy = 2\sqrt{14} \int_0^3 (y^2 - 10y + 21) dy = \\ &= 2\sqrt{14} \left(\frac{y^3}{3} - 5y^2 + 21y \right) \Big|_0^3 = 54\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Пример 14

Вычислите поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint_S z dS,$$

где S – часть гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 \leq 4$.

Проекцией поверхности S на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\text{Находим } dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

$$\text{Имеем } I = \iint_S z dS = \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, находим

$$I = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d \sin \varphi \int_0^2 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = 0.$$

Пример 15

Найдите массу поверхности куба $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, если поверхностная плотность в точке $M(x; y; z)$ равна xuz .

Ввиду симметрии масса поверхности куба равна утроенной массе верхней грани куба (масса трех граней куба равна нулю).

$$\text{Найдем массу верхней грани куба } m_1 = \iint_S \rho(x; y; z) dS.$$

Проекция поверхности S на плоскость Oxy представляет собой квадрат $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, поэтому

$$dS = dx dy \text{ и } m_1 = \int_{D_{xy}} xy \cdot 1 dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $m = 3m_1 = \frac{3}{4}$. \int

Пример 16

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint_S dx dy,$$

где S – нижняя сторона части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \leq z \leq 1$.

\int Нормаль к поверхности образует тупой угол с осью Oz . Проекцией данной части конуса на плоскость Oxy является круг $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$. Сведем поверхностный интеграл к двойному: $I = \iint_S dx dy = - \iint_{D_{xy}} dx dy$.

Так как $\iint_{D_{xy}} dx dy = S_{\text{круга}} = \pi$, то $I = -\pi$. \int

Пример 17

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint_S dx dy + y dx dz - x^2 z dy dz,$$

где S – внешняя сторона части эллипсоида $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, расположенной в первом октанте.

\int Расчленим данный поверхностный интеграл на три слагаемых интеграла

$$I = \iint_S dx dy + \iint_S y dx dz - \iint_S x^2 z dy dz.$$

Каждый из полученных интегралов преобразуем в двойной интеграл, учитывая, что нормаль к ориентированной поверхности образует острые углы с осями Ox , Oy , Oz .

Находим

$$I_1 = \iint_S dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy,$$

где D_{xy} – четверть области $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

Этот интеграл равен четверти площади эллипса с полуосями $a = 1$, $b = 2$,

т. е. $I_1 = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$I_2 = \iint_S y dx dz = 2 \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 - x^2 - z^2} dx dz,$$

где D_{xz} – четверть круга $x^2 + z^2 \leq 1$.

Переходя к полярным координатам, получим

$$I_2 = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r(1-r^2)^{1/2} dr = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-r^2)^{1/2} d(1-r^2) = -\frac{\pi}{3} (1-r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3};$$

$$I_3 = \int_0^1 z dz \int_0^{2\sqrt{1-z^2}} \left(1 - \frac{y^2}{4} - z^2\right) dy = \int_0^1 z \left(y - \frac{y^3}{12} - z^2 y \right) \Big|_{y=0}^{y=2\sqrt{1-z^2}} dz =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 z(1-z^2)^{3/2} dz = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (1-z^2)^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

Следовательно, $I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{4}{15} = \frac{5}{6}\pi - \frac{4}{15}$. \int

Пример 18

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

\int Рассмотрим интеграл $I_1 = \iint_S z dx dy$. Его можно представить в виде

суммы интегралов по верхней и нижней сторонам сферы, которые обозначим соответственно S_+ и S_- : $I_1 = \iint_{S_+} z dx dy + \iint_{S_-} z dx dy$.

На поверхности S_+

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

а на поверхности S_-

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Но нормаль к поверхности S_+ образует острый угол с осью Oz , а нормаль к поверхности S_- образует тупой угол с осью Oz . С учетом того, что проекции S_+ и S_- на плоскость Oxy совпадают, имеем

$$I_1 = 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = -\frac{4}{3} \pi (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Из очевидных равенств $\iint_S x dy dz = \iint_S y dz dx = I_1$ окончательно находим

$$I = 4\pi a^3. \quad \int$$

Пример 19

Вычислите поверхностный интеграл второго рода

$$I = \iint_S x dy dz + y dx dz - 3z dx dy,$$

где S – часть внешней поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 4$.

↑ Воспользуемся формулой

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iint_{D_{xy}} (\bar{a}, \bar{n}) \Big|_{z=f(x;y)} dx dy.$$

В нашем случае $\bar{a} = (x; y; -3z)$, $\bar{n} = \pm(-z'_x; -z'_y; 1) = \pm(-2x; -2y; 1)$.

Так как внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz , $\bar{n} = (2x; 2y; 1)$.

Находим $(\bar{a}; \bar{n}) = 2x^2 + 2y^2 + 3z$. Таким образом,

$$I = \iint_{D_{xy}} (2x^2 + 2y^2 + 3z) \Big|_{z=x^2+y^2} dx dy = 5 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Областью интегрирования является круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Переходя к полярной системе координат, получим

$$I = 5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 40\pi. \quad \int$$

Пример 20

Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислите

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x = y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

↑ Используя формулу Гаусса – Остроградского, получаем

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V dV = 3V = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \quad \int$$

Пример 21

Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, вычислите

$$I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy,$$

где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

↑ Используя формулу Гаусса – Остроградского, находим

$$I = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$I = \int_0^\pi \sin\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^4 dr = \frac{12}{5} \pi a^5. \quad \int$$

Пример 22

Применяя формулу Стокса, вычислите

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz,$$

где C – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

┌ По формуле Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

имеем

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = -\iint_S dydz + dzdx + dxdy = -\iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS.$$

В качестве поверхности S можно взять круг радиусом a с центром в начале координат, лежащий в плоскости $z = -x - y$.

Найдем направляющие косинусы нормали к плоскости $z = -x - y$:

$$\cos \alpha = \frac{-z'_x}{\pm \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos \beta = \frac{-z'_y}{\pm \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}.$$

Так как нормаль к плоскости образует с осями острые углы, получаем

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$I = -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3} \cdot S,$$

где $S = \pi a^2$.

Окончательно получим $I = -\sqrt{3}\pi a^2$.

Самостоятельная работа к занятиям 15–16

Вариант 1

1. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int_C (x - y)dl$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 2x$ ($x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$).

Ответ: 2π .

2. Вычислите $\int_{OA} xydx - y^2dy$, $O(0; 0)$, $A(2; 2)$, $y^2 = 2x$.

Ответ: $\frac{8}{15}$.

3. Вычислите $\iint_S (2x + 15y + z)dS$, где S – часть плоскости $x + 2y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

Ответ: 10.

4. Вычислите $\iint_S xdydz$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi$.

5. Вычислите с помощью формулы Гаусса – Остроградского $\iint_S 3xdydz + (y + z)dxdz + (x - z)dxdy$, где S – внешняя поверхность пирамиды, образованная плоскостью $x + 3y + z = 3$ и координатными плоскостями.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Вариант 2

1. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int_C (x^2 + y^2) dl$, где C

– окружность $x^2 + y^2 = 4x$ ($x = 2 + 2\cos t$, $y = 2\sin t$).

Ответ: 32π .

2. Вычислите $\int_{OA} y(x - y) + x dy$, $O(0; 0)$, $A(1; 2)$, $y^2 = 4x$.

Ответ: $-\frac{8}{15}$.

3. Вычислите $\iint_S (4x - 4y - z) dS$, где S – часть плоскости $x = 2y + 2z = 4$,

отсеченная координатными плоскостями.

Ответ: 44.

4. Вычислите $\iint_S x^2 dy dz$, где S – внешняя сторона части сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

Ответ: $-\frac{\pi R^4}{4}$.

5. Вычислите с помощью формулы Гаусса – Остроградского

$\iint_S (x + z) dy dz + (z - x) dx dz + (x + 2y + z) dx dy$, где S – внешняя поверх-

ность пирамиды, образованная плоскостью $x + 3y + z = 2$ и координатными плоскостями.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

Дополнительные задачи

1. Вычислите криволинейный интеграл первого рода по кривой C :

$$\int_C (2x + y) dl, \text{ где } C \text{ – ломаная } ABOA, A(1; 0), B(0; 2), O(0; 0).$$

Ответ: $3 + 2\sqrt{5}$.

2. Вычислите $\int_C (x + y) dl$, где C – четверть окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = x, \text{ расположенная в первом октанте.}$$

Указание. $C : x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, z = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$.

Ответ: $a^2 \sqrt{2}$.

3. Вычислите $\int_{AB} xy dx - y^2 dy$, где AB – дуга параболы $y^2 = 2x$, $A(0; 0)$,

$B(2; 2)$.

Ответ: $\frac{8}{15}$.

4. Вычислите $\int_C y dx + z dy + x dz$ в направлении возрастания параметра,

где C – виток винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Ответ: $-\pi a^2$.

5. Вычислите $\iint_S z^2 dS$, где S – полная поверхность конуса

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2.$$

Ответ: $8\pi(2 + \sqrt{2})$.

6. Вычислите $\iint_S (2z - x) dy dz + (x + 2z) dz dx + 3z dx dy$, где S – верхняя

сторона плоскости треугольника $x + 4y + z, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Ответ: $\frac{128}{3}$.

7. Вычислите $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dy + z^3 dx dy$, где S – внешняя сторона бо-

ковой поверхности конуса $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1$.

Указание. Замкнуть поверхность плоскостью $z = 1$ и применить формулу Гаусса – Остроградского.

Ответ: $-\frac{\pi}{10}$.

8. Применив формулу Стокса, вычислите

$$\int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz, \text{ где } L - \text{кривая пересечения па-}$$

раболоида $x^2 + y^2 + z = 3$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентирована положи-
тельно относительно вектора $(1; 0; 0)$.

Ответ: -12π .

БГУИР Кафедра ВМ

Занятия 17–18

Поток векторного поля. Дивергенция. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Потенциальные поля

Пример 1

Найдите поток вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ через площадку, перпендикулярную оси Oz и имеющую форму круга радиусом R , в положительном направлении оси Oz .

Согласно определению потока вектора через поверхность S , будем иметь $\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}_0) dS$.

В нашем случае $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{n}_0 = \vec{k}$, так что $(\vec{a}, \vec{n}_0) = 3$. Учитывая, что площадь круга равна πR^2 , получим $\Pi = \iint_S 3 dS = 3 \iint_S dS = 3\pi R^2$.

Пример 2

Найдите поток векторного поля $\vec{a} = \vec{r}$, где \vec{r} – радиус-вектор через прямой круговой цилиндр с высотой h , радиусом основания R и осью Oz $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Поверхность S состоит из боковой поверхности S_1 , верхнего основания S_2 и нижнего основания S_3 цилиндра. Искомый поток Π в силу свойств аддитивности равен $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где Π_1, Π_2, Π_3 – потоки данного поля через S_1, S_2, S_3 соответственно.

На боковой поверхности S_1 $(\vec{a}, \vec{n}_0) = (\vec{r}, \vec{n}_0) = n \rho_n \vec{r} = R$ (рис. 27).

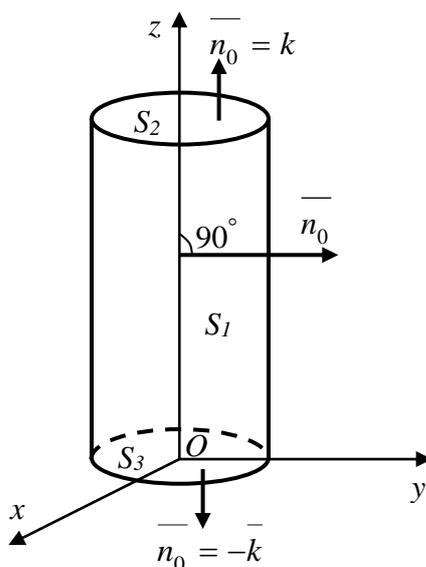


Рис. 27

Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = R \iint_{S_1} dS = R \cdot 2\pi R h = 2\pi R^2 h.$$

На верхнем основании $(\bar{a}, \bar{n}_0) = (\bar{r}, \bar{k}) = n \rho_{02} \bar{r} = h$, и значит,

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = h \iint_{S_2} dS = \pi R^2 h.$$

На нижнем основании S_3 вектор \bar{r} перпендикулярен вектору $\bar{n}_0 = -\bar{k}$.

Поэтому $(\bar{a}, \bar{n}_0) = 0$ и $\Pi_3 = 0$.

$$\text{Искомый поток равен } \Pi = \iint_S (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = 3\pi R^2 h. \quad \int$$

Пример 3

Вычислите поток вектора $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}$ через внешнюю поверхность гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 3h^2$, ограниченную плоскостями $z = 0, z = h$ (рис. 28). Данная поверхность проектируется взаимно однозначно на плоскость xOy в кольцо Dxy (рис. 29).

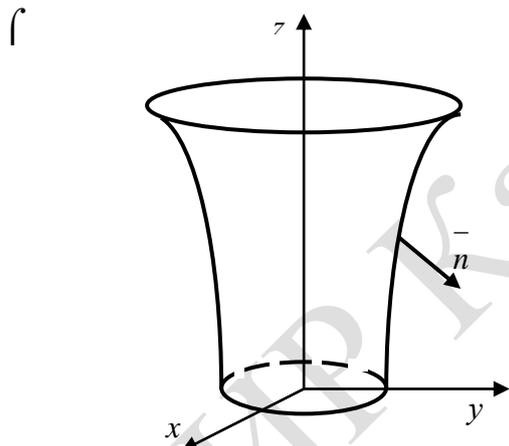


Рис. 28

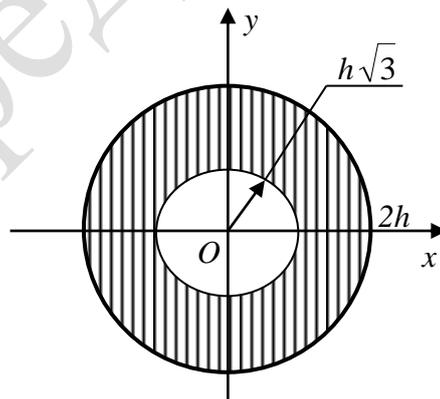


Рис. 29

Находим орт нормали \bar{n}_0 к поверхности S :

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 - z^2)}{|\text{grad}(x^2 + y^2 - z^2)|} = \pm \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

По условию задачи нормаль \bar{n}_0 образует тупой угол с осью Oz , поэтому перед дробью надо взять знак плюс. Таким образом,

$$\bar{n}_0 = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Отсюда $\cos \gamma = \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} < 0$ и, значит,

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dxdy.$$

Находим скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{n}_0) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

$$\Pi = \iint_S (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} \Big|_{z = \sqrt{x^2 + y^2 - 3h^2}} dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{(2x^2 + 2y^2 - 3h^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3h^2}} dxdy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\sqrt{3}}^{2h} r \sqrt{r^2 - 3h^2} dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\sqrt{3}}^{2h} \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2 - 3h^2}};$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\sqrt{3}}^{2h} r \sqrt{r^2 - 3h^2} dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_{h\sqrt{3}}^{2h} (r^2 - 3h^2)^{1/2} d(r^2 - 3h^2) =$$

$$= \pi \cdot \frac{2}{3} (r^2 - 3h^2)^{3/2} \Big|_{h\sqrt{3}}^{2h} = \frac{2}{3} \pi h^3;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\sqrt{3}}^{2h} \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2 - 3h^2}} = \left| \begin{array}{l} r^2 - 3h^2 = z^2 \\ r dr = z dz \\ r^2 = z^2 + 3h^2 \end{array} \right| = 2\pi \int_0^h (z^2 + 3h^2) dz =$$

$$= 2\pi \int_0^h (z^2 + 3h^2) dz = 2\pi \left(\frac{z^3}{3} + 3h^2 z \right) \Big|_0^h = 2\pi \left(\frac{h^3}{3} + 3h^3 \right) = \frac{20}{3} \pi h^3;$$

$$\Pi = \frac{2}{3} \pi h^3 + \frac{20}{3} \pi h^3 = \frac{22}{3} \pi h^3. \quad \int$$

Пример 4

Даны векторное поле $\bar{a} = (y - x + z)\bar{j}$ и плоскость $p: 2x - y + 2z - 2 = 0$, которая ограничена координатными плоскостями. Требуется вычислить поток векторного поля \bar{a} через часть плоскости P в том направлении нормали к плоскости P , которая образует с осью Oz острый угол.

Если поверхность S взаимно однозначно проецируется на все три координатные плоскости, то поток вектора $\bar{a} = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$ через поверхность S можно записать так:

$$\Pi = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y; z), y; z) dy dz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x; y(x; z); z) dx dz \pm \iint_{D_{xy}} R(x; y; z(x; y)) dx dy,$$

причем знак в каждой из формул выбирается таким, какой знак $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ на поверхности S . В качестве нормального вектора плоскости P можно взять вектор $\bar{n} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ ($\cos \gamma > 0$), откуда получим $\cos \gamma > 0$, $\cos \beta < 0$. Так как в нашем случае $P(x; y; z) = R(x; y; z) = 0$, будем иметь

$$\Pi = - \iint_{D_{xz}} (y - x + z) \Big|_{y = 2x + 2z - 2} dx dz = - \iint_{D_{xz}} (x + 3z - 2) dx dz,$$

где D_{xz} – проекция части плоскости P на плоскость xOz (рис. 30).

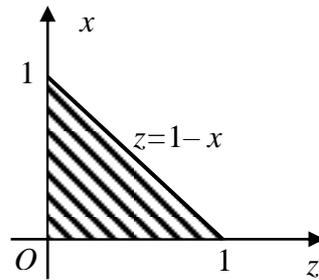


Рис. 30

$$\begin{aligned} \Pi &= - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + 3z - 2) dz = - \int_0^1 \left(xz + \frac{3}{2} z^2 - 2z \right) \Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 (2xz + 3z^2 - 4z) \Big|_{z=0}^{z=1-x} dx = - \frac{1}{2} \int_0^1 (2x - 2x^2 + 3 - 6x + 3x^2 - 4 + 4x) dx = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1) dx = - \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Пример 5

Пользуясь инвариантным определением вычислите дивергенцию вектора $\bar{a} = z\bar{k}$ в произвольной точке M , выбрав в качестве поверхностей S , окружающих точку M , поверхности куба с гранями, параллельными координатным плоскостям, и стороной куба, равной ε (рис. 31).

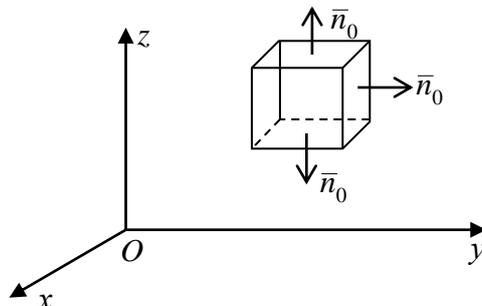


Рис. 31

По определению дивергенции в нашей точке имеем

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\bar{a}, \bar{n}_0) dS}{V},$$

где V – объем куба.

Поверхность S состоит из боковой поверхности S_1 , нижнего основания S_2 и верхнего основания S_3 .

Пусть для определенности уравнение нижней грани – $z = h$. Тогда уравнение верхней грани – $z = h + \varepsilon$. Поток вектора Π_1 через боковую поверхность S_1 равен нулю, так как \bar{a} перпендикулярен \bar{n}_0 .

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = \iint_{S_2} -hdS = -h\varepsilon^2.$$

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = \iint_{S_3} (h + \varepsilon) dS = h\varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \varepsilon^3.$$

$$\text{Следовательно, } \operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi}{V} = 1.$$

Пример 6

Найдите дивергенцию векторного поля $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z^3\bar{k}$ в точке $A(1; -1; 3)$. Будет ли данная точка источником или стоком поля?

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} = x^2 + y^2 + 3z^2; \quad \operatorname{div} \bar{a}(A) = 29 > 0.$$

Следовательно, точка A является источником векторного поля. \int

Пример 7

Применяя формулу Гаусса – Остроградского, вычислите поток векторного поля $\bar{a} = (x - y)\bar{i} + (z - y)\bar{j} + (2z - x)\bar{k}$ через сферу $x^2 + 6x + y^2 + z^2 = 0$.

\int Запишем уравнение сферы в виде $(x + 3)^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Радиус сферы

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial(x - y)}{\partial x} + \frac{\partial(x - y)}{\partial y} + \frac{\partial(2z - x)}{\partial z} = 1 - 1 + 2 = 2, \text{ равен } 3.$$

Находим

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a}(M) dV = 2 \iiint_V dV = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 72\pi. \int$$

Пример 8

Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через боковую поверхность S_1 конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ в сторону внешней нормали.

Дополним заданную поверхность S_1 до замкнутой кусочно-гладкой поверхности S основанием конуса – кругом $S_2: x^2 + y^2 \leq h^2, z = h$.

Применим теперь формулу Гаусса – Остроградского к области V , ограниченной замкнутой поверхностью S :

$$\iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS + \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz.$$

На круге S_2 имеем $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + h^2\vec{k}$, $\vec{n}_0 = \vec{k}$, поэтому

$$\iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) = \iint_{S_2} h^2 dS = \pi h^4.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Уравнение конической поверхности примет вид $z = r$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h (r(\cos \varphi + \sin \varphi) + z) dz = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h z dz = 2\pi \int_0^h r(h^2 - r^2) dr = 2\pi \left(\frac{r^2 h^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{\pi}{2} h^4. \end{aligned}$$

Искомый интеграл по боковой поверхности равен

$$\iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}_0) = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2} h^4.$$

Пример 9

Вычислите линейный интеграл в векторном поле $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в направлении от точки $A(0;0;0)$ до точки $B(1;1;1)$ вдоль отрезка прямой, проходящей через эти точки.

$$\int_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{AB} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz.$$

Запишем параметрическое уравнение прямой AB :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \quad t \in [0;1]. \\ z = t, \end{cases}$$

Отсюда $dx = dy = dz = dt$.

Искомый линейный интеграл будет равен

$$\int_0^1 (t^2 + t^2 + t^2) dt = \frac{3}{3} t^3 \Big|_0^1 = 1. \quad \int$$

Пример 10

Вычислите циркуляцию вектора $\bar{a} = z^2 \bar{i} + x \bar{j} + y \bar{k}$ по контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = y. \end{cases}$$

$$\int \text{Параметрическое уравнение линии } L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ z = y = \sin t, \end{cases}$$

так что $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$, $dz = \cos t dt$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t + \sin t \cos t) dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi. \quad \int \end{aligned}$$

Пример 11

Для векторного поля $\bar{a} = z^3 \bar{i} + y^3 \bar{j} + x^3 \bar{k}$ найдите вектор, направленный так, что для перпендикулярной к нему плоскости плотность циркуляции в точке $P(1; 2; 2)$ будет наибольшей. Найдите величину этой плотности циркуляции.

\int Указанным условиям удовлетворяют векторы $\text{rot} \bar{a}(p)$ и $|\text{rot} \bar{a}(p)|$ соответственно:

$$\text{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & y^3 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & x^3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & x^3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z^3 & y^3 \end{vmatrix} \bar{k} = 3(z^2 - x^2) \bar{j};$$

$$\text{rot} \bar{a}(p) = 9 \bar{j}; \quad |\text{rot} \bar{a}(p)| = 9. \quad \int$$

Пример 12

Вычислите циркуляцию вектора $\bar{a} = xz \bar{i} + xy^2 \bar{j} + yz^2 \bar{k}$ по контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0) \end{cases} \quad \text{непосредственно и по теореме Стокса.}$$

Для параметрического задания контура необходимо найти радиус окружности, являющейся пересечением конуса и сферы (рис. 32). Для этого нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = z^2, \end{cases} \quad 2z^2 = 9, \quad z = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad R = z = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

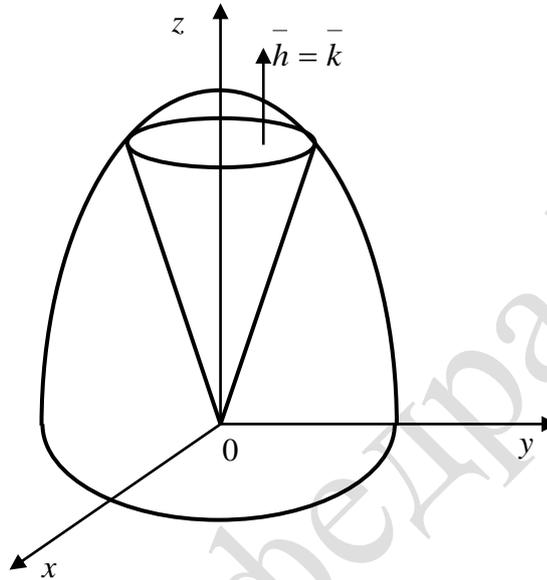


Рис. 32

Параметрическое уравнение контура

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z = \frac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

Отсюда

$$dx = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin t, \quad dy = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t dt, \quad dz = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{27}{2\sqrt{2}} \sin t \cos t + \frac{81}{4} \cos^2 t \sin^2 t \right) dt = \\ &= \frac{81}{16} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{81}{32} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{81}{32} \int_0^{2\pi} dt = \frac{81}{16} \pi. \end{aligned}$$

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy^2 & z^2y \end{vmatrix} = z^2 \bar{i} + x \bar{j} + y^2 \bar{k}.$$

Натянем на контур L часть плоскости $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\bar{n}_0 = \bar{k}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{n}_0) dS = \iint_S y^2 dS = |dS = dx dy| = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy = \left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r(r^2 \sin^2 \varphi) dr = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^3 dr = \pi \frac{1}{4} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{81}{16} \pi. \end{aligned}$$

Пример 13

Вычислите циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + (z - y)\bar{k}$ по кон-

туру $L = \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \\ z = x\sqrt{3}, \end{cases}$ непосредственно и по теореме Стокса.

(Найдем проекцию L на плоскость xOy (рис. 33).

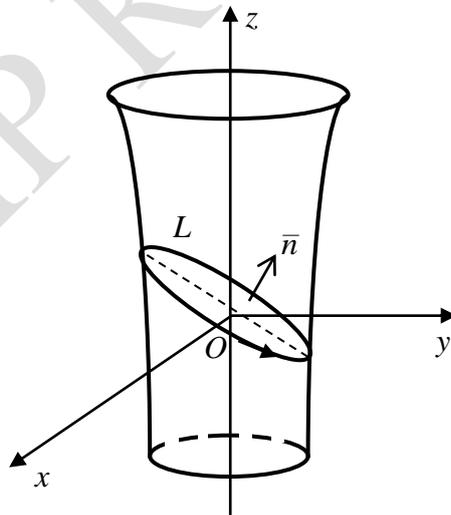


Рис. 33

$$x^2 + y^2 - \frac{3x^2}{4} = 1, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Проекцией контура на плоскость xOy является эллипс с полуосями $a = 2$ и $b = 1$. Площадь этого эллипса равна 2π .

Запишем параметрическое уравнение контура:

$$\begin{cases} x = 2 \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi, \\ z = 2\sqrt{3} \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Отсюда

$$dx = -2 \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \cos \varphi d\varphi, \quad dz = -2\sqrt{3} \sin \varphi d\varphi.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi - 12 \sin \varphi \cos \varphi + 2\sqrt{3} \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2 \frac{1 - \cos^2 \varphi}{2} - 2 \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} + 2\sqrt{3} \frac{1 - \cos^2 \varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} (-1 - 1 + \sqrt{3}) d\varphi = (\sqrt{3} - 2) \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z - y \end{vmatrix} = -\bar{i} + 0\bar{j} - 2\bar{k}.$$

На контур L натянем часть плоскости $z = x\sqrt{3}$:

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\operatorname{grad}(z - x\sqrt{3})}{\operatorname{grad}(z - x\sqrt{3})} = \pm \frac{-\sqrt{3}\bar{i} + \bar{k}}{2}, \quad \bar{n}_0 = \frac{-\sqrt{3}\bar{i} + \bar{k}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{n}_0) dS = \iint_S \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) dS = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy = \\ &= (\sqrt{3} - 2) \iint_{D_{xy}} dx dy = (\sqrt{3} - 2) \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

Пример 14

Докажите, что векторное поле $\bar{a} = (2xy + z)\bar{i} + (x^2 - 2y)\bar{j} + x\bar{k}$ является потенциальным, и найдите его потенциал.

Вычислите $\int_{(1;1;1)}^{(1;2;4)} (2xy + z)dx + (x^2 - 2y)dy + xdz.$

$$\int \text{Находим } \operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z & x^2 - 2y & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2y & x \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z & x \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy + z & x^2 - 2y \end{vmatrix} \bar{k} =$$

$= 0\bar{i} - (1-1)\bar{j} + (2x-2x)\bar{k} \equiv 0$, т. е. поле является потенциальным.

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(x; y_0; z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x; y; z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x; y; z) dz + C.$$

За начальную фиксированную точку примем $O(0;0;0)$. Тогда получим

$$U(x; y; z) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y (x^2 - 2y) dy + \int_0^z x dz + C = x^2 y - y^2 + xz + C.$$

$$\int_{(1;1;1)}^{(1;2;4)} (2xy + z) dx + (x^2 - 2y) dy + x dz = U(1;2;4) - U(1;1;1) =$$

$$= (2 + C) - (1 + C) = 1. \quad \int$$

Дополнительные задачи

1. Найдите поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $y = x^2 + y^2$, ограниченную плоскостью $y = 1$ и лежащую в I октанте.

Ответ: $-\frac{1}{15}$.

2. Применяя метод проектирования на все три координатные плоскости, вычислите поток векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} - x\bar{j} + y\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника, получаемого пересечением плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ с координатными плоскостями.

Ответ: $\frac{7}{6}$.

3. Вычислите поток векторного поля $\bar{a} = x^2z\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$ в сторону внешней нормали.

Указание. Дополнить заданную поверхность плоскостью $z = 1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.

4. Вычислите работу силового поля $\bar{F} = (x^2 + 2xy)\bar{i} + (x^2 + y^2)\bar{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки (0;0) до точки (1;1).

Ответ: $\frac{5}{3}$.

5. Найдите ротор вектора $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + z^2)\bar{j} + (z^2 + x^2)\bar{k}$.

Ответ: $-2(z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k})$.

6. Найдите циркуляцию вектора $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z\bar{k}$ по контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = x \end{cases}$$

непосредственно и по теореме Стокса.

Ответ: $-\sqrt{2}\pi$.

7. Докажите, что векторное поле

$$\bar{a} = (x^2 - 2yz)\bar{i} + (y^2 - 2xz)\bar{j} + (z^2 - 2xy)\bar{k}$$

является потенциальным. Найдите его потенциал.

Ответ: $\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$.

Литература

1. Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Высш. шк., 1983.
2. Карпук, А. А. Высшая математика. Интегральное исчисление функций многих переменных / А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2008.
3. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея. – М. : Высш. шк., 1989.
4. Бутузов, В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая. – М. : Высш. шк., 1988.

БГУИР Кафедра ВМ