

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

Кафедра инженерной графики

ВЫШИНСКИЙ Н. В.

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СБОРНИК ЗАДАЧ**

Минск 2015

Введение

Раздел 1. Статика твердого тела

Определение реакций в опорах при действии на механическую систему плоской системы сил

Свободное твердое тело, т.е. тело, на которое не действуют другие тела, может совершать под действием сил произвольные движения в пространстве. Вступление твердого тела в контакт с другими телами приводит к ограничению его возможных движений. Тела, ограничивающие перемещения твердого тела, называют *связями*. Со стороны связей на твердое тело действуют силы, называемые *реакциями связей*. Величина и направление реакций связей зависят от задаваемых сил и характера ограничений. Тело, лишенное всяких возможностей перемещаться, становится неподвижным, т.е. находится в покое, а система сил, действующих на тело, называется *уравновешенной*. При этом в состав системы сил входят как заданные силы, так и заранее неизвестные реакции связей, определение которых является одной из задач механики.

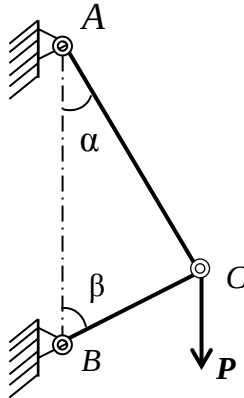
Рассмотрим механическую систему в виде закрепленного на опорах стержня, на который действует плоская система заданных сил (рис. 1). Стержень, закрепленный на опорах и нагруженный плоской системой сил, называется *балкой*. Существует три типа опор крепления балок: шарнирно подвижная, допускающая поворот балки и ее смещение, например, в направлении собственной оси (рис. 1, а, опора А); шарнирно неподвижная, допускающая только поворот балки (рис. 1, а, опора В); жестко закрепленная, исключая любые перемещения балки (рис. 1, б, опора С). Реакция связи R_A в шарнирно подвижной опоре (рис. 1, а) будет перпендикулярна направлению допускаемого опорой перемещения балки. Нахождение реакции в этом случае состоит в определении ее модуля. Направление реакции связи R_B в шарнирно неподвижной опоре (рис. 1, а) заранее неизвестно. Обычно эту реакцию представляют как геометрическую сумму двух ее проекций R_{BX} и R_{BY} на выбранные направления осей X и Y . В этом случае для нахождения реакции необходимо определить значение модулей этих проекций. Для жестко закрепленной опоры (рис. 1, б) определение реакции связи состоит в нахождении модулей составляющих R_{CX} , R_{CY} и реактивного момента M_C .

Для нахождения реакций связей при действии плоской системы сил используют три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum m_z(F_i) = 0, \text{ т.е.}$$

- сумма проекций всех сил на ось X равна нулю;
- сумма проекций всех сил на ось Y равна нулю;
- сумма моментов всех сил относительно оси Z равна нулю.

Учитывая, что начало осей координат можно совместить с любой точкой, то последнее уравнение возможно заменить уравнением моментов сил относительно произвольной точки.



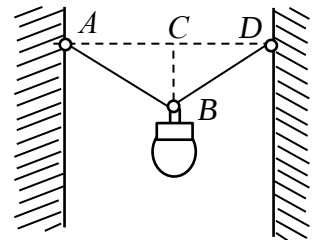
1.1 Стержни AC и BC соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт C действует вертикальная сила $P=1000$ Н.

Определить реакции этих стержней на шарнирный болт C , если углы, составляемые стержнями со стеной, равны: $\alpha=30^\circ$ и $\beta=60^\circ$.

Ответ: 866 Н; 500 Н.

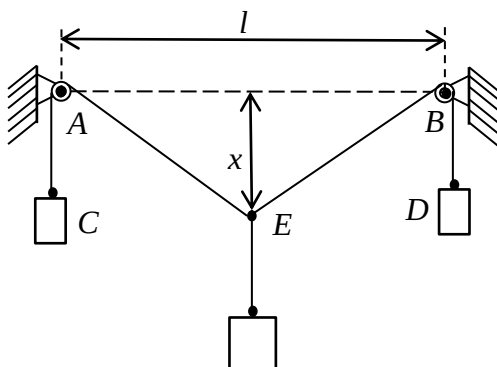
К задаче 1.1

1.2 Уличный фонарь подвешен в точке B к середине троса ABC , прикрепленного концами к крюкам A и C , находящимся на одной горизонтали. Определить натяжения T_1 и T_2 в частях троса AB и BC , если вес фонаря равен 150 Н, длина всего троса ABC равна 20 м и отклонение точки его подвеса от горизонтали $BD=0,1$ м. Весом троса пренебречь.



К задаче 1.2

Ответ: $T_1=T_2=7,5$ кН.

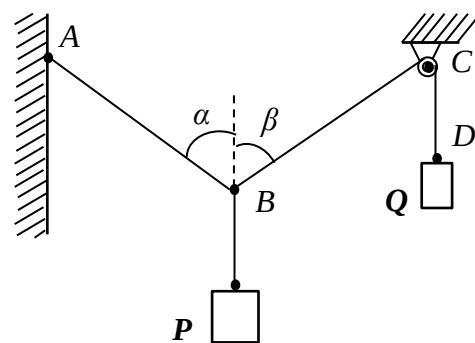


К задаче 1.3

1.3 Через два блока A и B , находящихся на одной горизонтальной прямой $AB=l$, перекинута веревка $CAEBD$. К концам C и D веревки подвешены гири весом p каждая, а к точке E – гиря весом P . Определить, пренебрегая трением на блоках и их размерами, расстояние x точки E от прямой AB в положении равновесия. Весом веревки пренебречь.

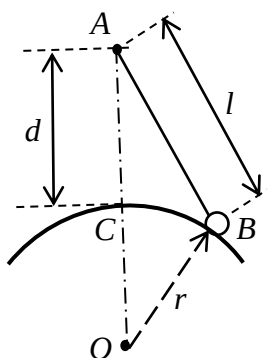
Ответ: $\frac{Pl}{2\sqrt{4p^2-P^2}}$.

1.4 К веревке AB , один конец которой закреплен в точке A , привязаны в точке B груз P и веревка BCD , перекинутая через блок; к концу ее D привязана гиря Q весом 100 Н. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение T веревки AB и величину груза P , если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью BE , равны: $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$.



К задаче 1.4

Ответ: $T=122$ Н; $P=137$ Н.

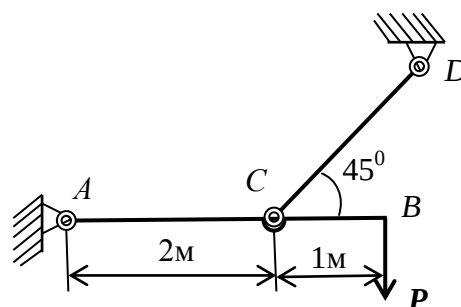


К задаче 1.5

1.5 Шарик B весом P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r ; расстояние точки A от поверхности сферы $AC=d$, длина нити $AB=l$, прямая AO вертикальна. Определить натяжение T нити и реакцию Q сферы. Радиусом шарика пренебречь.

Ответ: $T = P \frac{l}{d+r}$; $Q = P \frac{r}{d+r}$.

1.6 Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD ; крепления в A , C и D – шарнирные. Определить реакции опор A и D , если на конце балки действует вертикальная сила $P=50$ кН. Размеры указаны на чертеже. Весом пренебречь.

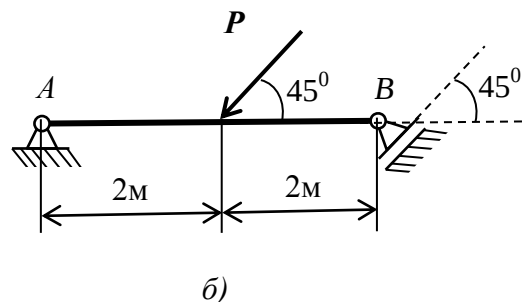
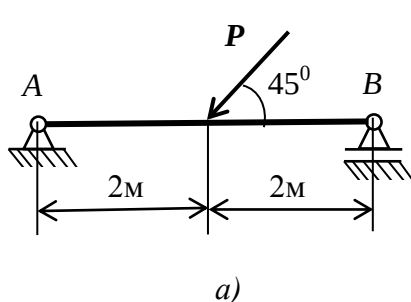


К задаче 1.6

Ответ: $R_A=79$ кН; $R_D=106$ кН.

1.7 Балка AB шарнирно закреплена на опоре A , у конца B , она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила $P=20$ кН. Определить реакции опор для случаев a и b , взяв размеры с чертежей и пренебрегая весом балки.

Ответ: $a) R_A=15,8$ кН; $R_B=7,1$ кН; $b) R_A=22,4$ кН; $R_B=10$ кН.

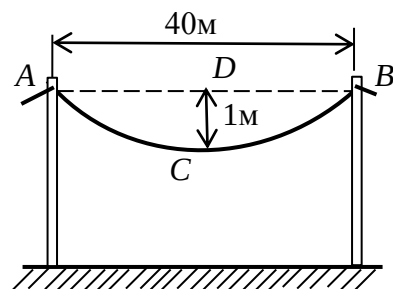


К задаче 1.7

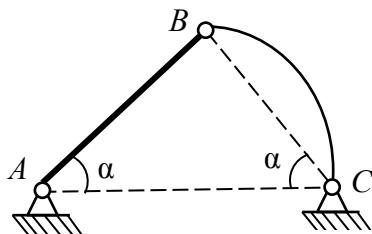
1.8 Электрический провод ACB натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, стрела провисания которой $CD=f=1$ м. Расстояние между столбами $AB=l=40$ м. Вес провода $Q=0,4$ кН. Определить натяжения провода: T_C в средней точке, T_A и T_B на концах.

При решении задачи считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии $l/4$ от ближайшего столба.

Ответ: $T_C = Ql/(8f)=2$ кН; $T_A = T_B = 2,01$ кН.



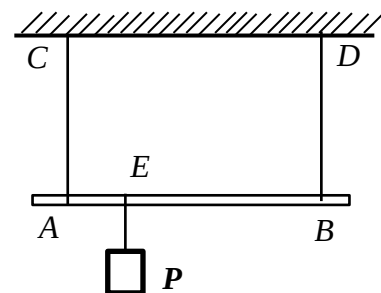
К задаче 1.8



К задаче 1.9

1.9 Прямолинейный однородный брус AB весом P и невесомый стержень BC с криволинейной осью произвольного очертания соединены шарнирно в точке B и также соединены с опорами A и C , расположенными на одной горизонтали AC . Прямые AB и BC образуют с прямой AC углы $\alpha=45^\circ$. Определить реакции опор A и C .

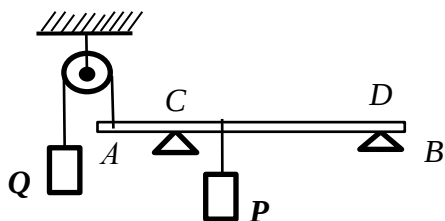
Ответ: $R_A = \frac{\sqrt{10}}{4}P$; $R_C = \frac{\sqrt{2}}{4}P$.



К задаче 1.10

1.10 Однородный стержень AB , длина которого 1 м , а вес 20 Н , подвешен горизонтально на двух параллельных веревках AC и BD . К стержню в точке E на расстоянии $AE=0,25\text{ м}$ подвешен груз $P=120\text{ Н}$. Определить натяжение веревок T_C и T_D .

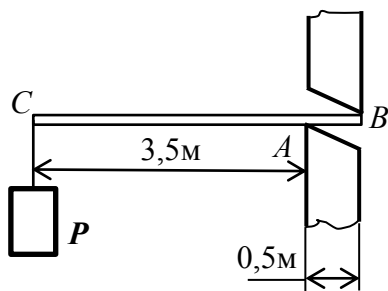
Ответ: $T_C = 100\text{ Н}$; $T_D = 40\text{ Н}$.



К задаче 1.11

1.11 Балка AB длиной 10 м и весом 2 кН лежит на двух опорах C и D . Опора C отстоит от конца A на 2 м , опора D от конца B – на 3 м . Концы балки A и B оттягиваются вертикально вверх посредством перекинутого через блок троса, на котором подвешен груз Q весом 3 кН . На расстоянии 3 м от конца A к балке подвешен груз P весом 8 кН . Определить реакции опор, пренебрегая трением на блоке.

Ответ: $R_C = 3\text{ кН}$; $R_D = 4\text{ кН}$.



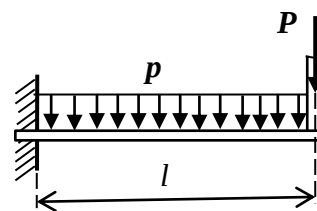
К задаче 1.12

1.12 Однородная горизонтальная балка длиной 4 м и весом 5 кН заложена в стену, толщина которой равна $0,5\text{ м}$, так, что опирается на нее в точках A и B . Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки подвешен груз P весом 40 кН .

Ответ: $R_A = 340\text{ кН}$ – вверх; $R_B = 295\text{ кН}$ – вниз.

1.13 Горизонтальная балка, поддерживающая балкон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p=2\text{ кН/м}$. На балку у свободного конца передается нагрузка от колонны $P=2\text{ кН}$. Расстояние оси колонны от стены $l=1,5\text{ м}$. Определить реакции заделки.

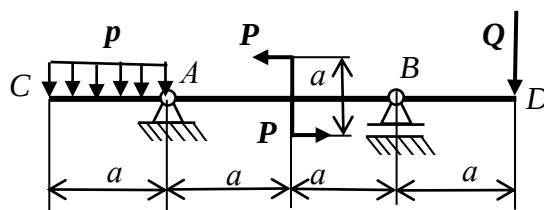
Ответ: $R = 5\text{ кН}$; $M = 5,25\text{ кНм}$.



К задаче 1.13

1.14 На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил (P , P), на левую консоль – равномерно распределенная нагрузка интенсивностью p , а в точке D правой консоли – вертикальная нагрузка Q . Определить реакции опор, если $P=10\text{ кН}$, $Q=20\text{ кН}$, $p=20\text{ кН/м}$, $a=0,8\text{ м}$.

Ответ: $R_A = 15,2\text{ кН}$; $R_B = 21,2\text{ кН}$.



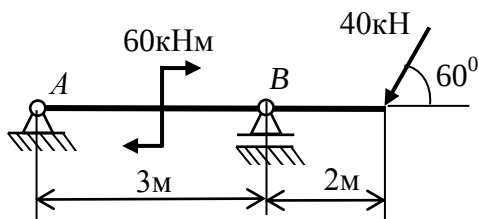
К задаче 1.14

1.15 Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на чертеже.

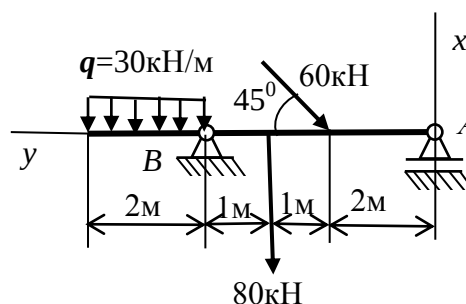
Ответ: $X_A = 20$ кН; $Y_A = -43,2$ кН; $Y_B = 77,8$ кН.

1.16 Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на чертеже.

Ответ: $X_A = 26$ кН; $Y_A = 42$ кН; $X_B = 156$ кН.



К задаче 1.15



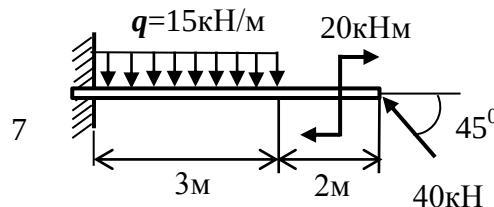
К задаче 1.16

1.17 Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

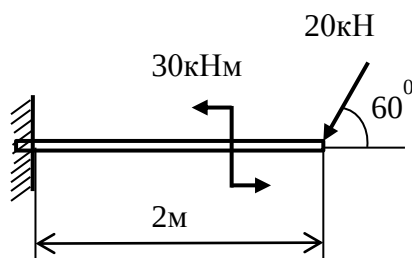
Ответ: $X = 10$ кН; $Y = 17,3$ кН; $M = 4,7$ кНм.

1.18 Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

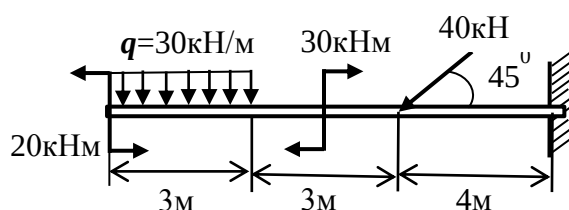
Ответ: $X = 28$ кН; $Y = 17$ кН; $M = -53,5$ кНм



К задаче 1.18



К задаче 1.17



К задаче 1.19

1.19 Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

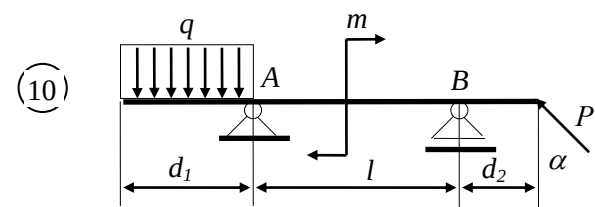
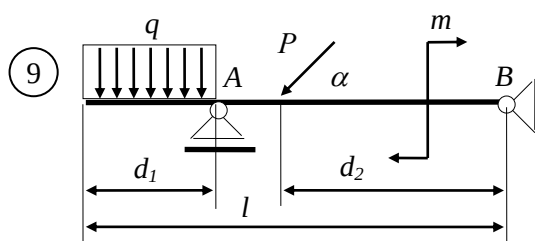
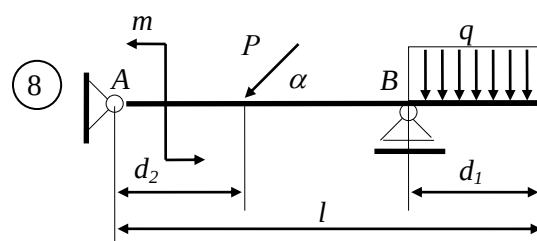
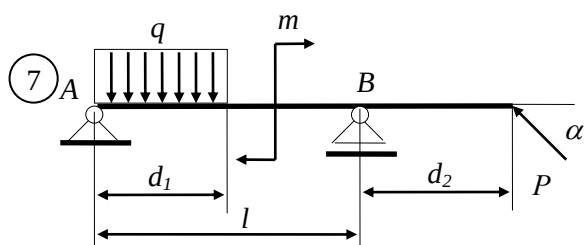
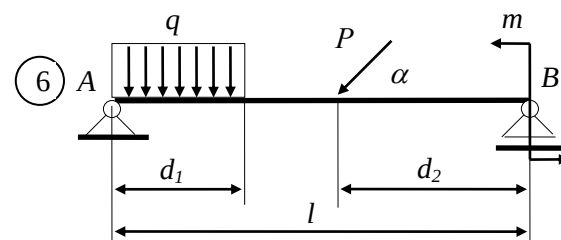
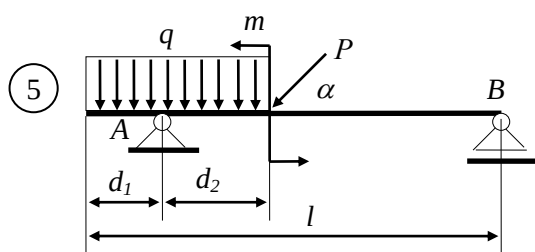
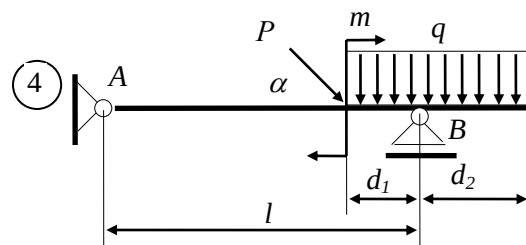
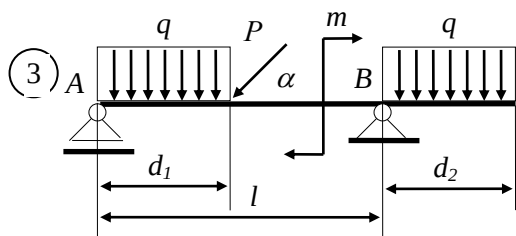
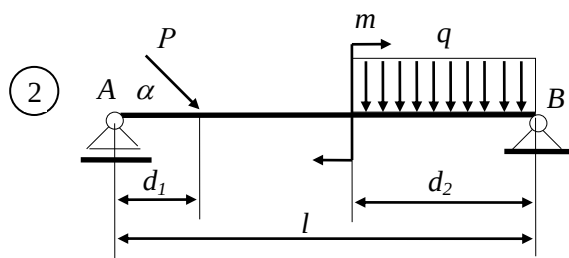
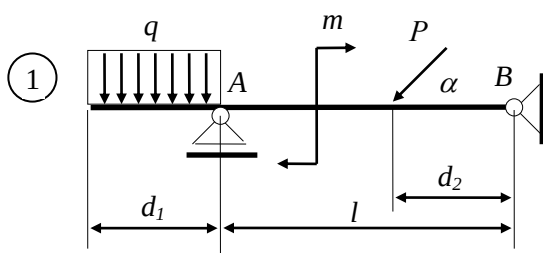
Ответ: $X = 118 \text{ кН}$; $Y = -28 \text{ кН}$;

$M = -868 \text{ кНм}$.

1.20 Определить реакции опор A и B горизонтальной балки AB , если на нее действует сосредоточенная сила P , пара сил с моментом m и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Схемы десяти типов балок даны на рисунке, а числовые данные для расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные для расчета реакций в опорах

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кН	20	12	14	16	18	20	22	24	26	28
q , кН/м	8	7,5	7	6,5	6	5,5	5	4,5	4	3,5
m , Н·м	8000	7500	7000	6500	6000	5500	5000	4500	4000	3500
l , м	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4
d_1 , м	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2
d_2 , м	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
α , рад	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$



К задаче 1.20

Раздел 2. Деформация растяжения и сжатия

Внутренние силы упругости, возникающие в материале образца, подвергнутого деформации растяжения или сжатия, характеризуются одной из составляющих главного вектора внутренних сил упругости – нормальной силой. Нормальная сила направлена перпендикулярно поперечному сечению образца в направлении деформации.

Для нахождения внутренних сил используется метод сечений. В соответствии с этим методом нормальная сила N , действующая в данном сечении, будет равна сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к сечению. Это утверждение математически запишется в виде

$$N = \sum_1^n F_i + \sum_1^k \int q_i dx ,$$

где F_i – проекция на нормаль к сечению i -той силы из n внешних сосредоточенных сил, q_i – интенсивность i -той распределенной силы из k внешних распределенных сил. Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная сила интенсивностью q_i , а суммирование – по всем участкам.

Оценкой интенсивности внутренних сил упругости, действующих по некоторому сечению тела, является нормальное напряжение σ , определяемое как нормальная сила, действующая на единице площади и приложенная в данной точке сечения. При выполнении расчетов принимают, что нормальные напряжения, как при растяжении, так и при сжатии тела равномерно распределяются по его сечению. Тогда нормальные напряжения определяются как отношение нормальной силы N к площади сечения S , т.е.

$$\sigma = \frac{N}{S} .$$

Деформация стержня характеризуется абсолютными и относительными деформациями. Если $\Delta l = l_1 - l$ и $\Delta d = d - d_1$ абсолютные соответственно продольная и поперечная деформации стержня при его растяжении, то $\varepsilon = \Delta l / l$ и $\mu = \Delta d / d$ будут соответственно относительной продольной и поперечной деформациями. Здесь l и d – длина и поперечный размер стержня

до деформации, а l_1 и d_1 – после деформации. Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной называется коэффициентом Пуассона ν : $\nu = \mu/\epsilon$. Коэффициент Пуассона характеризует упругие свойства материала и для большинства материалов (металлов) является величиной постоянной ($0 \leq \nu \leq 0,5$).

В соответствии с законом Гука нормальные напряжения при деформации растяжения (сжатия) пропорциональны относительным деформациям, т.е. $\sigma = E\epsilon$. Коэффициент пропорциональности E , называемый модулем упругости 1-го рода, характеризует упругие свойства материала деформируемого тела.

Если учесть, что $\sigma = N/S$, а $\epsilon = \Delta l/l$, то можно перейти от выражения закона Гука в относительных величинах к выражению в абсолютных величинах в виде

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}.$$

Произведение ES называется жесткостью стержня при растяжении (сжатии). Этот параметр учитывает влияние на деформацию стержня, как свойств материала, так и его конструктивных особенностей (площади сечения). Чем больше жесткость – тем меньше деформация тела.

Для тел (стержней), состоящих из нескольких участков, в пределах которых значения E , N и S постоянные, величина деформации всего тела будет определяться как сумма деформаций всех его участков, т.е.

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i l_i}{E_i S_i}.$$

Понятия «деформация» и «перемещение» не всегда обозначают одно и то же. Возможно, что некоторая часть тела может не деформироваться, но перемещаться за счет деформации других частей тела.

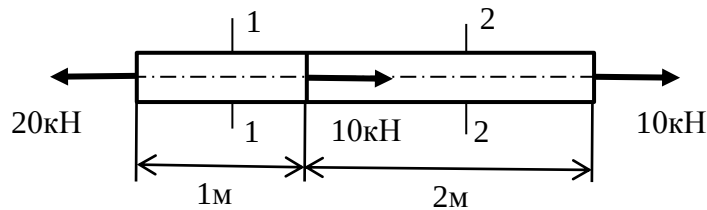
Расчеты на прочность при деформации растяжения (сжатия) заключаются в определении нормальных напряжений, действующих в сечениях, и сравнении их значений со значениями предельно допускаемых напряжений для материала данного тела, т.е.

$$\sigma = N/S \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – предельно допускаемое напряжение для материала деформируемого тела.

Из последнего выражения можно найти предельное значение нормальной силы $[N] \leq S[\sigma]$, или минимально допустимое значение площади сечения $S \geq N/[\sigma]$.

2.1 Определить напряжения в сечениях 1–1 и 2–2 и полное удлинение стального стержня, нагруженного силами $P_1=20$ кН, $P_2=P_3=10$ кН, как показано на рисунке, если площадь его поперечного сечения равна $S=400$ мм². Принять модуль упругости стали равным $E=2 \cdot 10^5$ МПа.



К задаче 2.1

Решение: Мысленно рассекаем стержень сечением 1–1 и отбрасываем, например, его правую часть. Для того, чтобы уравновесить внешнюю силу P_1 , приложенную к оставшейся левой части, равнодействующая внутренних сил в сечении 1–1 должна по модулю равняться силе P_1 и быть направленной вправо, в наружную сторону от оставшейся части. Таким образом, в сечении 1–1 усилие растягивающее и равно $N_1 = P_1 = 20$ кН. Путем подобных рассуждений устанавливаем, что в сечении 2–2 усилие тоже растягивающее и равно $N_2 = 10$ кН.

Теперь определим напряжения. В сечении 1–1 оно равно

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S} = \frac{2 \cdot 10^4}{400} = 50 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 50 \text{ МПа},$$

а в сечении 2–2

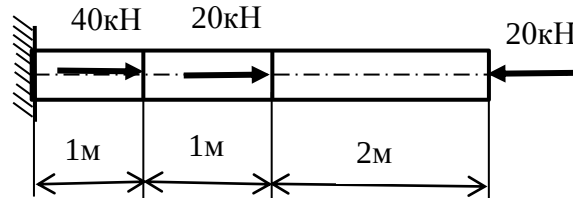
$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S} = \frac{1 \cdot 10^4}{400} = 25 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 25 \text{ МПа}.$$

Так как усилие в левом участке (длиной 1 м) не равно усилию в правом участке (длиной 2 м), то деформации каждого участка надо определить отдельно. Полная деформация стержня получится путем суммирования (алгебраического, если они разных знаков) деформаций отдельных участков. В нашем случае

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{ES} + \frac{N_2 l_2}{ES} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 0,5 \text{ мм}.$$

2.2 Определить напряжения во всех участках изображенного на рисунке стального стержня и полную его деформацию, если площадь поперечного сечения равна $S=10^3 \text{ мм}^2$, а приложенные силы равны по модулю $P_1=40 \text{ кН}$, $P_2=P_3=20 \text{ кН}$. Модуль упругости стали $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

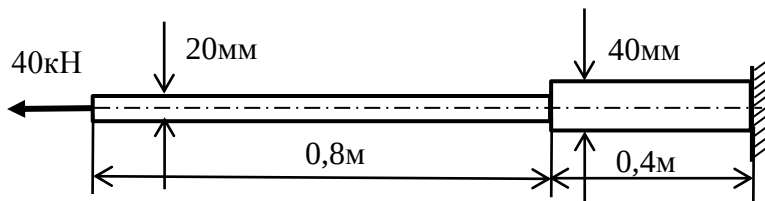
Ответ: в левом участке $\sigma = 40 \text{ МПа}$; в среднем – $\sigma = 0$; в правом участке $\sigma = -20 \text{ МПа}$; $\Delta l = 0$.



К задаче 2.2

2.3 Определить напряжения в обеих частях изображенного на рисунке стержня, а также полное его удлинение при действии растягивающей силы $P=40 \text{ кН}$. Материал стержня – сталь ($E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$), сечение круглое.

Ответ: в левой части $\sigma = 127,6 \text{ МПа}$; в правой – $\sigma = 31,9 \text{ МПа}$; $\Delta l = 0,575 \text{ мм}$.



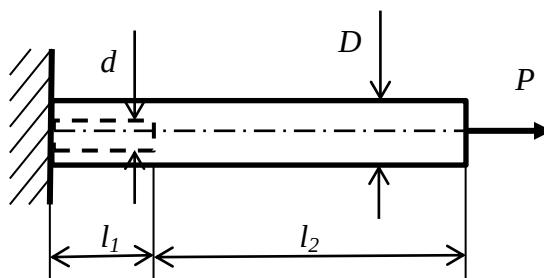
К задаче 2.3

2.4 Во время испытания проволоки диаметром 1,2 мм и длиной 0,1 м под нагрузкой 100 Н было измерено удлинение 0,044 мм. Чему равен модуль упругости материала проволоки?

Ответ: $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

2.5 Изображенный на рисунке стальной стержень имеет в правой части сплошное круглое, а в левой части – кольцевое сечение. Определить напряжения в обеих частях стержня и полное его удлинение, если $d=2 \text{ мм}$, $D=4 \text{ мм}$, $l_1=0,02 \text{ м}$, $l_2=0,04 \text{ м}$, $P=1 \text{ кН}$.

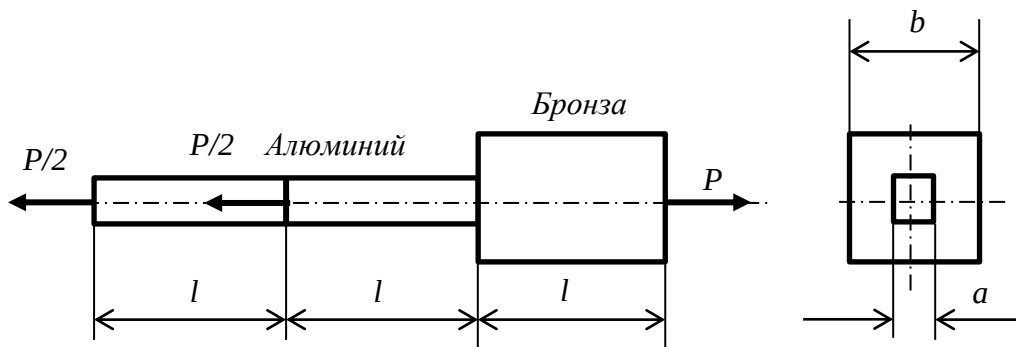
Ответ: в левом участке $\sigma = 106,16 \text{ МПа}$, в правом – $\sigma = 79,62 \text{ МПа}$, $\Delta l = 0,0266 \text{ мм}$.



К задаче 2.5

2.6 Под действием приложенной нагрузки составной стержень квадратного сечения удлинится на 0,2 мм. Модуль упругости алюминия принять равным $0,75 \cdot 10^5$ МПа, а бронзы – $1,1 \cdot 10^5$ МПа. Определить величину нагрузки P , если стороны квадратов $a=20$ мм, $b=50$ мм, $l=0,1$ м.

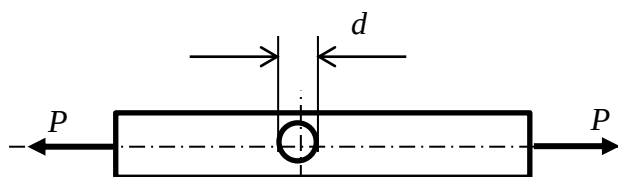
Ответ: $P=37,3$ кН.



К задаче 2.6

2.7 Определить величину изменения диаметра D тонкого кольца с поперечным сечением S , выполненного из материала с модулем E , под влиянием равномерно распределенного внутреннего давления интенсивностью q .

Ответ: $\Delta D = \frac{qD^2}{2ES}$.



К задаче 2.8

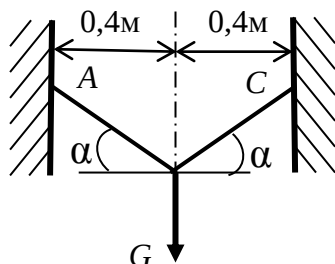
2.8 Стержень квадратного поперечного сечения растягивается силами $P=1,5$ кН. Он ослаблен сквозным отверстием диаметром $d=2$ мм. Чему должна равняться сторона сечения a при допуске

напряжении для материала стержня, равном $1 \cdot 10^2$ МПа?

Ответ: $a=5$ мм.

2.9 Тонкая, бесконечно длинная упругая лента, площадь поперечного сечения которой S и погонный вес q , свободно лежит на шероховатой поверхности. Определить силу P , необходимую для смещения конца ленты на δ . Коэффициент трения ленты по поверхности μ , модуль упругости материала ленты E .

Ответ: $P = \sqrt{2\delta ESq\mu}$.



2.10 К двум стержням одинакового поперечного сечения площадью $S=10$ мм², наклоненным к горизонту под углом $\alpha=30^\circ$, подвешен груз G . Определить безопасную величину этого груза, если допустимое напряжение для материала стержней равно $[\sigma]=0,6 \cdot 10^2$ МПа, а модуль упругости $E=1 \cdot 10^5$ МПа.

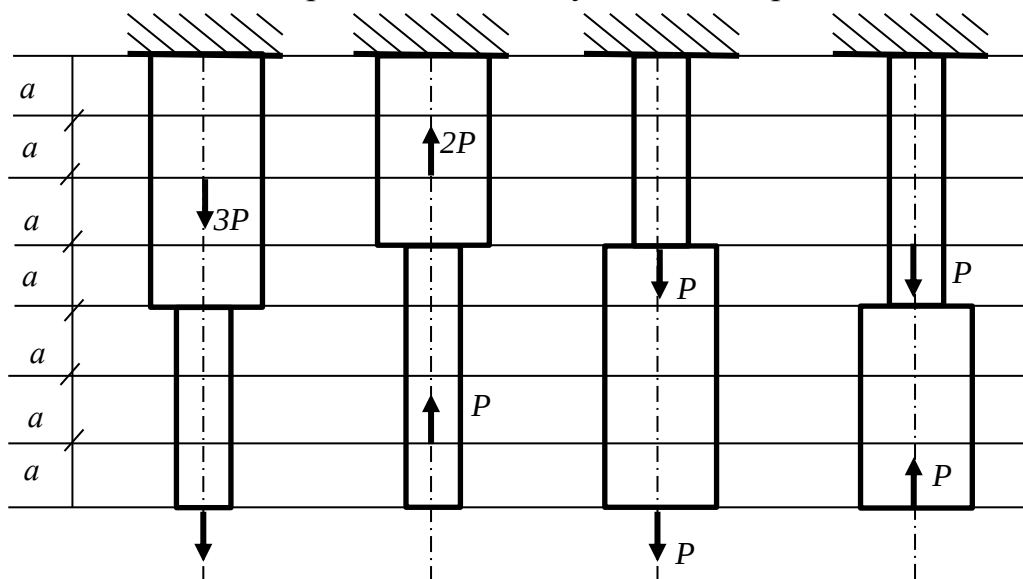
К задаче 2.10

Ответ: $G=0,6 \cdot 10^2$ Н.

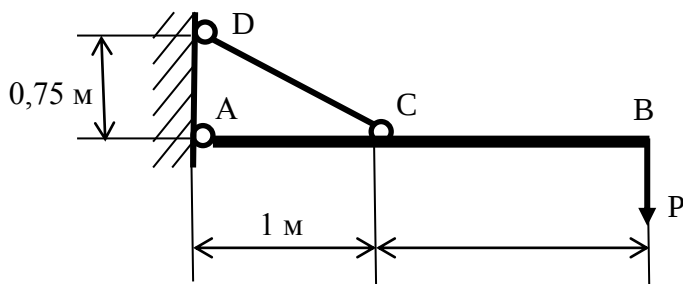
2.11 Определить в предыдущей задаче перемещение δ точки B подвеса груза G .

Ответ: $\delta=2,8$ мм.

2.12 Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений для стержней, схемы которых приведены на рисунке. Площадь поперечных сечений участков стержней S и $2S$.



К задаче 2.12

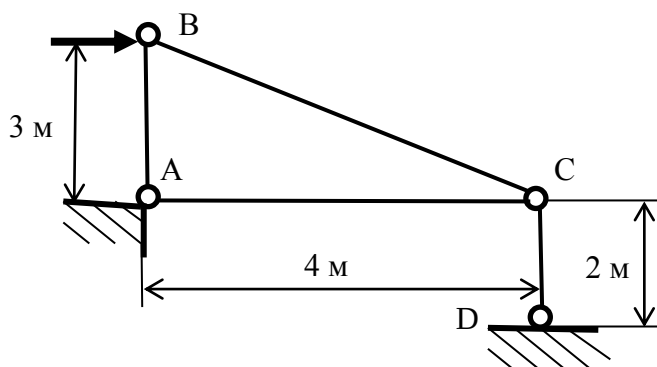


К задаче 2.13

2.13 Жесткий стержень AB (см. рисунок) нагружен силой P и поддерживается стальной тягой DC круглого поперечного сечения диаметром 20 мм. Определить наибольшую допустимую нагрузку P и опускание точки B . Допускаемое напряжение

для материала стержня CD равно 160 МПа.

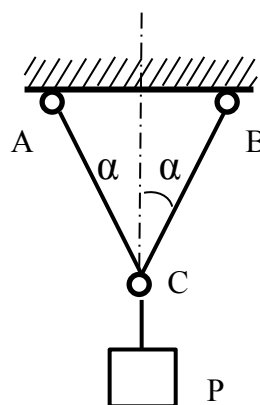
Ответ: $P=1,2 \cdot 10^4$ Н, $\delta_B=4,17$ мм.



К задаче 2.14

2.14 В изображенной на рисунке конструкции все стержни стальные, одинакового поперечного сечения, площадью $3 \cdot 10^4$ мм². Сила $P=10$ кН. Определить напряжения в стержнях.

Ответ: $\sigma_{AB}=25$ МПа, $\sigma_{AC}=33,3$ МПа, $\sigma_{BC}=-41,7$ МПа, $\sigma_{CD}=-25$ МПа.



К задаче 2.15

2.15 Груз P подвешен на двух стержнях, как изображено на рисунке. Угол $\alpha=30^\circ$. Стержень AC – стальной, круглого поперечного сечения, диаметром 30 мм, с допускаемым напряжением для материала $[\sigma]=10$ МПа, стержень CB – алюминиевый, диаметром 40 мм и с $[\sigma]=60$ МПа. Какой наибольший груз P можно подвесить на этих стержнях?

Ответ: $P=130$ кН.

2.16 Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием 100 кН. Относительное удлинение не должно превышать $1/2000$, а напряжение не должно быть больше 120 МПа. Найти наименьший диаметр стержня, удовлетворяющий этим требованиям.

Решение: Выразим относительную деформацию через нагрузку P , площадь поперечного сечения $\pi d^2/4$ и модуль упругости E и приравняем ее заданной допускаемой относительной деформации $[\varepsilon]$:

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\varepsilon].$$

Отсюда найдем необходимый диаметр, удовлетворяющий данному условию:

$$d = 2 \sqrt{\frac{P}{\pi E [\varepsilon]}} = 2 \sqrt{\frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^5}} = 35,7 \text{ мм.}$$

Теперь независимо от предыдущего решения напишем условие прочности через P , $\pi d^2/4$ и $[\sigma]$:

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\sigma],$$

откуда

$$d = 2 \sqrt{\frac{P}{\pi [\sigma]}} = 2 \sqrt{\frac{10^5}{3,14 \cdot 120}} = 32,5 \text{ мм.}$$

Из двух найденных диаметров необходимо взять больший, т. е. 35,7 мм, так как меньший диаметр не будет удовлетворять условию жесткости.

2.17 Груз подвешен к стальной проволоке, размеры которой до деформации были следующими: $l=3$ м и $d=1,6$ мм. Удлинение проволоки оказалось равным 1,5 мм. Затем тот же груз был подвешен к медной проволоке длиной $l_1=1,8$ м и диаметром $d_1=3,2$ мм. Ее удлинение получилось равным 0,39 мм. Определить модуль упругости медной проволоки, если модуль стальной – $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $E_1=1,15 \cdot 10^5$ МПа.

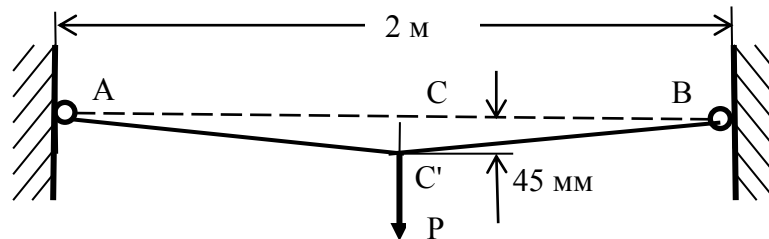
2.18 Стальной стержень круглого поперечного сечения ($d=32$ мм и $l=0,35$ м) был растянут на испытательной машине усилием 135 кН. Было замерено уменьшение диаметра, равное 0,0062 мм, и на длине 0,05 м удлинение, равное 0,04 мм. Определить модуль упругости и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Ответ: $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu=0,242$.

2.19 Стальной стержень длиной 6 м растянут силой 200 кН; модуль упругости материала $E=2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) $\nu=0,25$. Определить увеличение объема стержня.

Ответ: $\Delta V=3 \cdot 10^3$ мм³.

2.20 Между неподвижными точками A и B (см. рисунок) горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 мм. Какую необходимо приложить силу P в точке C посередине длины проволоки и какое в этом случае возникает напряжение в ней, если смещение точки C по направлению силы P достигнет 45 мм? Собственным весом проволоки пренебречь.



К задаче 2.20

Решение. Абсолютное удлинение одной половины проволоки после приложения силы P будет равно разности длин CB и $C'B$:

$$\Delta l = \sqrt{1000^2 + 45^2} - 1000 = 1 \text{ мм.}$$

Ее относительное удлинение составит

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Тогда напряжение в проволоке мы можем получить, используя закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,001 = 200 \text{ МПа.}$$

Зная напряжение, определяем усилие в проволоке:

$$N = \sigma S = 200 \cdot 3,14 \cdot 1^2 / 4 = 157 \text{ Н.}$$

Точка C' будет находиться в равновесии под действием силы P и двух усилий N . Из подобия треугольника сил и треугольника $C'SB$ находим, что

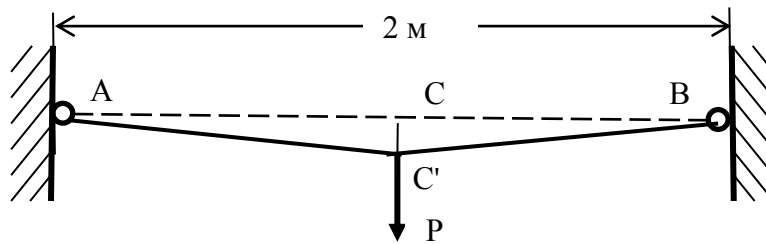
$$\frac{\frac{P}{2}}{45} = \frac{N}{1001},$$

откуда

$$P = 2 \cdot 45 \frac{N}{1001} = \frac{9 \cdot 157}{1001} = 14,1 \text{ Н.}$$

2.21 Между неподвижными точками A и B (см. рисунок) горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 мм. К точке C посередине длины проволоки подвешивается постепенно увеличивающаяся нагрузка P . Когда удлинение проволоки достигло 0,5%, она порвалась. Чему в этот момент равен груз P , какова величина опускания точки C и какой величины напряжение в проволоке в момент разрыва? Собственным весом проволоки пренебречь. Считать, что проволока наклепана и до момента разрыва она имеет лишь упругие деформации.

Ответ: $P=157$ Н, $CC'=100$ мм, $\sigma=10^3$ МПа.

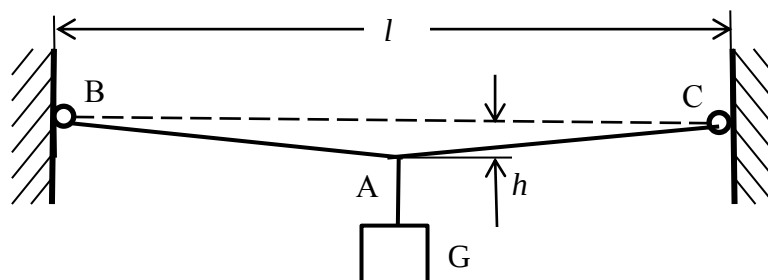


К задаче 2.21

2.22 Груз $G=1,6$ кН подвешивается (см. рисунок) на двух стальных проволоках AB и AC одинаковой длины; расстояние l составляет $5h$.

Определить необходимый диаметр проволок при допуске напряжении 100 МПа и величину опускания точки A после приложения нагрузки. Определить этот диаметр также в предположении $l_1=10h$. Собственным весом проволок пренебречь в обоих случаях.

Ответ: $d=5,25$ мм, $d_1=7,21$ мм, $\Delta h=0,0007l$.



К задаче 2.22

Раздел 3. Сдвиг и кручение

Если внутренние нормальные силы вызывают деформацию растяжения (сжатия), то лежащие в плоскости сечения поперечные силы сдвигают одну часть тела относительно другой, вызывая деформацию сдвига. Деформация сдвига проявляется в искажении первоначально прямого угла между двумя условными взаимно перпендикулярными волокнами, взятыми в сечении деформируемого тела. Величина искажения определяется углом сдвига γ .

Характеристикой интенсивности поперечных сил Q при сдвиге являются касательные напряжения τ , определяемые как величина поперечной силы, действующей на единице площади сечения тела. При равномерном распределении касательных напряжений по сечению площадью S , их величина определяется выражением

$$\tau = \frac{Q}{S}.$$

Между касательным напряжением τ и углом сдвига γ существует пропорциональная зависимость, называемая законом Гука для деформации сдвига:

$$\tau = G \gamma,$$

G – модуль упругости 2-го рода (модуль сдвига). Его величина связана с модулем упругости 1-го рода E выражением

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

где ν – коэффициент Пуассона.

При сдвиге разрушение детали называется срезом. Условие прочности при сдвиге запишется в виде

$$\tau = \frac{Q}{S} \geq [\tau],$$

где $[\tau]$ – предельно допускаемые напряжения для материала деформируемого тела при сдвиге, принимаемые чаще всего как часть предельно допускаемых напряжений при растяжении: $[\tau] = (0,5 - 0,6) [\sigma]$.

При деформации кручения круглых цилиндрических стержней диаметром d в их поперечных сечениях действуют касательные напряжения, линейно распределенные по сечению в соответствии с зависимостью

$$\tau = \frac{T\rho}{I_\rho},$$

где T – крутящий момент, действующий в поперечном сечении стержня, ρ – текущее значение радиуса сечения ($0 \leq \rho \leq d/2$), $I_\rho = \pi d^4/32 \approx 0,1d^4$ – полярный момент инерции сечения.

Максимальные касательные напряжения при кручении цилиндрического стержня возникают на его поверхности, т.е. при $\rho = d/2$, и определяются выражением

$$\tau_{max} = \frac{Td}{2I_\rho} = \frac{T}{W_\rho},$$

где $W_\rho = \pi d^3/16 \approx 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления поперечного сечения стержня.

Расчеты на прочность при кручении ведут из условия

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau].$$

При закручивании цилиндрического стержня диаметром d и длиной l двумя внешними моментами T , приложенными в его торцевых сечениях, эти сечения повернутся одно относительно другого на угол φ , определяемый выражением

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_\rho}.$$

Произведение GI_ρ – называется жесткостью стержня (поперечного сечения стержня) при кручении. Чем больше жесткость, тем меньше угол, на который повернутся сечения одно относительно другого.

Если T , G и I_ρ в выражении для угла поворота сечения изменяются по длине стержня, то угол поворота крайних сечений стержня φ определяется как сумма углов φ_i поворота крайних сечений его i -тых участков, где значения T , G и I_ρ будут постоянны, т.е.

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{T_i l_i}{G_i I_{\rho i}}.$$

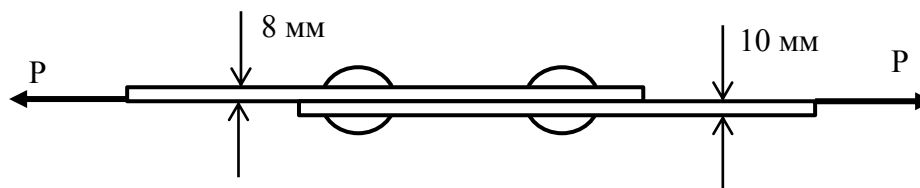
Угол поворота сечений стержня, расстояние между которыми равно единице длины, называется относительным углом поворота θ . Относительный угол определяет жесткость стержня при кручении и определяется выражением

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_\rho}.$$

Если необходимо ограничить значение относительного угла поворота предельно допустимым значением $[\theta]$, то расчет размеров деформируемого стержня (вала) производят исходя из условия жесткости

$$\theta = \frac{T}{GI_{\rho}} \leq [\theta].$$

3.1 Определить необходимое количество заклепок диаметром $d=20$ мм для соединения внахлестку двух листов толщиной $t_1=8$ мм и $t_2=10$ мм (см. рисунок). Сила P , растягивающая соединение, равна 200 кН. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau]=140$ МПа, на смятие $[\sigma_c]=320$ МПа.



К задаче 3.1

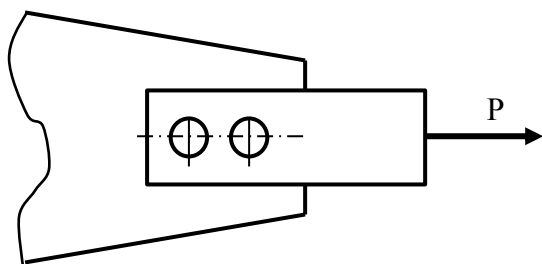
Решение: Из уравнения прочности на срез необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]} = \frac{2 \cdot 10^5}{\pi \frac{20^2}{4} 140} = 4,53 \approx 5.$$

Из уравнения прочности на смятие необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{P}{t_1 d [\sigma_c]} = \frac{2 \cdot 10^5}{8 \cdot 20 \cdot 320} = 3,9 \approx 4.$$

Следует поставить пять заклепок.



К задаче 3.2

3.2 Выбрать диаметр и определить необходимое число n заклепок, прикрепляющих стальную полосу к косынке (см. рисунок). Проверить прочность полосы с учетом ослабления ее заклепочными отверстиями, если $P=6$ кН, ширина полосы $b=30$ мм, а ее толщина меньше толщины косынки и составляет $t=2$

мм. Допускаемые напряжения: для материала полосы $[\sigma]=160$ МПа, для материала заклепок $[\tau]=100$ МПа (на срез) и $[\sigma_c]=260$ МПа (на смятие).

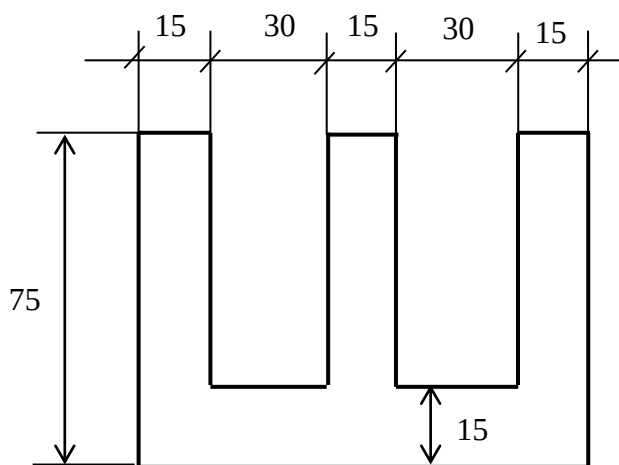
Ответ: $d=7$ мм, $n=2$.

3.3 Проверить прочность зубьев храпового колеса на срез и смятие, если нормальное давление на зуб в момент торможения равно $P=2$ кН и распределено по рабочей поверхности зуба, размеры которой: ширина $t=4$ мм, высота $h=5$ мм, окружная длина зуба в основании $a=8$ мм. Допускаемые напряжения на срез $[\tau]=70$ МПа и на смятие $[\sigma_c]=120$ МПа.

Ответ: $\tau=62,5$ МПа, $\sigma_c=100$ МПа.

3.4 Определить величину силы P , требуемой для продавливания пуансоном штампа в упругом контакте толщиной $0,22$ мм, выполненном из бериллиевой бронзы, отверстия диаметром $4,2$ мм, если предел прочности на срез для бериллиевой бронзы 600 МПа.

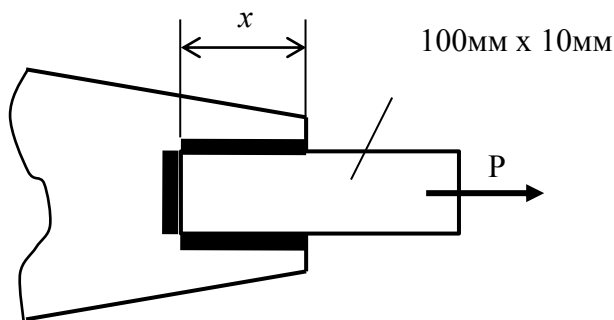
Ответ: $P=1,74$ кН.



К задаче 3.5

3.5 Определить максимальную толщину t листа из электротехнической стали (предел прочности на срез 300 МПа), из которого можно выштамповать трансформаторную пластину заданной формы (см. рисунок), если усилие, действующее на пуансон штампа, равно 360 кН.

Ответ: $t=2$ мм.



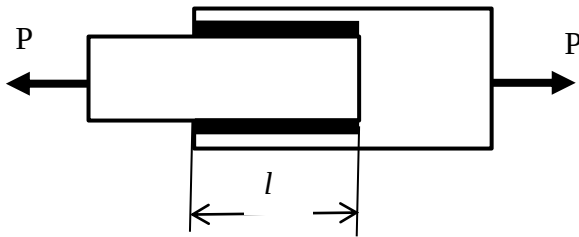
К задаче 3.6

3.6 Определить минимальную длину x , необходимую для приварки листа в соединении, изображенном на рисунке, если растягивающее напряжение в листе равно 140 МПа, а допускаемое напряжение на срез для сварки $[\tau_s]=80$ МПа.

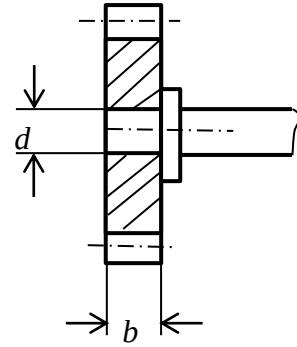
Ответ: $x=75$ мм.

3.7 Определить необходимую длину l фланговых швов для соединения внахлестку двух листов разной ширины (см. рисунок). Усилие, испытываемое соединением, $P=150$ кН. Допускаемое напряжение на срез для сварки равно 110 МПа. Толщина узкого листа 10 мм, а широкого 8 мм.

Ответ: $l \approx 100$ мм.



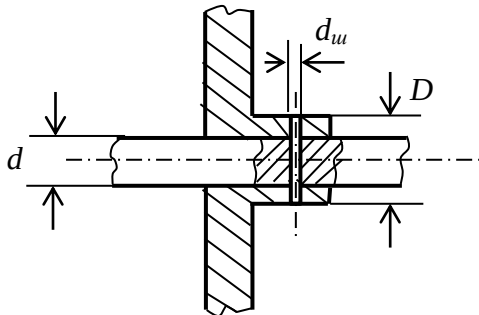
К задаче 3.7



К задаче 3.8

3.8 Для соединения зубчатого колеса с валом применено склеивание клеем, для которого допускаемое напряжение среза $[\tau]=20$ МПа. Определить величину максимального момента T , передаваемого валом, если диаметр вала в месте склеивания $d=12$ мм, а ширина поверхности колеса, контактирующей со склеиваемой поверхностью вала, $b=10$ мм.

Ответ: $T=45,2$ Нм.



К задаче 3.9

3.9 Вал передает крутящий момент $T=0,35$ Нм. Определить напряжения среза и смятия для штифта и сравнить с допускаемыми, если $d_{ш}=1,5$ мм, $d=10$ мм, $D=13$ мм (см. рисунок). Допускаемые напряжения принять: на срез $[\tau]=70$ МПа, на смятие $[\sigma_c]=120$ МПа.

Ответ: $\tau=20$ МПа, $\sigma_c=15,5$ МПа.

3.10 Полый стальной вал имеет наружный диаметр $d_1=100$ мм, а внутренний $d_2=50$ мм. Какую мощность передает этот вал при вращении со скоростью $n=80$ об/мин, если при этом он закручивается на угол $1,8^\circ$ на длине $2,7$ м? Каково наибольшее касательное напряжение в стержне?

Решение: Крутящий момент T , воспринимаемый валом, можно определить из формулы $\varphi = \frac{Tl}{J_\rho G}$:

$$T = \frac{\varphi J_\rho G}{l}. \quad (a)$$

Мощность N связана с крутящим моментом T и скоростью вращения n в об/мин выражением:

$$N = T \frac{\pi n}{30}.$$

После подстановки вместо T его значения из (а), получим

$$N = \frac{\varphi J_{\rho} G \pi n}{30 l}.$$

Угол φ выражаем в радианах

$$\varphi = 1,8^{\circ} = 1,8\pi/180 = \pi/100.$$

Полярный момент инерции кольцевого сечения вала для нашего случая, когда $d_1/d_2=2$, равен

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4) = \frac{15}{512} \pi d_1^4.$$

Тогда, приняв значение модуля сдвига для стали равным $G=8 \cdot 10^4$ МПа, получим значение мощности, передаваемой валом,

$$N = \frac{\pi \cdot 15 \cdot \pi \cdot 0,1^4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 80}{100 \cdot 512 \cdot 30 \cdot 2,7} = 71,67 \text{ кВт.}$$

Наибольшее касательное напряжение выражается формулой

$$\tau_{max} = \frac{T r_1}{J_{\rho}},$$

где $r_1 = d_1/2$.

Подставляя вместо T его значение, выраженное через мощность N и заданное число оборотов, получаем

$$\tau_{max} = \frac{30 N r_1}{\pi n J_{\rho}} = \frac{30 \cdot 71,67 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 512}{3,14 \cdot 80 \cdot 15 \cdot 3,14 \cdot 0,1^4} = 46,5 \text{ МПа.}$$

3.11 Напряжения у поверхности вала, испытующего деформацию кручения, равны 80 МПа. Чему равны касательные напряжения в том же поперечном сечении на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала?

Ответ: $\tau=60$ МПа.

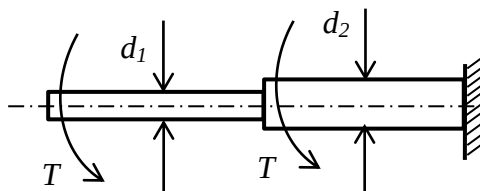
3.12 Определить диаметр сплошного вала круглого сечения длиной $l=0,1$ м, передающего крутящий момент $T=16$ Нм, если допускаемое напряжение для материала вала на срез $[\tau]=80$ МПа, а допустимый относительный угол закручивания вала $[\theta]=0,15$.

Ответ: $d=10$ мм.

3.13 К стержню круглого поперечного сечения, защемленному правым концом, приложены два одинаковых крутящих момента T (см. рисунок).

Диаметр левого участка стержня $d_1=8$ мм, диаметр правого участка $d_2=12$ мм. Наибольшее касательное напряжение в стержне на правом участке составляет $\tau_2^{max}=80$ МПа. Чему равно наибольшее касательное напряжение на левом участке стержня?

Ответ: $\tau_1^{max}=135$ МПа.



К задаче 3.13

3.14 Сравнить вес сплошных валов одинаковой длины, стального и алюминиевого сплава, спроектированных с одинаковым углом закручивания при одинаковых крутящих моментах. Модуль упругости при сдвиге алюминиевого сплава равен $2,7 \cdot 10^4$ МПа, стали – $8 \cdot 10^4$ МПа, а объемные веса соответственно $2,6 \cdot 10^4$ Н/м³ и $7,8 \cdot 10^4$ Н/м³.

Ответ: Стальной вал на 75% тяжелее вала из алюминиевого сплава.

3.15 Определить наименьший диаметр стального вала, передающего 13,23 кВт при 120 об/мин, если допускаемый угол закручивания равен 1° на длине, равной 15 диаметрам вала. Как велики при этом будут наибольшие касательные напряжения? Модуль сдвига для стали принять равным $8 \cdot 10^4$ МПа.

Ответ: $d_{min}=49$ мм, $\tau_{max}=46,6$ МПа.

3.16 Определить диаметр сплошного вала, передающего 330,75 кВт при 300 об/мин. Угол закручивания не должен превышать 1° на 2 м длины вала, а наибольшее касательное напряжение 40 МПа. Модуль сдвига для стали принять равным $8 \cdot 10^4$ МПа.

Ответ: $d=112$ мм.

3.17 Сплошной вал диаметром 100 мм и длиной 6 м закручен на угол 4° . Чему равно наибольшее касательное напряжение, если $G=8 \cdot 10^4$ МПа?

Ответ: $\tau_{max}=46,6$ МПа.

3.18 Сплошной вал диаметром 90 мм при скорости вращения 150 об/мин передает 36,75 кВт. Длина вала между шкивами 4 м. Модуль $G=8 \cdot 10^4$

МПа. Определить наибольшее касательное напряжение в вале и угол, на который один шкив повернется относительно другого.

Ответ: $\tau_{\max}=16,7$ МПа, $\varphi=1^{\circ}4'$.

3.19 Стержень из мягкой стали диаметром 25 мм удлиняется на 0,113 мм на длине 0,2 м при растяжении его силой 6 кН. Этот же стержень закручивается на угол $0,55^{\circ}$ на длине 0,15 м при нагружении его крутящим моментом, равным 200 Нм. Определить величину модулей упругости E , G и коэффициента Пуассона ν .

Ответ: $E=2,16 \cdot 10^5$ МПа, $G=8,16 \cdot 10^4$ МПа, $\nu=0,32$.

3.20 Определить наружный диаметр полого стального вала, передающего 7,056 МВт при 110 об/мин, если допускаемое касательное напряжение равно 56 МПа, а внутренний диаметр составляет 0,6 от внешнего.

Ответ: $d=402$ мм.

3.21 Полый стальной вал длиной 1,8 м нагружен крутящим моментом 6 кНм. Определить наружный и внутренний диаметры вала, если угол закручивания не должен превосходить 2° , а касательное напряжение 70 МПа.

Ответ: $d_1=90,4$ мм, $d_2=72,4$ мм.

3.22 К стальному ступенчатому валу, имеющему сплошное поперечное сечение, приложены четыре момента (рисунок 2, 1–10). Левый конец вала жестко закреплен в опоре, а правый конец – свободен и его торец имеет угловые перемещения относительно левого конца. Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов по длине вала;
- 2) при заданном значении допускаемого напряжения на кручение определить диаметры d_1 и d_2 вала из расчета на прочность, полученные значения округлить;
- 3) построить эпюру действительных напряжений кручения по длине вала;
- 4) построить эпюру углов закручивания, приняв $G \approx 0,4E$. Для стали модуль упругости первого рода считать равным $E=2 \cdot 10^5$ МН/м².

Числовые данные для расчетов приведены в таблице 2.

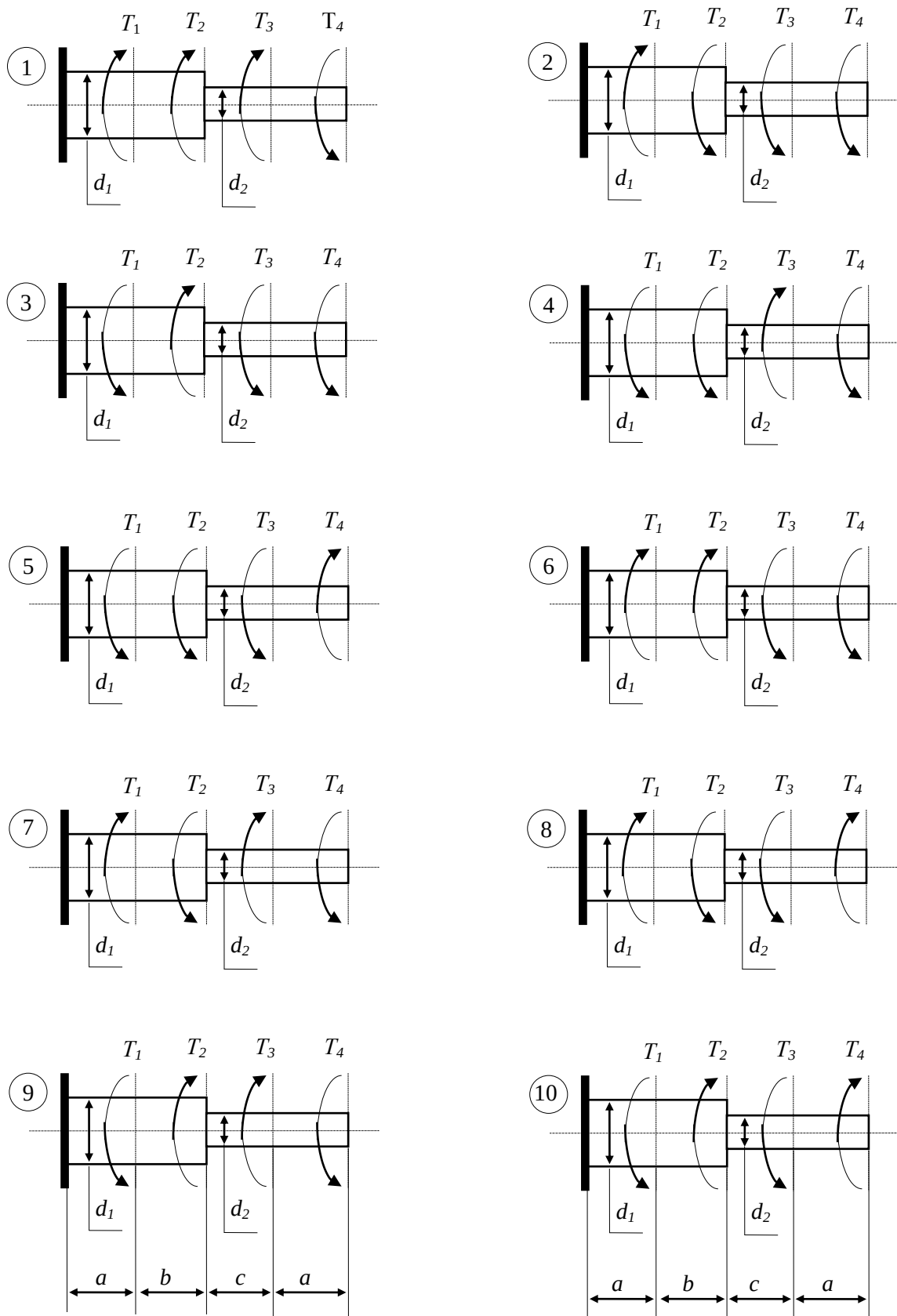


Рисунок 2 – Схемы нагружения валов

Таблица 2 – Исходные данные для расчета ступенчатого вала

Варианты	Расстояния, м			Моменты, кН·м				$[\tau]$, МПа
	a	b	c	T_1	T_2	T_3	T_4	
1	1,0	1,0	1,0	5,1	2,1	1,1	0,1	30
2	1,1	1,1	1,1	5,2	2,2	1,2	0,2	30
3	1,2	1,2	1,2	5,3	2,3	1,3	0,3	35
4	1,3	1,3	1,3	5,4	2,4	1,4	0,4	35
5	1,4	1,4	1,4	5,5	2,5	1,5	0,5	40
6	1,5	1,5	1,5	5,6	2,6	1,6	0,6	40
7	1,6	1,6	1,6	5,7	2,7	1,7	0,6	45
8	1,7	1,7	1,7	5,8	2,8	1,8	0,8	45
9	1,8	1,8	1,8	5,9	2,9	1,9	0,9	50
10	1,9	1,9	1,9	6,0	3,0	2,0	1,0	50

Раздел 4. Деформация изгиба

Деформацией изгиба называется искривление продольной оси стержня, возникающее в результате действия внешних силовых нагрузок.

Деформация стержня под действием сил и моментов сил, расположенных в одной плоскости, причем линии действия сил перпендикулярны первоначальному положению оси стержня, называется *плоским изгибом*.

Стержень, закрепленный на опорах и испытывающий деформацию изгиба, называется *балкой*.

Деформация стержня, при которой в его поперечных сечениях присутствуют только изгибающие моменты M , называется *чистым изгибом*. При *поперечном изгибе* в поперечных сечениях стержня присутствуют как изгибающие моменты M , так и поперечные силы Q .

Изгибающий момент M , действующий в произвольном поперечном сечении балки, равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, взятых относительно центра сечения. Знак изгибающего момента определяется по направлению изгиба балки: если под действием момента внешних сил и изгибающего момента участок балки изгибается выпуклостью вниз, то изгибающий момент положителен, если – вверх, то отрицателен.

Поперечная сила Q в произвольном сечении изогнутой балки равна алгебраической сумме (равнодействующей) всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения. Знак поперечной силы будет соответствовать знаку равнодействующей внешних сил.

Графики, представляющие распределение по длине балки поперечных сил и изгибающих моментов, называются *эпюрами* соответственно поперечных сил и изгибающих моментов. Процесс построения эпюр можно разбить на следующие этапы:

- 1 Определение реакций в опорах.
- 2 Разбивка балки на участки с постоянной (неизменяющейся), либо с монотонно изменяющейся нагрузкой.
- 3 Составление уравнений поперечных сил $Q(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$ для каждого участка балки.
- 4 Построение по полученным для каждого участка балки уравнениям $Q(x)$ и $M(x)$ эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
- 5 Проверка правильности построения эпюр.

Для определения реакций в опорах используют уравнения равновесия плоской системы сил.

При составлении уравнений $Q(x)$ и $M(x)$ необходимо исходить из определений, данных для поперечной силы Q и изгибающего момента M , как алгебраических сумм соответственно всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, и моментов этих сил.

При построении эпюр необходимо определить значения поперечных сил и изгибающих моментов в начале и в конце каждого участка, на которые разбита балка.

При проверке правильности построения эпюр необходимо помнить, что эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. Если в некоторой точке балки приложена сосредоточенная сила F , то на эпюре поперечных сил в сечении, проходящем через эту точку, должен быть скачок на величину силы F . Наличие на схеме нагружения балки внешнего сосредоточенного момента m приведет к скачку на эпюре изгибающих моментов на величину этого момента. Кроме этого при изгибе должны выполняться соотношения между распределенной нагрузкой $q(x)$, поперечной силой $Q(x)$ и изгибающим моментом $M(x)$, определяемые следующими дифференциальными зависимостями

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad q(x) = \frac{dQ}{dx}, \quad q(x) = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

В соответствии с приведенными дифференциальными зависимостями при переходе для некоторого сечения балки эпюры поперечных сил через нуль эпюра изгибающих моментов в этом сечении будет иметь экстремальное значение. Возможны два случая перехода через нуль эпюры поперечных сил: скачком, если в этом сечении приложена внешняя сосредоточенная сила, и плавный (линейный) переход, если на данном участке балки действует распределенная нагрузка. В первом случае на эпюре изгибающих моментов будет излом (рис.), во втором – экстремум параболы. Эпюра изгибающих моментов будет иметь в этом сечении максимум, если на эпюре поперечных сил меняется знак силы с «+» на «-», и минимум, если с «-» на «+». Если исходить из дифференциальной зависимости между распределенной нагрузкой и изгибающим моментом, действующими на данном участке балки, то эпюра изгибающего момента будет иметь максимум при отрицательной распределенной нагрузке и минимум – при положительной.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов позволяет определить те сечения балки, где значения поперечных сил и изгибающих моментов имеют максимальные по модулю значения. Такие сечения

называют *опасными сечениями*. Для опасных сечений определяются значения касательных и нормальных напряжений, которые не должны превышать предельно допускаемых значений соответственно касательных $[\tau]$ и нормальных $[\sigma]$ напряжений для материала балки. Для балок простых сечений, например, прямоугольного или круглого, действующие в сечениях касательные напряжения много меньше нормальных и поэтому расчет балок простых поперечных сечений можно вести только по нормальным напряжениям.

Если представить балку, как состоящую из продольных волокон, то при ее изгибе волокна, находящиеся со стороны выпуклости, будут испытывать растяжение (удлинение), а со стороны вогнутости – сжатие (укорочение). Поскольку одни волокна удлиняются, а другие укорачиваются, то между ними в средней части балки будут находиться волокна, длина которых при изгибе не изменяется. Слой, содержащий волокна, длина которых при изгибе не изменяется, называется *нейтральным слоем*. Чем дальше расположено волокно от нейтрального слоя, тем больше изменяется его длина, тем больше нормальные напряжения, действующие в этой точке поперечного сечения балки. Для волокна, удаленного от нейтрального слоя на расстоянии y , нормальное напряжение определяется выражением

$$\sigma = \frac{My}{I_z},$$

где M – изгибающий момент, I_z – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси z , лежащей в нейтральном слое (нейтральной оси).

Максимальные напряжения будут испытывать волокна, наиболее удаленные от нейтрального слоя. Эти напряжения определяются из уравнения

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_z} = \frac{M}{W_z},$$

где $W_z = I_z/y_{max}$ – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной оси.

Условие прочности при изгибе запишется в виде

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

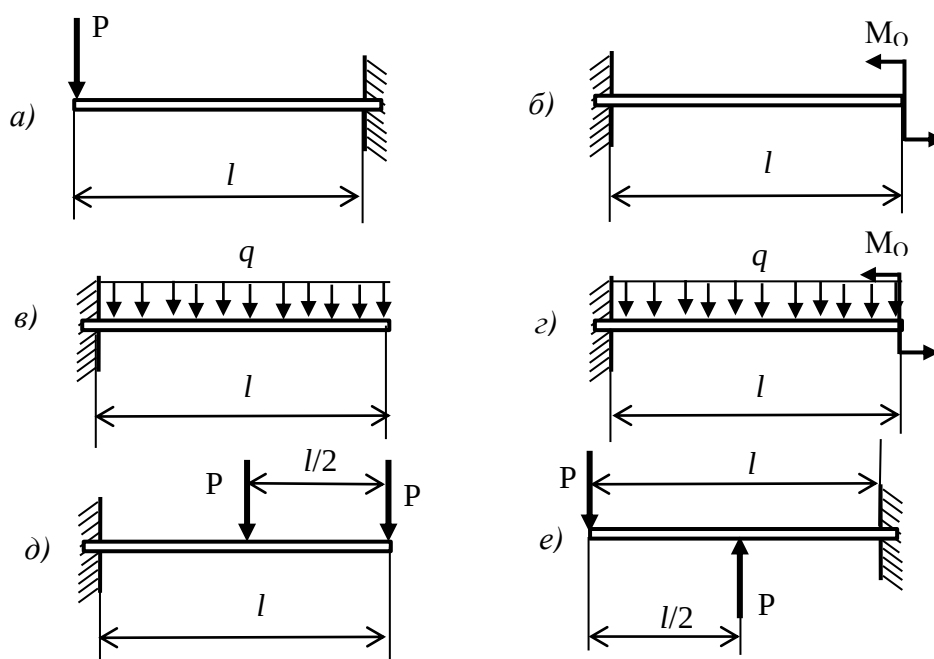
Осевой момент сопротивления сечения балки круглого сечения диаметром d определяется выражением

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32},$$

а для балки с прямоугольным сечением шириной b и высотой h – выражением

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

4.1 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, жестко закрепленных одним концом и нагруженных, как показано на рисунке.



К задаче 4.1

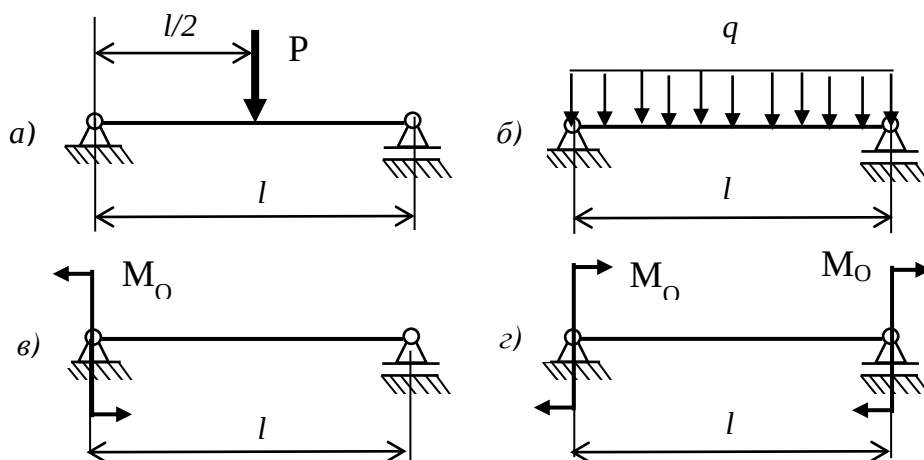
Подсчитать наибольшие по абсолютному значению величины поперечных сил и изгибающих моментов, если $P=20$ кН, $q=20$ кН/м, $M_0=40$ кНм и $l=2$ м.

Ответ: а) $Q = 20$ кН, $M = 40$ кНм; б) $Q = 0$, $M = 40$ кНм; в) $Q = 40$ кН, $M = 40$ кНм; г) $Q = 40$ кН, $M = 20$ кНм; д) $Q = 40$ кН, $M = 60$ кНм; е) $Q = 20$ кН, $M = 20$ кНм.

4.2 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для шарнирно закрепленных балок, нагруженных, как показано на рисунке.

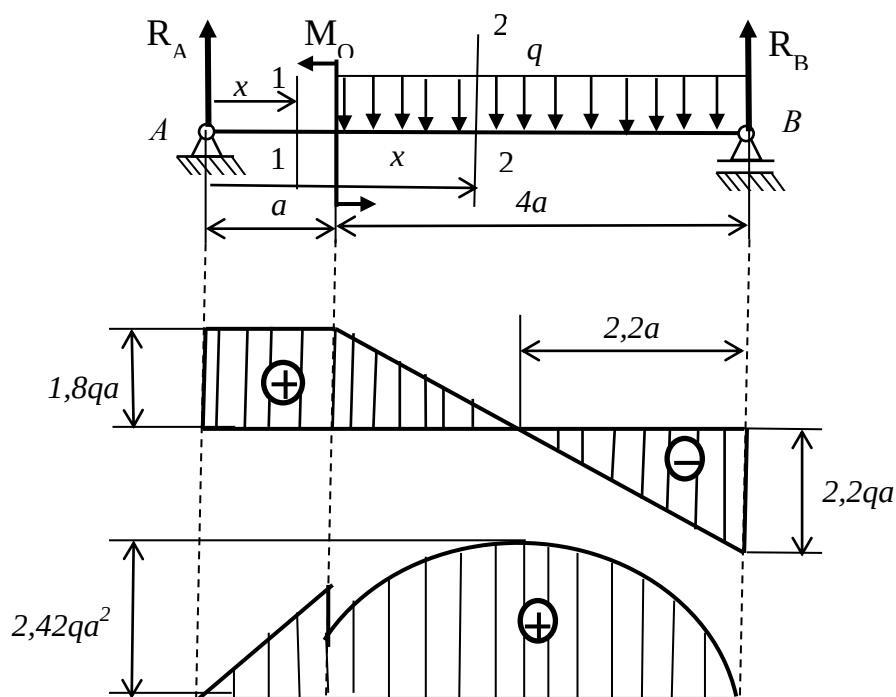
Найти максимальные по модулю значения Q и M при следующих данных: $P=60$ кН, $q=20$ кН/м, $M_0=60$ кНм, $l=3$ м.

Ответ: а) $Q = 30$ кН, $M = 45$ кНм; б) $Q = 30$ кН, $M = 22,5$ кНм; в) $Q = 20$ кН, $M = 60$ кНм; г) $Q = 40$ кН, $M = 60$ кНм.



К задаче 4.2

4.3 Шарнирно опертая балка длиной $l=5a$ загружена на длине $4a$ равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q и парой сил с моментом $M_o=qa^2$, приложенной на расстоянии a от левой опоры (см. рисунок).



К задаче 4.3

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подсчитать их наибольшие по абсолютному значению величины.

Решение: 1) *Определение опорных реакций.* Изобразим на рисунке реакции опор R_A и R_B , направив их вверх. Горизонтальная реакция в шарнирно подвижной опоре A равна нулю, так как рассматривается плоский изгиб, при котором все силы перпендикулярны первоначальному положению оси балки. Для нахождения реакций в опорах составим уравнения равновесия в форме моментов сил относительно точек A и B :

$$\sum M_B = 0; R_A 5a - M_O - q 4a 2a = 0; R_A = \frac{1}{5a} (8qa^2 + M_O) = 1,8qa;$$

$$\sum M_A = 0; -R_B 5a + q 4a (2a + a) - M_O = 0;$$

$$R_B = -\frac{1}{5a} (12qa^2 - M_O) = 2,2qa.$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B - q 4a = 0; 1,8qa + 2,2qa - 4qa = 0.$$

Реакции определены правильно.

2) *Составление выражений $Q(x)$ и $M(x)$.* На схеме балки можно выделить два участка: 1-й участок балки от точки А до точки С, на котором внешняя нагрузка не изменяется, и 2-й участок от точки С до точки В, на котором действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Для составления уравнений, выражающих законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов, рассмотрим два сечения: 1–1 на 1-ом участке и 2–2 на 2-ом участке балки.

Выражения для $Q(x)$ и $M(x)$, действующих в сечениях балки, будем составлять, рассматривая силы, расположенные слева от сечений. Положение сечений будет определяться координатой x , отсчитываемой от точки А, принятой за начало координат.

Выражения $Q(x)$ и $M(x)$:

для первого участка ($0 \leq x \leq a$)

$$Q_1 = R_A = 1,8qa, \quad M_1 = R_A x = 1,8qax;$$

для второго участка ($a \leq x \leq 5a$)

$$Q_2 = R_A - q(x - a), \quad M_2 = R_A x - M_O - q(x - a)(x - a)/2.$$

Полученные зависимости показывают, что на первом участке обе эпюры являются линейными уравнениями; на втором участке эпюра M описывается нелинейным уравнением (параболой).

3) *Построение эпюр Q и M .* При построении линейных зависимостей достаточно дать переменной x два значения, например в начале и в конце участка. В случае нелинейной зависимости следует дать переменной x не менее трех значений.

Построение эпюры Q .

1-й участок ($0 \leq x \leq a$):

$$x = 0, Q_1(0) = R_A = 1,8qa; \quad x = a, Q_1(a) = R_A = 1,8qa.$$

2-й участок ($a \leq x \leq 5a$):

$$x = a, Q_2(a) = R_A = 1,8qa; \quad x = 5a, Q_2(5a) = R_A - q(5a - a) = -2,2qa.$$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил. Для нахождения координаты x_1 точки пересечения эпюрой оси абсцисс приравняем выражение для поперечной силы второго участка нулю.

$$Q_2(x_1) = R_A - q(x_1 - a) = 0, \text{ откуда } x_1 = (R_A + qa)/q = 2,8a.$$

Построение эпюры M .

1-й участок ($0 \leq x \leq a$):

$$x = 0, M_1(0) = 0; \quad x = a, M_1(a) = R_A a = 1,8qa^2.$$

2-й участок ($a \leq x \leq 5a$):

$$x = a, M_2(a) = R_A a - M_O = 1,8qa^2 - qa^2 = 0,8qa^2;$$

$$x = 5a, M_2(5a) = R_A 5a - M_O - q(5a - a)(5a - a)/2 = 0;$$

в качестве третьей точки возьмем точку с координатой $x = x_1$. Учитывая, что $Q = dM/dx$, то при $Q=0$ изгибающий момент будет иметь экстремальное значение (в нашем случае максимальное), т. е.

$$M_2(x_1) = M_{\max} = M_2(2,8a) = R_A 2,8a - M_O - q(2,8a - a)(2,8a - a)/2 = 2,42 qa^2.$$

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов.

4) Проверка правильности построения эпюр.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. В нашем случае эпюра поперечных сил начинается с нуля скачком на величину реакции в опоре A и возвращается в нуль реакцией в опоре B .

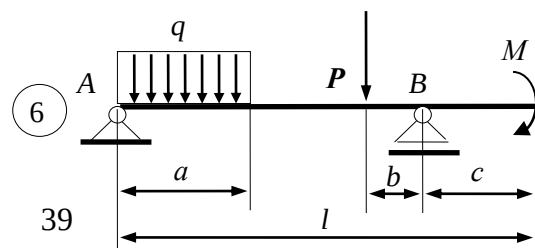
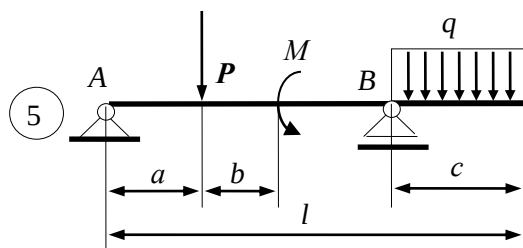
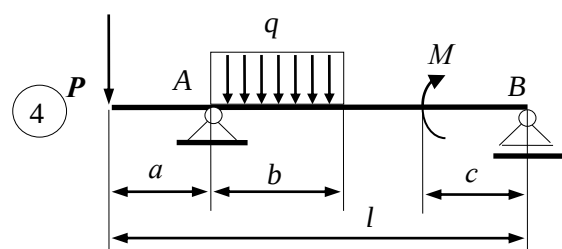
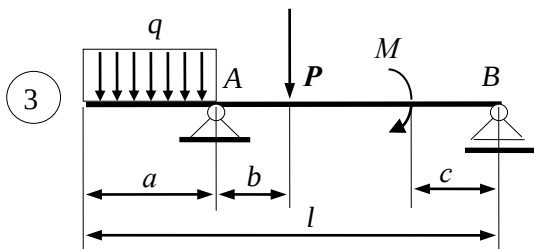
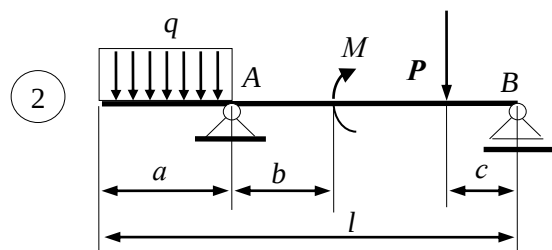
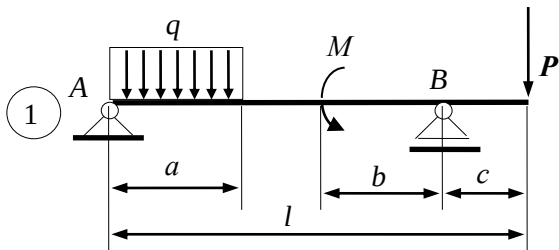
Эпюра изгибающих моментов также начинается с нуля и возвращается в нуль. В точке, где поперечная сила принимает нулевое значение, эпюра изгибающих моментов принимает экстремальное (максимальное) значение, т. е. выполняются дифференциальные зависимости при изгибе.

4.4 Для заданной схемы балки (рисунок 4.4, 1–10) требуется написать в общем виде выражения для поперечной силы Q и изгибающего момента M , действующих в поперечных сечениях каждого участка балки, построить эпюры Q и M , найти $M_{\max}$ и подобрать по таблице А1 приложения А стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma]=160$ МПа. Данные взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Исходные данные для расчета балки

Варианты	Д а н н ы е в е л и ч и н ы						
	a , м	b , м	c , м	l , м	F , кН	M , кН·м	q , кН/м
1	2,0	3,2	1,8	10	20	7	22
2	2,2	3,4	1,9	10	19	7	21
3	2,4	3,6	2,0	11	18	8	20
4	2,6	3,8	2,1	11	16	8	19
5	2,8	4,0	2,2	12	15	9	18
6	3,0	4,2	2,3	12	14	9	17
7	3,2	4,4	2,4	13	13	10	16
8	3,4	4,6	2,5	13	12	10	15
9	3,6	4,8	2,6	14	11	11	14

10	3,8	5,0	2,7	14	10	11	13
----	-----	-----	-----	----	----	----	----



К задаче 4.4

5 Кинематическое исследование зубчатых передач

Раздел 5. Кинематическое исследование зубчатых передач

Кинематическое исследование зубчатых передач заключается в определении передаточного отношения. Передаточное отношение i – это отношение угловой скорости на входе $\omega_{\text{вх}}$ к угловой скорости на выходе $\omega_{\text{вых}}$ передачи:

$$i = \omega_{\text{вх}} / \omega_{\text{вых}}.$$

Для зубчатых передач отношение угловых скоростей может быть выражено через соответствующее отношение числа зубьев зубчатых колес передачи. Так для пары зубчатых колес с числом зубьев z_1 и z_2 передаточное отношение определится выражением:

$$i = \omega_{\text{вх}} / \omega_{\text{вых}} = \pm z_2 / z_1,$$

где знак « $-$ » берется при внешнем зацеплении зубчатых колес, а знак « $+$ » – при внутреннем зацеплении.

Для n – ступенчатой зубчатой передачи общее передаточное отношение определяется как произведение передаточных отношений отдельных ступеней:

$$i = i_1 i_2 \dots i_n .$$

Если n – ступенчатая зубчатая передача состоит из $2n$ зубчатых колес числом зубьев $z_1, z_2, \dots, z_{2n}$, закрепленных на валах, вращающихся в неподвижных опорах, то передаточное отношение определится выражением

$$i = \omega_{\text{вх}} / \omega_{\text{вых}} = (-1)^k \frac{z_2 z_4 \dots z_{2n}}{z_1 z_3 \dots z_{2n-1}},$$

где k – число внешних зацеплений зубчатых колес в передаче.

Для планетарных передач, у которых хотя бы одно колесо имеет подвижную ось, передаточное отношение определяется по формуле Виллиса:

$$i_{k-H}^l = 1 - i_{k-l}^H ,$$

где i_{k-H}^l – искомое передаточное отношение от k -го звена к звену H (водителю) при неподвижном звене l ; i_{k-l}^H – передаточное отношение от k -го звена к звену l при неподвижном водиле H .

Если входным звеном планетарной передачи является водило H , то передаточное отношение от водила к k -му звену определится как обратное отношение:

$$i_{H-k}^l = 1 / i_{k-H}^l .$$

Для червячного механизма передаточное отношение i определяется как отношение числа зубьев червячного колеса z_k к числу заходов червяка z_q :

$$i = \omega_q / \omega_k = z_k / z_q .$$

5.1 Определить передаточное отношение i_{1-3} зубчатой передачи (см. рисунок), если числа зубьев колес равны $z_1 = 20, z_2 = 30, z_3 = 40$.

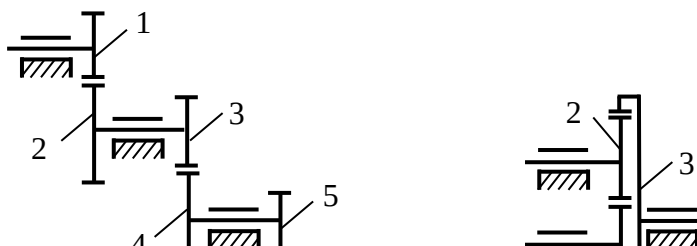
Ответ: $i_{1-3} = 2$.

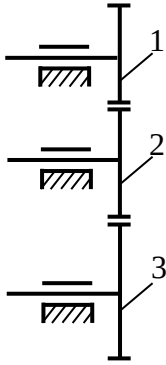
5.2 Определить передаточное отношение i_{1-6} зубчатой передачи, если числа зубьев равны $z_1 = 16, z_2 = 48, z_3 = 20, z_4 = 40, z_5 = 13, z_6 = 26$.

Ответ: $i_{1-6} = -12$.

5.3 Определить передаточное отношение i_{1-3} зубчатой передачи, если числа зубьев колес равны $z_1 = z_2 = 20, z_3 = 60$.

Ответ: $i_{1-3} = -3$.

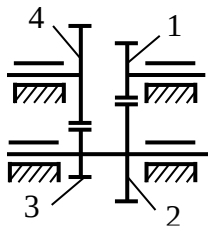




К задаче 5.1

5.4 Редуктор скорости, служащий для замедления вращения и передающий вращение вала I валу II, состоит из четырех шестерен с соответствующим числом зубьев: $z_1 = 10$, $z_2 = 60$, $z_3 = 12$, $z_4 = 70$. Определить передаточное отношение механизма.

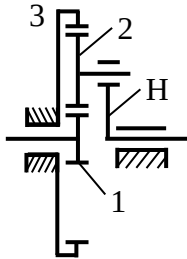
Ответ: $i_{I-II} = \omega_I / \omega_{II} = 35$.



К задаче 5.4

5.5 В представленном на рисунке планетарном зубчатом механизме (редуктор Джемса) известно количество зубьев центральных колес: $z_1 = 20$, $z_3 = 80$. Определить количество зубьев сателлита z_2 и передаточное отношение i_{1-H} всего механизма.

Ответ: $z_2 = 30$, $i_{1-H} = 5$.



К задаче 5.5

5.6 Для представленного на рисунке редуктора подсчитать передаточное отношение i_{1-5} , если $z_1 = z_4 = 30$, $z_2 = z_5 = 20$, $z_3 = 80$.

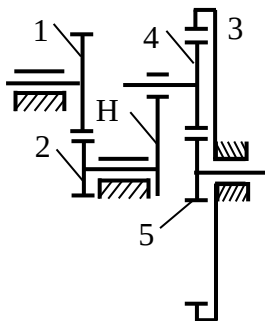
Решение: Устанавливаем, что редуктор двухступенчатый: первая ступень (не планетарная) – от колеса 1 к колесу 2; вторая (планетарная) – от водила H к колесу 5.

Подсчитываем передаточные отношения отдельных ступеней. Для первой ступени имеем

$$i_{1-2} = \omega_1 / \omega_2 = -z_2 / z_1 = -20/30 = -2/3;$$

для второй ступени имеем

$$i_{H5} = \frac{\omega_H}{\omega_5} = \frac{1}{i_{5H}} = \frac{1}{1-i_{53}^H} = \frac{1}{1+\frac{z_3}{z_5}} = \frac{1}{5}.$$



К задаче 5.6

Передаточное отношение редуктора

$$i_{15} = i_{12} i_{H5} = -\frac{2}{3} \frac{1}{5} = -\frac{1}{7,5}.$$

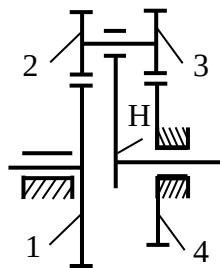
Ответ: $i_{1-5} = -1/7,5$.

5.7 Для редуктора Давида (см. рисунок) подсчитать передаточное отношение i_{H-1} при $z_1 = z_3 = 100$, $z_2 = 99$, 20 , $z_4 = 101$.

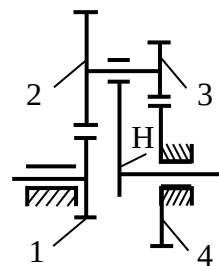
Ответ: $i_{H-1} = 10000$.

5.8 Определить передаточное отношение i_{1-H} редуктора Давида, если числа зубьев колес равны $z_1 = 24$, $z_2 = 36$, $z_3 = 12$, $z_4 = 48$.

Ответ: $i_{1-H} = -5$.



К задаче 5.7



К задаче 5.8

5.9 На рисунке показаны 10 схем зубчатых передач. Входное колесо 1 в данный момент имеет угловую скорость ω_1 и постоянное угловое ускорение ε_1 , направленное по движению или против движения. Определить:

передаточное отношение между входным и выходным звеньями и его знак (если их оси вращения параллельны);

угловую скорость и угловое ускорение выходного звена, их направления показать на схеме передачи;

время, в течение которого угловая скорость увеличится в два раза (если движение ускоренное) или уменьшится до нуля (если движение замедленное);

общий коэффициент полезного действия передачи.

В таблицах 5.1 – 5.10 заданных величин z – число зубьев колес приводится с индексом, соответствующим их номеру на схеме механизма, для червяка z – число заходов, а направление витков червяка указано буквами: л – левое, п – правое.

Для расчетов принять следующие значения КПД (учитывающего потери и в зацеплении, и в подшипниках): для пары цилиндрических колес $\eta_{\text{ц}} = 0,97$; для пары конических колес $\eta_{\text{к}} = 0,95$; для планетарной передачи с внешними зацеплениями ее колес $\eta_{\text{п}} = 0,95$, а для имеющей внутреннее зацепление одной из пар $\eta_{\text{п}} = 0,96$; для червячной передачи при одно, двух и трехзаходном червяке – соответственно $\eta_{\text{ч}} = 0,7; 0,75; 0,8$.

Для решения задачи нужно определить, из каких видов передач состоит заданное сложное соединение зубчатых колес, уметь находить планетарную передачу с ее характерными звеньями – водилом и сателлитами, разделять передачи на плоские и пространственные (с непараллельными осями вращения). Нужно понимать, когда направления вращения можно определять по алгебраическим знакам передаточного отношения, а когда для этого необходимо применять простановку стрелок на схеме. Очень важны показанные направления угловой скорости и углового ускорения – по ним определяют характер движения (ускоренное, замедленное).

Таблица 5.1 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 1 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	15	16	14	14	17	18	14	15	16	14
z_2	20	30	24	20	34	24	20	30	28	26
z_2'	14	15	14	15	17	15	15	14	14	15
z_4	20	20	28	21	24	26	36	38	40	43
z_4'	15	14	14	16	15	18	14	18	19	20
z_5	21	22	21	22	21	25	22	26	25	40
z_6	57	58	56	60	57	68	58	70	69	100
$\omega_1, \text{рад/с}$	280	180	240	250	300	250	150	200	350	100
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	50	60	180	125	75	50	100	50	40	20

Таблица 5.2 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 2 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	14	25	18	21	20	16	18	16	20
z_2	23	22	26	30	28	30	28	28	24	21
z_2'	22	16	25	16	17	18	16	15	18	20
z_3	23	26	26	26	30	28	24	32	30	21
z_4	22	28	26	24	31	32	29	31	21	20
z_5	23	27	25	25	32	31	30	30	22	21
z_5'	22	28	26	24	31	32	29	31	21	20
z_6	23	27	25	25	32	31	30	30	22	21
z_6'	32	29	26	28	30	25	22	23	24	20
z_7	42	39	38	37	40	37	45	42	40	65
ω_1 , рад/с	150	380	320	290	320	300	280	350	250	400
ε_1 , рад/с ²	75	285	160	100	80	100	210	70	50	200

Таблица 5.3 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 3 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1, z_3'	20	23	24	17	22	19	14	16	18	20
z_2, z_4	40	30	38	25	36	36	26	40	30	28
z_2', z_4'	22	21	22	20	26	26	21	20	22	20
z_3, z_5	82	74	84	62	84	79	61	76	70	68
ω_1 , рад/с	320	190	220	180	200	240	300	260	340	280

ε_1 , рад/с ²	80	95	165	200	50	180	200	130	285	210
--------------------------------------	----	----	-----	-----	----	-----	-----	-----	-----	-----

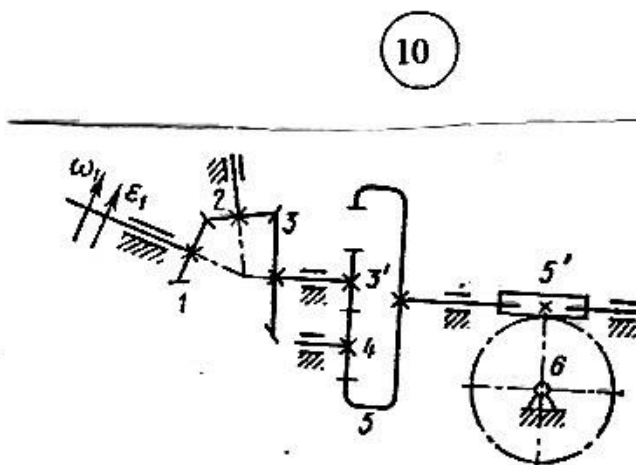
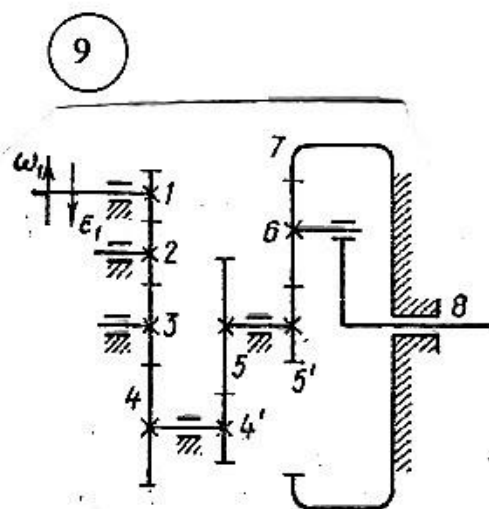
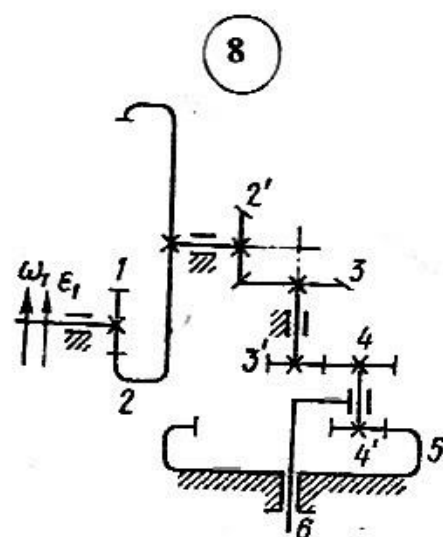
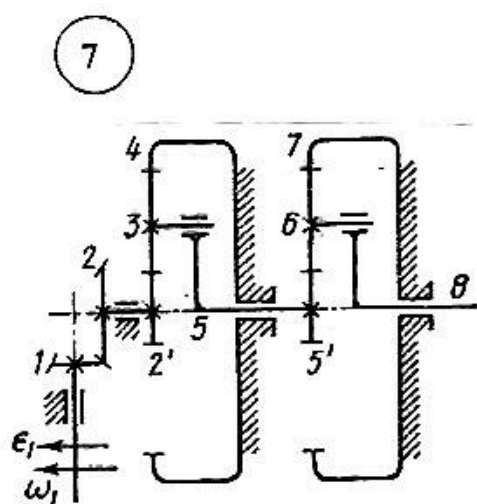
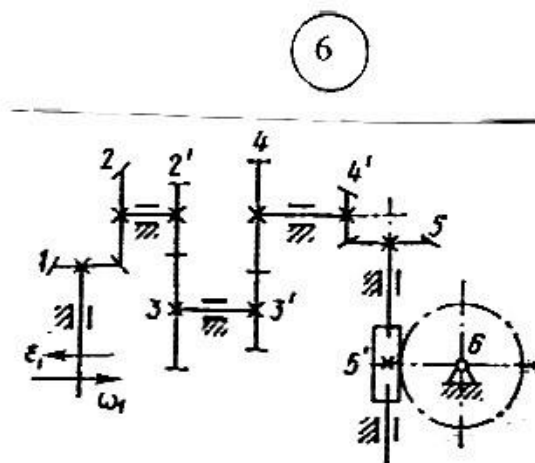
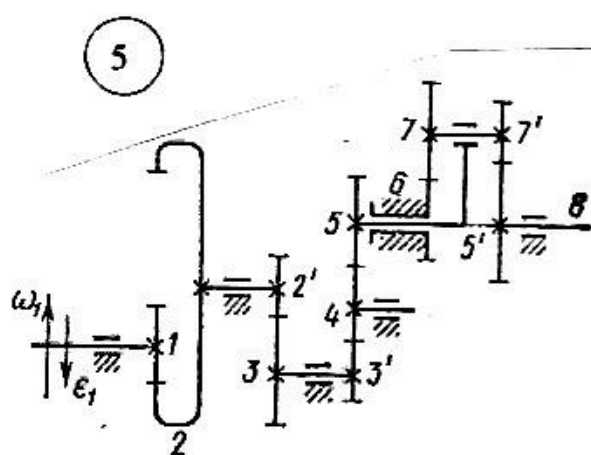
Таблица 5.4 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 4 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	15	17	14	19	16	18	14	18	14	18
z_2	24	32	24	28	30	27	21	31	19	25
z_2', z_4'	30	25	20	20	25	21	30	29	34	42
z_3, z_5	20	30	40	30	21	20	21	21	20	20
z_4, z_6	70	85	100	80	67	61	72	71	74	82
ω_1 , рад/с	260	240	240	350	400	220	150	150	300	200
ε_1 , рад/с ²	195	100	180	200	50	55	60	200	200	50

Таблица 5.5 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 5 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	29	30	27	26	25	24	23	22	21	20
z_2	39	40	40	36	37	40	42	46	56	65
z_2'	20	15	20	16	17	16	15	17	15	14

К задаче 5.9 – Схемы механизмов



К задаче 5.9 - продолжение

Таблица 5.6 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 6 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	17	20	17	21	18	20	18	17	17
z_2	30	23	21	25	24	21	24	30	17	20
z_2'	16	14	15	15	16	17	15	16	14	14
z_3	28	23	24	20	30	24	28	20	20	16
z_3'	15	15	14	16	14	14	17	18	15	15
z_4	31	28	24	24	21	20	30	32	20	20
z_4'	19	18	17	18	19	18	17	18	17	18
z_5	28	27	32	31	32	28	30	32	26	28
z_5'	2,л	3,п	2,л	1,п	3,л	2,п	1,л	3,п	2,л	1,п
z_6	50	33	38	40	42	40	30	36	30	50
ω_1 , рад/с	380	320	350	320	280	250	300	400	150	350
ε_1 , рад/с ²	190	80	70	80	70	125	60	250	50	100

Таблица 5.7 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 7 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

z_1	18	19	16	17	18	13	14	14	16	15
z_2	25	28	31	27	39	24	27	20	30	25
z_2', z_5'	40	35	28	30	18	22	25	20	20	21
z_3, z_6	20	20	20	20	24	36	20	40	30	20
z_4, z_7	80	75	68	70	66	94	65	100	80	61
ω_1 , рад/с	320	360	400	180	350	320	280	120	300	250
ε_1 , рад/с ²	80	60	50	90	200	240	75	40	200	100

Таблица 5.8 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 8 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	22	21	21	26	25	21	22	22	20
z_2	50	45	60	55	36	38	60	50	60	62
z_2'	18	14	18	17	16	14	15	16	17	15
z_3	29	26	32	30	24	26	24	24	30	28
z_3'	16	17	23	24	20	20	15	18	16	15
z_4	40	27	30	38	40	30	26	28	24	25
z_4'	20	20	21	22	22	20	20	21	21	22
z_5	76	64	74	84	82	70	61	67	61	62
ω_1 , рад/с	240	320	400	280	350	300	150	200	250	180
ε_1 , рад/с ²	180	240	100	210	200	75	25	100	50	90

Таблица 5.9 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 9 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	20	14	15	19	17	14	15	18	15	14
z_4	30	26	25	26	28	21	20	30	21	30
z_4'	18	14	15	18	16	17	16	14	15	14
z_5	24	26	27	30	24	24	23	21	30	26
z_5'	15	15	14	16	15	14	15	14	18	20
z_6	35	30	26	30	24	23	21	22	21	25
z_7	85	75	66	76	63	60	57	58	60	70
ω_1 , рад/с	210	280	400	180	220	240	250	350	200	150
ε_1 , рад/с ²	630	140	250	45	550	60	400	70	500	60

Таблица 5.10 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 10 (см. рисунок)

Величина	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	19	18	20	17	18	19	17	18	18	17
z_3	27	24	32	30	25	30	27	30	25	28
z_3'	21	20	16	14	14	15	17	15	16	15
z_5	52	50	42	46	50	49	48	45	50	45
z_5'	3,п	2,л	1,п	2,л	1,п	3,л	2,п	1,л	2,п	3,л
z_6	33	34	50	32	29	36	40	28	28	30
ω_1 , рад/с	150	200	350	240	300	350	250	100	200	180
ε_1 , рад/с ²	500	250	700	600	500	175	125	60	50	60

Раздел 6. Точность механизмов

6.1 Допуски и посадки

В соединении двух деталей, входящих одна в другую, различают наружные (охватываемые) и внутренние (охватывающие) элементы деталей, называемые соответственно валом и отверстием. Размеры валов и отверстий могут быть как диаметральными, так и линейными.

Основной размер отверстия и вала, определяемый из расчета на прочность или по конструктивным соображениям и служащий началом отсчета отклонений, называется *номинальным размером* (обозначается: d – для вала, D – для отверстия). Общий для вала и отверстия, составляющих соединение, размер называется *номинальным размером соединения* (d).

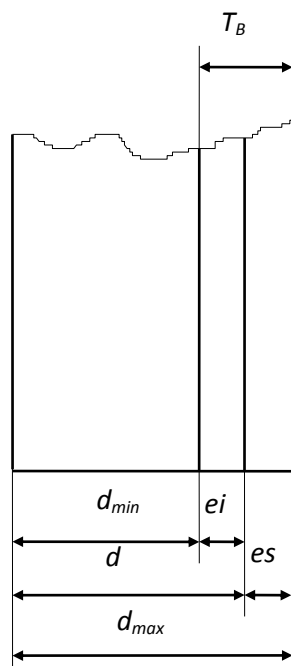


Рис. 6.1 – Схема отклонений размера

Размер, полученный в результате непосредственного измерения изготовленной детали, называется *действительным размером* (d_o, D_o). Максимальное и минимальное значения размера, между которыми должен находиться действительный размер годной детали, называют соответственно *наибольшим* ($d_{max}; D_{max}$) и *наименьшим* ($d_{min}; D_{min}$) *предельными размерами* (рис. 6.1).

Алгебраическая разность между действительным и номинальным размерами называется *отклонением*. Алгебраическая разность между наибольшим и наименьшим предельными и номинальным размерами называется соответственно *верхним* (ES – отверстие, es – вал) и *нижним* (EI – отверстие, ei

– вал) отклонениями.

Разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или алгебраическая разность между верхним и нижним отклонениями называют *допуском размера* (T_A – отверстия, T_B – вала). Допуск характеризует точность изготовления детали: чем он меньше, тем выше точность.

Интервал возможных значений действительного размера, ограниченный предельными размерами, называется *полем допуска*. Поле допуска определяется величиной допуска и его расположением относительно номинального размера.

При соединении двух деталей (вала и отверстия) в зависимости от взаимного расположения полей допусков можно получать различные виды соединений.

Посадкой называется вид соединения деталей, определяемый величиной получающихся в нем *зазоров* или *натягов*.

Зазором S называют положительную разность между действительными размерами отверстия и вала – размер отверстия больше размера вала.

Натягом N называют положительную разность между действительными размерами вала и отверстия, вычисленную до сборки деталей – размер вала больше размера отверстия.

ГОСТом установлено три типа посадок:

посадки с зазором – поле допуска отверстия расположено над полем допуска вала;

посадки с натягом – поле допуска вала расположено над полем допуска отверстия;

переходные посадки – поля допусков перекрываются.

На примере рассмотрим определение предельных размеров отверстий и валов, наибольших и наименьших зазоров (натягов), а также допуски посадок для различных типов посадок и графическое изображение полей допусков для различных посадок.

Формулы подсчета предельных величин зазоров и натягов для цилиндрических соединений имеют следующий вид:

– посадка с зазором (рис. 4.3, а):

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min}, \quad S_{\min} = D_{\min} - d_{\max};$$

– посадка с натягом (рис. 4.3, б):

$$N_{\max} = d_{\max} - D_{\min}, \quad N_{\min} = d_{\min} - D_{\max};$$

– переходная посадка (рис. 4.3, в):

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min}, N_{\max} = d_{\max} - D_{\min}.$$

Рассмотрим посадки $\varnothing 12H7/f7$, $\varnothing 12H7/r6$, $\varnothing 12H7/k6$.

Размеры отверстия $\varnothing 12H7(^{0,018})$ у всех трех посадок одинаковы:

$$D_{\min} = 12 \text{ мм}; D_{\max} = 12,000 + 0,018 = 12,018 \text{ (мм)}. \text{ Допуск отверстия:}$$

$$T_A = 12,018 - 12,000 = 0,018 \text{ (мм)}.$$

Рассчитаем предельные размеры и допуски валов, а также параметры соединений.

Для посадки с зазором $\varnothing 12H7/f7$

Вал $\varnothing 12f7(^{-0,016}_{-0,034})$

Соединение

$$d_{\min} = 12,000 - 0,034 = 11,966 \text{ (мм)},$$

$$S_{\min} = 12,000 - 11,984 = 0,016 \text{ (мм)},$$

$$d_{\max} = 12,000 - 0,016 = 11,984 \text{ (мм)},$$

$$S_{\max} = 12,018 - 11,966 = 0,052 \text{ (мм)},$$

$$T_B = 11,984 - 11,966 = 0,018 \text{ (мм)}.$$

$$T_S = 0,052 - 0,016 = 0,036 \text{ (мм)}.$$

Для посадки с натягом $\varnothing 12H7/r6$

Вал $\varnothing 12r6(^{+0,034}_{+0,023})$

Соединение

$$d_{\min} = 12,000 + 0,023 = 12,023 \text{ (мм)},$$

$$N_{\min} = 12,023 - 12,018 = 0,005 \text{ (мм)},$$

$$d_{\max} = 12,000 + 0,034 = 12,034 \text{ (мм)},$$

$$N_{\max} = 12,034 - 12,000 = 0,034 \text{ (мм)},$$

$$T_B = 12,034 - 12,023 = 0,011 \text{ (мм)}.$$

$$T_N = 0,034 - 0,005 = 0,029 \text{ (мм)}.$$

Для переходной посадки $\varnothing 12H7/k6$

Вал $\varnothing 12k6(^{+0,012}_{+0,001})$

Соединение

$$d_{\min} = 12,000 + 0,001 = 12,001 \text{ (мм)},$$

$$S_{\max} = 12,018 - 12,001 = 0,017 \text{ (мм)},$$

$$d_{\max} = 12,000 + 0,012 = 12,012 \text{ (мм)},$$

$$N_{\max} = 12,012 - 12,000 = 0,012 \text{ (мм)},$$

$$T_B = 12,012 - 12,001 = 0,011 \text{ (мм)}.$$

$$T_{S,N} = 0,012 - 0,017 = 0,029 \text{ (мм)}.$$

где T_S , T_N , $T_{S,N}$ – допуск посадки, соответственно, с зазором, с натягом и переходной.

На рис. 6.2 графически представлены расположения полей допусков отверстия и вала для рассмотренных посадок.

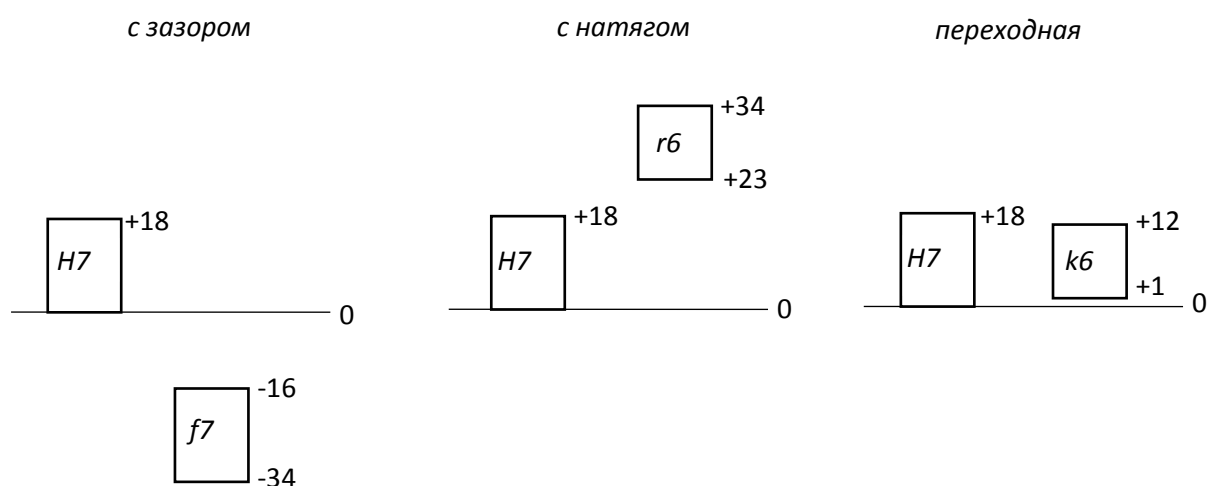


Рис. 6.2 – Схемы расположения полей допусков валов и отверстий

Таблица 6.1 – Предельные отклонения предпочтительных полей допусков отверстий

Интервалы размеров, мм	Поля допусков									
	H7	J _s 7	K7	N7	P7	F8	H8	E9	H9	H11
	Предельные отклонения, мкм									
От 1 до 3	+10 0	+5 -5	0 -10	-4 -14	-6 -16	+20 +6	+14 0	+39 +14	+25 0	+60 0
св.3 до 6	+12 0	+6 -6	+3 -9	-4 -16	-8 -20	+28 +10	+18 0	+50 +20	+30 0	+75 0
св.6 до 10	+15 0	+7 -7	+5 -10	-4 -19	-9 -24	+35 +13	+22 0	+61 +25	+36 0	+90 0
св.10 до 18	+18 0	+9 -9	+6 -12	-5 -23	-11 -29	+43 +16	+27 0	+75 +32	+43 0	+110 0
св.18 до 30	+21 0	+10 -10	+6 -15	-7 -28	-14 -35	+53 +20	+32 0	+92 +40	+52 0	+130 0

св.30 до 50	+25 0	+12 -12	+7 -18	-8 -33	-17 -42	+64 +25	+39 0	+112 +50	+62 0	+160 0
св.50 до 80	+30 0	+15 -15	+9 -21	-9 -39	-21 -51	+76 +30	+46 0	+134 +60	+74 0	+190 0
св.80 до 120	+35 0	+17 -17	+10 -25	-10 -45	-24 -59	+90 +36	+54 0	+159 +72	+87 0	+220 0
св.120 до 180	+40 0	+20 -20	+12 -28	-12 -52	-28 -68	+106 +43	+63 0	+185 +85	+100 0	+250 0
св.180 до 250	+46 0	+23 -23	+13 -33	-14 -60	-33 -79	+122 +50	+72 0	+215 +100	+115 0	+290 0

Таблица 6.2 – Предельные отклонения предпочтительных полей допусков валов

Интервалы размеров, мм	Поля допусков															
	<i>g6</i>	<i>h6</i>	<i>j_s6</i>	<i>k6</i>	<i>n6</i>	<i>p6</i>	<i>r6</i>	<i>s6</i>	<i>f7</i>	<i>h7</i>	<i>e8</i>	<i>h8</i>	<i>d9</i>	<i>h9</i>	<i>d11</i>	<i>h11</i>
	Предельные отклонения, мкм															
От 1	-2	0	+3	+6	+10	+12	+16	+20	-6	0	-14	0	-20	0	-20	0
до 3	-8	-6	-3	0	+4	+6	+10	+14	-17	-10	-28	-14	-45	-25	-80	-60
св.3	-4	0	+4	+9	+16	+20	+23	+27	-10	0	-20	0	-30	0	-30	0
до 6	-12	-8	-4	+1	+8	+12	+15	+19	-22	-12	-38	-18	-60	-30	-105	-75
св.6	-5	0	+4,5	+10	+19	+24	+28	+32	-13	0	-25	0	-40	0	-40	0
до 10	-14	-9	-4,5	+1	+10	+15	+19	+23	-28	-15	-47	-22	-76	-36	-130	-90
св.10	-6	0	+5,5	+12	+23	+29	+34	+39	-16	0	-32	0	-50	0	-50	0
до 18	-17	-11	-5,5	+1	+12	+18	+23	+28	-34	-18	-59	-27	-93	-43	-160	-110
св.18	-7	0	+6,5	+15	+28	+35	+41	+48	-20	0	-40	0	-65	0	-65	0
до 30	-20	-13	-6,5	+2	+15	+22	+28	+35	-41	-21	-73	-33	-117	-52	-195	-130
св.30	-9	0	+8	+18	+33	+42	+50	+59	-25	0	-50	0	-80	0	-80	0
до 50	-25	-16	-8	+2	+17	+26	+34	+43	-50	-25	-89	-39	-142	-62	-240	-160
св.50	-10	0	+9,5	+21	+39	+51	+60	+72	-30	0	-60	0	-100	0	-100	0
до 65							+41	+53								
св.65	-29	-19	-9,5	+2	+20	+32	+62	+78	-60	-30	-106	46	-174	-74	-290	-190
до 80							+43	+59								
св.80	-12	0	+11	+25	+45	+59	+73	+93	-36	0	-72	0	-120	0	-120	0
до 100							+51	+71								
св.100	-34	-22	-11	+3	+23	+37	+76	+101	-71	-35	-126	-54	-207	-87	-340	-220
до 120							+54	+79								
св.120	-14	0	+12,5	+28	+52	+68	+88	+177	-43	0	-85	0	-145	0	-145	0
до 140							+63	+92								
св.140							+90	+125								
до 160							+65	+100								
св.160	-39	-25	-12,5	+3	+27	+43	+93	+133	-83	-40	-148	-63	-245	-100	-395	-250

до 180							+68	+108								
св.180 до200							+106 +77	+151 +122								
св.200 до 225	-15 -44	0 -29	+145 -14,5	+33 +4	+60 +31	+79 +50	+109 +80	+159 +130	-50 -96	0 -46	-100 -172	0 -72	-170 -285	0 -115	-170 -460	0 -290
св.225 до 250							+113 +84	+169 +140								

6.1 – 6.10 Для посадок, представленных в таблице 6.3, рассчитать наибольшие и наименьшие размеры заданных отверстий и валов, их допуски, наибольшие и наименьшие зазоры и натяги, а также допуски посадок. Построить схемы расположения полей допусков отверстий и валов, указав на схемах предельные отклонения, взятые из таблиц 6.1 и 6.2.

Таблица 6.3 – Варианты заданий

Вариант	Т и п ы п о с а д о к		
1	$\varnothing 22H7/h6$	$\varnothing 36H7/s6$	$\varnothing 16H7/j_s6$
2	$\varnothing 27H8/e8$	$\varnothing 48H7/r6$	$\varnothing 18H7/k6$
3	$\varnothing 37N7/h7$	$\varnothing 7H8/e8$	$\varnothing 25H7/r6$
4	$\varnothing 38H7/r6$	$\varnothing 12H7/e8$	$\varnothing 45H7/j_s6$
5	$\varnothing 22H7/e8$	$\varnothing 69H7/r6$	$\varnothing 15K7/h6$
6	$\varnothing 18E9/h8$	$\varnothing 29H7/r6$	$\varnothing 50H7/j_s6$
7	$\varnothing 42H7/r6$	$\varnothing 25H7/k6$	$\varnothing 18E9/h8$
8	$\varnothing 85E9/h8$	$\varnothing 35H7/s6$	$\varnothing 45H7/k6$
9	$\varnothing 5H9/h9$	$\varnothing 72H7/r6$	$\varnothing 28N7/h7$
10	$\varnothing 50P7/h6$	$\varnothing 18E9/h8$	$\varnothing 29K7/h6$

6.2 Точность зубчатых передач

Основными погрешностями зубчатых передач являются *погрешность мертвого хода* и *кинематическая погрешность*.

Погрешность мертвого хода рассчитывается при реверсивном режиме работы (изменении направления вращения колес) зубчатых передач. *Мертвый ход* пары сопряженных зубчатых колес определяется углом поворота $\Delta\varphi$ одного колеса при неподвижном втором колесе. Причиной мертвого хода в передачах является наличие бокового зазора j_n между зубьями сопряженных колес (*кинематический мертвый ход*) и упругими деформациями валов под действием передаваемых моментов (*упругий мертвый ход*).

При отсутствии зазоров в подшипниковых узлах значение *кинематического мертвого хода* для пары зубчатых колес рассчитывают по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{j_n}{r \cos \alpha}, \quad (6.1)$$

где j_n – величина бокового зазора, значение которого зависит от вида сопряжения зубчатых колес и допуска на боковой зазор; r – радиус делительной окружности колеса; α – угол зацепления (для эвольвентного профиля $\alpha = 20^\circ$).

Обычно величина бокового зазора j_n дается в микрометрах, а величину мертвого хода определяют в угловых минутах. Тогда для пары зубчатых колес

$$\Delta\varphi = \frac{2j_n 180 \cdot 60}{10^3 m z \pi \cos \alpha} = 7,32 \frac{j_n}{mz}, \quad (6.2)$$

где $\Delta\varphi$ – кинематический мертвый ход, *мин*; j_n – боковой зазор, *мкм*; m – модуль зацепления, *мм*; z – число зубьев колеса.

Для передачи, состоящей из $2n$ зубчатых колес, закрепленных на $n+1$ валах, формула для нахождения *кинематической погрешности мертвого хода*, приведенной к выходному колесу, имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_1}{i_{1(n+1)}} + \frac{\Delta\varphi_3}{i_{2(n+1)}} + \dots + \frac{\Delta\varphi_{2n-3}}{i_{(n-1)(n+1)}} + \frac{\Delta\varphi_{2n-1}}{i_{n(n+1)}}, \quad (6.3)$$

где $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_3, \dots, \Delta\varphi_{(2n-3)}, \Delta\varphi_{(2n-1)}$ – собственные кинематические погрешности пар зубчатых колес $z_1z_2, z_3z_4, \dots, z_{2n-3}z_{2n-2}$ и $z_{2n-1}z_{2n}$, отнесенные к ведущим колесам (шестерням) и определяемые по формуле (5.2); $i_{1(n+1)}, i_{2(n+1)}, \dots, i_{(n-1)(n+1)}, i_{n(n+1)}$ – передаточные отношения соответственно между 1, 2, ..., $n-1$, n -м и последним $(n+1)$ -м валом.

Кинематическая погрешность рассчитывается для нереверсивной зубчатой передачи и состоит в определении разности между действительным и номинальным (расчетным) углами поворота ведомого колеса. Величина разности зависит от точности изготовления зубчатых колес, входящих в передачу, которая определяется значениями норм кинематической точности и плавности.

При расчете *кинематической погрешности* необходимо брать значение допуска F_i' на кинематическую погрешность зубчатых колес, входящих в передачу, который определяют как сумму допусков на накопленную погрешность шага F_p (таблица 6.4) и на погрешность профиля зуба f_f (таблица 6.5): $F_i' = F_p + f_f$. Тогда допуск на кинематическую погрешность $\delta\varphi_i$ в угловых минутах определится из выражения

$$\delta\varphi_i = \frac{2F_i' 180 \cdot 60}{mz 10^3 \pi} = 6,88 \frac{F_i'}{mz}. \quad (6.4)$$

Таблица 6.4 – Нормы кинематической точности цилиндрических зубчатых колес F_p , мкм ($0,1 \leq m < 1,0$)

Степень точности	Делительный диаметр, d , мм						
	до 12	св. 12 до 20	св. 20 до 32	св. 32 до 50	св. 50 до 80	св. 80 до 125	св. 125 до 200
5	10	11	12	14	16	19	22
6	16	17	19	22	25	30	36
7	22	24	27	30	35	42	50
8	32	34	38	44	50	60	70

Таблица 6.5 – Нормы плавности работы f_f цилиндрических зубчатых колес, мкм ($0,1 \leq m < 1,0$)

Модуль, m	Степень точности			
	5	6	7	8
Св. 0,1 до 0,5	5	7	9	11
Св. 0,5 до 1,0	6	8	10	13

При нахождении кинематической погрешности $\delta\varphi$ передачи кинематическую погрешность зубчатых колес, расположенных на одном валу, складывают и приводят к одному валу, обычно выходному.

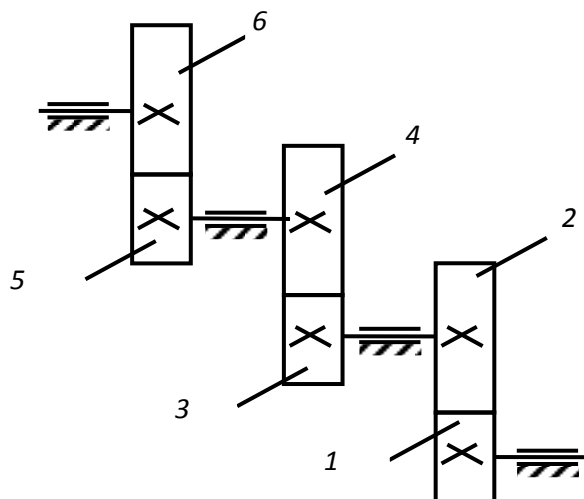


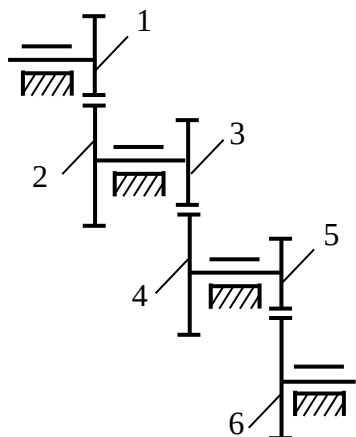
Рис.6.3

Порядок определения кинематической погрешности, приведенной к выходному валу, рассмотрим на примере зубчатой передачи, представленной на рис. 6.3. Пусть ведущее колесо 1 имеет погрешность $\delta\varphi_1$. Тогда эта погрешность вызовет дополнительный поворот колеса 2 на угол $\delta\varphi_1/i_{12}$. Если колесо 2 имеет собственную погрешность $\delta\varphi_2$, то эта погрешность

прибавится к погрешности $\delta\varphi_1/i_{12}$ и дополнительный поворот колеса 2 составит $\delta\varphi_1/i_{12} + \delta\varphi_2$. Погрешность на третьем колесе будет равна этой же сумме погрешностей плюс собственная погрешность $\delta\varphi_3$ колеса 3, т.е. $\delta\varphi_1/i_{12} + \delta\varphi_2 + \delta\varphi_3$. Аналогично рассуждая, получим выражение для погрешности на колесе 5, состоящей из суммы приведенных к колесу 4 погрешностей колес 1, 2, 3 и собственных погрешностей колес 4 ($\delta\varphi_4$) и 5 ($\delta\varphi_5$): $(\delta\varphi_1/i_{12} + \delta\varphi_2 + \delta\varphi_3)/i_{34} + \delta\varphi_4 + \delta\varphi_5$.

Для всего механизма кинематическая погрешность, приведенная к выходному колесу 6, определится выражением

$$\delta\varphi = ((\delta\varphi_1/i_{12} + \delta\varphi_2 + \delta\varphi_3)/i_{34} + \delta\varphi_4 + \delta\varphi_5)/i_{56} + \delta\varphi_6, \quad (6.5)$$



6.11 Для трехступенчатой прямозубой передачи (см. рисунок) рассчитать наименьший возможный мертвый ход $\Delta\varphi_{пл}$, приведенный к шестерне 1, обусловленный боковыми зазорами в зацеплениях, если передаточные отношения $i_{1-2} = 5,1$; $i_{3-4} = 4,2$; $i_{5-6} = 3,5$. Модули всех колес $m = 0,6$

мм, числа зубьев шестерен равны 20, угол зацепления $\alpha = 20^0$, а наименьшие боковые зазоры в зацеплениях равны: $j_{n \min 1-2} = j_{n \min 3-4} = 16 \text{ мкм}$, $j_{n \min 5-6} = 13 \text{ мкм}$.

Ответ: $\Delta\varphi_{п1} = 3^0 49' 24''$.

6.12 Для зубчатой передачи в предыдущей задаче рассчитать наименьший возможный мертвый ход $\Delta\varphi_{п6}$, приведенный к колесу 6.

Ответ: $\Delta\varphi_{п6} = 3^0 15''$.

6.13 Определить величину приведенного к выходному колесу 6 максимального мертвого хода $\Delta\varphi_{п6}$ передачи, состоящей из трех пар цилиндрических зубчатых колес с эвольвентным профилем зубьев (угол зацепления $\alpha = 20^0$), если известно, что $z_1 = z_3 = 20$, $z_2 = 60$, $z_4 = 80$, $z_5 = 30$ и $z_6 = 90$. Модули сопряженных пар соответственно равны $m_{1-2} = 0,4 \text{ мм}$, $m_{3-4} = 0,5 \text{ мм}$, $m_{5-6} = 0,8 \text{ мм}$. Значения максимальных боковых зазоров равны: $j_{n \max 1-2} = 60 \text{ мкм}$, $j_{n \max 3-4} = 48 \text{ мкм}$, $j_{n \max 5-6} = 30 \text{ мкм}$.

Ответ: $\Delta\varphi_{п6} = 7^0 31''$.

6.14 Для зубчатой передачи задачи 6.13 определить приведенную к выходному колесу 6 кинематическую погрешность $\delta\varphi_{п6}$. Точность изготовления зубчатых колес принять раной 8. Значения норм плавности и норм кинематической точности зубчатых колес взять из таблиц 6.4 и 6.5.

Ответ: $19^0 25''$.

Литература

- 1 Артоболевский И.И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И.И. Артоболевский, Б.В. Эдельштейн. – М.: Наука, 1975.
- 2 Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1966.
- 3 Вышинский Н.В. Сборник задач по курсу «Механика» / Н.В. Вышинский, С.А. Журавель. – Минск: БГУИР, 1994.
- 4 Красковский Е.Я. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем / Е.Я. Красковский, Ю.А. Дружинин, Е.М. Филатов. – М.: Высшая школа, 1991.
- 5 Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986.
- 6 Соколовская В.П. Механика. Практикум по решению задач / В.П. Соколовская. – Минск: ООО «Новое знание», 2006.

Содержание

Раздел 1	Статика твердого тела.	1
	Определение реакций в опорах при действии на механическую систему плоской системы тел	1
Раздел 2	Деформация растяжения и сжатия	9
Раздел 3	Сдвиг и кручение	18
Раздел 4	Деформация изгиба	28
Раздел 5	Кинематическое исследование зубчатых передач	36
Раздел 6	Точность механизмов	49
	6.1 Допуски и посадки	49
	6.2 Точность зубчатых передач	56
	Литература	60